Módulo de Matemáticas Académicas II

Nivel II de ESPAD

Unidad 7
Funciones y sucesiones

Este documento ha sido realizado por la profesora Carmen de la Fuente para el alumnado que cursa el Ámbito Científico Tecnológico (en la modalidad "enseñanzas académicas") del nivel II de Educación Secundaria para Personas Adultas, concretando y desarrollando el currículo establecido para la obtención del título de Graduado en Educación Secundaria Obligatoria por personas adultas en la **Comunidad de Madrid** (BOCM de 16 de mayo de 2017).

La autora del documento agradece al equipo de Matemáticas de **Marea Verde** por compartir los archivos de sus apuntes. Para la elaboración de este documento se han utilizado partes de los siguientes capítulos de los textos elaborados por el equipo de Matemáticas de **Marea Verde** **(www.apuntesmareaverde.org.es):**

6. Funciones y gráficas. (4ºA ESO). Autores: José Gallegos y David Miranda

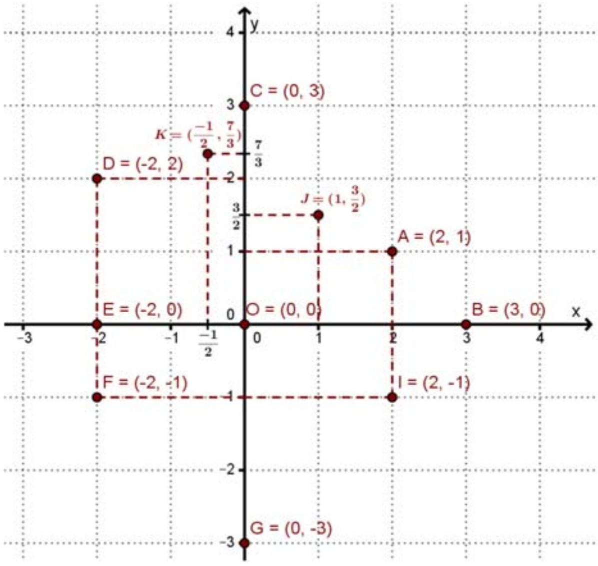
10. Funciones y gráficas (4ºB ESO). Autores: Andrés García y Javier Sánchez.

11 Funciones polinómicas, definidas a trozos y de proporcionalidad inversa (4ºB ESO). Autor: David Miranda Suárez

ÍNDICE

1. GRÁFICAS EN UN SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO

Un **sistema de referencia cartesiano** está formado por dos ejes perpendiculares entre sí llamados **ejes de coordenadas**: el eje horizontal recibe el nombre de **eje de abscisas** o eje X, y el eje vertical se llama **eje de ordenadas** o eje Y. El punto de corte de ambos ejes es el **origen de coordenadas** O. Para dar la posición de un punto en el plano necesitamos además de los ejes de coordenadas una **unidad de medida** en cada eje, con lo que cada uno de los ejes se convierte en una recta numérica en la que pueden representarse todos los números reales (El nombre cartesiano viene de *Cartesio*, que era el nombre con el que firmaba su inventor, *Renè Descartes*)



Las **coordenadas** de un **punto** son un par ordenado de números reales **(*x*, *y*)**, siendo ***x*** el número real que se lee en el eje X al realizar la proyección vertical del punto sobre este eje e ***y*** el número real que se lee en el Y al realizar la proyección horizontal del punto sobre este eje. La primera coordenada del punto, ***x***, recibe el nombre de **abscisa** y la segunda coordenada, ***y***, recibe el nombre de **ordenada**.

Observa que el orden en el que se dan las coordenadas es esencial para definir el punto y que, por ejemplo, son puntos distintos (0,3) y (3,0).

Las coordenadas del origen O son (0,0).

Los puntos que están en el eje Y tienen su abscisa cero. Los puntos que están a la derecha del eje Y tienen su abscisa positiva y los que están a la izquierda tienen su abscisa negativa.

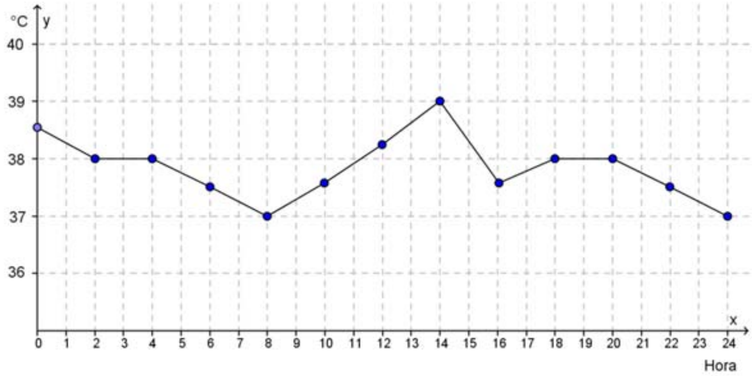
Los puntos que están en el eje X tienen su ordenada cero. Los puntos que están por encima del eje X tienen su ordenada positiva y los que están por debajo tienen su ordenada negativa.

Algunos tipos de información se pueden representar en un sistema de referencia cartesiano en el que los ejes X e Y tienen un significado concreto.

Ejemplo:

La gráfica de la derecha representa la temperatura de un enfermo, tomada cada dos horas de un día.

En la gráfica podemos ver los valores de la temperatura (y) en función de la hora (x) para contestar las siguientes preguntas:



¿Qué temperatura tenía a las 18:00? 38°

¿Cuál fue la máxima temperatura que tuvo en el día? 39°

¿A qué hora alcanzó la temperatura máxima? A las 14:00

¿Cuál fue la temperatura mínima que tuvo en el día? 37°

¿A qué hora alcanzó la temperatura mínima? A las 8:00 y a las 24:00

2. FUNCIONES REALES

2.1. Concepto de función

Utilizamos funciones para describir la relación de dependencia entre dos magnitudes. Decimos que una magnitud Y es función de otra magnitud X, cuando fijado un valor de la magnitud X podemos hallar, con arreglo al criterio que se establezca en la definición de la función, el valor correspondiente de la magnitud Y, y este valor es único. Así, por ejemplo, decimos que el precio de un viaje en taxi es función de los kilómetros recorridos o que la longitud de cualquier circunferencia es función de su radio. La variable que se fija previamente recibe el nombre de ***variable independiente***, y la variable que se deduce de la anterior se llama ***variable dependiente***.

Una ***función*** es una relación o correspondencia entre dos magnitudes, tales que a cada valor de la variable independiente, x, le corresponde ***un solo*** valor de la variable dependiente, y.

Para indicar que la variable y depende o es función de otra, x, se usa la notación $\mathbf{y = f(x)}$, que se lee *"y es función de x"*. En la expresión anterior, **f** es el nombre que le ponemos a la **función**, (podríamos llamarla usando otras letras, las que se usan más frecuentemente son *"f"*, *"g"* y *"h"*). También pueden usarse otras letras para las variables independiente y dependiente, pero las más utilizadas en matemáticas son x para la variable independiente e y para la variable dependiente.

Es MUY IMPORTANTE que tengamos un solo valor de y (variable dependiente) para cada valor de x (variable independiente). En caso contrario no tenemos una función.

Ejemplos:

- *Pensemos en el precio de una llamada telefónica. Si sabemos cuántos minutos hemos hablado también sabemos cuánto nos toca pagar. El dinero que pagamos es función del tiempo.*
- *Vamos al casino y apostamos a rojo o negro. Si apostamos un euro, podemos ganar dos o no ganar nada. Si decimos cuánto apostamos no sabemos cuánto vamos a ganar. Por tanto, las ganancias en un casino NO son una función de la apuesta.*

Para determinar completamente una función es necesario conocer:

- El ***conjunto inicial***, donde toma valores la variable independiente.
- El ***conjunto final***, donde toma valores la variable dependiente.
- La **regla** que permite asociar a cada elemento del conjunto inicial su correspondiente en el conjunto final, que llamamos ***imagen*** del primero, generalmente definida con un fórmula algebraica o una tabla de valores.

Ejemplo:

- Un kilo de tomates cuesta 0,8 €/kg. La función que establece cuánto debemos pagar en función de la cantidad de tomates que nos llevamos es $\mathrm{y = f(x) = 0{,}8\ x}$.

  La variable x representa el número de kilos que compramos, es la *variable independiente* puesto que nosotros elegimos la cantidad de tomates que queremos. La variable y representa el precio que debemos pagar, es la *variable dependiente* puesto que "depende" de cuántos kilos nos llevamos, es decir, de x. La expresión, $\mathrm{f(x)}$, que se lee "*f* de *x*", se usa con frecuencia para designar a la variable dependiente, en lugar de usar la letra y, para indicar la imagen de un valor concreto de la variable independiente, por ejemplo, para expresar el coste de 5 kg de tomates, escribimos $\mathrm{f(5)}$ "*f* de 5" y calculamos su valor sustituyendo x por 5: $\mathrm{f(5) = 0{,}8 \cdot 5 = 4}$ €.

Las funciones son como máquinas a las que se les mete un valor, x, y devuelve otro valor, $y = f(x)$. Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2$, se introduce un valor de x, y nos devuelve su cuadrado.

Actividades resueltas

Dada la función f *de* R *en* R*, definida por* $f(x) = x^2 - 9$

- Calcular las siguientes imágenes: f(0) y f(-5)

  $f(0) = 0^2 - 9 = -9$ (-9 es la imagen de 0 por la función f)

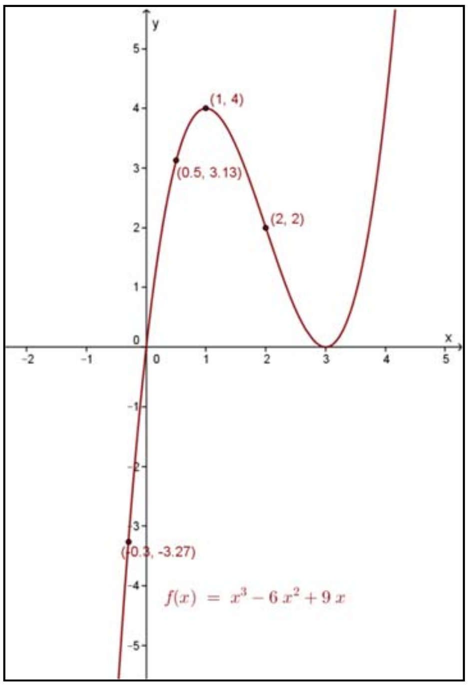
  $f(-5) = (-5)^2 - 9 = 25 - 9 = 16$ (16 es la imagen de -5 por la función f)

- Hallar los valores de x que tienen imagen 0

  $f(x) = x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -3 \quad$ o $\quad x = 3$ ($f(-3) = f(3) = 0$)

2.2. Gráfica de una función

Para apreciar el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente en un sistema de referencia cartesiano. La gráfica de una función y=f(x) está formada por todos los puntos del plano cartesiano (x, y) que verifican la relación $y = f(x)$.



Ejemplo:

La gráfica de la función definida analíticamente por la fórmula $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ que puedes ver a la derecha se ha hecho con el programa Geogebra (software libre)

En cualquier punto de la gráfica se verifica que la ordenada es la imagen de la abscisa por la función. Por ejemplo, el punto de abscisa $x = 1$ tiene ordenada $y = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$

Solamente está dibujada la parte central de la gráfica que entra en el trozo de plano cartesiano utilizado para la representación. Por ejemplo, el punto de la gráfica de abscisa $x = -1$ no entra en el espacio reservado porque tiene la ordenada muy abajo, $y = f(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1) = -16$; el punto de abscisa $x = 5$ tampoco se ve porque su ordenada está muy arriba, $y = f(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 = 20$

2.3. Descripción del comportamiento de una función

Para describir las variaciones de una función tenemos que mirar su gráfica de izquierda a derecha y ver como varía la variable dependiente, y, cuando la variable independiente, x, aumenta.

Siguiendo con el ejemplo anterior, describimos el comportamiento que vemos en la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ de la siguiente manera:

En el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es **creciente** porque al aumentar el valor de x aumenta el valor de y.

En el intervalo $(1, 3)$ f(x) es **decreciente** porque al aumentar el valor de x disminuye el valor de y.

En el intervalo $(3,+\infty)$ la función vuelve a ser creciente.

En el punto de abscisa x=1, donde pasa de ser creciente a decreciente, la función alcanza un **máximo relativo** (la ordenada de este punto es mayor que la ordenada de los puntos que lo rodean).

En el punto de abscisa x=3, donde pasa de ser decreciente a creciente, la función alcanza un **mínimo relativo** (la ordenada de este punto es menor que la ordenada de los puntos que lo rodean).

2.4. Dominio y recorrido de una función

El **dominio** de una función o **campo de existencia** es el conjunto de valores que la variable independiente puede tomar. Se escribe *Dom f* o *Dom*(*f*).

El **recorrido, rango** o **conjunto imagen** de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente. Se escribe con diversas notaciones: *Rgf* , *Rg*(*f*), *Im f* o *Im(f)*.

En general, existen dos razones por las que un valor de x NO pertenezca al dominio de una función:

1. La función no tiene sentido para esos valores. Por ejemplo, si tenemos una función que represente el consumo de electricidad a cada hora de un día, es evidente que x debe estar entre 0 y 24.
2. La operación que nos da $f(x)$ no puede hacerse. Por ejemplo, no es posible dividir entre 0 o calcular raíces cuadradas o de índice par de números negativos.

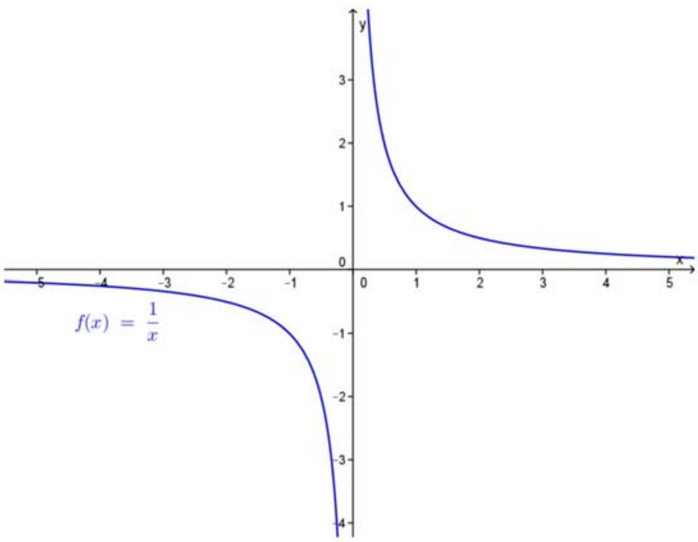
Ejemplos:

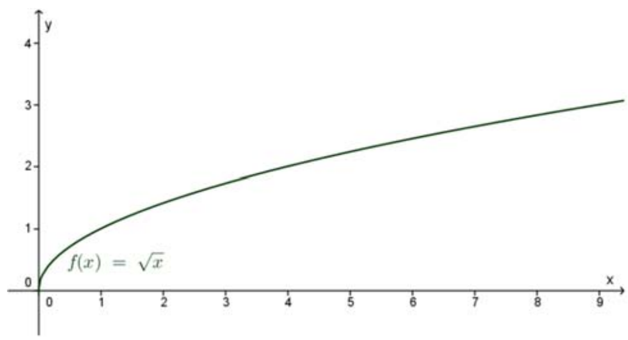
El dominio de cualquier función cuya expresión analítica sea un polinomio es $\Re = (-\infty,+\infty)$

La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tiene como dominio el conjunto $\{x \in \Re ; x \neq 0\}$, es decir $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

El recorrido de esta función es el conjunto $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, como puede verse en la gráfica.

La función $f(x)=\sqrt{x}$ tiene como dominio y como recorrido el conjunto $[0,+\infty)$.





En los siguientes apartados se estudian dos tipos de funciones polinómicas que debes conocer y saber representar bien, las funciones polinómicas de primer grado, con gráficas que son líneas rectas, y las de segundo grado, con gráficas que se llaman parábolas.

3. FUNCIONES POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO

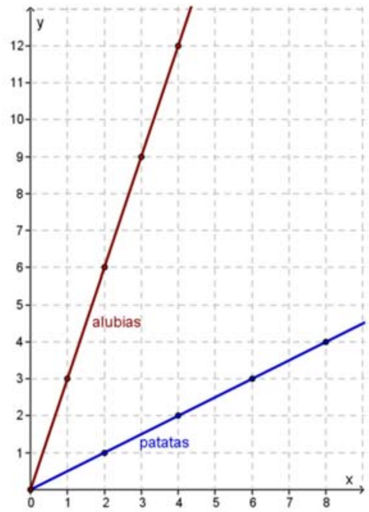
3.1. Función lineal. Rectas de la forma $y = m \cdot x$

Recuerda que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al multiplicar a la primera por un número, la segunda queda multiplicada por el mismo número, de forma que el cociente de cualquiera de los valores de una variable y los correspondientes de la otra es una constante que recibe el nombre de **razón de proporcionalidad directa**.

Las funciones en las que las dos variables son directamente proporcionales se llaman funciones lineales y tienen una expresión algebraica de la forma $y = m \cdot x$, donde m es la razón de proporcionalidad. Las funciones lineales se representan mediante rectas que pasan por el origen de coordenadas.

