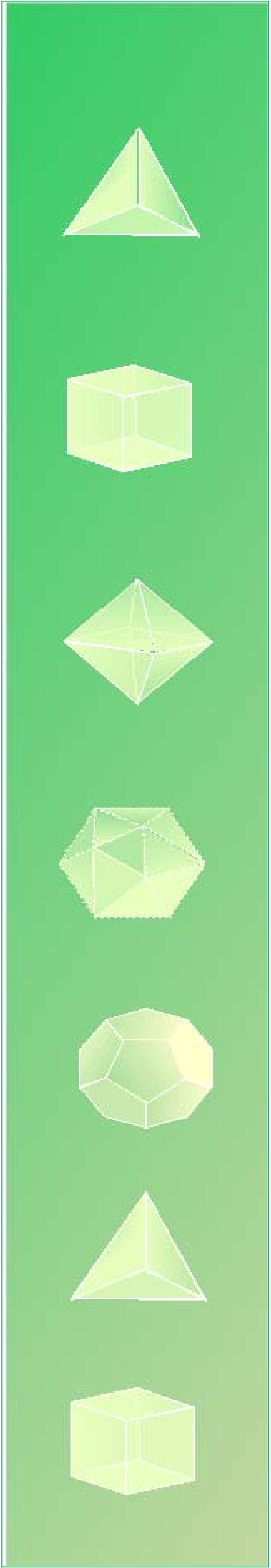


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Andalucía

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Ismael Montero Penido

Fernando Merchán Murillo

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \text{ para } x \neq -1.$$

a) **[1.5 puntos]** Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.
b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Problema A.2:

[2.5 puntos] Sea la función $f\colon(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$. (Sugerencia: cambio de variable $t = e^x$).

Problema A.3:

[2.5 puntos] Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a + d = 1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema A.4:

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) **[1.25 puntos]** Halla los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2.
b) **[1.25 puntos]** Determina la posición relativa de la recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Autor: Fernando Merchán Murillo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Considera la función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = (x-a)e^x}$.

a) **[1.25 puntos]** Determina $\boldsymbol{a}$ sabiendo que la función tiene un punto crítico en $\boldsymbol{x = 0}$.

b) **[1.25 puntos]** Para $\boldsymbol{a = 1}$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de $\boldsymbol{f}$.

Problema B.2:

Considera las funciones $f: (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$.

a) **[1 punto]** Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x = 1$ y la recta $x = 3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).

b) **[1.5 puntos]** Determina el área del recinto anterior.

Problema B.3:

[2.5 puntos] Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$, considera el sistema de ecuaciones lineales dado por $X^tA = B^t$, donde X^t, B^tdenotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

Problema B.4:

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) **[1.25 puntos]** Halla el área de dicho triángulo.

b) **[1.25 puntos]** Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Considera la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2+3x+4}{2x+2} \text{ para } x \neq -1.$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Solución:

a) Antes de calcular las asíntotas estudiamos el dominio de la función, puesto que donde se anule el denominador tendré una discontinuidad: $2x+2=0 \to x=-1$.

- **Asíntota vertical:** El punto a estudiar es $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Por lo tanto, existe una asíntota vertical en $\boldsymbol{x=-1}$.

- **Asíntota horizontal:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \frac{1+0+0}{0+0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Y tenemos que comprobar la existencia de asíntotas oblicuas.

- **Asíntotas oblicuas**: Estas asíntotas son de la forma $y=mx+n$:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} =$$

$$= \frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2+3x+4}{2x+2} - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3x+4-x(x+1)}{2x+2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+4}{2x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{2}{x}} = \frac{2+0}{2+0} = 1$$

Existe **asíntota oblicua** y esta es: $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 1}$.

b) Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento tenemos que calcular la derivada de la función y estudiar su signo:

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}\rightarrow f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+2)-2(x^2+3x+4)}{(2x+2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=\frac{2(x^2+2x-1)}{2^2(x+1)^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{(x^2-2x-1)}{2(x+1)^2}$$

Para estudiar el signo de la derivada tendremos en cuenta:

- Dominio de la función: $Dom\ f: \mathbb{R}-\{-1\}$
- $f'(x)=0\rightarrow \frac{(x^2+2x-1)}{2(x+1)^2}=0\rightarrow x^2+2x-1=0\rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$

$$x_1=-1+\sqrt{2}$$
$$x_2=-1-\sqrt{2}$$

Estudiamos el signo:

	$-\infty$ $\quad$ $-1-\sqrt{2}$	$-1-\sqrt{2}$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ $-1+\sqrt{2}$	$-1+\sqrt{2}$ $\quad$ $+\infty$
x^2-2x-1	+	–	–	+

No tenemos en cuenta el signo del denominador, puesto que: $(x+1)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Los intervalos de crecimiento son: $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$.

Los intervalos de decrecimiento son: $(-1-\sqrt{2},-1)$ ∪ (-1, $-1+\sqrt{2}$).

Problema A.2:

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. *Halla la primitiva de* f *cuya gráfica pasa por el punto* $(1,1)$. *(Sugerencia: cambio de variable* $t=e^x$*).*

Solución:

Sea $F(x)$ la función primitiva que se busca.