Ejemplos:

Cada una de las dos rectas dibujadas en el mismo sistema de referencia cartesiano representa el coste (€) de un producto en función de la cantidad comprada (kg). La variable independiente x (cantidad) y la variable dependiente y (coste) son directamente proporcionales.



x (kg)	1	2	3	4
y (€)	3	6	9	12

La expresión algebraica de la función coste para las alubias, cuyo precio es 3€/kg es **$y = f(x) = 3x$**

x (kg)	2	4	6	8
y (€)	1	2	3	4

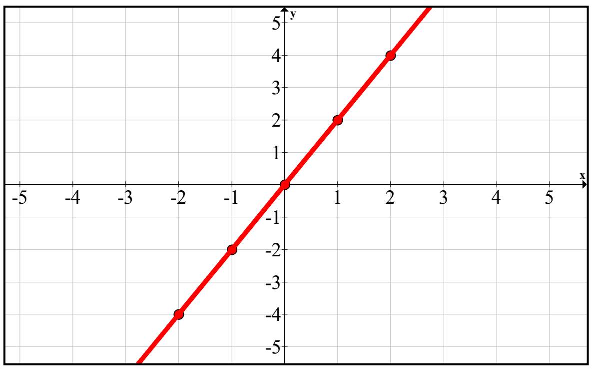
La expresión algebraica de la función coste para las patatas, cuyo precio es 0,5 €/kg es **$y = g(x) = 0,5x$**

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado de la forma $y = m \cdot x$. Su representación en el plano cartesiano es una recta que pasa por el origen. El coeficiente m se llama **pendiente** de la recta y es una medida de su inclinación. Si m es un número positivo la función es creciente y si es negativo es decreciente.

Actividades resueltas

- *Representa la función lineal* $f(x) = 2 \cdot x$.

  Para ello, hay que construir una tabla de valores y representar los puntos. La recta es la consecuencia de unir los puntos.



x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–2	0	2	4

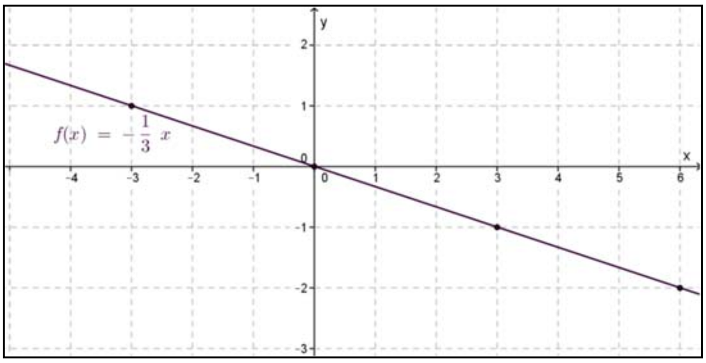
Para obtener cada uno de los puntos de la tabla se da el valor que se quiera a la variable independiente x y se calcula su imagen y haciendo el producto indicando en la expresión algebraica de la función: $f(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$, $f(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, etc.

¿Pertenece a la recta el punto $(10, 20)$? Sí, porque sustituyendo x por 10 e y por 20 en la ecuación de la recta se verifica la igualdad: $20 = 2 \cdot 10$

➢ *Representa la recta* $y = -\frac{1}{3}x$

x	-3	0	3	6
y	1	0	-1	-2

¿Pertenece a la recta el punto (10, -3)*?* No, porque sustituyendo x por 10 e y por -3 en la ecuación de la recta no se verifica la igualdad: $-3 \neq -\frac{1}{3} \cdot 10$



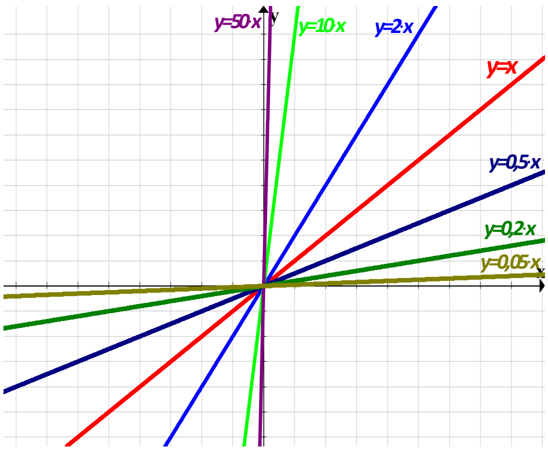
Actividades propuestas

1. Representa las siguientes funciones lineales: (a) $y = 4 \cdot x$ (b) $y = -5x$ (c) $y = 0{,}5\,x$

   Indica a cuál de las rectas anteriores pertenece cada punto: P(12, 6), Q(15, 60), R(9, -45)

3.2. Relación entre la pendiente y el crecimiento o decrecimiento

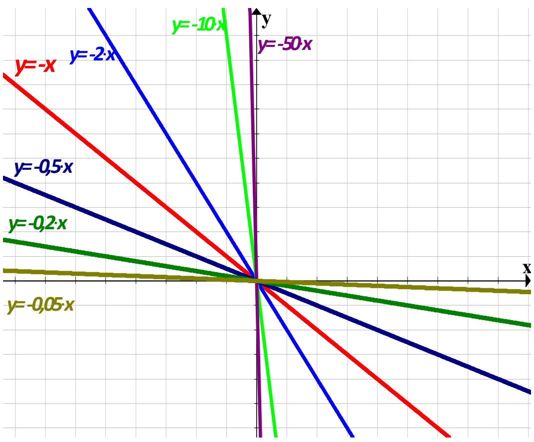
En las funciones de proporcionalidad directa, la pendiente es la razón de proporcionalidad entre la variable dependiente y la variable independiente. La pendiente de una recta mide su inclinación respecto al eje de abscisas, o lo que es lo mismo, la rapidez o lentitud con la crece o decrece la función.



Observa en el siguiente gráfico cómo varía la recta según vamos aumentando o disminuyendo la pendiente. Todas la rectas tienen pendiente positiva y son funciones crecientes (al aumentar el valor de x aumenta también el valor de y)

Al aumentar el valor de m aumenta la inclinación, el ángulo que la recta forma con el eje de abscisas, y la recta se aproxima cada vez más a la vertical. Si disminuye m, entonces disminuye la inclinación, la recta se aproxima cada vez más a la horizontal.

El valor de la pendiente m indica cuánto aumenta el valor de la ordenada y al aumentar una unidad el valor de la abscisa x, o dicho de otra forma, las unidades que subimos por cada unidad que avanzamos hacia la derecha (desplazándonos por la recta).



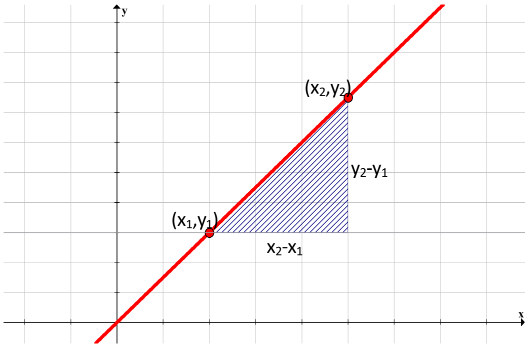
Ahora observa lo que ocurre cuando la pendiente m toma valores negativos. Todas las rectas con pendiente negativa son funciones decrecientes (al aumentar el valor de x disminuye el valor de y)

Cuanto mayor es el valor absoluto de la pendiente mayor es la inclinación de la recta (como las pendientes son negativas, el valor absoluto es mayor cuanto menor es el número).

El valor de la pendiente m indica las unidades que bajamos (disminuye y) por cada unidad que avanzamos hacia la derecha (desplazándonos por la recta).

3.3 Obtención de la pendiente de una recta a partir de dos puntos

Una manera de calcular la pendiente de una recta a partir de su gráfica es dividiendo la variación de la variable y entre la variación de la variable x entre dos cualesquiera de sus puntos:

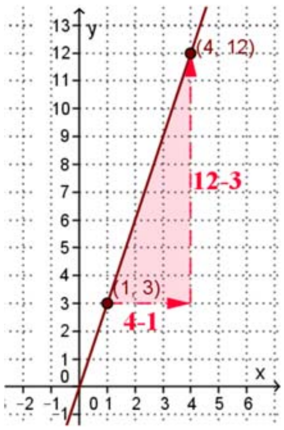


Dados dos puntos cualesquiera de una recta (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Para calcular la pendiente de la recta representada a la derecha tomamos los puntos (1,3) y (4,12)



La variación de la variable dependiente y al pasar del primer punto al segundo es 12 – 3 = 9 (unidades que se sube al pasar del primer punto al segundo) y la variación de la variable dependiente x es 4 – 1 = 3 (unidades que se avanza hacia la derecha), entonces, la pendiente es

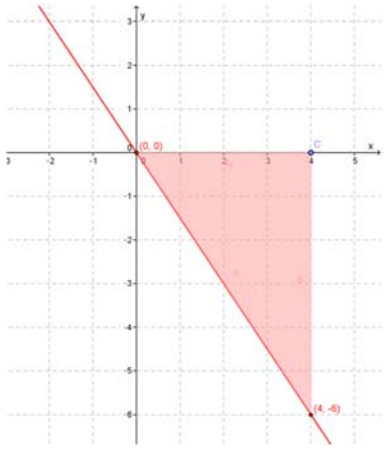
$$m = \frac{12-3}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

La expresión algebraica de la función lineal es $y = 3x$ (ecuación de la recta)

Podemos comprobar que otros puntos, como (2, 6) y (3,9) están en la recta porque verifican la ecuación (la ordenada es el triple de la abscisa)

Actividades resueltas

Calcula la pendiente y escribe la ecuación de la recta representada.



Tomamos dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, por ejemplo, el (0, 0) y el (4, -6).

Calculamos la pendiente: $m = \frac{(-6)-0}{4-0} = \frac{-6}{4} = -1{,}5$

Como la recta pasa por el origen de coordenadas es una función lineal y su ecuación es $y = -1{,}5\,x$

Podemos comprobar que las coordenadas de cualquier otro punto de la recta verifican la ecuación, por ejemplo el punto (-2, 3) de abscisa $x = -2$ y ordenada $y = 3$ es una solución de la ecuación: $3 = -1{,}5 \cdot (-2)$

Actividades propuestas

2. Representa y halla la expresión algebraica de la recta de cada apartado, sabiendo que pasa por el origen de coordenadas y por el punto que se indica:

   a) A (3, 2) b) B(2, -3) c) C(2, -5)

   ¿A cuál de las rectas anteriores pertenece cada uno de los puntos: P(10, -15) , Q(21, 14) y R(30, -75)?

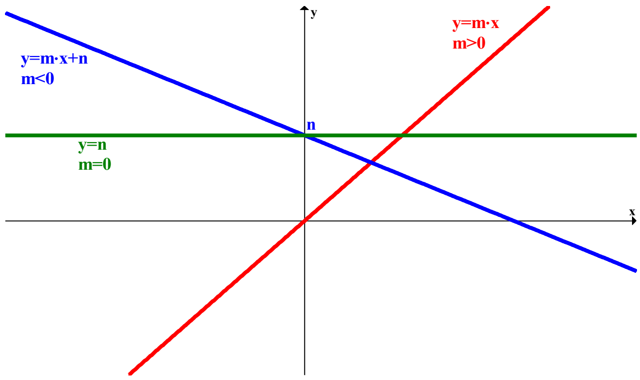
3.4. Función afín. Rectas de la forma $\mathbf{y = m \cdot x + n}$

Las funciones polinómicas de primer grado, o afines, se describen algebraicamente con una ecuación de la forma $\mathbf{y = m \cdot x + n}$ y sus gráficas son rectas que pasan por el punto $(0,n)$

Además de la **variable independiente** $\mathbf{x}$**,** la **variable dependiente** $\mathbf{y}$, y la **pendiente** $\mathbf{m}$, cuyo significado es el mismo que para las funciones lineales, se añade el valor $\mathbf{n}$ que recibe el nombre de **ordenada en el origen** porque es la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas. En el caso particular de que sea $n = 0$ la función es también lineal (tipo particular de función afín)

Como en las funciones lineales, el crecimiento o decrecimiento de una función afín viene determinado por el signo de la pendiente:

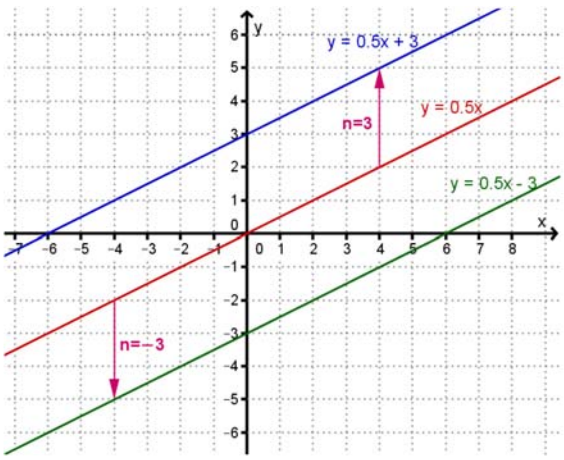
- Si $m > 0$, la función es **creciente**.
- Si $m < 0$, la función es **decreciente**.
- Si $m = 0$, la expresión de la función afín toma la forma particular $\mathbf{y} = \mathbf{n}$, en la que no aparece la variable independiente x, indicando que sea cual sea el valor de x la imagen y es siempre n. Este tipo de funciones, cuya gráfica es una recta horizontal que pasa por el punto $(0, n)$, se llaman **funciones constantes**.



Todas las rectas que tienen la misma pendiente son **rectas paralelas** entre sí

Ejemplo:

Comparemos la recta $y = 0{,}5\,x$ *con las rectas* $y = 0{,}5\,x + 3$ *e* $y = 0{,}5\,x - 3$



Las tres rectas tienen la misma pendiente o inclinación. En los tres casos es $m = 0{,}5$. Son rectas paralelas.

La diferencia entre las rectas está en el valor de n: la segunda recta (con $n = 3$) se obtiene desplazando todos los puntos de la primera recta (con $n = 0$) 3 unidades hacia arriba y la tercera recta (con $n = -3$) es el desplazamiento de la primera 3 unidades hacia abajo.

Actividades resueltas

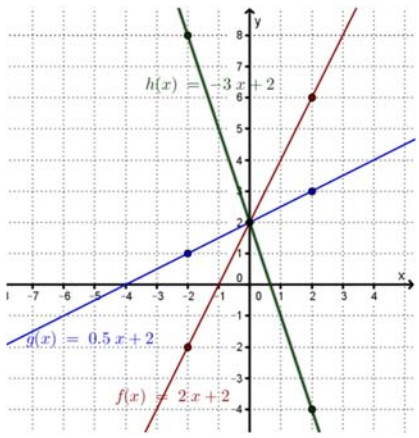
1. Representa en el mismo sistema de coordenadas cartesianas las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x+2$ *b)* $g(x) = 0{,}5x+2$ *c)* $h(x) = -3x+2$

x	-2	0	2
f(x)	-2	2	6
g(x)	1	2	3
h(x)	8	2	-4

Todas las gráficas son rectas que pasan por el punto $(0,2)$ porque en todas $n = 2$

¿A la gráfica de que función pertenece el punto $(20, 12)$? A $y=g(x)$ porque $g(20)=0{,}5\cdot 20+2=12$



2. El alquiler de una bicicleta cuesta 2€ de entrada más 0,5€ por cada hora. Escribe la expresión algebraica del coste en función del tiempo que se alquila la bicicleta y representa la función.

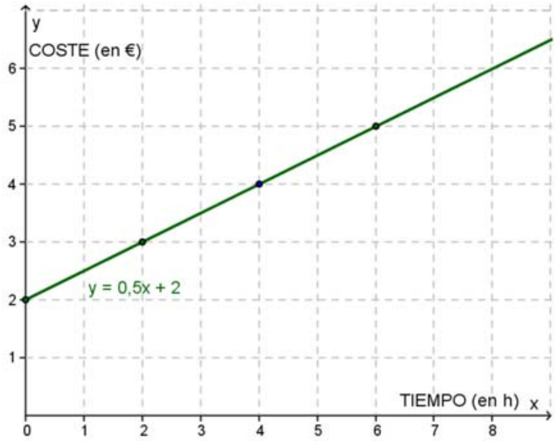
El enunciado dice que, una vez pagada la cantidad inicial de 2 €, el coste añadido es proporcional al tiempo que tenemos la bicicleta alquilada.

Hacemos una tabla de valores para situar algunos puntos de la recta en el sistema de referencia:

x (h)	0	2	4	6
y (€)	2	3	4	5

La expresión algebraica de la función es

$$y = 2 + 0{,}5\,x$$

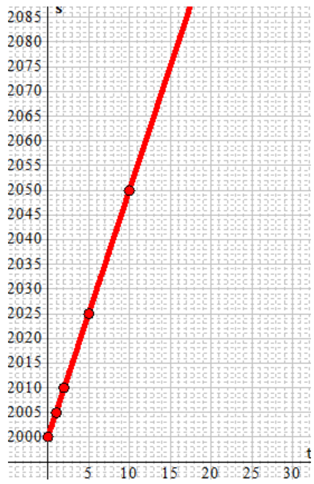


3.Representa la gráfica s-t del movimiento rectilíneo uniforme que lleva un ciclista que se ha trasladado 2 km antes de empezar el recorrido y se desplaza con una velocidad de 5 m/s.

La fórmula del MRU, con un espacio inicial, es $s = s_0 + v \cdot t$. En este caso: $s = 2000 + 5t$.

Construimos una tabla de valores y dibujamos la gráfica:

Tiempo (*t*)	0	1	2	5	10
Espacio (*s*)	2000	2005	2010	2025	2050



Observa que hemos tenido que adaptar los ejes para poder dibujar la gráfica.

La pendiente de la recta 5, es la velocidad (el espacio recorrido por cada unidad de tiempo).

Actividades propuestas

3. Representa las siguientes funciones afines y determina si alguna de las rectas pasa por le punto $P(50, -24)$:

   a. $y = 3 \cdot x + 4$ b. $y = 2x - 3$ c. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

   d. $y = 5$ e. $y = 0$ f. $y = -3$

3.5. Distintas formas de dar la ecuación de una recta

La ecuación de una recta en la forma $y = mx + n$ recibe el nombre de **ecuación explícita** de la recta

Otra forma de expresar la ecuación de una recta, de la que conocemos un punto (x_0, y_0) y su pendiente, m, es $y = y_0 + m(x - x_0)$, que recibe el nombre de **ecuación punto-pendiente**.

Cualquiera de las ecuaciones anteriores se puede transformar en una ecuación equivalente de la forma $ax + by = c$, que recibe el nombre de **ecuación general** de la recta.

Se pasa de la ecuación punto-pendiente a la ecuación explícita quitando paréntesis y simplificando. Sea cual sea el punto de la recta elegido para dar la ecuación punto-pendiente se obtiene una única ecuación explícita, que es la definición de la recta como función.

Actividades resueltas

Escribir, en forma punto pendiente, explícita y general, las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2,1) y cuyas pendientes son

a) $m=2$ *b)* $m = -\frac{1}{3}$

a) La ecuación punto-pendiente de la recta es

$$y = 1 + 2(x - 2)$$

Paso a la forma explícita: $y = 1 + 2x - 4$

$\Leftrightarrow y = 2x - 3$

Ecuación general: $2x - y = 3$

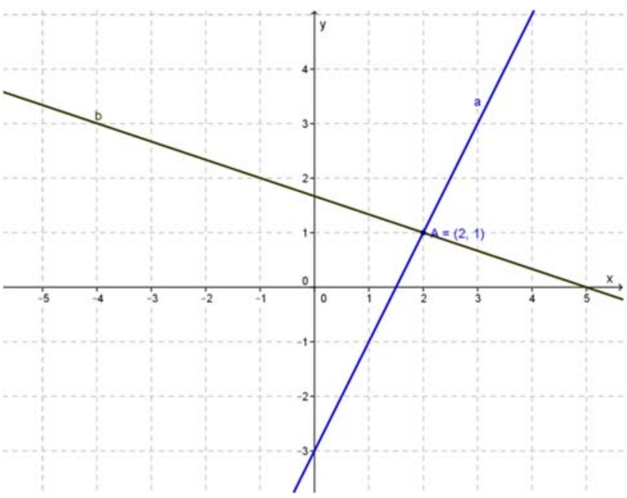
b) Ecuación punto-pendiente: $y = 1 - \frac{1}{3}(x - 2)$

Paso a la ecuación explícita: $y = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Paso a la forma general quitando denominadores:

$3y = -x + 5 \Leftrightarrow x + 3y = 5$



Para hallar la **ecuación de una recta que pasa por dos puntos** podemos calcular primero la pendiente y escribir después la ecuación punto-pendiente.

Si de una recta conocemos dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la pendiente de la recta se puede calcular dividiendo la variación de la ordenada entre la variación de la abscisa:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Actividades resueltas

Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-1,5) y B(7,3) *y escribirla en las tres formas (punto-pendiente, explícita y general)*

Calculamos la pendiente: $m = \frac{3-5}{7-(-1)} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

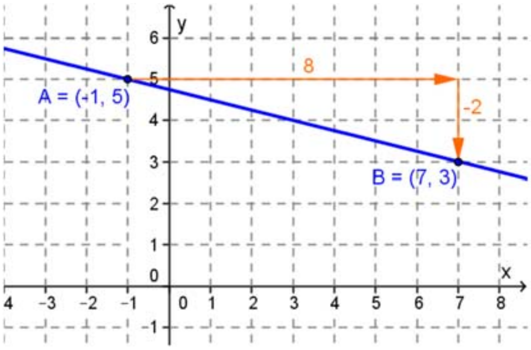
Ecuación punto-pendiente: $y = 5 - \frac{1}{4}(x+1)$

Quitamos paréntesis $y = 5 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ y simplificamos.

Ecuación explícita: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{19}{4}$

Quitamos denominadores: $4y = -x + 19$

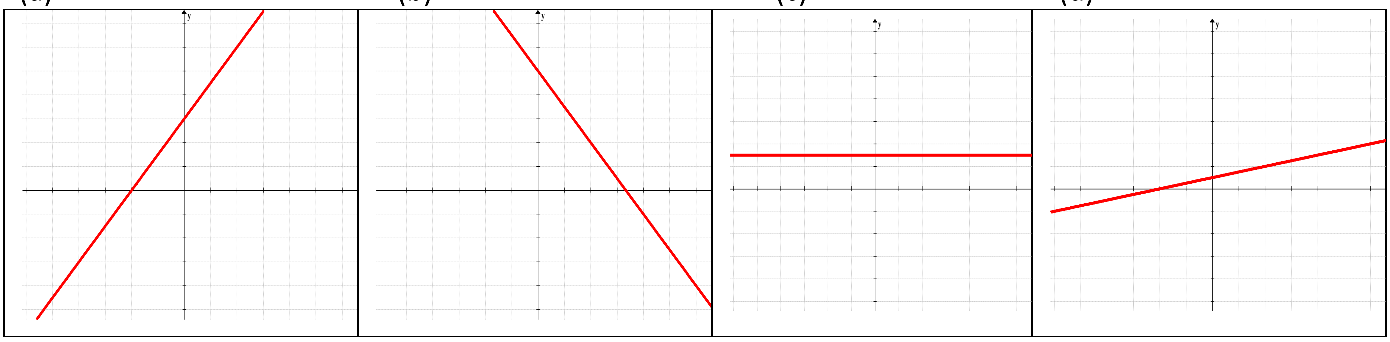
Ecuación general: $x+4y = 19$



Actividades propuestas

4. Halla la ecuación explícita de cada una de las siguientes rectas:

(a) (b) (c) (d)



Razona a cuál de las rectas anteriores pertenece cada uno de los puntos siguientes:

$P(-40, 65)$ $Q(-40, -9.5)$ $R(-40, -57)$ $S(-40, 1.5)$

3.6. Posiciones relativas entre rectas

Las posibles posiciones relativas entre dos rectas, en el plano, se definen con los siguientes términos:

- **Rectas secantes**, tienen un único punto en común. Las pendientes son distintas.
- **Rectas paralelas**, no tienen ningún punto en común. Las pendientes son iguales y las ordenadas en el origen distintas.
- **Rectas coincidentes**, tienen todos sus puntos comunes porque son la misma recta. Las pendientes y las ordenadas en el origen son iguales.

Para hallar las coordenadas del punto de corte de dos rectas se resuelve el sistema formado por sus ecuaciones. Si las rectas son secantes, el sistema es compatible determinado (la solución es el punto común a las dos rectas), si son paralelas distintas el sistema es incompatible (no tiene solución), y si son rectas coincidentes el sistema es compatible indeterminado (las dos ecuaciones son equivalentes y las infinitas soluciones del sistema son los puntos de la única recta que forma el sistema).

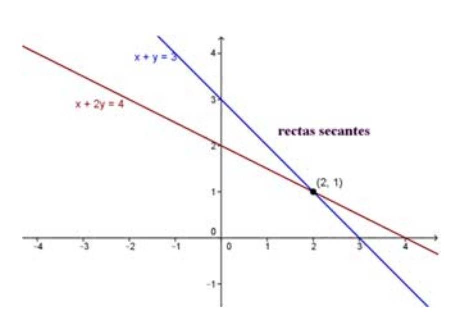
Actividades resueltas

Representa las rectas de cada sistema (pasando previamente cada ecuación a forma explícita), di si el sistema tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna, y da la posición relativa entre las dos rectas:

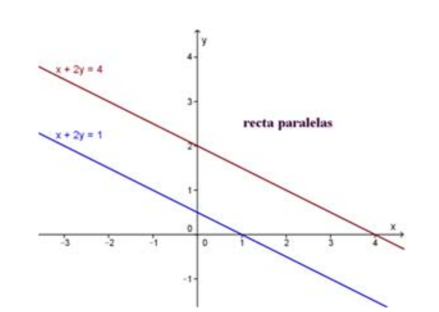
a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-x+3 \end{cases}$ La única solución es $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$. Son rectas secantes en el punto $(2,1)$

b) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases}$ Ninguna solución. Son rectas paralelas

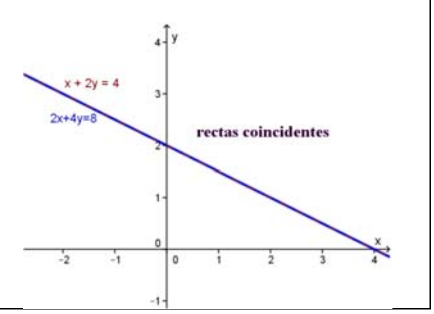
c) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases}$ Infinitas soluciones. Son rectas coincidentes



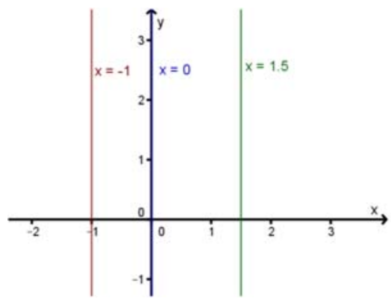
a)



b)

c)


3.7. Rectas que no son funciones



Las **rectas verticales**, paralelas al eje y no son funciones, ya que a un único valor de x le corresponden infinitos valores de y.

Las ecuaciones de estas rectas verticales son de la forma $\mathbf{x = k}$ (el valor de la abscisa de todos los puntos de la recta es k)

4. FUNCIONES POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO

Las funciones polinómicas de segundo grado, también llamadas **funciones cuadráticas** son aquellas que tienen como expresión algebraica un polinomio de segundo grado, es decir, su expresión es de la forma

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$

La gráfica de una función polinómica de segundo grado es una curva llamada **parábola.**

Parábola de ecuación $y = a \cdot x^2$

Se han representado en el mismo sistema cartesiano de coordenadas las gráficas de la función $y = x^2$ (a=1) y de la función $y = -x^2$ (a= −1)

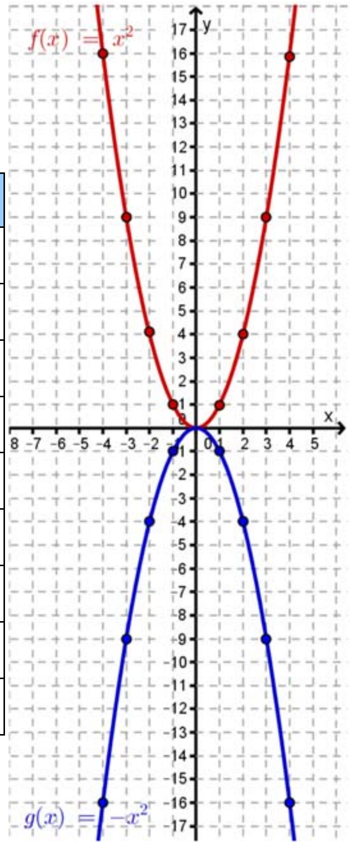
Para dibujar las gráficas de estas funciones construimos una tabla de valores y representamos los puntos en el plano cartesiano.

Observa que ambas funciones tienen la propiedad de que valores opuestos de x tienen la misma imagen, por esta razón las gráficas son **simétricas respecto al eje y**: todo punto de la parábola tiene su punto simétrico también en la parábola (el punto que está a la misma distancia del eje de simetría y)

El único punto de la parábola que está en el eje de simetría (es el simétrico de sí mismo) recibe el nombre de **vértice** de la parábola.

x	**y=x²**
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

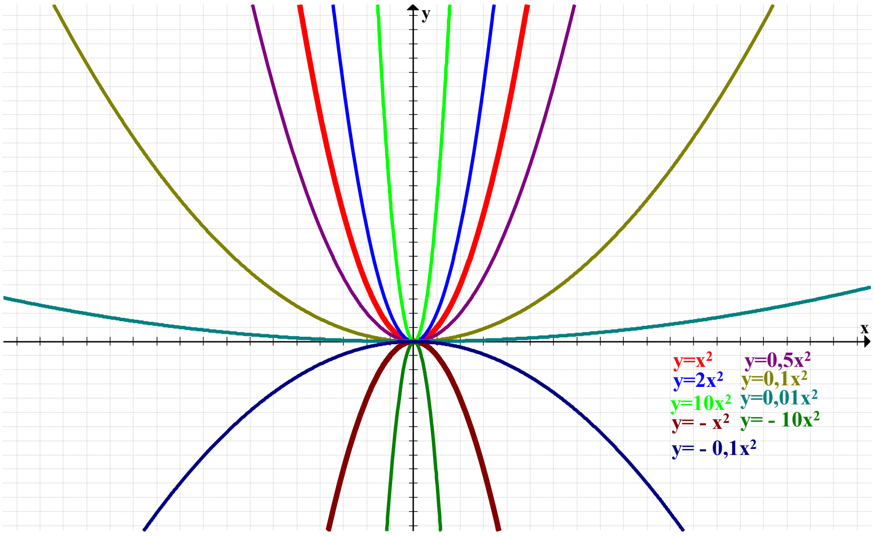
x	**y= -x²**
-4	-16
-3	-9
-2	-4
-1	-1
0	0
1	-1
2	-4
3	-9
4	-16



En las tablas y en las gráficas se pueden observar algunas características de estas funciones:

	y=x²	**y=−x²**
DOMINIO	$\mathrm{Dom}\, f(x) = \Re = (-\infty, +\infty)$	
RECORRIDO	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0]$
CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO	decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, +\infty)$	creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, decreciente en $(0, +\infty)$
EXTREMOS	**Mínimo** relativo y absoluto en $(0,0)$	**Máximo** relativo y absoluto en $(0,0)$

- Representando en el mismo sistema de coordenadas varias parábolas con distintos valores del coeficiente a, vemos que cuanto mayor es el valor absoluto de a más estrecha es la parábola, mientras que al disminuir el valor absoluto de a, la parábola se va ensanchando.



En general, las parábolas cuya expresión algebraica es $y = a \cdot x^2$, tienen las siguientes características:

- El dominio son todos los números reales.
- Si $a > 0$, la parábola está abierta hacia arriba, el recorrido es $[0, +\infty)$ y tiene un **mínimo absoluto** en el punto $(0, 0)$
- Si $a < 0$, la parábola está abierta hacia abajo y tiene un **máximo absoluto** en el punto $(0, 0)$
- El vértice de la parábola es el punto $(0, 0)$
- Son funciones simétricas respecto al eje y porque números opuestos tienen la misma imagen ($a(-x)^2 = a x^2$). Si una función verifica que $f(-x) = f(x)$ se dice que es una **función par**

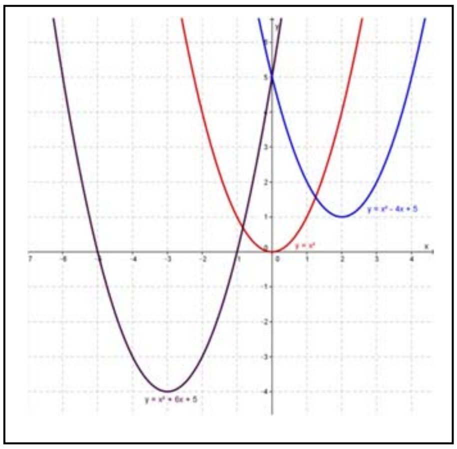
Actividades propuestas

5. Dibuja la gráfica de las siguientes parábolas en el mismo sistema de coordenadas:

a) $y = \frac{3}{4}x^2$	b) $y = \frac{5}{4}x^2$	c) $y = \frac{1}{2}x^2$
d) $y = -0{,}5x^2$	e) $y = -1{,}25x^2$	f) $y = -0{,}75x^2$

Parábola de ecuación $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con el mismo aspecto que la de ecuación $y = a x^2$, pero con el vértice desplazado a otro punto del plano distinto del $(0, 0)$.



Para representar bien una parábola hay que situar en primer lugar el eje de simetría y el vértice, después los puntos de corte de la parábola con los ejes cartesianos y por último completar con algunos puntos obtenidos con una tabla de valores.