En lugar de realizar el cambio que sugieren en el enunciado, vamos a optar por otro: $e^x=1-t$:

$$F(x)=\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx=\begin{bmatrix} e^x=1-t \\ e^x dx=-dt \\ dx=\dfrac{dt}{t-1}\end{bmatrix}=\int\left(\frac{1+1-t}{1-(1-t)}\cdot\frac{dt}{t-1}\right)=\int\frac{2-t}{t(t-1)}dt$$

$$\frac{2-t}{t(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}=\frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}$$

Como la primera fracción y la última han de ser iguales y tienen el mismo denominador, igualo sus numeradores:

$$2-t=A(t-1)+Bt$$

Para $t=0$: $A=-2$

Para $t=1$: $B=1$

Por lo tanto, retomando la integral:

$$F(x)=\int\frac{2-t}{t(t-1)}dt=\int\left(\frac{-2}{t}+\frac{1}{t-1}\right)dt=-2ln|t|+ln|t-1|+C=$$

Y deshaciendo el cambio:

$$=-2ln|1-e^x|+ln|e^x|+C$$

Como, según el enunciado, $F(x)$ para por el punto $P(1,1)$:

$$F(1)=1\to F(1)=-2ln|1-e^1|+ln|e|+C=^{*}-2\ln(e-1)+1+C=1\to$$
$$C=2\ln(e-1)$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{F(x)=-2ln|1-e^x|+ln|e^x|+2\ln(e-1)}$$

*Nótese que cuando tenemos $ln|1-e^1|\to 1-e<0$, por lo tanto, quitamos el valor absoluto y lo colocamos de forma positiva en el siguiente paso: $\ln(e-1)$.

Autor: Fernando Merchán Murillo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *tales que* $a + d = 1$, *tienen determinante 1 y cumplen* $AX = XA$, *siendo* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

Sean: $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplicamos: $AX = XA \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$

De la multiplicación obtenemos:

$$\begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Según el enunciado:

$$|X| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1.$$

Tenemos:

$$\begin{cases} E_1: a + d = 1 \\ E_2: ad - bc = 1 \\ E_3: a = d \\ E_4: b = -c \end{cases} \to \begin{cases} De\ E_1\ y\ E_3: a = d = \dfrac{1}{2} \\ De\ E_2, E_3\ y\ E_4: a^2 + c^2 = 1 \to \end{cases}$$

$$\to \left(\frac{1}{2}\right)^2 + c^2 = 1 \to c^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \to c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si $c = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces, como $b = -c$, entonces $b = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$

Hay dos soluciones:

$$\boldsymbol{X_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}.$$

Problema A.4:

Considera la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ *y los planos* $\pi_1 \equiv x = 0$ *y* $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) *Halla los puntos de la recta* r *que equidistan de los planos* π_1*y* π_2.
b) *Determina la posición relativa de la recta* r *y la recta intersección de los planos* π_1 *y* π_2.

Solución:

a) Dada la recta: $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$. Donde $P = (2-t, 2+3t, 1+t)$ es un punto genérico perteneciente a la recta r.

Y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.
La distancia del punto genérico P (perteneciente a la recta) a los dos planos tiene que ser la misma, por tanto:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \rightarrow \frac{|2-t|}{\sqrt{1^2+0+0}} = \frac{|2+3t|}{\sqrt{0+1^2+0}} \rightarrow |2-t| = |2+3t|$$

Por lo tanto tengo dos opciones:

- $2 - t = 2 + 3t \rightarrow 4t = 0 \rightarrow t = 0 \rightarrow P_1 = (2, 2, 1)$
- $2 - t = -2 - 3t \rightarrow -2t = 4 \rightarrow t = -2 \rightarrow P_2 = (4, -4, -1)$

Los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1y π_2 son:

$$\boldsymbol{P_1 = (2, 2, 1)} \text{ y } \boldsymbol{P_2 = (4, -4, -1)}.$$

b) Para estudiar la posición relativa de la recta r con la recta de intersección de los planos π_1 y π_2:

- Tomamos un punto de la recta r: $P_1 = (2, 2, 1)$ y el vector director de dicha recta: $\vec{v} = (-1, 3, 1)$
- La recta s (intersección de los dos planos dados será:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = \lambda \end{cases}$$

Tomamos un punto cualquiera de dicha recta: $P_3 = (0, 0, 0)$ y su vector director: $\vec{w} = (0, 0, 1)$.
Observamos que: $\vec{v} \neq \vec{w}$, por lo tanto las dos rectas no son paralelas ni coincidentes.

Calculamos el vector $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, 2, 1)$

Para ver si las rectas pertenecen al mismo plano:

$$\left[\overrightarrow{P_1P_3}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - (-2) = 8 \neq 0.$$

La recta r y la recta intersección de los planos π_1 y π_2, no son coplanarias, son **rectas que se cruzan**.

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = (x-a)e^x$.

a) *Determina* a *sabiendo que la función tiene un punto crítico en* $x = 0$.

b) *Para* $a = 1$, *calcula los puntos de inflexión de la gráfica de* f.

Solución:

a) Sea *la función* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = (x-a)e^x$.

Si sabemos que $x = 0$ es un punto crítico, entonces: $f'(0) = 0$

Por lo que calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x + (x-a)e^x = e^x(1 + x - a)$$

Imponemos que $f'(0) = 0$.

$$f'(0) = e^0(1-a) = 0 \to a = 1$$

El valor de $\boldsymbol{a = 1}$ para que la función tenga un punto crítico en $x = 0$.

b) Para $a = 1$, *la función dada* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = (x-a)e^x$.

Para obtener los puntos de inflexión tengo que calcular la derivada segunda e igualarla a cero.

$$f'(x) = xe^x$$

$$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

Hacemos $f''(x) = 0$: $f''(x) = e^x(1+x) = 0$ →Tenemos dos opciones:

- $e^x = 0 \to$ Para esta ecuación no existe solución.
- $(1+x) = 0 \to x = -1$.

Para demostrar la validez de la solución comprobamos el dominio de $f(x)$. $Dom\ f = \mathbb{R}$

La ordenada resulta de obtener:

$$f(-1) = (-1-1)e^{-1} = \frac{-2}{e}.$$

Por lo tanto:

Las coordenadas del punto de inflexión son: $\boldsymbol{PI = \left(-1, \frac{-2}{e}\right)}$.

Problema B.2:

Considera las funciones $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.

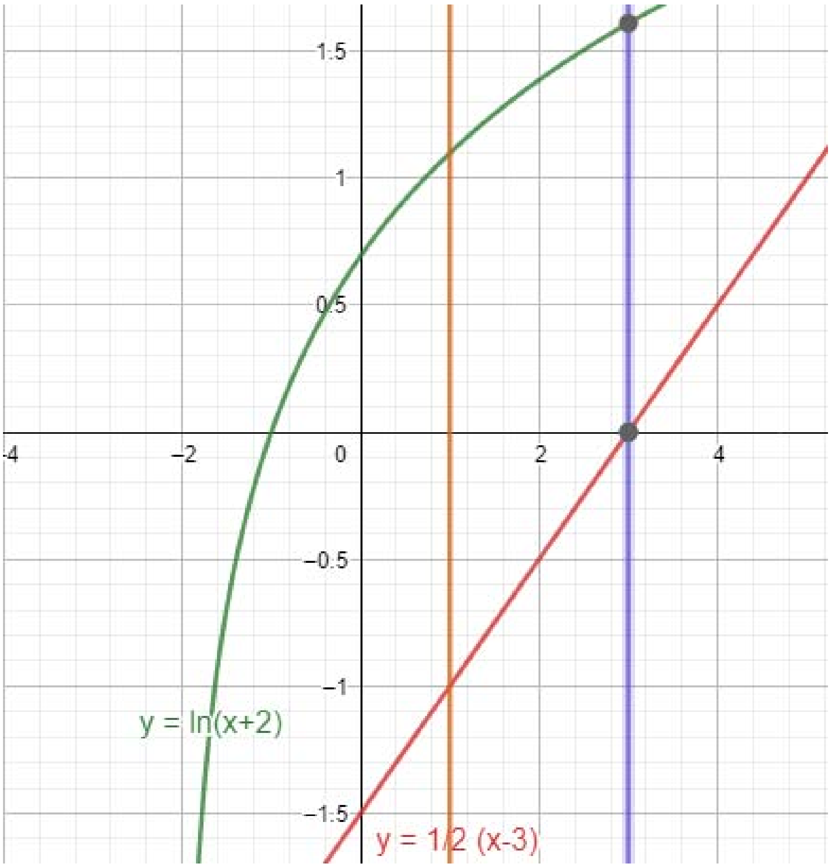
a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).
b) Determina el área del recinto anterior.

Solución:

a) Sean las funciones $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\ln(x+2)$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.

En primer lugar, igualaremos a cero ambas ecuaciones para ver si cortan al eje x entre la recta $x=1$ y la recta $x=3$.

- $\ln(x+2)=0\to x+2=1\to x=-1$. $f(x)$ queda fuera del intervalo $(1,3)$, por lo tanto bastaría con darle un valor para saber el signo de la función y saber si se encuentra por encima o por debajo del eje x: $f(2)>0$
- $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)=0\to x=3$, se trata de una recta, como su pendiente es positiva, es creciente, por lo tanto sabemos que se encuentra por debajo del eje x.