EJE DE SIMETRÍA DE LA PARÁBOLA: La recta vertical de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$

VÉRTICE: Es un punto del eje de simetría de la parábola, por lo que tiene abscisa $x=\frac{-b}{2a}$ y por ordenada la imagen, y, que se obtiene al sustituir $x=\frac{-b}{2a}$ en la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$

· Si $a>0$ la parábola está abierta hacia arriba y en el vértice está el **mínimo absoluto** de la función.

· Si $a<0$ la parábola está abierta hacia abajo y en el vértice está el **máximo absoluto** de la función.

PUNTO DE CORTE CON EL EJE DE ORDENADAS:

Es el punto donde la parábola corta al eje y, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $x = 0$.

Cuando $x=0$, la parábola toma el valor c, luego el punto de corte es el punto $(0,c)$.

PUNTOS DE CORTE CON EL EJE DE ABSCISAS:

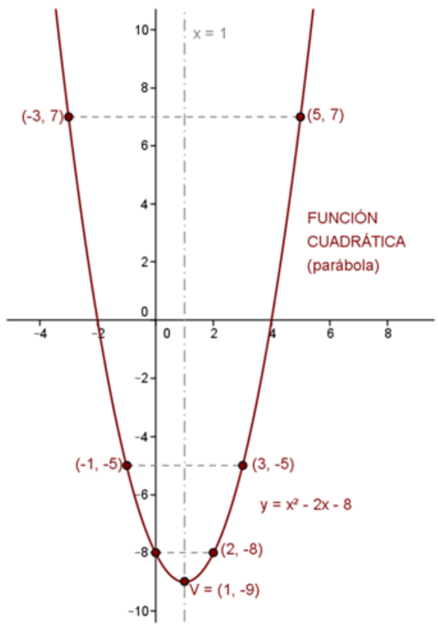
Son los puntos donde la parábola corta al eje x, es decir, es la intersección de la parábola con la recta $y=0$. Para calcularlos, se resuelve la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$.

(Pueden ser dos puntos, uno o ninguno, según el número de soluciones de la ecuación)

Actividades resueltas

Representar la función cuadrática

$y=f(x)=x^2-2x-8$ $\quad a=1\ b=-2\ c=-8$



- Hallamos el **eje de simetría**: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2\cdot 1}=1$

  El eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x=1$

- El **vértice** está en el eje de simetría, por lo que su abscisa es $x=1$ y la ordenada se calcula hallando la imagen de la abscisa.

  $f(1)=1^2-2\cdot 1-8=-9$

  El vértice es el punto $V(1,-9)$ y es el punto más bajo (mínimo) porque $a>0$

- El **punto de corte con el eje de ordenadas** ($x=0$) es $(0,-8)$

- Los **puntos de corte con el eje de abscisas** ($y=0$)se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-2x-8=0$:

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1.(-8)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}-2\\ 4\end{cases}$$

La parábola corta al eje X en dos puntos: $(-2,0)$ y $(4,0)$, ambos a la misma distancia del eje de simetría.

- Representamos algunos puntos más a partir de una adecuada tabla de valores y aprovechamos la simetría con respecto al eje.

x	3	5
y	-5	7

- El **recorrido** o **conjunto imagen**, como puede verse en la gráfica es el intervalo $[-9,+\infty)$

Representar la parábola $y = -2x^2 - 12x - 10$

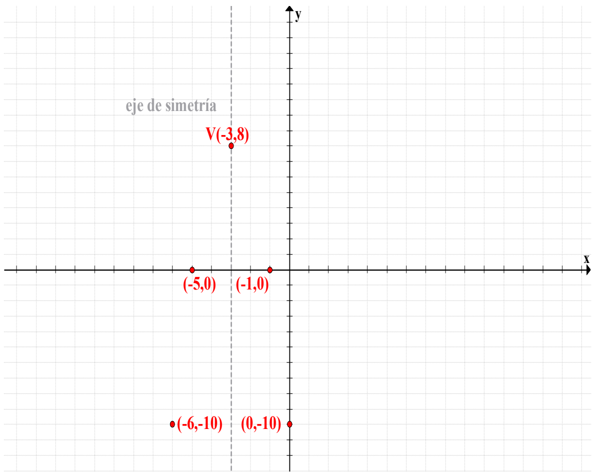
- **Eje de simetría**: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2\cdot(-2)} = \frac{12}{-4} = -3$. El eje de simetría es la recta vertical $x = -3$.

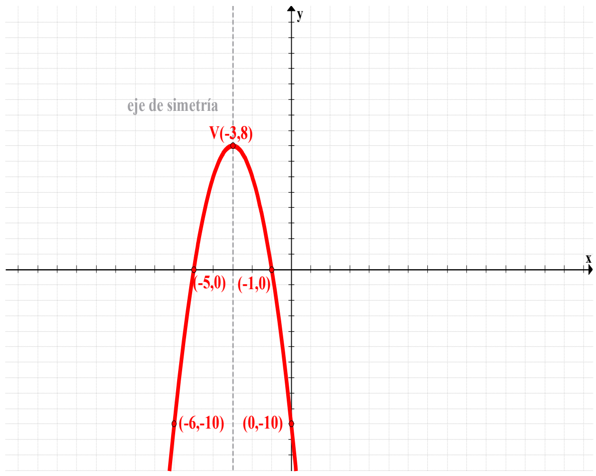
- **Vértice**: $\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{12}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-12}{4} = -3 \\ y = -2\cdot(-3)^2 - 12\cdot(-3) - 10 = -18 + 36 - 10 = 8 \end{cases} \Rightarrow \textit{Vértice}: V(-3,8)$

$a = -2$, entonces la parábola está abierta hacia abajo y el vértice es el punto más alto (8 es el máximo absoluto de la función)

- **Puntos de corte con los ejes de coordenadas**:
  - Eje OX: $y = -2x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{-4} = \begin{cases} x_1 = -5 \Rightarrow (-5,0) \\ x_2 = -1 \Rightarrow (-1,0) \end{cases}$
  - Eje OY: $\begin{cases} y = -2x^2 - 12x - 10 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -2\cdot 0^2 - 12\cdot 0 - 10 = -10 \Rightarrow (0,-10)$

La parábola también pasa por su simétrico: $(-6,-10)$.





- El **recorrido** o **conjunto imagen**, como puede verse en la gráfica es el intervalo $(-\infty, 8]$

Actividades propuestas

6. Halla los elementos característicos y representa las siguientes parábolas:

a. $y = 2x^2 + 4x - 6$	b. $y = 6x^2 - 24x$	c. $y = -2x^2 + 4x - 2$
d. $y = 2x^2 + 5x - 12$	e. $y = 3x^2 + 6x - 9$	f. $y = -2x^2 + 7x + 3$
g. $y = 7x^2 + 21x - 28$	h. $y = 5x^2 - 9x + 4$	i. $y = -4x^2 - 4x - 1$

5. FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA : $y=k/x$

Recuerda que:

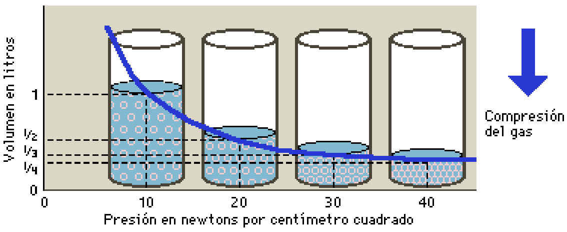
Dos magnitudes, A y B, son **inversamente proporcionales** cuando al multiplicar a la primera por un número, la segunda queda dividida por el mismo número. La **razón de proporcionalidad inversa** *k* es el producto de cualquier par de valores correspondientes de ambas magnitudes: $k = a \cdot b = a' \cdot b'$.

Ejemplo

- La ley de Boyle-Mariotte establece que “a temperatura constante, el volumen de una masa fija de gas es inversamente proporcional a la presión que este ejerce”.

  La fórmula que describe esta ley es $P \cdot V = k$. Si despejamos V, obtenemos la siguiente expresión para el volumen como función de la presión: $V = \dfrac{k}{P}$.

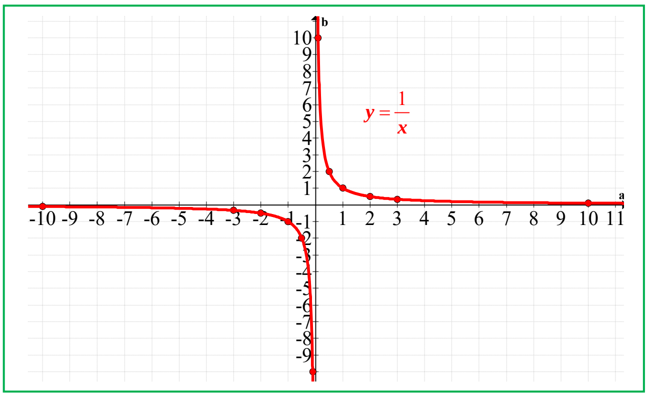
  La gráfica describe una curva que a medida que aumenta la presión disminuye el volumen, y al contrario, si disminuye la presión, el volumen aumenta.



Actividades resueltas

- *Representa la función* $y = \dfrac{1}{x}$

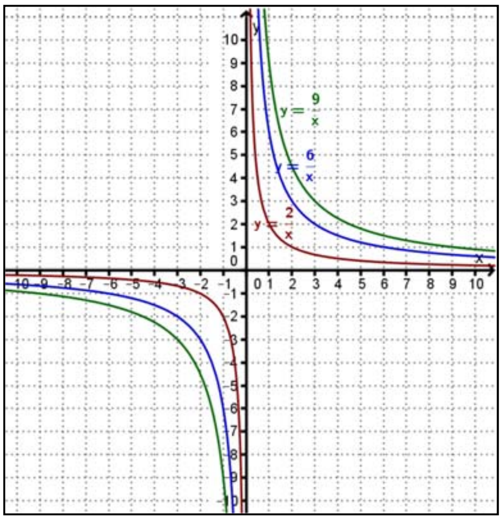
Completamos una tabla de valores y representamos los puntos en un sistema de coordenadas.

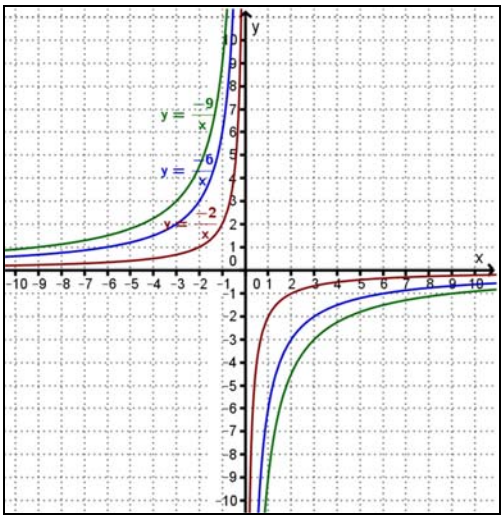


x	−10	−3	−2	−1	−1/2	−0,1	0,1	1/2	1	2	3	10
y	−0,1	−1/3	−1/2	−1	−2	−10	10	2	1	1/2	1/3	0,1

Se puede observar que la gráfica nunca corta a los ejes de coordenadas, ya que ni la *x* ni la *y* pueden valer 0. El 0 no está en el dominio y tampoco en el recorrido de la función (no se puede dividir por 0). El dominio y el recorrido de esta función es $\Re-\{0\}$.

Las funciones $y = \dfrac{k}{x}$ se llaman **funciones de proporcionalidad inversa** . Su gráfica es una curva formada por dos ramas infinitas, simétricas respecto al origen de coordenadas, llamada **hipérbola**. Su dominio está formado por los tramos $(-\infty,0)$ y $(0,+\infty)$





En el primer sistema de coordenadas cartesianas están representadas tres funciones de proporcionalidad inversa con el valor de k positivo, y en el segundo otras tres con el valor de k negativo. Observa que en el primer caso son funciones decrecientes en su dominio, mientras que en el segundo caso son crecientes.

En estas funciones, cuando x toma valores grandes en valor absoluto las imágenes son muy próximas a cero, por lo que la curva se aproxima mucho al eje de abscisas. Por esta razón se dice que el eje X es una **asíntota horizontal** de función.

Ninguna de estas funciones está definida para x=0 (no se puede dividir entre 0), pero cuando x toma valores muy próximos a 0, las imágenes son muy grandes en valor absoluto, por lo que la curva se aproxima mucho al eje de ordenadas. Por esta razón se dice que el eje Y es una **asíntota vertical** de la función.

Actividades propuestas

7. Representa las funciones $f(x) = \frac{5}{x}$ y $g(x) = \frac{-5}{x}$

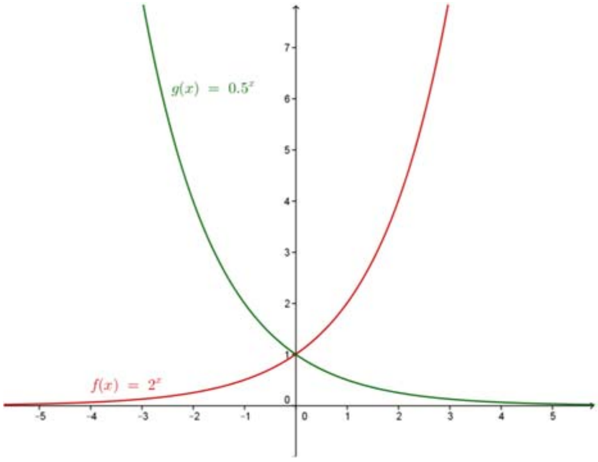
8. Se quiere abrir una ventana en una pared que tenga 2 m^2 de área. Da la expresión algebraica de la función que da la altura de las ventanas según la longitud elegida para la base y representa la función después de completar la tabla de valores:

base en metros (b)	0,25	0,5	1	2	3	4	8
altura en metros (a)							

6. FUNCIONES EXPONENCIALES: $y=b^x$

Hay dos tipos de funciones cuya expresión analítica o fórmula es una potencia:

- Si la variable independiente está en la base y el exponente es un número, por ejemplo $y = x^3$, se llama **función potencial**, y si además el exponente es un número natural es una función polinómica.
- Si la variable independiente está en el exponente y la base es un número, por ejemplo $y=3^x$, se llama **función exponencial**.



Ejemplo:

- Para representar las funciones exponenciales

  $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

  calculamos unas cuántas imágenes para la tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Recuerda: $a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Aunque en la tabla solamente se han dado valores enteros a x, cuya imagen se puede calcular mentalmente, x puede ser cualquier número real. Usando la calculadora podríamos haber calculado, por ejemplo, $f(-0{,}5) = 2^{-0{,}5} \approx 0{,}707$

En ambos casos el dominio es $(-\infty, +\infty)$

En ambos casos las imágenes son todas positivas, el recorrido es $(0, +\infty)$.

La función de expresión algebraica $y = b^x$, siendo la base **b un número real positivo y distinto de 1**, recibe el nombre de función exponencial de base b.

El dominio es $\Re = (-\infty,+\infty)$ y el recorrido es $(0,+\infty)$

La gráfica de la función pasa por los puntos $(0,1)$ y $(1, b)$

Puede ser una función creciente o decreciente, dependiendo de que la base sea mayor o menor que 1

· Si $b > 1$ la función es creciente. · Si $0 < b < 1$ la función es decreciente.

En el caso en el que b = 1 no se trata de una función exponencial, sino de la función constante y = 1, cuya gráfica es una recta horizontal.

El crecimiento exponencial es muy frecuente en la naturaleza (cultivos de microorganismos, poblaciones vegetales y animales,…). También sirve para describir fenómenos económicos y otros.

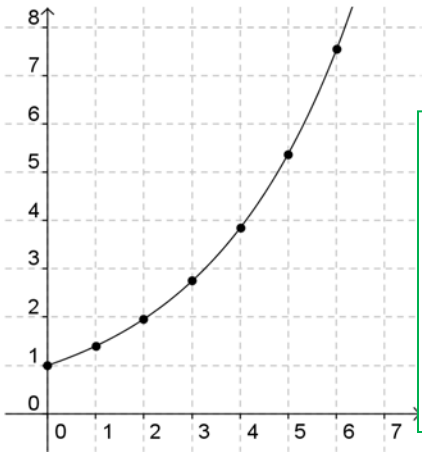
Actividad resuelta

- Si la cantidad de bacterias de una determinada especie se multiplica por 1,4 cada hora, podemos escribir la siguiente fórmula para calcular el número *"y"* de bacterias que habrá al cabo de *"x"* horas (comenzando por una sola bacteria): $y = 1{,}4^x$.

Número de bacterias en cada hora
(**Tabla de valores de la función**):

Horas transcurridas (*x*)	**Núm. bacterias (*y*)**
0	1
1	1,4
2	1,96
3	2,74
4	3,84
5	5,38
6	7,53
…	…

Gráfica de la función



Actividades propuestas

9. Representa conjuntamente las graficas de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = 4^x$

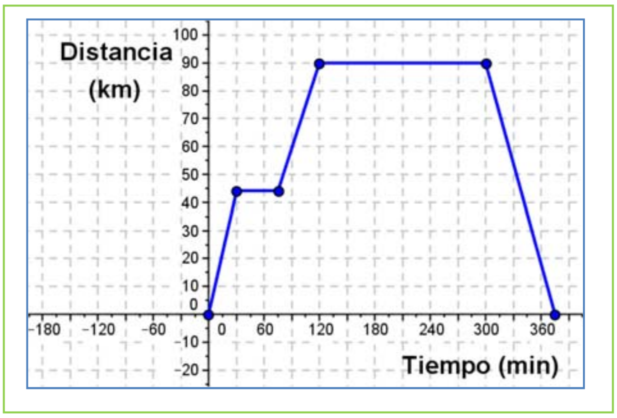
10. Representa conjuntamente las graficas de las funciones $f(x) = 0{,}1^x$ y $g(x) = 0{,}8^x$

7. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Es frecuente encontrarse con gráficas formadas por trozos de otras funciones.