Autor: Fernando Merchán Murillo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

b) Llamaremos A_1 al área que forma la función $f(x) = \ln(x+2)$ por encima del eje X, y A_2 al área que forma la función $g(x) = \frac{1}{2}(x-3)$ por debajo del eje X:

$$A_1 = \int \ln(x+2)\,dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x+2) \to du = \dfrac{1}{x+2}dx \\ dv = dx \to v = x \end{bmatrix} = xln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}dx =$$

$$= xln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = xln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}dx = xln(x+2) - \int \frac{x+2}{x+2}dx -$$

$$- \int \frac{-2}{x+2}dx = xln(x+2) - \int dx + 2\int \frac{1}{x+2}dx = xln(x+2) - x + 2\,ln(x+2) + C =$$

$$= (x+2)\,ln(x+2) - x + C$$

$$A_2 = \int \frac{1}{2}(x-3)dx = \frac{1}{2}\int (x-3)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - 3x\right) + C = \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + C$$

Por lo tanto el área total será:

$$A_{TOTAL} = A_1 + A_2 = [(x+2)\ln(x+2) - x]_1^3 + \left|\left[\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2}\right]_1^3\right| = [(5\ln 5 - 3) - (3\ln 3 - 1)] +$$

$$+ \left|\left(\tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{2}\right)\right| = -1 + \ln\left(\tfrac{5^5}{3^3}\right) u^2.$$

El área total de la superficie que encierran las curvas es:

$$\boldsymbol{A = -1 + \ln\left(\frac{5^5}{3^3}\right) u^2}$$

Problema B.3:

Dada las matrices $A=\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2m^2-1\\ m\\ 1\end{pmatrix}$, *considera el sistema de ecuaciones lineales dado por* $X^tA=B^t$, *donde* X^t, B^t*denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de* m.

Solución:

Si $A=\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, llamaremos traspuesta de A a: $M=A^t=\begin{pmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Operando el sistema de ecuaciones lineales obtenemos:

$$X^tA=B^t \Leftrightarrow (X^tA)^t=(\mathrm{B^t})^t \Leftrightarrow A^t(X^t)^t=B \Leftrightarrow A^tX=B \Longrightarrow MX=B$$

Resolvemos:

$$|M|=\begin{vmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2-m)m+2m-1+m-[m^2(2m-1)+2-m+1]=$$

$$=-m^2+5m-1-2m^3+m^2+m-3=-2m^3+6m-4$$

Comprobamos los valores de "m" que hacen $|M|=0$:

$-2m^3+6m-4=0\rightarrow$ Resolvemos por Ruffini:

	-2	0	6	-4
$m=1$		-2	-2	4
	-2	-2	4	0

$$-2m^2-2m+4=0\rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{-4}=\begin{cases} m_2=1\\ m_3=-2\end{cases}$$

Para: $M=\begin{pmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; $M'=\begin{pmatrix}2-m & 1 & m & 2m^2-1\\ 1 & m & 1 & m\\ 2m-1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

- Si: $m\neq -2$ y $m\neq 1$:

$$|M|\neq 0\rightarrow\begin{cases} rg(M)=3\\ rg(M')=3\\ n^{\underline{o}}\ incógnitas=3\end{cases}$$

Como $rg(M)=rg(M')=n^{\underline{o}}\ incógnitas$, se trata de un Sistema **Compatible Determinado** y, por tanto, hay una única solución

- Si: $m = -2$ y $m \neq 1$:

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Estudiamos el rango de M:</u>

Como $|M| = 0 \rightarrow rg(M) < 3$

$|4| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

Por lo tanto $rg(M) = 2$.

<u>Estudiamos el rango de M':</u>

$|M'| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 7 + 10 - (70 - 8 - 1) \neq 0$

Por lo tanto $rg(M') = 3$

Para $m = -2$, como $rg(M) \neq rg(M')$, se trata de un Sistema **Incompatible** y, por lo tanto, no existe ninguna solución.

- Si: $m \neq -2$ y $m = 1$:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$|1| \neq 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Resulta fácil demostrar que:

Como $rg(M) = rg(M') = 1 < nº\ incógnitas$, se trata de un Sistema **Compatible Indeterminado** y, por lo tanto, existen infinitas soluciones, ya que encontramos 2 grados de libertad.

Resumiendo:

Si $m \neq -2;\ 1$	$rg(A) = rg(A') = 3$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $m = -2$	$rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3$	Incompatible (No hay solución)
Si $m = 1$	$rg(A) = rg(A') = 1$	Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

Problema B.4:

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0), B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.

a) Halla el área de dicho triángulo.
b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A.

Solución:

a) Si los puntos que forman el triángulo son: $A(1,1,0), B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$, uso cualquiera de ellos para calcular dos vectores cualesquiera, pero con origen común:

$$\overrightarrow{AB} = (0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1,1,1)$$

Y calculo su producto:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j - (k + 2i) = -3i - 2j - k$$

Por lo tanto, las coordenadas serán:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3,-2,-1)$$

Y el área del triángulo será:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{14}u^2$$

Por lo tanto, el área del triángulo es:

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\sqrt{14}\, u^2}$$

b) Llamaremos $\hat{A} = ang(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puesto que para calcular el ángulo en el vértice A, necesitaremos los vectores que tienen como origen dicho vértice.

Para calcular el ángulo que forman: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot cos\hat{A}$.

Sustituimos:

$$(0,-1,2) \cdot (-1,1,1) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot cos\hat{A} \rightarrow$$
$$\rightarrow 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot cos\hat{A} \rightarrow$$
$$\rightarrow cos\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{cos\hat{A} = \frac{\sqrt{15}}{15}}$$

Autor: Fernando Merchán Murillo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones
con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

[2.5 puntos] Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el rectángulo comprendido entre la gráfica de f y la recta $y=0$.

Problema A.2:

[2.5 puntos] Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple $f(x)=\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1,0)$.

Problema A.3:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{cases}$

a) **[1.5 puntos]** Discute el sistema según los valores de m.

b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

Problema A.4:

Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$, $\vec{v}=(1,-2,-1)$ y $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales

a) **[0.75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) **[0.75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

c) **[1 punto]** Para $\alpha=8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones
con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

[2.5 puntos] Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} sen(x) + ax + b & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b

Problema B.2:

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xe^{-x^2}$

a) **[1.25 puntos]** Calcula los puntos de corte de la gráfica f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).
b) **[1.25 puntos]** Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Problema B.3:

[2.5 puntos] Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Problema B.4:

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv \frac{z+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

a) **[1.5 puntos]** Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.
b) **[1 punto]** Para $k = 1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Autor: Ismael Montero Penido
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el rectángulo comprendido entre la gráfica de f y la recta $y=0$.

Solución

Dibujemos primero la función $f(x)$.

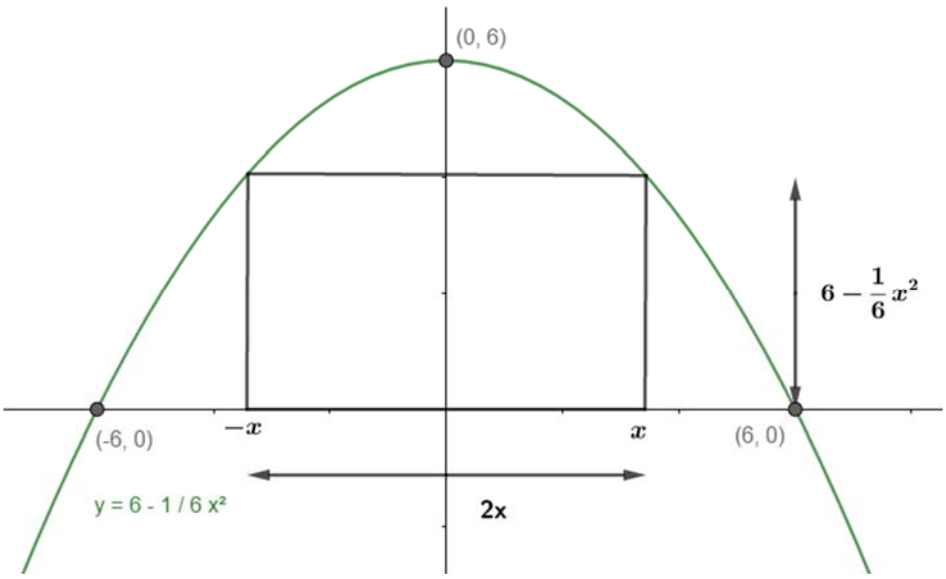
Al tratarse de un polinomio de 2º grado, su representación gráfica será una parábola. Para ello, vamos a analizar dos elementos claves: vértice y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

- **Cálculo del vértice**
  El cálculo del vértice podemos hacerlo derivando la función e igualando a 0. Otro modo, que será el que vamos a utilizar, es usar la expresión del vértice $V(x_v, y_v)$ donde $x_v=-\frac{b}{2a}$ e $y_v=f(x_v)$
  $x_v=-\frac{0}{2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}=0$ y por tanto $y_v=6-\frac{1}{6}\cdot 0=6$.
  Luego el vértice de la parábola es $V(0,6)$.

- **Puntos de corte con OX $(y=0)$**
  Resolvemos la ecuación $6-\frac{1}{6}x^2=0$, obteniendo dos resultados: $x=\pm 6$.
  Luego los puntos de corte con el eje OX son $P_1(6,0)$ y $P_2(-6,0)$.

- **Punto de corte con OY $(x=0)$**
  Este punto lo tenemos calculado de antes, pues coincide con el vértice de la función.

Así que su representación gráfica queda tal como se muestra en la siguiente imagen.



Denotemos la **base** del rectángulo por $2x$ y si observamos la función detenidamente, vemos que la **altura** es, precisamente, la función del problema, $6-\frac{1}{6}x^2$.

Por tanto, el área a maximizar es $A(x)=2x\cdot\left(6-\frac{1}{6}x^2\right)=12x-\frac{1}{3}x^3$

Derivamos la función e igualamos a cero para hallar su punto crítico:

$$A'(x)=12-x^2;$$
$$12-x^2=0;$$
$$x^2=12;$$
$$x=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$$

Descartamos el signo negativo, pues estamos tratando con unidades de medida que son positivas.

Así que nuestro posible máximo es $x=2\sqrt{3}$

Comprobemos que, efectivamente, este punto hace máximo al área del rectángulo, sustituyendo dicho punto en la segunda derivada y comprobando que ésta sea menor que cero.

$A''(x)=-2x$

Sustituimos el valor anterior en la segunda derivada.

$A''(2\sqrt{3})=-2\cdot2\sqrt{3}=-4\sqrt{3}<0$

Por tanto $x=2\sqrt{3}$ es un punto que hace máxima la función.