Ejemplo:

La gráfica del margen representa la distancia al punto de partida de un automóvil

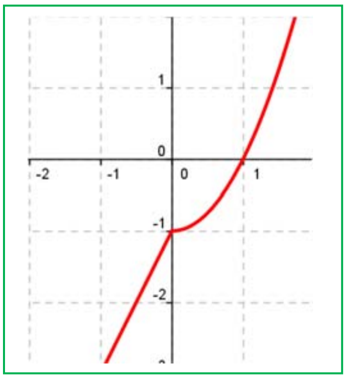


Este tipo de función se denomina **función definida a trozos** pues cada trozo tiene una expresión algebraica diferente.

Observa que está formada por 5 tramos de rectas, distintos. Podemos calcular sus ecuaciones pues conocemos los puntos por los que pasan: (0, 0), (30, 45), (75, 45), (90, 120), (90, 300) y (0, 360).

Su expresión es $f(x)=\begin{cases} 1{,}5\,x & \text{si } 0 \le x \le 30 \\ 45 & \text{si } 30 < x \le 75 \\ 5x-330 & \text{si } 75 < x \le 120 \\ 90 & \text{si } 120 < x \le 300 \\ -1{,}5\,x+360 & \text{si } 300 < x \le 360 \end{cases}$

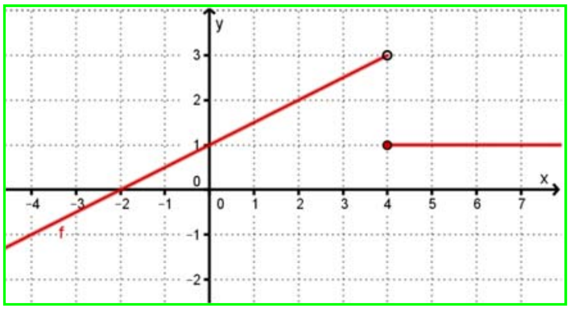
Actividades resueltas



- *Representa gráficamente la función* $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & si\ x<0 \\ x^2-1 & si\ x\ge 0 \end{cases}$.

Está definida de distinta manera antes de 0, que es una recta, que después de 0, que es una parábola. Simplemente dibujamos estas funciones en los intervalos indicados. En este caso los dos trozos que forman la gráfica empalman bien en el punto de abscisa x=0 (en el que cambia la expresión algebraica de la función) y no se produce ninguna discontinuidad o interrupción en la función

Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}0{,}5x+1 & \text{si } x<4\\ 1 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$.



En este caso los dos trozos no empalman y se produce una discontinuidad en la gráfica.

En el primer tramo, para valores de x menores que 4, la gráfica es el trozo correspondiente de la recta $y=0{,}5x+1$, pero el punto (4,3) de la recta ya no es un punto de la gráfica de la función, lo que indicamos rodeando el punto con un redondel hueco.

En el segundo tramo, para valores de x igual o mayores que 4, la gráfica e un trozo de la recta horizontal y=1. En punto de la recta (4,1) ahora sí pertenece a la gráfica de la función, lo que indicamos marcando bien el punto. Esta es la forma de ver en la gráfica que la imagen de 4 es 1 y no 3.

Actividades propuestas

11. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x<0\\ x-1 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

12. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\leq 1\\ x+3 & \text{si } x>1\end{cases}$

13. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{si } x<0\\ 2x+2 & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

14. Representa gráficamente la función $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & \text{si } x<1\\ x^2-4x+3 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

8. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

La **tasa de variación de una función y= f(x) en un intervalo [x_1, x_2]** es lo que aumenta o disminuye una función entre los extremos del intervalo. Se define como: **TV = $f(x_2) - f(x_1)$, ($x_2 > x_1$)**

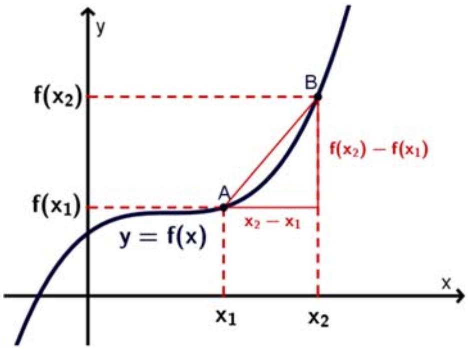
Si la función es creciente en el intervalo la tasa de variación es positiva y si es decreciente es negativa.

Dividiendo la tasa de variación entre la longitud del intervalo, tenemos el concepto de tasa de variación media, que es más significativo, porque no es lo mismo que una función varíe su valor una misma cantidad en un intervalo pequeño que en un intervalo grande

La **tasa de variación media de una función y= f(x) en un intervalo [x_1, x_2]** es el cociente entre la variación de $f(x)$ y la variación de x en el intervalo:

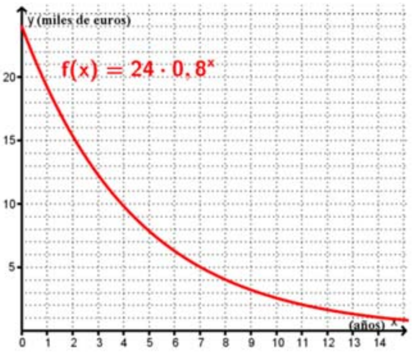
$$\text{TVM} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La **TVM** de $f(x)$ en [x_1, x_2] es la **pendiente** del segmento que une los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$



En una función afín, $f(x)=mx+n$, la tasa de variación media en cualquier intervalo es igual a la pendiente de la recta, como puede verse fácilmente a partir de la definición: TVM=$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(mx_2-n)-(mx_1-n)}{x_2-x_1} = \frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = m$

Actividad resuelta



La gráfica representa el precio (en miles de euros) de un coche en función del tiempo transcurrido desde su compra. La tasa de variación media en un intervalo de tiempo es lo que se ha depreciado el coche en dicho intervalo. El decrecimiento de la función es muy rápido al principio y se hace más lento con el tiempo.

Calculamos la TVM en el intervalo [0,2]:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{24\cdot 0{,}8^2 - 24\cdot 0{,}8^0}{2-0} = \frac{15{,}36-24}{2} = \frac{-8{,}64}{2} = -4{,}32$$

El valor disminuye 4320 euros por año durante los dos primeros años.

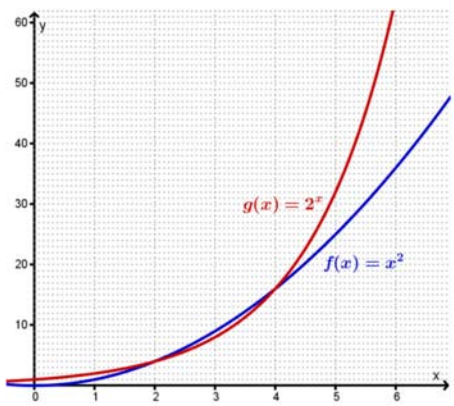
Calculamos la TVM en el intervalo [10,12]: $\frac{f(10)-f(8)}{10-8} \approx -0{,}725$

Entre los años 10 y 12 la depreciación es de 725 euros por año.

Actividades propuestas

15. Para comparar la rapidez de crecimiento de la función potencial $f(x) = x^2$ y de la función exponencial $g(x) = 2^x$, calcula las tasas de de variación media de cada una de las dos funciones en los intervalos indicados y observa cuál de las dos funciones crece más deprisa en cada intervalo:

a) [0, 2] b) [2, 3] c)[3, 4] d)[4, 5] e)[5, 6] f) [10,20]



9. SUCESIONES DE NÚMEROS REALES

Una **sucesión de números reales** es una función con dominio **N***, que hace corresponder a cada número natural (excluido el cero) un número real.

Para las sucesiones se usa generalmente una notación especial que consiste en representar las imágenes de los números naturales 1, 2, 3, 4, …, n, …, con una letra minúscula con un subíndice que indica el número natural del que es imagen.

N*	1	2	3	4	…	n	…
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
R	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n	…

Se acostumbra a representar la sucesión por sus imágenes, $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots)$. Así, vemos una sucesión como una secuencia ordenada de números reales. Los números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman términos de la sucesión. Los subíndices indican la posición de cada término en la sucesión.

La representación gráfica de una sucesión está formada por un conjunto de puntos aislados que tienen por abscisas los números naturales 1, 2, 3, 4, …, y por ordenadas los números reales $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

Ejemplos:

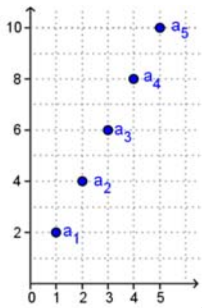
- En la sucesión $(a_n) = (2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$

  los primeros términos son

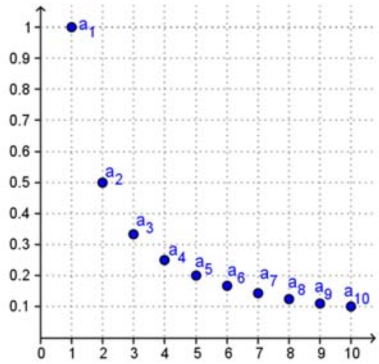
  $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 10$

- En la sucesión $(b_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ los primeros términos son

  $b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{3}, b_4 = \frac{1}{4}\ b_5 = \frac{1}{5}$



(a_n)



(b_n)

Una forma de definir una sucesión es dando la expresión del **término general** de la sucesión, $\mathbf{a_n}$, es decir, la expresión algebraica que define la sucesión como función de **N*** en **R**. La expresión algebraica del término general en función de n permite calcular cualquier término de la sucesión.

Ejemplos:

- Se define la sucesión de término general $a_n = n^2 + 3$

  Podemos construir los términos de la sucesión sin más que sustituir n:

  $a_1 = 1^2 + 3 = 4, \quad a_2 = 2^2 + 3 = 7, \quad a_3 = 3^2 + 3 = 12, \quad a_4 = 4^2 + 3 = 19, \ldots$

  Podemos hallar cualquier otro término, por ejemplo el 50º: $a_{50} = 50^2 + 3 = 2503$

- En la sucesión de término general $d_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ los primeros términos son

  $d_1 = (-1)^1 \frac{1}{1} = -1 \quad d_2 = (-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad d_3 = (-1)^3 \frac{1}{3} = \frac{-1}{3} \quad d_4 = (-1)^4 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

  El término 75º es $a_{75} = (-1)^{75} \frac{1}{75} = \frac{-1}{75}$ y el término 100º es $a_{100} = (-1)^{100} \frac{1}{75} = \frac{1}{75}$

Algunas sucesiones se definen por una **ley de recurrencia**, es decir, una expresión que permite calcular un término cualquiera a partir de los anteriores.

Ejemplo:

- La sucesión: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,…, conocida como sucesión de Fibonacci se obtiene con la siguiente ley de recurrencia: $a_1 = a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Es decir, cada término, salvo los dos primeros, se obtiene como suma de los dos anteriores.

- Dada la sucesión definida por la ley de recurrencia: $a_1=1,\ a_n = a_{n-1} + 3$

  Sus cuatro primeros términos son: $a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 3 = 4,\ a_3 = 4 + 3 = 7,\ a_4 = 7 + 3 = 10$

Actividades propuestas

16. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = 2n^2+1$

b) $b_n = \dfrac{4n-1}{3n}$

c) $c_1 = 1,\ c_n = 3c_{n-1} + 5$

d) $d_1=2,\ d_2=5,\ d_n = 2d_{n-1} + d_{n-2}$

17. Escribe la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) $(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1,\ldots)$

b) $(2, 4, 6, 8, 10,\ldots)$

c) $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$

d) $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots\right)$

9.1. Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos de la sucesión es constante: $\mathbf{a_{i+1} - a_i = d}$.

A esta constante se le llama **diferencia de la progresión** y se suele denotar con la letra d.

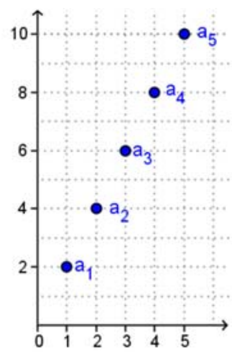
En una progresión aritmética cada término se obtiene sumando al anterior la diferencia, $\mathbf{a_{i+1} = a_i + d}$:

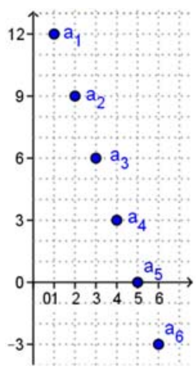
$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,\ a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d,\ \ldots$$

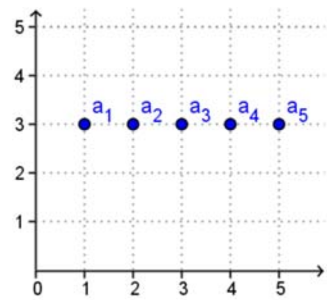
La expresión algebraica del **término general de una progresión aritmética** es: $\boxed{\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\,d}}$

La gráfica de una progresión aritmética es un conjunto de puntos aislados que están sobre una recta.

- **Si d > 0 la progresión es creciente** (cada término es mayor que los anteriores). Ej. $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$
- **Si d < 0 la progresión es decreciente** (cada término es menor que los anteriores). Ej. $(12, 9, 6, 3, 0, -3, \ldots)$
- Si **d = 0 la progresión es constante** (todos sus términos son iguales). Ej. $(3, 3, 3, 3, 3, \ldots)$







Ejemplos:

- La sucesión formada por los números naturales: $(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$ es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 1 al término anterior.
- La sucesión formada por los números impares: $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$ es una progresión aritmética, ya que cada término se obtiene sumando 2 al término anterior. El término general se obtiene sustituyen los valores $a_1 = 1$ y $d = 2$ en la fórmula y simplificando:

$$a_n = 1 + (n-1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1 .$$

Podemos comprobar que la fórmula $a_n = 2n - 1$ devuelve los primeros términos de la sucesión

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1,\ a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3,\ a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5,\ a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Con la fórmula del término general podemos calcular el valor de cualquier término, por ejemplo del que ocupa la posición 100ª: $a_{100} = 2 \cdot 100 - 1 = 200 - 1 = 199$

- La sucesión $(20, 15, 10, 5, 0, -5, \ldots)$ es una progresión aritmética de diferencia $d = -5$.

Calculamos el término general: $a_n = 20 + (n-1) \cdot (-5) = 20 - 5n + 5 = 25 - 5n \Rightarrow \quad a_n = 25 - 5n$

- La sucesión $\left(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ es una progresión aritmética porque la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es constante: $\frac{1}{2} - 0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - 2 = d = \frac{1}{2}$

  Término general: $a_n = 0 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{n-1}{2}$

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son los n primeros términos de una progresión aritmética, se puede calcular su suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ con la siguiente fórmula: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Ejemplos:

- Para calcular $S_{10} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, como los sumandos son términos de una progresión aritmética podemos aplicar la fórmula anterior en la que $n = 10, a_1 = 1, a_{10} = 10$:

$$S_{10} = \frac{(1+10) \cdot 10}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$$

- Para hallar la suma de los números impares menores que 1000, tenemos en cuenta que los números impares forman una progresión aritmética de diferencia 2 y podemos aplicar la fórmula de la suma en la que $n = 500, a_1 = 1, a_{500} = 999$:

$$S_{500} = \frac{(1+999) \cdot 500}{2} = \frac{1000 \cdot 500}{2} = 250000$$

Puedes observar en lo ejemplos anteriores una propiedad importante de las progresiones aritméticas finitas: la suma de dos términos equidistantes de los extremos es siempre la misma. En el primer ejemplo: 1+10=2+9=3+8=4+7=5+6=11; en el segundo: 1+999=2+997=...=1000. Esta propiedad es fácil de demostrar y de ella se deduce la fórmula de la suma

9.2. Progresiones geométricas

Una **progresión geométrica** es una sucesión de números reales en la que el cociente entre cada término y el anterior es constante. A esta constante se denomina **razón de la progresión** y se suele denotar con la letra *r*. Es decir, $\frac{a_{i+1}}{a_i} = r$ (siempre que a_i sea distinto de cero).