La base del rectángulo es $2x=2\cdot2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\,u$ y la altura $h=6-\frac{1}{6}\left(2\sqrt{3}\right)^2=6-2=4\,u$.

La base del rectángulo es $\boldsymbol{2x=4\sqrt{3}\,u}$ y la altura $\boldsymbol{h=4\,u}$.

(Donde u denota unidades)

Problema A.2:

Determina la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple $f(x) = \frac{ln(x)}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de f pasa por el punto $(1, 0)$.

Solución

Como sabemos que f es derivable, nos aseguramos de que la función del problema se puede integrar para obtener $f(x)$.

Por otro lado, sabemos que f pasa por $(1, 0)$, lo que significa que $f(1) = 0$, que aplicaremos una vez hallamos resuelto la integral.

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{\ln(\mathrm{x})}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-1/2} \ln(x)\, dx$$

Observamos que esta integral podemos resolverla utilizando el método de integración por partes.

Vamos a encontrar u y dv tal que $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$$\begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = x^{-1/2}\, dx & v = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x} \end{bmatrix}$$

Así que:

$f(x) = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - \int \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

$= 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 2 \cdot 2\, \sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + C$, donde $C \in \mathbb{R}$

Vamos a aplicar la condición anteriormente citada; es decir, $f(1) = 0$

$$f(1) = 2\sqrt{1} \cdot \ln 1 - 4\sqrt{1} + C = 0;$$

$$-4 + C = 0;$$

$$C = 4$$

La función que nos pide en el problema es $\boldsymbol{f(x) = 2\sqrt{x} \cdot \ln(x) - 4\sqrt{x} + 4}$.

Autor: Ismael Montero Penido
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.3:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de m.

b) Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

Solución

a) A continuación, vamos a discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$

Sean A y A' las matrices de los coeficientes y la ampliada, respectivamente, definidas como sigue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{array}\right)$$

Veamos el rango que pueden tomar ambas matrices. Para ello, veamos el determinante de A.

$|A| = 1+2(m+2)^2-3-6+m+2-m-2 = \cdots = m^2+4m.$

Igualamos el resultado a 0 y obtenemos los posibles resultados de la ecuación resultante.

$m^2+4m=0 \;\Rightarrow m=0 \; y \; m=-4.$

Con lo cual se deduce lo siguiente:

- Si $m \neq -4;\ 0 \Rightarrow rg(A)=rg(A')=3 \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $m=-4$

  Reescribimos las matrices A y A' sustituyendo m por -4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Calculamos el menor de orden 2 asociado a la matriz A, formado por la primera y segunda columna y la primera y segunda fila respectivamente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3 \neq 0 \Rightarrow rg(A)=2$$

Calculamos ahora el determinante del menor de orden 3 asociado a A' , que está formado por la primera, segunda y tercera columna de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4-12-8-8=-32 \; \neq 0 \Rightarrow rg(A')=3$$

Por tanto, si $m=-4$ los rangos de ambas matrices son distintos, con lo que el sistema es incompatible.

- Si $m=0$

  Reescribimos las matrices A y A' sustituyendo m por 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Procediendo como antes, calculamos el menor de orden 2 asociado a la matriz A, formado por la primera y segunda columna y la primera y segunda fila respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

Observemos ahora que el determinante formado por la primera, segunda y cuarta columna de la matriz ampliada es 0, pues tenemos una columna entera de 0, por tanto $rg(A') = 2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, si $m = 0$ tenemos que el rango de ambas matrices es 2, con lo que el sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo:

Si $\boldsymbol{m \neq -4;\ 0}$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 3}$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $\boldsymbol{m = -4}$	$\boldsymbol{rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3}$	Incompatible (No hay solución)
Si $\boldsymbol{m = 0}$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 2}$	Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)

b) Vamos a resolver el sistema para $m = 0$.
Por el apartado anterior, sabemos que el sistema es compatible indeterminado, así que vamos a asignar a la variable z con el parámetro λ, con $\lambda \in \mathbb{R}$; quedando el sistema tal como sigue:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases} \overset{z=\lambda}{\underset{\lambda\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow}} \begin{cases} x + y = -2\lambda \\ 2x + y = \lambda \\ 3x + 2y = -\lambda \end{cases}$$

Eliminamos la tercera ecuación pues es combinación lineal de las dos primeras ($E_3 = E_1 + E_2$), quedándonos con el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = -2\lambda \\ 2x + y = \lambda \end{cases}$$

Vamos a resolver este sistema por reducción, al tratarse de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas solamente. Para ello, restamos la primera ecuación con la segunda.

$$\begin{array}{rrrrrr} & x & + & y & = & -2\lambda \\ - & 2x & + & y & = & \lambda \\ \hline & -x & & & = & -3\lambda \end{array}$$

Por tanto, $x = 3\lambda$.
Sustituimos en la 1ª ecuación:

$$3\lambda + y = -2\lambda;$$
$$y = -5\lambda;$$

Por tanto, las soluciones del sistema son $\{(\boldsymbol{3\lambda},\ \boldsymbol{-5\lambda},\ \boldsymbol{\lambda}),\ \forall\ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\}$.

Problema A.4:

Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$ *y* $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, *donde* α *y* β *son números reales*

a) Determina los valores de α *y* β *para los que* $\vec{w}$ *es ortogonal a los vectores* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

b) Determina los valores de α *y* β *para los que* $\vec{w}$ *y* $\vec{v}$ *tienen la misma dirección.*

c) Para $\alpha = 8$, *determina el valor de* β *para el que* $\vec{w}$ *es combinación lineal de* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$.

Solución

a) Para que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{w}$ tiene que ser paralelo (o proporcional) a $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} = (4, 4, -4)$$

Como $\vec{w} \parallel \vec{u} \times \vec{v} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{4}{\alpha} = -\frac{4}{\beta}$

Igualando dos a dos obtenemos que:

$\boldsymbol{\alpha = 2}$ y $\boldsymbol{\beta = -2}$ para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Observación: *Podríamos haber hecho el problema obligando a que el producto escalar de* $\vec{w}$ *con* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *sea* 0, *pues es la condición para que los vectores sean perpendiculares. Se deja como ejercicio para el alumno.* ($\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ *y* $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$).

b) $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tendrán la misma dirección si $\vec{w} \parallel \vec{v}$ (o si $\vec{w}$ y $\vec{v}$ son proporcionales)

Por tanto, debe cumplirse que $\frac{2}{1} = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{\beta}{1}$

Igualando dos a dos obtenemos que:

$\boldsymbol{\alpha = -4}$ y $\boldsymbol{\beta = -2}$ para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

c) Para que los tres vectores sean combinación lineal debe de cumplirse que el rango de la matriz formada por éstos sea menor que el número de vectores.

$$rg\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} < 3$$

La matriz definida por los 3 vectores, con $\alpha = 8$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 8 & \beta \end{pmatrix}$

Para que el rango sea menor que 3, es necesario que el determinante de la matriz sea 0.

$$|A| = -2\beta + 24 - 4 + 12 + 8 - 2\beta = 0;$$
$$-4\beta + 40 = 0;$$
$$\beta = 10$$

Así que $\boldsymbol{\beta = 10}$ para que $\vec{w}$ sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} sen(x) + ax + b & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{ln(x+1)}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b

Solución:

Sabemos que si f es derivable en $x_0 \Rightarrow f$ es continua en x_0

Así que, vamos a obligar a la función a que primero sea continuidad en $x = 0$ (por ser un punto donde hay un cambio de definición) y luego haremos lo mismo para la derivabilidad.

- **Continuidad en $x = 0$**

i) $f(0) = sen\ 0 + a \cdot 0 + b = b$

ii) Veamos los límites laterales. Empezaremos con el límite cuando x tiende a 0 por la derecha y terminaremos con 0 por la izquierda.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\ (x+1)}{x} = \frac{0}{0} = IND.$$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital para resolver este límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\ (x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$$

Por otro lado

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (sen\ x + ax + b) = b$$

iii) Para que $f(x)$ sea continua se debe verificar que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, así que $\boxed{b = 1}$

- **Derivabilidad en $x = 0$**

Para que $f(x)$ sea derivable, se tiene que cumplir la siguiente igualdad: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$

Calculamos primero la derivada de la función.

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x+a & si \quad x\le 0\\ \frac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0\end{cases}=\begin{cases}\cos x+a & si \quad x\le 0\\ \frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2} & si \quad x>0\end{cases}$$

Veamos los límites laterales de la derivada.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2}=\frac{0}{0}=IND.$$

Aplicamos la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^3+x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\ln(x+1)-\frac{x+1}{x+1}}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(x+1)}{3x^2+2x}=\frac{0}{0}=IND.$$

Volvemos a aplicar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln(x+1)}{3x^2+2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x+1}}{6x+2}=\frac{-1}{2}$$

Por otro lado

$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}(\cos x+a)=\cos 0+a=1+a$

Imponemos la condición de derivabilidad, obteniéndose la siguiente igualdad

$1+a=-\frac{1}{2};$

$a=-\frac{1}{2}-1;$

$\boxed{a=-\frac{3}{2}}$

Para que $f(x)$ sea derivable se tiene que $\boldsymbol{a=-\frac{3}{2}}$ y $\boldsymbol{b=1}$

Problema B.2:

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = xe^{-x^2}$

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Determina $a > 0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0, a]$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) Veamos en primer lugar los puntos de corte con los ejes coordenados.

- **Puntos de corte con OX $(y = 0)$**
  $xe^{-x^2} = 0;$
  $x = 0$

- **Punto de corte con OY $(x = 0)$**
  No hace falta que calculemos este punto de nuevo, pues viene dado en el cálculo anterior, $P(0, 0)$

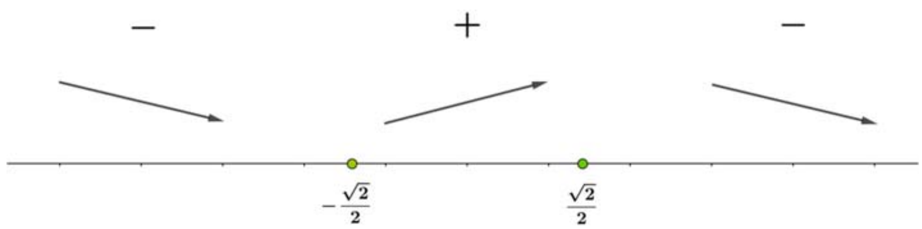
Con lo que el único punto de corte viene dado por $\boldsymbol{P(0, 0)}$.