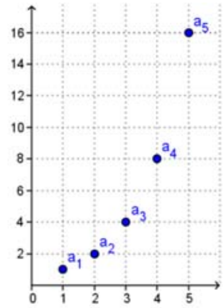
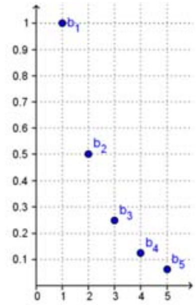
En una progresión geométrica cada término se obtiene multiplicando el anterior por la razón, $\mathbf{a_{i+1} = a_i \cdot r}$

$$a_2 = a_1 \cdot r, \quad a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2, \quad a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^3, \ldots$$

La expresión algebraica del **término general de una progresión geométrica** es: $\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$

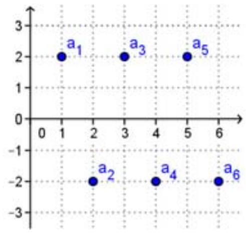
Ejemplos:

- La sucesión $(a_n)=(1, 2, 4, 8, 16,\ldots)$ es una progresión geométrica de razón 2. Es una sucesión creciente, mientras que $(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$ es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y es una sucesión decreciente.

- La sucesión $(a_n) = (2, -2, 2, -2, 2, -2, \ldots)$ es una progresión geométrica, ya que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por −1. El término general se obtiene sustituyen los valores $a_1 = 2$ y $r = -1$ en la fórmula :

$$a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}.$$



- Comprobamos que la sucesión $(2, 3, 4.5, 6.75, 10.125, \ldots)$ es una progresión geométrica dividiendo cada término entre el anterior: $\frac{3}{2} = \frac{4.5}{3} = \frac{6.75}{4.5} = \frac{10.125}{6.75} = r = 1.5$.

  El término general de la sucesión es : $a_n = 2 \cdot 1.5^{n-1}$

  Con la fórmula del término general podemos calcular el valor de cualquier término, por ejemplo del que ocupa la posición 30ª: $a_{30} = 2 \cdot 1.5^{30} = 383502.1185$

- La fórmula del interés compuesto $C_f = C_i\,(1 + r/100)^n$ que da el capital final, C_f, en el que se transforma un capital inicial, C_i, depositado en un banco al r%, puede interpretarse como una progresión geométrica de razón $1 + r/100$. Si hemos depositado en el banco 6000 € al 2% anual el capital disponible transcurridos n años viene dado por la fórmula $C_n = 6000 \cdot 1.02^n$ y los valores, en euros, para los primeros años serían: $C_1 = 6120$, $C_2 = 6242.4$, $C_3 = 6367.25$,..., $C_{10} = 7313.97$

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ son los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r, se puede calcular su suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ con la siguiente fórmula: $S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$

Ejemplos:

- Para calcular la suma de los cinco primeros múltiplos de 3, $S_5 = 3 + 9 + 27 + 81 + 243$, como los sumandos son términos de una progresión geométrica podemos aplicar la fórmula anterior en la que $r = 3, n = 5, a_1 = 3$:

$$S_5 = \frac{3 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1} = \frac{3 \cdot (243 - 1)}{2} = 363$$

Actividades propuestas

18. Calcula la expresión del término general de cada progresión aritmética. Escribe los cinco primeros términos y el 20º término de cada sucesión:

a) De diferencia *d* = 3 y de primer término 3.

b) De diferencia *d* = –2 y de primer término 0.

c) De diferencia *d* = 1/3 y de segundo término 1.

19. Calcula la expresión del término general de cada progresión geométrica. Escribe los cinco primeros términos y el 20º término de cada sucesión:

a) De razón *r* = 3 y de primer término 3.

b) De razón *r* = 0,1 y de primer término 1000.

c) De razón r = 1/3 y de segundo término81.

20. Para cada una de las siguientes sucesiones, indica si es una progresión aritmética, una progresión geométrica, o de ninguno de los dos tipos; obtén el término general y calcula el 15º término.

a) $(a_n) = (32, 25, 18, 11, 4 \ldots)$

b) $(b_n) = (\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots)$

c) $(c_n) = (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots)$

d) $(d_n) = (-5\,; -0{,}5\,; -0{,}05\,; -0{,}005; \ldots)$

e) $(e_n) = (\frac{7}{8}, 1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \ldots)$

21. Calcula la suma de los cien primeros números pares.

22. Calcula la suma de los ocho primeros múltiplos de 5.

23. Para devolver el dinero que Teresa ha prestado a Julio han acordado hacerlo en 6 pagos mensuales de la siguiente manera: el primer mes le pagará 1000€ y cada uno de los meses siguientes ¾ partes de lo pagado el mes anterior. Calcula cuánto pagó el último mes y la suma de todos los pagos mensuales.

24. Imagina que pudieras elegir entre las dos formas de cobro siguiente por realizar cierto trabajo durante los siete días de una semana:

a. Cobrar 100€ el primer día y cada uno de los días siguientes 10€ más que el día anterior.

b. Cobrar 10€ el primer día y cada uno de los días siguientes el doble que el anterior.

Calcula la ganancia semanal total en cada caso para saber qué tipo de contrato es más ventajoso.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa las rectas: a) $y = 5x$, b) $y = -5x$, c) $y = (1/2)x$, d) $y = 2{,}3x$.

2. Representa las siguientes funciones, justificando si son crecientes o decrecientes:

a) $y = 1{,}5x$ b) $y = -0{,}5x$.

3. Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (0, 0) y determina su expresión algebraica. ¿Es una función creciente o decreciente?

4. Representa las siguientes funciones lineales y determina los puntos de cortes con los ejes:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 5$ c) $y = 3x - 2$ d) $y = -2x - 3$.

5. Representa las rectas que pasa por los puntos que se indican y escribe su expresión algebraica en forma punto-pendiente, explícita y general.

a) (5, 1), (3, –2) b) (–3, 4), (4, –1) c) (1, 4), (0, 6) d) (–2, –4), (–1, 0)

6. Un transportista cobra por cada trabajo 30 euros fijos más 1,50 euros por km recorrido. Completa la siguiente tabla con el coste del transporte para viajes con el recorrido dado:

km	100	200	300	400	500
Euros					

Escribe la expresión algebraica de la función que da el coste de un transporte en función de los kilómetros recorridos y representa la función en un sistema de ejes cartesianos.

7. Dibuja la gráfica de las siguientes parábolas:

a) $y = 2{,}5x^2$ b) $y = -1{,}2x^2$ c) $y = (1/2)x^2$ d) $y = -0{,}7x^2$.

8. Representa la gráfica de las funciones cuadráticas siguientes y determina el recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y el máximo o mínimo absoluto:

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 5x - 4$ c) $y = -5x^2 + 2x - 6$ d) $y = -x^2 + x - 3$

e) $y = 3x^2 + 2x + 5$ f) $y = -2x^2 + 4x - 1$ g) $y = (x - 2)^2 + 4$ h) $y = 4(x - 2)^2 + 9$

9. Se lanza una pelota hacia arriba. Después de t segundos, se encuentra a h metros de altura. La expresión algebraica de la altura en función del tiempo es $h= 40t-5t^2$. Representa la gráfica.

a) ¿A qué altura se encuentra al cabo de 1 segundo?, ¿y de 2 segundos?

b) ¿En qué momento la pelota volverá a estar en el suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima y en qué momento se alcanza?

10. El número de personas atacadas cada día por una enfermedad viene dado por la función $f(x) = -x^2 + 20x + 62$, donde x representa el número de días desde que se descubrió la enfermedad. Representa la función (no tienen sentido valores negativos de x ni de y)

a) ¿Cuándo deja de crecer la enfermedad?

b) ¿Cuál es el número máximo de personas atacadas por la enfermedad en un día?

c) ¿Cuándo desaparecerá la enfermedad?

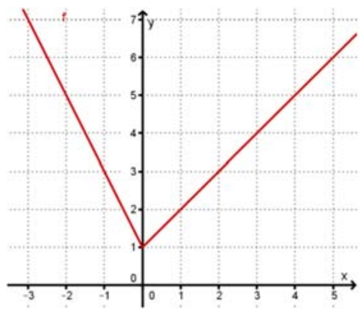
11. Una asociación de senderistas va a contratar un autocar para realizar una excursión por 540 €. Completa la siguiente tabla que relaciona los valores de las variables "número de personas que pagan la excursión" y "precio por persona":

x (número de personas que pagan la excursión)	10	20		40	45	
y (precio por persona)			18			9

¿Qué relación existe entre las variable x e y? Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona ambas variables.

12. Representa la gráfica de la función $f(x) = 1{,}5^x$ y calcula la tasa de variación media en los siguientes intervalos: (a) [0,1] (b) [2, 3] (c) [5, 6]

13. Escribe la expresión algebraica de la función a trozos representada en la gráfica.



14. Escribe los diez primeros términos de la sucesión definida con las siguiente ley de recurrencia: $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + n$

15. Escribe la expresión algebraica del término general de cada sucesión:

(a) 1, −2, 3, −4, 5, −6, … (b) −2, 4, −6, 8, −10, 12, …

16. El primer término de una progresión aritmética es 3,73 y la diferencia es 0,04. Escribe los ocho primeros términos, la expresión algebraica del término general y el valor del término a_{37}

17. El primer término de una progresión geométrica es 125 y la razón es 0,04. Escribe los ocho primeros términos, la expresión algebraica del término general y el valor del vigésimo término redondeado a millonésimas.

18. Se depositan 4000 € en un banco que ofrece un 3% anual de interés compuesto. Escribe la fórmula general que da el capital final después de n años y calcula el capital disponible al final de cada año, durante los 5 primeros años.

19. Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son:

(a) $a_n = 10 - 5n$ (b) $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{n}$ (c) $c_n = 3^{n-2}$ (d) $d_n = \dfrac{2n-1}{n+1}$

Entre las sucesiones anteriores hay una progresión aritmética. Señala cuál es y da el valor de la diferencia. También hay una progresión geométrica. Indica cuál es y da el valor de la razón.

20. Escribe el término general y calcula el valor del vigésimo término de las siguientes sucesiones:

(a) 3,3; 4,4; 5,5; 6,6; …

(b) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{13}{4}, \ldots$

(c) 0,25; 0,75; 2,25; 6,75; …

(d) 3, −6, 12, −24, …

AUTOEVALUACIÓN

1) La recta $y = 4x + 2$ tiene de pendiente m y ordenada en el origen n:

a) $m = 4, n = 0$ b) $m = 1/2, n = 6$ c) $m = 2, n = 4$ d) $m = 4, n = 2$

2) La recta que pasa por los puntos (1, 6) y (–2, 4) tiene de pendiente m y ordenada en el origen n:

a) $m = 2, n = 4$ b) $m = 3/2, n = 6$ c) $m = 2/3, n = 16/3$ d) $m = 6, n = 2/3$

3) Indica el vértice de la función cuadrática $y = 3x^2 + 1$:

a) (0, 1) b) (1, 2) c) (0, 2) d) (0, 3)

4) El único punto que pertenece a la recta $y = 2x +5$ es:

a) (0, 2) b) (-1, 3) c) (1, 5) d) (-5, 0)

5) Indica cuál de las siguientes parábolas abre hacia arriba:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

6) Indica cuál de las siguientes parábolas no corta al eje OX:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

7) Indica cuál de las siguientes funciones es siempre decreciente:

a) $y = -5x+1$ b) $y = 5x^2+6x$ c) $y = 3x-8$ d) $y = –x^2$

8) Señala cuál de las siguientes funciones cuadráticas alcanza un mínimo absoluto:

a) $y = (–10/17)x^2 + 3x$ b) $y = 3x^2 + 2x + 1$ c) $y = (–1/2)x^2 + 3x + 2$ d) $y = –x^2 + 3$

9) La bajada de bandera en un taxi es de 1,50 € y cobra 50 céntimos por km recorrido. Se ha pagado 9,50 € por un trayecto de:

a) 8 km b) 10 km c) 9,5 km d) 16 km

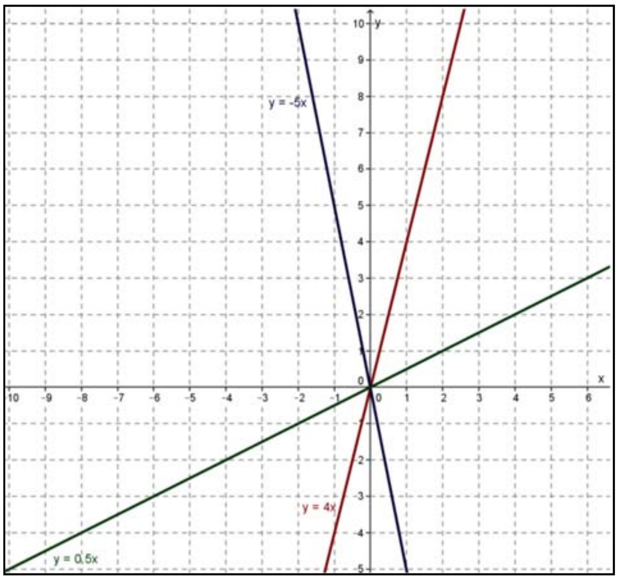
10) Un vendedor de pólizas de seguro tiene un sueldo base (fijo) de 700 € al mes y un incentivo variable de 30 € por póliza contratada. Si un mes ha cobrado 1150 € el número de pólizas que ha contratado en dicho mes es:

a) 20 b) 10 c) 12 d) 15

SOLUCIONES:

1d 2c 3a 4b 5b 6b 7a 8b 9d 10d

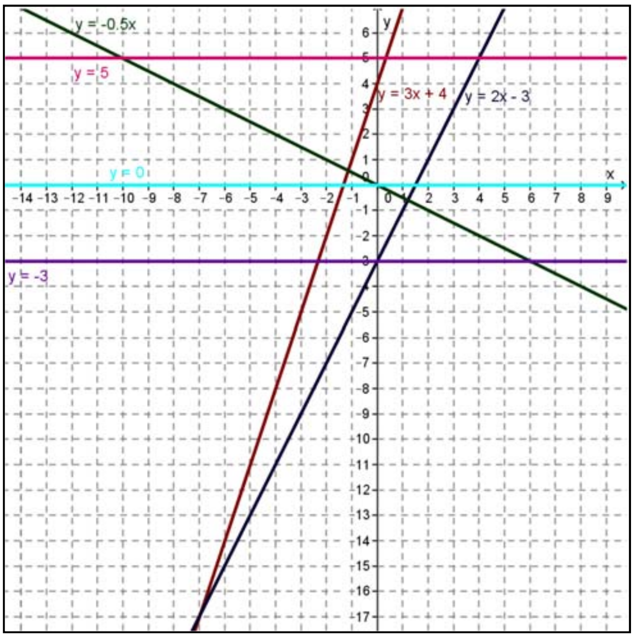
SOLUCIONES DE ACTIVIDADES PROPUESTAS



(1) P (c) , Q (a) , R (b)

(2a) $y = \frac{2}{3}x$ Punto Q **(2b)** $y = \frac{-3}{2}x$ Punto P

(2c) $y = \frac{-5}{2}x$ Punto R



(3) La recta c pasa por P

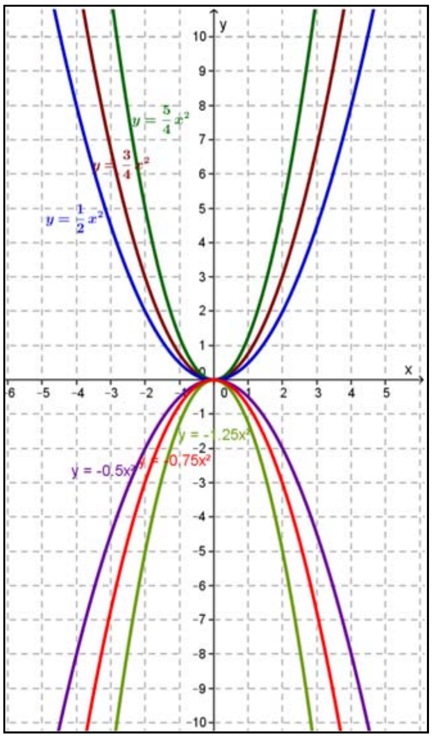
(4a) Recta $y = \frac{3}{2}x + 3$ contiene a R

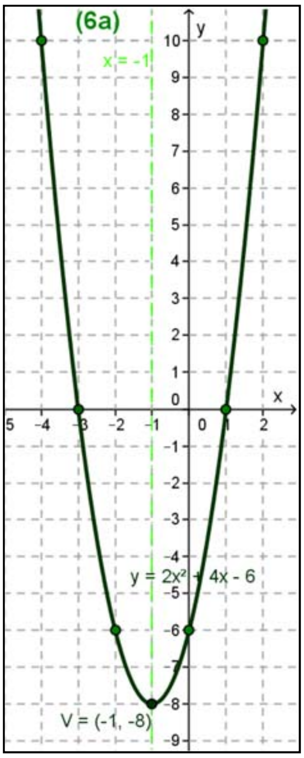
(4b) Recta $y = \frac{-3}{2}x + 5$ contiene a P

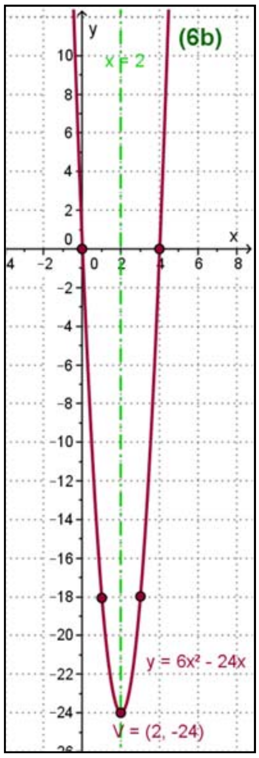
(4c) Recta $y = 1.5$contiene a S

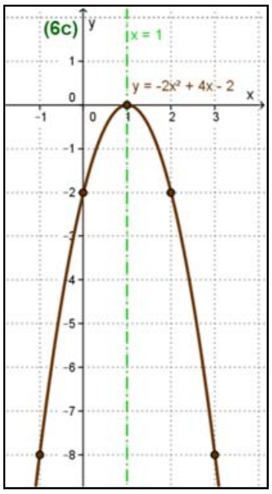
(4d) Recta $y=(1/4)x+1/2$ contiene a Q

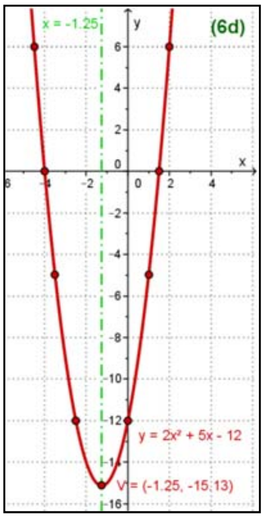
(5)

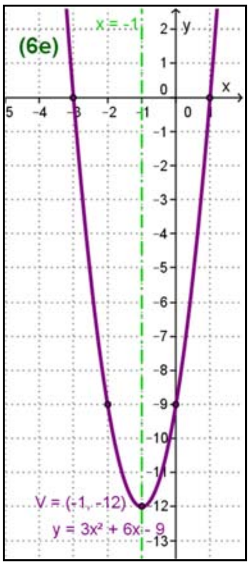


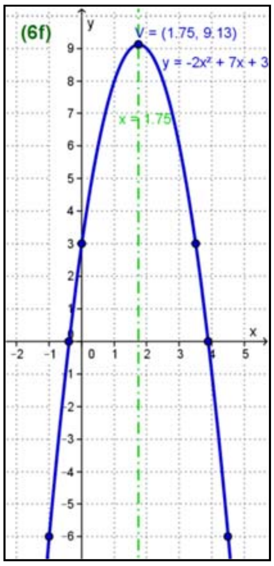


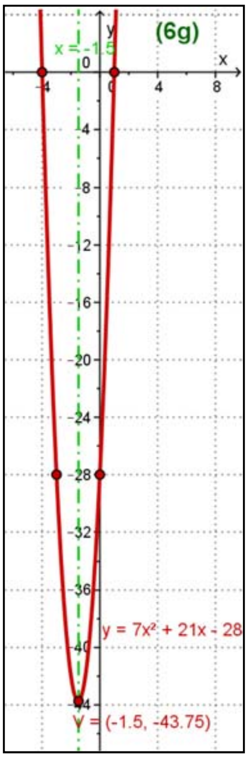


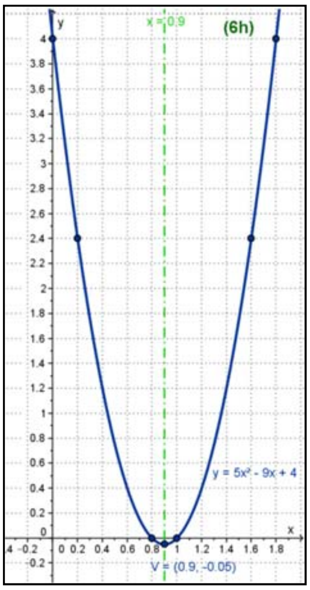

(6c)
x = 1
y = -2x² + 4x - 2

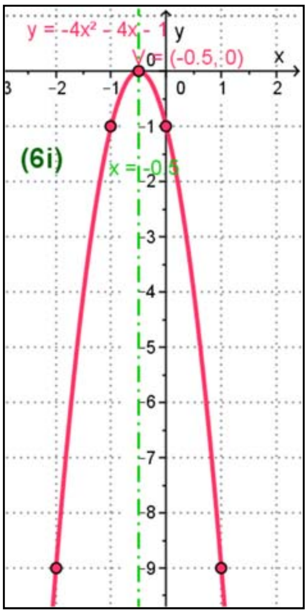

(6d)
x = -1.25
y = 2x² + 5x - 12
V = (-1.25, -15.13)


(6e)
x = -1
V = (-1, -12)
y = 3x² + 6x - 9

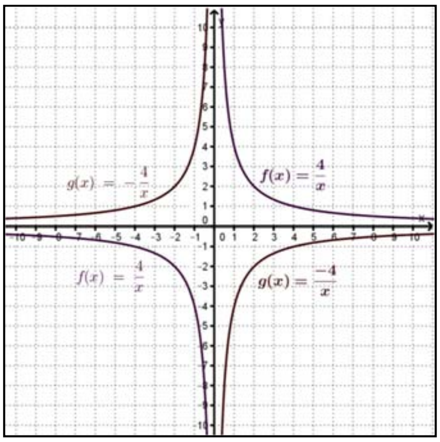

(6f)
V = (1.75, 9.13)
y = -2x² + 7x + 3
x = 1.75

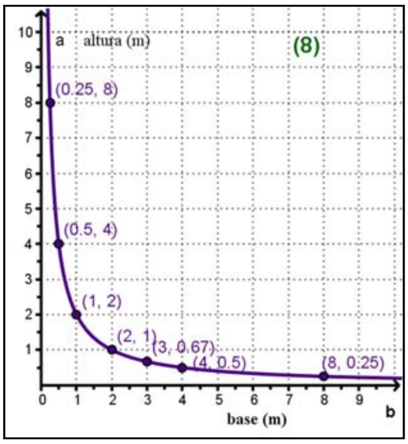

(6g)
x = -1.5
y = 7x² + 21x - 28
V = (-1.5, -43.75)

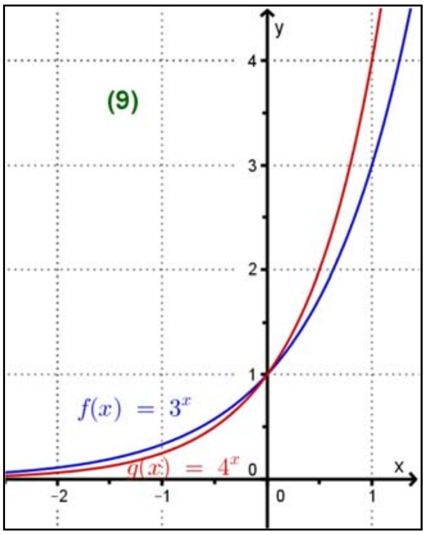

(6h)
x = 0.9
y = 5x² - 9x + 4
V = (0.9, -0.05)

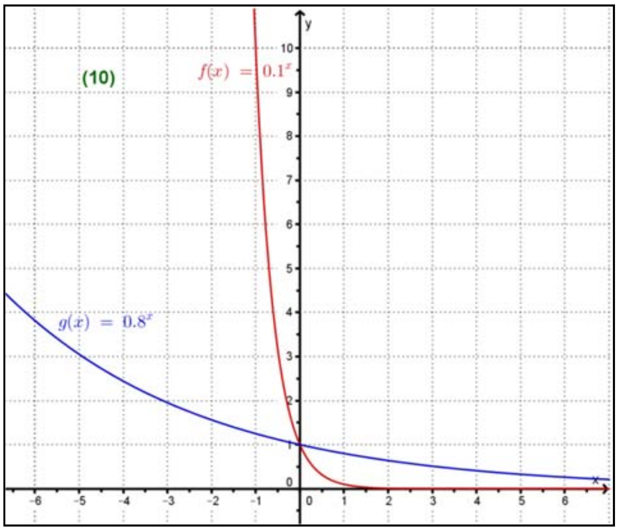

y = -4x² - 4x - 1
V = (-0.5, 0)
(6i)
x = -0.5

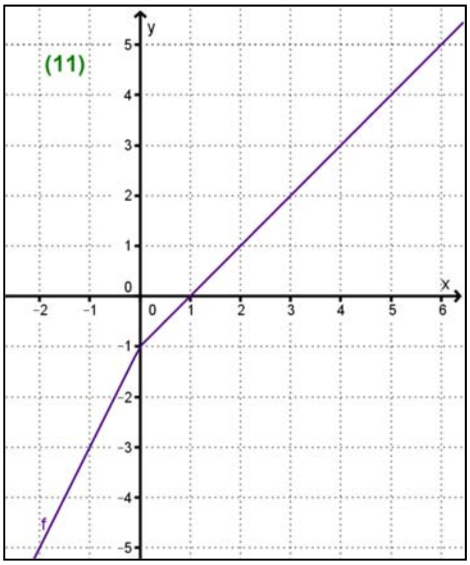
7

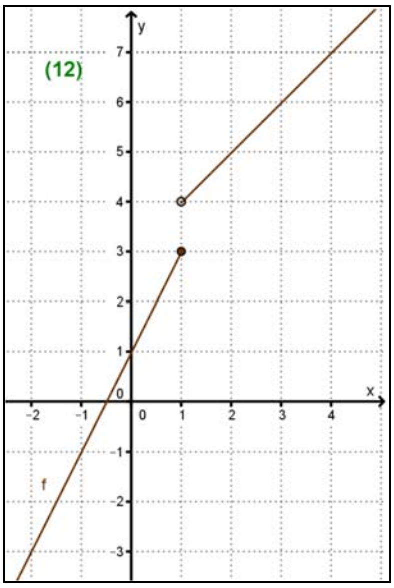

g(x) = -4/x
f(x) = 4/x
f(x) = 4/x
g(x) = -4/x

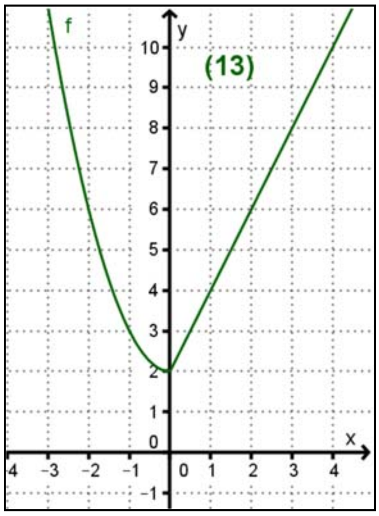

a altura (m)
(8)
(0.25, 8)
(0.5, 4)
(1, 2)
(2, 1)
(3, 0.67)
(4, 0.5)
(8, 0.25)
base (m)
b

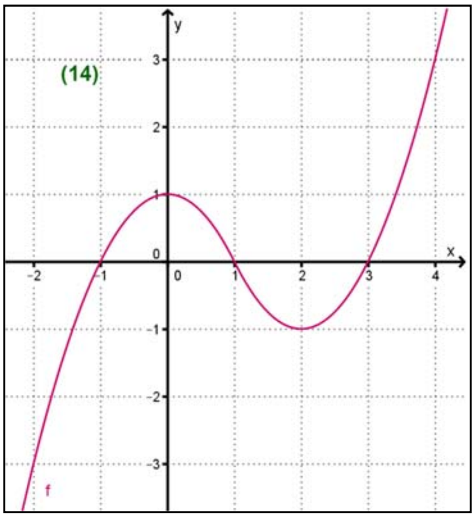

(9)
$f(x) = 3^x$
$g(x) = 4^x$


(10)
$f(x) = 0.1^x$
$g(x) = 0.8^x$


(11)
f


(12)
f


(13)
f


(14)
f

(15)

TVM en cada intervalo	[0,2]	[2,3]	[3,4]	[4,5]	[5,6]	[10,20]
$f(x)=x^2$	2	5	7	9	11	30
$g(x)=2^x$	1,5	4	8	16	32	104755,2

(16) (a) $a_1 = 3,\quad a_2 = 9,\quad a_3 = 19,\quad a_4 = 33$ **(b)** $b_1 = 1,\quad b_2 = \frac{7}{6},\quad b_3 = \frac{11}{9},\quad b_4 = \frac{5}{4}$

(c) $c_1 = 1,\quad c_2 = 8,\quad c_3 = 29,\quad c_4 = 92$ **(d)** $d_1 = 2,\quad d_2 = 5,\quad d_3 = 12,\quad a_4 = 29$

(17) (a) $a_n = (-1)^n$ **(b)** $b_n = 2n$ **(c)** $c_n = n^2$ **(d)** $d_n = \frac{n}{n+1}$

(18a) $a_n = 3n$**;** $a_1 = 3,\quad a_2 = 6,\quad a_3 = 9,\quad a_4 = 12,\quad a_5 = 15$**;** $a_{20} = 60$

(18b) $b_n = 2 - 2n$**;** $b_1 = 0,\quad b_2 = -2,\quad b_3 = -4,\quad b_4 = -6,\quad b_5 = -8$**;** $b_{20} = -38$

(18c) $c_n = \frac{n+1}{3}$**;** $c_1 = \frac{2}{3},\quad c_2 = 1,\quad c_3 = \frac{4}{3},\quad c_4 = \frac{5}{3},\quad c_5 = 2$**;** $c_{20} = 7$

(19a) $a_n = 3^n$**;** $a_1 = 3,\quad a_2 = 9,\quad a_3 = 27,\quad a_4 = 81,\quad a_5 = 243$**;** $a_{20} = 3486784401$

(19b) $b_n = 1000 \cdot 0{,}1^{n-1}$**;** $b_1 = 1000,\quad b_2 = 100,\quad b_3 = 10,\quad b_4 = 1,\quad b_5 = 0{,}1$**;** $b_{20} = 10^{-16}$

(19c) $c_n = 3^{6-n}$**;** $c_1 = 243,\quad c_2 = 81,\quad c_3 = 27,\quad c_4 = 9,\quad c_5 = 3$**;** $c_{20} = 3^{-14} \approx 2 \cdot 10^{-7}$

(20a) Progresión aritmética; $a_n = 39 - 7n$; $a_{15} = -66$

(20b) Progresión geométrica; $b_n = 2^{n-5}$; $a_{15} = 1024$

(20c) $c_n = \frac{1}{n^2}$; $a_{15} = \frac{1}{225} = 0{,}00\widehat{4}$; No es progresión aritmética ni geométricas.

(20d) Progresión geométrica; $d_n = -5 \cdot 0{,}1^{n-1}$; $d_{15} = -5 \cdot 10^{-4}$

(20e) Progresión aritmética; $e_n = \frac{n+6}{8}$; $e_{15} = \frac{21}{8}$

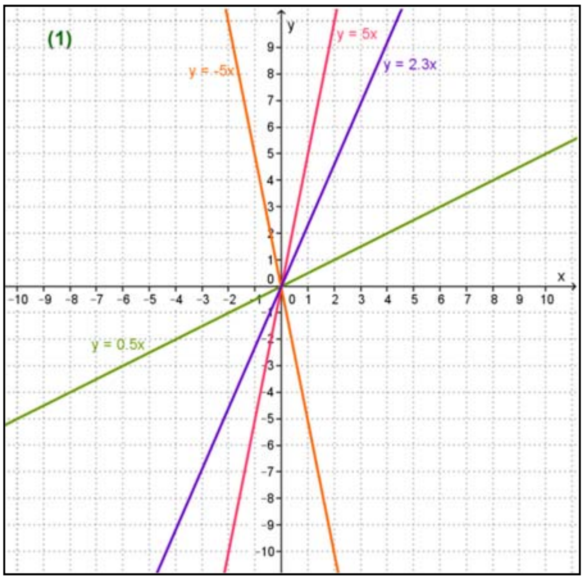
(21) 10100

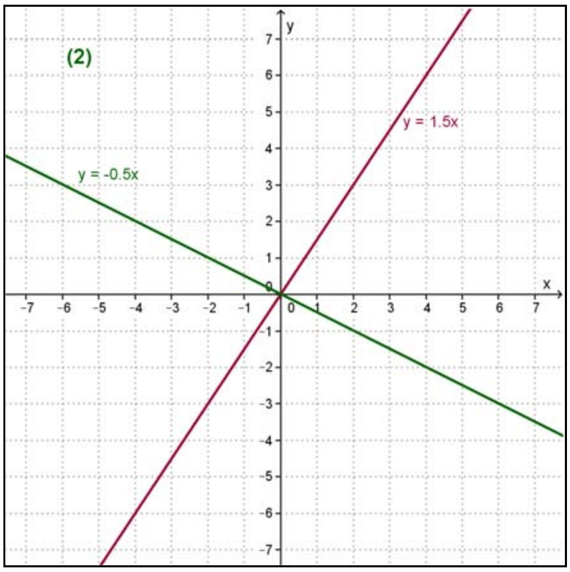
(22) 488280

(23) El sexto y último mes pagó 31,25€. En total pagó una suma de 1968,75€

(24) Con el primer tipo de contrato se ganaría en la semana un total de 910€, con el segundo tipo de contrato se ganaría un total de 1270€

SOLUCIONES DE EJERCICIOS Y PROBLEMAS



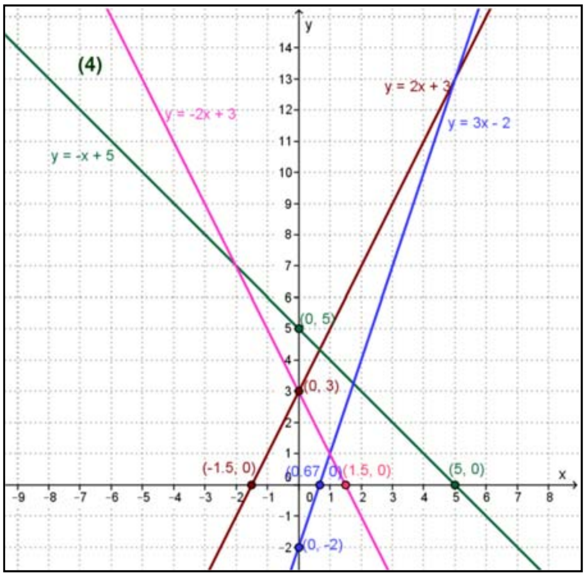


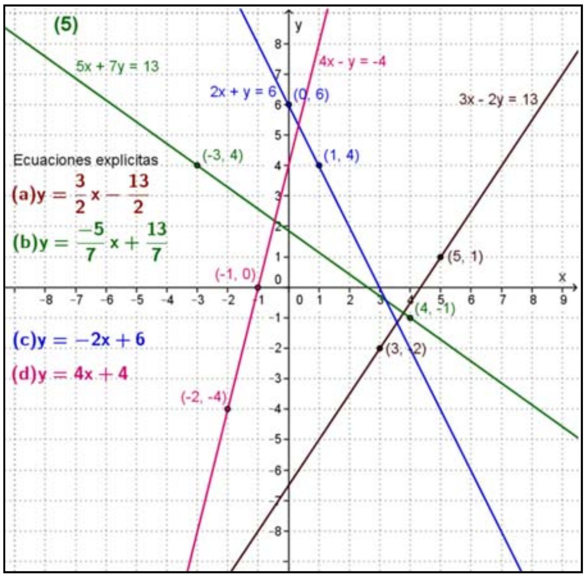
(2a) Creciente

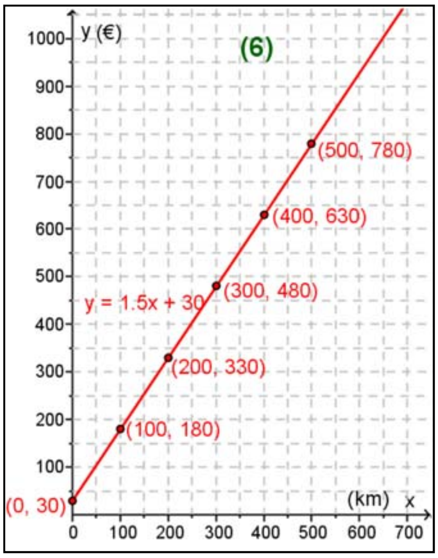
(2b) Decreciente

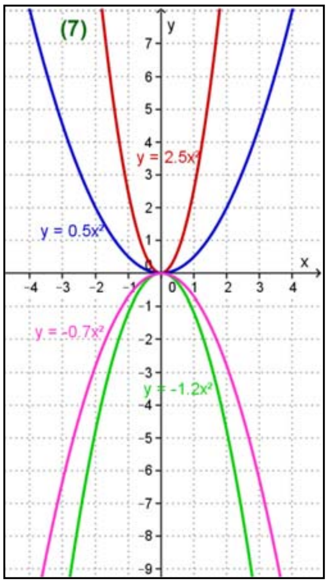
(3) $y = 4x$

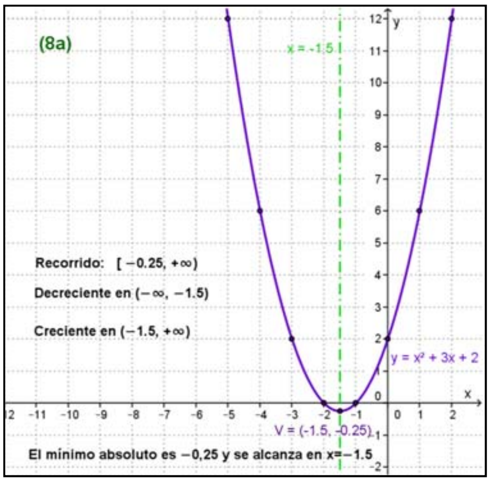
Función creciente

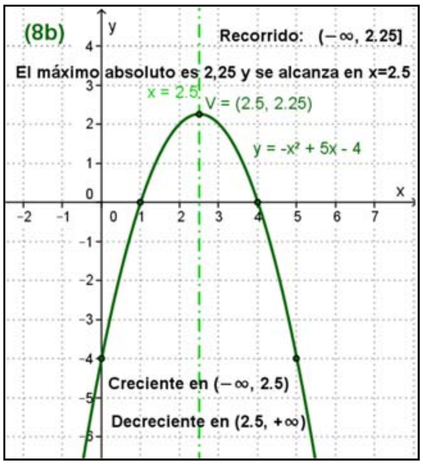


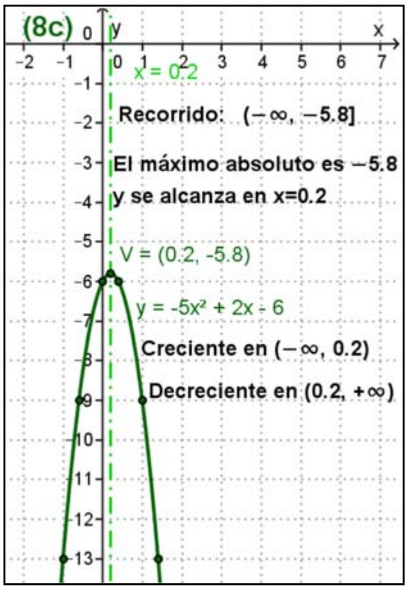


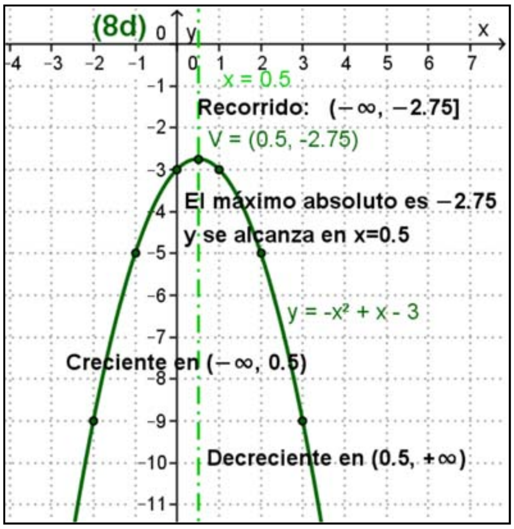


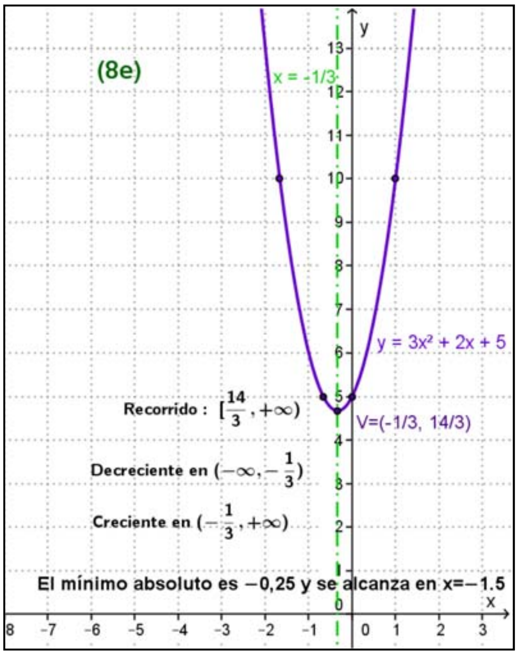


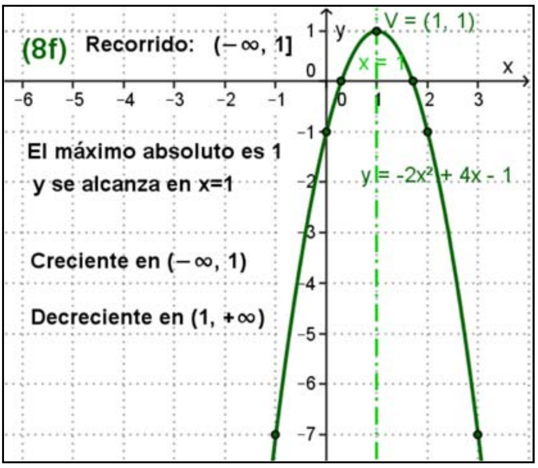

(8a)
x = -1.5
Recorrido: [−0.25, +∞)
Decreciente en (−∞, −1.5)
Creciente en (−1.5, +∞)
y = x² + 3x + 2
V = (-1.5, -0.25)
El mínimo absoluto es −0,25 y se alcanza en x=−1.5

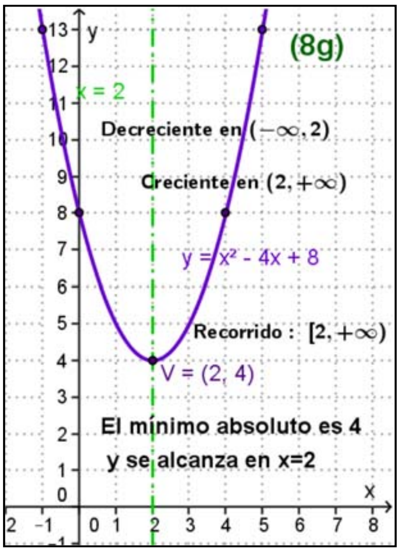

(8b)
Recorrido: (−∞, 2.25]
El máximo absoluto es 2,25 y se alcanza en x=2.5
x = 2.5
V = (2.5, 2.25)
y = -x² + 5x - 4
Creciente en (−∞, 2.5)
Decreciente en (2.5, +∞)

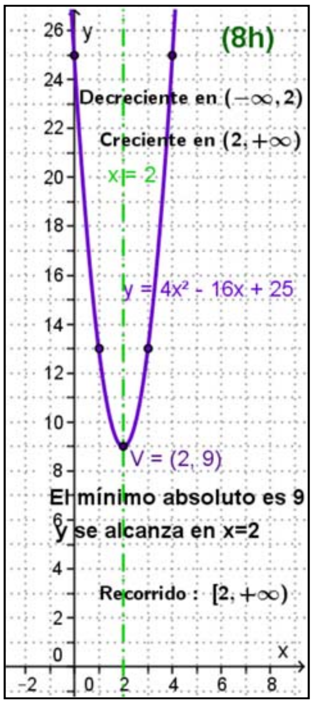

(8c)
x = 0.2
Recorrido: (−∞, −5.8]
El máximo absoluto es −5.8
y se alcanza en x=0.2
V = (0.2, -5.8)
y = -5x² + 2x - 6
Creciente en (−∞, 0.2)
Decreciente en (0.2, +∞)

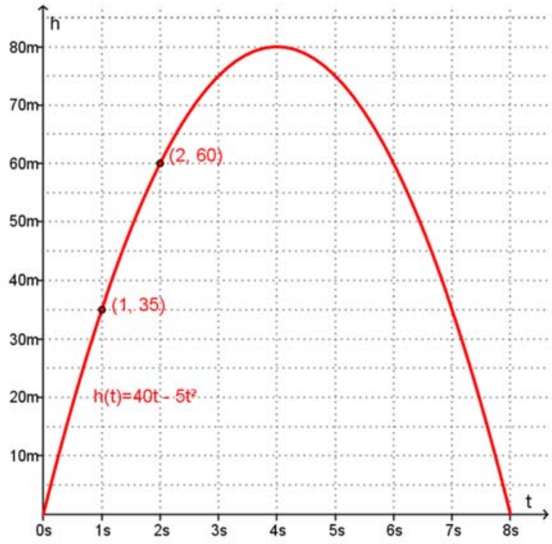

(8d)
x = 0.5
Recorrido: (−∞, −2.75]
V = (0.5, -2.75)
El máximo absoluto es −2.75
y se alcanza en x=0.5
y = -x² + x - 3
Creciente en (−∞, 0.5)
Decreciente en (0.5, +∞)


(8e)
x = -1/3
y = 3x² + 2x + 5
Recorrido : [14/3, +∞)
V=(-1/3, 14/3)
Decreciente en (−∞, −1/3)
Creciente en (−1/3, +∞)
El mínimo absoluto es −0,25 y se alcanza en x=−1.5


(8f)
Recorrido: (−∞, 1]
V = (1, 1)
x = 1
El máximo absoluto es 1
y se alcanza en x=1
y = -2x² + 4x - 1
Creciente en (−∞, 1)
Decreciente en (1, +∞)


(8g)
x = 2
Decreciente en (−∞, 2)
Creciente en (2, +∞)
y = x² - 4x + 8
Recorrido : [2, +∞)
V = (2, 4)
El mínimo absoluto es 4
y se alcanza en x=2


(8h)
Decreciente en (−∞, 2)
Creciente en (2, +∞)
x = 2
y = 4x² - 16x + 25
V = (2, 9)
El mínimo absoluto es 9
y se alcanza en x=2
Recorrido : [2, +∞)



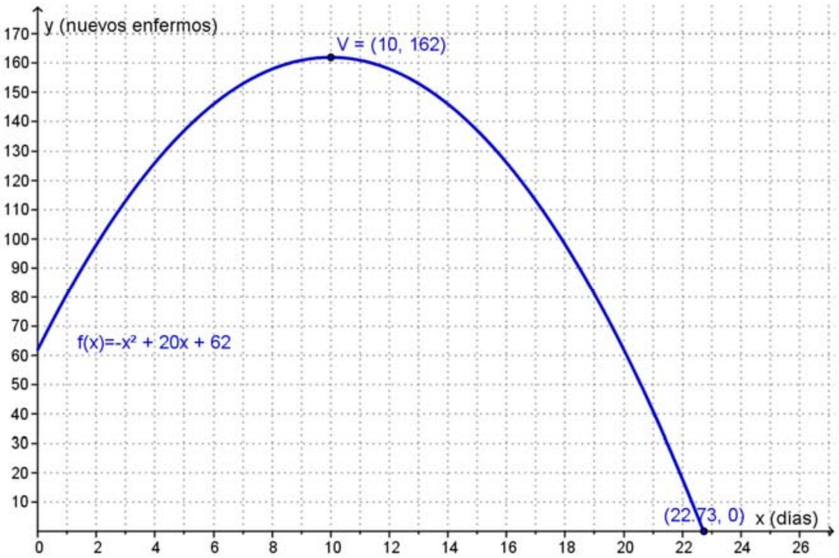
(9)

a) Al cabo de 1 segundo se encuentra a 35 m de altura y después de 2 segundos a 60 m de altura.

b) A los 8 segundos

c) La altura máxima es 80 metros y se alcanza a los 4 segundos.

(10)



a) A los 10 días

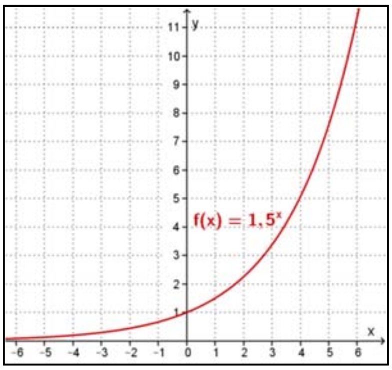
b) 162 personas

c) En el 23º día

(11) Relación de proporcionalidad inversa

x (número de personas que pagan la excursión)	10	20	30	40	45	60
y (precio por persona)	54	27	18	13,50	12	9

$$y = f(x) = \frac{540}{x}$$



(12) La TVM en [0,1] es 0,5

La TVM en [2,3] es 1,125

La TVM en [5,6] es aproximadamente 3,8

(13) $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(14) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55

(15) **(a)** $a_n = (-1)^{n+1} \cdot n$ **(b)** $b_n = (-1)^n \cdot 2n$

(16) 3,73; 3,77; 3,81; 3,85; 3,89; 3,93; 3,97; 4,01 $a_n = 3{,}69 + 0{,}04n$ $a_{37} = 5{,}17$

(17) 125; 50; 20; 8; 3,2; 1,28; 0,512; 0,2048 $a_n = 125 \cdot 0{,}4^{n-1}$ $a_{20} \approx 0{,}000001$

(18) Fórmula del capital final después de n años: $C_F = 4000 \cdot 1{,}03^n$

Capital final después del 1er año: 4120 €

Capital final después del 2º año: 4243,60 €

Capital final después del 3er año: 4370,91 €

Capital final después del 4º año: 4502,04 €

Capital final después del 5º año: 4637,10 €

(19) **(a)** $5, 0, -5, -10, -15$. Es una progresión aritmética de diferencia −5

(b) $0, \frac{3}{2}, \frac{8}{3}, \frac{15}{4}, \frac{24}{5}$

(c) $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27. Es una progresión geométrica de razón 3

(d) $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}$

(20) **(a)** $a_n = 1{,}1n + 2{,}2$ $a_{10} = 13{,}2$

(b) $b_n = n - \frac{3}{4}$ $b_{10} = \frac{37}{4}$

(c) $c_n = 0{,}25 \cdot 3^{n-1}$ $c_{10} = 4920{,}75$

(d) $d_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$ $d_{10} = -1536$