Calculemos los extremos relativos de la función. Para ello, derivamos $f(x)$ e igualamos a 0 para obtener los puntos críticos.

$$f'(x) = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

$$e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \iff 1 - 2x^2 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \cong \pm 0{,}7$$

Veamos el signo de la derivada con ayuda de la recta real.



Se observa que la función tiene un cambio de signo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, con lo que se deduce que:

La función alcanza su mínimo relativo en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e^{1/2}}\right)$ y su máximo relativo en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e^{1/2}}\right)$

b) Para calcular el área, planteamos la siguiente integral:
$A = \int_0^a xe^{-x^2}dx$

Esta integral es inmediata, sólo nos faltaría multiplicar y dividir por -2

$A = \int_0^a xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^a -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^a = -\frac{1}{2}\cdot\left(e^{-a^2}-1\right)u^2$

Imponemos la condición de que el área debe de ser $\frac{1}{4}\,u^2$

$-\frac{1}{2}\left(e^{-a^2}-1\right) = \frac{1}{4};$

$e^{-a^2} - 1 = -\frac{1}{2};$

$e^{-a^2} = \frac{1}{2};$

$\ln e^{-a^2} = \ln\frac{1}{2};$

$-a^2 \cdot \ln e = \ln 1 - \ln 2\,;$

$a^2 = \ln 2\,;$

$a = \pm\sqrt{\ln 2}\,;$

Descartamos la solución negativa puesto que el enunciado del problema nos dice que $a > 0$

Así que la solución del problema es:

$$\boldsymbol{a = \sqrt{\ln 2}}$$

Problema B.3:

Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución:

Vamos a definir las variables del problema.

$x = ángulo\ menor$

$y = ángulo\ mediano$

$z = ángulo\ mayor$

Como el ángulo menor es la mitad del ángulo mayor, deducimos que $\boxed{x = \frac{z}{2}}$ (1)

La suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo (ángulo mediano), esto es

$\boxed{\frac{z}{2} + z = 2y}$ (2)

Nos faltaría una tercera ecuación para formar nuestro sistema. Como sabemos que los ángulos de un triángulo suman 180° deducimos que $\boxed{\frac{z}{2} + z + y = 180}$ (3)

Sustituyendo (2) en (3) obtenemos:

$2y + y = 180$;

$3y = 180$;

$y = \frac{180}{3} = 60$;

Sustituimos $y = 60$ en (2)

$\frac{z}{2} + z = 120$;

$\frac{3}{2}z = 120$;

$z = 80$;

Por último, sustituimos $z = 80$ en (1)

$z = \frac{80}{2} = 40$

Por tanto, los ángulos que nos piden son:

$\mathbf{80°, 60°}$ **y** $\mathbf{40°}$

Problema B.4:

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-k}{2} = \frac{z}{2}$ *y* $s \equiv \frac{z+1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{1}$

a) *Halla* k *sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.*
b) *Para* $k = 1$*, halla la ecuación general del plano que contiene a* r *y es paralelo a* s*.*

Solución:

a) La información que obtenemos de las rectas es:

$$r: \begin{cases} Punto\ A(2, k, 0) \\ vector\ director\ \overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2) \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} Punto\ B(-1, 1, 3) \\ vector\ director\ \overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 1) \end{cases}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-3, 1-k, 3)$$

Para que las rectas se corten debe de ocurrir que $rg\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_r} \\ \overrightarrow{v_s} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = 2$

Construimos las matrices correspondientes y le estudiamos el rango a cada una, imponiendo que ambas tengan rango 2.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{pmatrix}$$

Observamos el que el menor formado por la primera y segunda columna de M tiene determinante distinto de 0, lo que implica que el rango de M es 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow rg(M) = 2$$

Para que M' tenga rango 2, su determinante debe de ser 0. Veámoslo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 + 2k - 6 - (-6 + 1 - k - 6) = \cdots = 3k + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -2}$$

$\boldsymbol{k = -2}$ para que r y s se corten.

b) Como nos dice el enunciado que r está contenido en el plano que buscamos, uno de los vectores directores de éste es $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, 2)$ y un punto del plano sería el mismo punto de la recta r, $A(2, 1, 0)$.
Por otro lado, como el plano es paralelo a la recta s, podemos tomar $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 1)$ como el segundo vector director del plano.
Con estos elementos, calculamos la ecuación general del plano, que denominaré π.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;$$
$$\pi \equiv z + 2x - 4 - 2y + 2 - (2x - 4 + y - 1 - 2z) = 0\ ;$$
$$\pi \equiv\ -3y + 3z + 3 = 0\ ;$$

Por tanto, el plano que buscamos es $\pi \equiv \boldsymbol{-y + z + 1 = 0}$

Autor: Ismael Montero Penido
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo