MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Asturias

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirante

Ver soluciones en la web de la Universidad de Oviedo: www.uniovi.es

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & = 0 \\ 2x & + & my & & & = m \\ x & & & + & mz & = m \end{array}\right\}$ $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m. (1.25 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m = 1$. (0.75 puntos)
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$. (0.5 puntos)

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2+e^x}$.

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas. (1 punto)
b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$ (1.5 puntos)

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z = 0$ y π_2. Su intersección es la recta $r : \left\{ \begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{array}\right.$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)
b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el $10\,\%$ de las veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos? (1.25 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos? (1.25 puntos)
Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes. (1 punto)

$$A \cdot A\,, \quad A \cdot B\,, \quad A \cdot B \cdot C\,, \quad C \cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior. (1.5 puntos)

2. Dada la curva $y = \dfrac{1}{3 + x^2}$.

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)
b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

3. Sean los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, -1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)
b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)
b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)
c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

Autor: Andrés García Mirantes
Revisado con las soluciones de la Universidad de Oviedo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

PRUEBA A CONVOCATORIA ORDINARIA

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

1. Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{rcrcrl} mx & + & y & - & z & =0 \\ 2x & + & my & & & =m \\ x & & & + & mz & =m \end{array}\right\}$ $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de m.
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $m=1$.
c) Para qué valores de m se tiene la solución $x=0,\ y=1,\ z=1$.

Solución:

Apartado a

Llamamos $A=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 & 0 \\ 2 & m & 0 & m \\ 1 & 0 & m & m \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz del sistema y lo igualamos a 0.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}=0$$

Operando resulta $m^3-m=0$

Dicha ecuación se resuelve sin dificultad factorizando como $m(m^2-1)=0$ de modo que obtenemos las soluciones: $m=\{0,-1,1\}$.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $m \notin \{-1,0,1\}$ el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

Si $m=-1$, $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Haciendo operaciones por filas (F_2+2F_1y F_3+F1) tenemos que la última fila es igual que la segunda, podemos eliminarla y resulta:

$$rango(B)=rango\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}=2=rango\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=rango(A).$$

Como $rango(A)=rango(B)<3$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m=0$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La última columna son ceros por lo que se puede eliminar. $rango(B)=rango\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=rango(A)=\ 2.$

Como $rango(A)=rango(B)<3$ el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Haciendo operaciones por filas ($F_2 - 2F_1$y $F_3 - F1$) tenemos

$rango(B) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Como antes, la última fila es igual que la segunda, podemos eliminarla y resulta:

$rango(B) = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = rango(A)$.

Como $rango(A) = rango(B) < 3$ el sistema es compatible indeterminado.

En resumen:

- Si $\boldsymbol{m} \notin \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ el sistema es **compatible y determinado**.
- Si $\boldsymbol{m} \in \{-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ el sistema es **compatible indeterminado**.

Apartado b

En el caso $m = 1$ ya vimos que es compatible indeterminado y por tanto tiene infinitas soluciones. Vimos además que su matriz ampliada es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que el sistema tiene las mismas soluciones que:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 1 \end{cases}$$

Hay que poner una de las variables como parámetro. Lo más cómodo es z, de modo que hacemos $z = \lambda$

$\begin{cases} x + y - \lambda = 0 \\ -y + 2\lambda = 1 \end{cases}$ De la segunda ecuación obtenemos directamente $y = 2\lambda - 1$ que, llevándola a la primera nos da $x + (2\lambda - 1) - \lambda = 0$ y se obtiene $x = 1 - \lambda$.

La solución general es pues: $(\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda},\ \mathbf{2}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1},\ \boldsymbol{\lambda})$ con $\lambda \in \Re$ arbitrario.

Apartado c

Sustituimos $x = 0, y = 1, z = 1$ en las ecuaciones del sistema. El sistema es $\begin{cases} 0 = 0 \\ m = m \\ m = m \end{cases}$ de donde deducimos que es solución PARA TODO m.

$\boldsymbol{x = 0, y = 1, z = 1}$ es solución PARA TODO $\boldsymbol{m}$.

Problema A.2:

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{2+e^x}$.

a) Calcula su dominio de definición y sus asíntotas.

b) Mediante el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\displaystyle\int \frac{2}{2+e^x}\,dx$

Solución:

Apartado a

La función $f(x) = \frac{2}{2+e^x}$ solo puede no estar definida si se anulara el denominador, puesto que la función exponencial es válida para todos los reales.

Pero $2 + e^x = 0$ solamente si $e^x = -2$ lo que es imposible porque la exponencial es siempre positiva. Por tanto, **su dominio son todos los reales**.

Como es una función continua y su dominio es $\Re$ no tiene asíntotas verticales. Veamos las horizontales.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+\infty} = \frac{2}{+\infty} = 0$ Asíntota horizontal en ∞. Por tanto, no hay asíntota oblicua en ese lado.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{2+e^x} = \frac{2}{2+0} = 1$ Asíntota horizontal en $-\infty$. Así pues, tampoco no hay asíntota oblicua en ese lado.

En resumen, el dominio es todo el campo real, no hay asíntotas verticales ni oblicuas. Las rectas $\boldsymbol{y = 0}$ e $\boldsymbol{y = 1}$ son asíntotas horizontales en $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

Apartado b

Nos sugieren el cambio $t = e^x$ y tenemos pues $dt = e^x dx$ es decir $dx = \frac{dt}{t}$. Sustituyendo en la integral $\int \frac{2}{2+e^x}dx = \int \frac{2}{2+t}\frac{dt}{t}$. Descomponemos en fracciones simples:

$2 = A(t+2) + Bt = (A+B)t + 2A$

Como $2A = 2$ tenemos $A = 1$ y al ser $A + B = 0$ concluimos $B = -1$. De este modo $\frac{2}{t(2+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+2}$ y $\int \frac{2}{t(2+t)}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+2}dt = \ln|t| - \ln|t+2| + C$ donde $\ln$ es el logaritmo neperiano y C es la constante de integración.

Deshaciendo del cambio es

$\int \frac{2}{t(2+t)}dt = \int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+2}dt = \ln|t| - \ln|t+2| + C = \ln|e^x| - \ln|e^x+2| + C.$

Nótese que los valores absolutos son superfluos porque ambas funciones son positivas. Podemos escribir $\ln(e^x) - \ln(e^x+2) + C$ o bien $\ln(\frac{e^x}{e^x+2}) + C$.

$$\boldsymbol{\int \frac{2}{2+e^x}dx = \ln(\frac{e^x}{e^x+2}) + C}$$

Otra posibilidad es usar que $\ln(e^x) = x$ y quedaría $\int \frac{2}{2+e^x}dx = x - \ln(e^x+2) + C$.

Es fácil comprobar, derivando, que todas son primitivas válidas.

Problema A.3:

3. Sean los planos $\pi_1 : x+y+z=0$ y π_2. Su intersección es la recta $r: \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. Calcula:

a) La ecuación del plano π_2 sabiendo que $A(1,1,1) \in \pi_2$. (1.25 puntos)

b) La ecuación de un plano π_1' paralelo a π_1 y que esté a una distancia de $\sqrt{3}$ unidades de la recta r. (1.25 puntos)

Solución:

Apartado a

Tres puntos determinan un plano. Tenemos uno, el punto $A(1, 1, 1)$ y una recta contenida. Solo necesitamos dos puntos de la recta y nos valen dos cualesquiera.

Hay muchas maneras. Por ejemplo, dándole valores a una variable y resolviendo para las demás. Si el problema se complica con una variable, podemos probar con otra.

Haciendo $z = 0$ obtenemos $x = y = 0$, el punto $B(0, 0, 0)$.

Haciendo $z = 1$ obtenemos $x = -1, y = 0$, el punto $C(-1, 0, 1)$

Ya solo tenemos que hacer el plano que pasa por tres puntos.

Tenemos pues dos vectores del plano $\overline{\boldsymbol{BA}}$ = (1, 1, 1) y $\overline{\boldsymbol{BC}}$ = (–1, 0, 1).

El plano, en ecuación de determinante, es: $\pi_2\colon \left\{ \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$

Desarrollando, se obtiene sin dificultad la ecuación implícita:

$$\pi_2 \colon \boldsymbol{x - 2y + z = 0.}$$

Apartado b

Si es paralelo a π_1, será de la forma $\pi'_1\colon x + y + z = D$. El problema consiste, pues, a calcular D.

Como una de las ecuaciones de la recta r es la del plano $\pi_1$ambos son paralelos y a su vez paralelos a π'_1.

La distancia de la recta al plano es pues la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. El punto más fácil de la recta es el origen.

$$\sqrt{3} = d(r, \pi'_1) = \left|\frac{0+0+0-D}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{D}{\sqrt{3}}\right|.$$

Hay dos soluciones, 3 y –3.

Por tanto, son dos los planos $\pi'_{1A}\colon \boldsymbol{x + y + z = 3}$ y $\pi'_{1B}\colon \boldsymbol{x + y + z = -3}$.

Lo cual es lógico, habrá uno a cada lado.

Problema A.4:

4. Un monitor de tenis compra un cañón para lanzar bolas. En las especificaciones del cañón se indica que falla el lanzamiento el 10 % de la veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 bolas lanzadas, se tengan exactamente 5 fallos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho falle 2 veces de los 20 lanzamientos?

Nota: Se pueden dejar indicadas las operaciones en potencias, sin necesidad de realizarlas.

Solución:

Apartado a

Llamemos X a la variable aleatoria "número de fallos".

Se trata de una variable binomial de parámetros 20 y $\frac{10}{100}$ que se denota $\beta(20, \frac{10}{100})$

P(5 fallos) = $P(X = 5)$= $\binom{20}{5} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{15} = 15504 \cdot (0.1)^5 \cdot (0.9)^{15} \approx 0.0319$

***P*(5 fallos)** = $\binom{20}{5} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^5 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{15} \approx \mathbf{0.0319}$

El problema no pide calcular el resultado. Es ambiguo si hace falta desarrollar el número combinatorio.

Apartado b

Es la suma

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{20}{0} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^0 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{20} + \binom{20}{1} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^1 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^{19} + \binom{20}{2} \cdot (\frac{10}{100})^2 \cdot (\frac{90}{100})^{18}$=

= $(0.1)^0 \cdot (0.9)^{20} + 20 \cdot (0.1)^1 \cdot (0.9)^{19} + 190 \cdot (0.1)^2 \cdot (0.9)^{18}$

que aproximadamente es 0.677.

La probabilidad de que como mucho falle 2 veces en 20 lanzamientos es **0.677**

PRUEBA B: CONVOCATORIA ORDINARIA

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Razona, sin hacerlos, si son posibles los siguientes productos matriciales y, si es el caso, indica las dimensiones de las matrices resultantes.

$$A \cdot A, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B \cdot C, \quad C \cdot D$$

b) Calcula las inversas, si existen, de las matrices cuadradas posibles del apartado anterior.

Solución:

a) Dos matrices con los órdenes de AxB y CxD se pueden multiplicar **si y solamente si** el orden de B es igual al de C. En tal caso la matriz resultante tiene el orden de AxD.

Así pues, como A es de orden 3x3 se puede hacer $A{\cdot}A$ y el resultado es de orden 3x3. Como B es de orden 3x2 se puede también hacer $A{\cdot}B$ y el resultado es de orden 3x2. A su vez, C es de orden 3x1 de modo que no se puede hacer $B{\cdot}C$ y por tanto tampoco $A{\cdot}B{\cdot}C$. Sí se puede hacer $C{\cdot}D$ y el resultado es de orden 3x3.

$$A \cdot A \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 3) = (3,3)$$

$$A \cdot B \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 2) = (3,2)$$

$$A \cdot B \cdot C \implies (3, \boxed{3}) \times (\boxed{3}, 2) = (3,2) \implies (3, \boxed{2}) \times (\boxed{3}, 1) \quad \textbf{No}$$

$$C \cdot D \implies (3, \boxed{1}) \times (\boxed{1}, 3) = (3,3)$$

b) Las únicas matrices cuadradas son $A{\cdot}A$ y $C{\cdot}D$.

La primera es $A{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante, por la regla de Sarrus es 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1$$

Su matriz adjunta es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y usando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)^T$ la inversa es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A su vez, $C{\cdot}D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es obviamente 0 (tiene una columna de ceros) de modo que no tiene matriz inversa.

$$\mathbf{(A \cdot A)^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$C{\cdot}D$ no tiene matriz inversa.

Problema B.2:

2. Dada la curva $y = \dfrac{1}{3+x^2}$.

a) Expresa la función $m(x)$ que da la pendiente de la recta tangente a la curva en cada punto x. (1 punto)

b) Calcula el valor x donde se alcanza la máxima pendiente. (1.5 puntos)

Solución:

a) Basta derivar:

$$m(x)=y'(x)=\frac{-2x}{(3+x^2)^2}$$

b) Para calcular el valor de una función, derivamos e igualamos a 0.

$$m'(x)=\frac{-2(3+x^2)^2+2x\cdot 2(3+x^2)2x}{(3+x^2)^4}=\frac{(3+x^2)\left[-2(3+x^2)+8x^2\right]}{(3+x^2)^4}=\frac{-6-2x^2+8x^2}{(3+x^2)^3}=\frac{6x^2-6}{(3+x^2)^3}=0$$

De ahí obtenemos x = +1 y x = –1. Nótese que el denominador es siempre positivo y que tanto la función m como su derivada son continuas en todos los reales.

Para ver si es máximo o es mínimo, debemos resolver la inecuación m' > 0. Damos valores $m'(-2)=18/343>0$. $m'(0)=-6/27<0$. $m'(2)=18/343>0$.

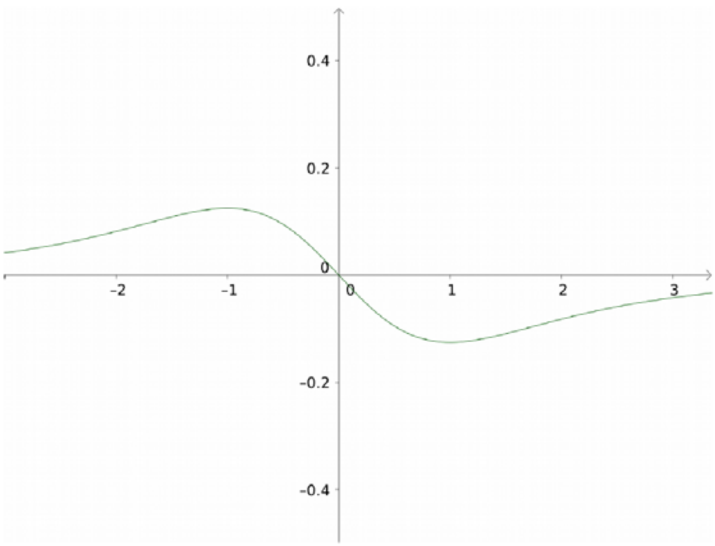
Por tanto, m es creciente en (–∞, –1), decrece en (–1, 1) y vuelve a crecer en (1, +∞). De ello deducimos que el máximo se alcanza en x = –1, (el otro valor que anula a m' es un mínimo).

Como $m(x)$ tiende a 0 cuando x tiende a infinito y m(–1) = 1/8:

(–1, 1/8) es máximo absoluto.

Es más claro dibujando la función, para lo que damos los valores donde se anula la derivada y los extremos del dominio: m(–∞) = 0; m(–1) = 1/8; m(1) = –1/8; m(+∞) = 0.

Como m(1) = –1/8, el punto (1, –1/8) es un mínimo absoluto.



Problema B.3:

3. Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,-1,-1)$. Calcula:

a) La ecuación del plano π que hace que los puntos A y B sean simétricos respecto a él. (1.5 puntos)

b) Los puntos C y D que dividen el segmento AB en tres partes iguales. (1 punto)

Solución:

a) Calculamos el punto medio de ambos, al que llamaremos M.

$M = (A + B)/2 = [(1, 1, 1) + (1, -1, -1)]/2 = (1, 0, 0)$. El plano π debe pasar por ese punto.

A su vez, el vector perpendicular debe ser el vector $\overline{AB}$, que es $(0, -2, -2)$.

El plano es, por tanto $-2y - 2z = D$ y pasa por M. Sustituimos M con lo que $-2(0) - 2(0) = D = 0$. El plano es $-2y - 2z = 0$, o, multiplicando por $-1/2$:

$$\Pi: y + z = 0$$

b) Ya tenemos el vector $\overline{AB}$. Basta sumarlo.

$$C = A + \frac{1}{3}AB = (1,1,1) + \frac{1}{3}(0,-2,-2) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Y por tanto

$$D = C + \frac{1}{3}AB = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}(0,-2,-2) = \left(1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Si volviéramos a sumar $\overline{AB}$, obtendríamos B, como debe ser.

C = (1, 1/3, 1/3)

D = (1, –1/3, –1/3)

Problema B.4:

4. Pedro y Luis son aficionados a los dardos. Pedro acierta en el centro el 10 % de las veces y cada vez que acierta gana 400 €. Luis acierta en el centro el 20 % de las veces y cada vez que acierta gana 100 €. Cuando fallan no ganan ni pierden nada. Tira cada uno dos dardos. Calcula las siguientes probabilidades:

a) Que Luis acierte en el centro las dos veces. (0.75 puntos)
b) Que Pedro acierte en el centro una sola vez. (1 punto)
c) Que entre los dos hayan ganado 600 €. (0.75 puntos)

Solución:

Llamamos P a la variable aleatoria "número de veces que acierta Pedro" y L a la variable aleatoria "número de veces que acierta Luis". Por el enunciado del problema, sabemos que son binomiales, más concretamente $P = \beta(2, \frac{10}{100})$ y $L = \beta(2, \frac{20}{100})$.

a) Nos piden $P(L = 2) = P(\beta(2, 0.2) = 2)$, que por definición es $\binom{2}{2} \cdot \left(\frac{20}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{80}{100}\right)^0 = \frac{1}{25}$, igual a:

$P(L = 2) = 1/25 = 0.04$.

b) Es $P(P = 1) = P(\beta(2, 0.1) = 1)$, que por definición es $\binom{2}{1} \cdot \left(\frac{10}{100}\right)^1 \cdot \left(\frac{90}{100}\right)^1 = \frac{2 \cdot 9}{10 \cdot 10} = \frac{9}{50}$, igual a

$P(P = 1) = 9/50 = 0.18$.

c) Ahora ambos tiran de manera independiente. Nos piden la probabilidad de que Pedro acierte una vez y Luis 2, que, como son sucesos independientes, es el producto de las probabilidades.

P(ganar 600 € entre los dos) = $P(L = 2) \cdot P(P = 1)$

La primera era 1/25 y la segunda 9/50, ambas ya calculadas.

El producto es 9/1250 = 0.0072.

P(ganar 600 € entre los dos) = $P(L = 2) \cdot (P = 1) = 9/1250 = 0.0072$.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

MATEMÁTICAS II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & (a-1)y & + & az & = & 2 \\ -x & & & + & z & = & 2 \end{array}\right.$

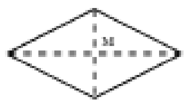
a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$. (1.5 puntos)
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$. (1 punto)

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (1 punto)
b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
c) Haz un esbozo de su gráfica. (0.5 puntos)

3. Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi: z = 0$.

a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)
b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de rayas. (0.75 puntos)
b) Las dos sean del mismo tipo. (1 punto)
c) Al menos una de ellas no sea de rayas. (0.75 puntos)

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)

b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

3. Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0, 1, 1)$. Calcula:

a) El punto P intersección del plano π y de la recta r. (1.25 puntos)

b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π. (1.25 puntos)

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)

b) La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(x) = P(Z \le x)$, $F(-0.8416) = 0.2$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(0.4) = 0.6554$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

PRUEBA A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

1. Dado el sistema $\begin{cases} x + y + az = a \\ x + (a-1)y + az = 2 \\ -x + z = 2 \end{cases}$

a) Estudia y clasifica el sistema según los valores de $a \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvelo, si es posible, para el caso $a = 2$.

Solución:

Apartado a)

Llamamos $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a-1 & a & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ a las matrices de coeficientes y ampliada a respectivamente.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Operando resulta $(a-1+0-a)-(-a^2+a+1)=a^2-a-2$

$a^2 - a - 2 = 0$ da como soluciones $a = -1$y $a = 2$.

Como el sistema es cuadrado, ya tenemos la primera conclusión:

Si $a \notin \{-1, 2\}$ el sistema es compatible y determinado.

Lo más sencillo es hacer cada caso por separado, así trabajamos con números en vez de letras.

Si $a = -1$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Haciendo operaciones por filas ($F_2'=F_2-F_1$ y $F'_3=F_1+F_3$) tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Finalmente, haciendo ceros en la última fila con $F''_3=F'_2+3F'_3$ queda $rg(B)=rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

La submatriz de los coeficientes tiene rango 2 y la ampliada, rango 3, con lo que el sistema es incompatible.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisado con las soluciones de la Universidad de Oviedo
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Otro modo de verlo es que, tras hacer operaciones por filas queda una ecuación como 0 = 12. Esta es obviamente una ecuación imposible y por tanto el sistema no tiene solución.

Si a = 2, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. La segunda fila es igual que la primera y la podemos eliminar. Queda pues $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tanto la matriz total como la submatriz de las primeras tres columnas tienen rango 2. En consecuencia, el sistema es compatible indeterminado.

En resumen:

- Si $a \notin \{-1, 2\}$ el sistema es **compatible y determinado**.
- Si $a = -1$ el sistema es **incompatible**.
- Si $a = 2$ el sistema es **compatible indeterminado**.

Apartado b)

Ya hemos visto que en el caso 2, la matriz del sistema es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene infinitas soluciones.

Operando un poco más, hacemos $F'''_1 = F''_1 + F''_2$ y nos queda $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ que, en forma de sistema queda

$$\begin{cases} y+3z=4 \\ -x+z=2 \end{cases}$$

Llevamos el z al otro lado y despejamos

$$\begin{cases} y=4-3z \\ x=z-2 \end{cases}$$

En forma de tripla, sería (z – 2, 4 – 3z, z) donde z puede tomar cualquier valor real. Es costumbre poner otro parámetro distinto λ de modo que quede (λ – 2, 4 – 3λ, λ).

Las infinitas soluciones del sistema son de la forma **(λ – 2, 4 – 3λ, λ)** con $\lambda \in \Re$.

Problema A.2:

2. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$

a) Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas.
b) Halla, si existen: máximos y mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Haz un esbozo de su gráfica.

Solución:

Apartado a)

El único problema que puede existir en esta función es que se divida por 0. Igualando a 0 el denominador tenemos $x + 1 = 0$ es $x = -1$.

El dominio es $\mathfrak{R}$ – **{–1}**.

Eso ya nos da la única asíntota vertical, la recta $x = -1$.

Los límites laterales a izquierda y derecha de –1 son respectivamente $-\infty$ y $+\infty$.

Para las asíntotas horizontales hacemos los límites en ambos infinitos.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{1}{e^x(x+1)}=\frac{1}{\infty\cdot\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$ que es indeterminado

Aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{1}=-\infty$$

En $+\infty$ hay una asíntota horizontal y por tanto no hay oblicua. En $-\infty$ no la hay, pero podría haber una oblicua. Veamos si es así.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+x}$$

Aplicamos dos veces la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-e^{-x}}{2x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{2}=+\infty$$

Este límite es infinito luego no hay asíntota oblicua.

En resumen:

- Hay una asíntota vertical, la recta $\boldsymbol{x = -1}$.
- Hay una asíntota horizontal en $+\infty$ (pero **no** en $-\infty$), la recta $\boldsymbol{y = 0}$.
- No hay ninguna asíntota oblicua.

Apartado b)

Derivamos la función.

$$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x+1)-e^{-x}}{(x+1)^2}=-e^{-x}\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

El único valor donde se anula es $x = -2$. El denominador es siempre positivo, por lo que en este caso no hay que considerarlo. No está de más recordar que, si no fuera así, habría que tener en cuenta los ceros del denominador. El único es el valor $x = -1$.

Dando valores:

$f'(-3)>0 \quad f'(0)<0$

La función crece en $(-\infty, -2)$ y decrece en $(-2, -1) \cup (-1, +\infty)$. En -1 no está definida

Con estos datos, haciendo $f(-2)$ que vale $-e^{-2}$ además sabemos:

El punto **$(-2, -e^{-2})$** es un máximo relativo y no hay mínimos relativos.

Para ver el estudio de máximos y mínimos absolutos esperaremos al estudio de la gráfica, que es el apartado c.

Apartado b)

Normalmente, "esbozo" quiere decir dibujo sin asíntotas, curvatura ni cortes con los ejes. Pero las asíntotas ya las tenemos y el resto no cuesta mucho, así que vamos a hacer el estudio completo.

Cortes con los ejes:

El numerador no se anula nunca, así que no hay cortes con $y = 0$.

Cuando $x = 0$, $y = 1$.

Curvatura:

Derivamos la función otra vez.

$$f''(x)=\frac{e^{-x}(x+2)(x+1)^2-e^{-x}(x+1)^2+2e^{-x}(x+2)(x+1)}{(x+1)^4}$$

que simplificado resulta

$$f''(x)=\frac{e^{-x}(x+1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^4}=\frac{e^{-x}(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$$

El denominador ya no es positivo, de hecho, tiene cambios de signo, así que hay que considerar el punto $x = -1$.

Igualando a 0 el numerador es $e^{-x}(x^2+4x+5)=0$ que implica $x^2+4x+5=0$ es decir $x=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$ con lo que no hay raíces reales.

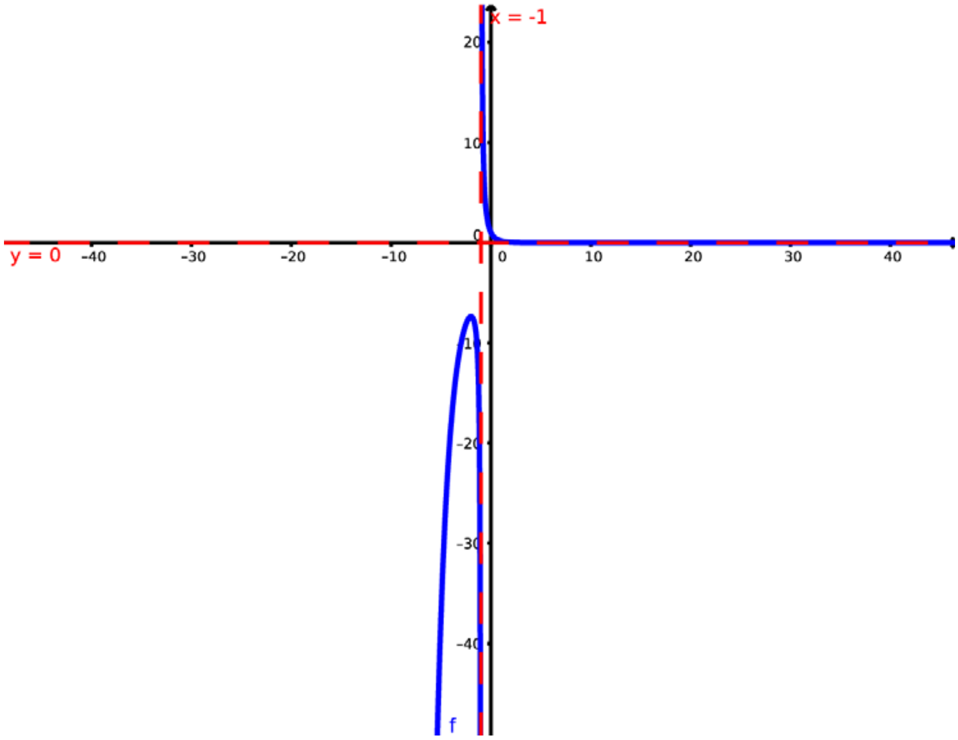
Dando valores, $f''(-2)<0$ y $f''(0)>0$ con lo que hay curvatura negativa (forma de ∩) en (–∝, –1) y curvatura positiva (forma de U) en (–1, +∝).

Falta la tabla de valores

x	$-\infty$	-2	-1^-	-1	-1^+	0	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-e^{-2}$	$-\infty$	No existe	$+\infty$	1	

Los valores -1^- y -1^+ representan los límites laterales en –1 (a izquierda y derecha respectivamente).

La gráfica completa es:



Las asíntotas están marcadas en rojo rayado. Se observa que el punto (–2, $-e^{-2}$) es máximo relativo, pero no absoluto y que no hay mínimos relativos ni absolutos.

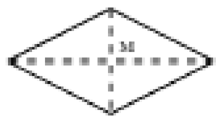
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.3:

3. Sean $A(3,1,0)$ y $B(1,3,0)$ los vértices opuestos de un rombo situado en el plano $\pi : z = 0$.

a) Calcula un vector director $\vec{v}_r$ y la ecuación de la recta r a la que pertenecen los otros dos vértices del rombo C y D. (1.5 puntos)

b) Determina dichos vértices C y D sabiendo que están a una distancia de $\sqrt{2}$ unidades del punto medio M. (1 punto)



Características de un rombo: Lados iguales paralelos dos a dos. Diagonales perpendiculares que se cortan en el centro de ambas.

Solución:

Apartado a)

La recta que nos piden pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular al vector que los une. Además, debe estar contenida en el plano π. Eso significa que es perpendicular al vector AB y al vector perpendicular de π. Con eso ya estamos en condiciones de calcular un vector v_r.

El vector normal al plano $\{z = 0\}$ es (0, 0, 1). Se puede ver porque son los coeficientes de x, y, z en la ecuación o bien, tomando tres puntos del plano [como (0, 0, 0), (1, 0, 0) y (0, 1, 0)] y calculando el producto vectorial de dos vectores que formen:

El vector $\overline{\boldsymbol{AB}}$ se calcula sin dificultad, es (2, –2, 0)

Así pues, cualquier v_r es perpendicular a los dos vectores anteriores. Calculamos un vector perpendicular a ambos con el producto vectorial.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (2,2,0)$$

No es la única solución, cualquier vector paralelo vale. Es decir, las soluciones serían $\lambda(2,2,0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. De hecho, el vector más sencillo es (1, 1, 0)

La recta pasa por el punto medio de A y B. Este se calcula sin problemas:

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(3,1,0)+(1,3,0)}{2} = (2,2,0)$$

En forma vectorial sería $r \equiv \{(2,2,0)+\lambda(2,2,0)\}$ También puede expresarse en otras formas como $\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ o, despejando λ como $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$. Pero nótese que el problema no pedía una forma concreta así que cualquiera es perfectamente válida.

Un vector director de la recta es (2, 2, 0) [vale cualquier múltiplo no nulo] y la recta es:

$r \equiv$ **{(2, 2, 0) + λ(2, 2, 0)}** que puede expresarse también como $\begin{cases} \boldsymbol{x = y} \\ \boldsymbol{z = 0} \end{cases}$.

Apartado b)

Ya hemos calculado el punto medio y el vector de la recta. Los puntos C y D por tanto son de la forma y $C=M+\mu(2,2,0)$ $D=M-\mu(2,2,0)$ para un valor concreto μ que deberemos calcular [no usamos λ para no confundir con la recta del apartado anterior, pero sería perfectamente válido].

¿Y cuánto vale μ? Pues faltaba un dato, que es el que nos dan en este apartado, es decir, que la distancia de $d(M,C)$ es $\sqrt{2}$

$d(M,C)=\sqrt{2}$ luego $\|MC\|=\|\mu(2,2,0)\|=\sqrt{2}$

$\sqrt{(2\mu)^2+(2\mu)^2+0}=\sqrt{2}$ de donde $8\mu^2=2$ que se obtiene $\mu=\pm 1/2$.

Es decir, hay dos posibilidades

$C=(2,2,0)+\frac{1}{2}(2,2,0)=(3,3,0)$ y $D=(2,2,0)-\frac{1}{2}(2,2,0)=(3,3,0)$ $D = (2, 2, 0) - \frac{1}{2}(2, 2, 0) = (1, 1, 0)$

o bien

$C=(2,2,0)-\frac{1}{2}(2,2,0)=(1,1,0)$ y $D=(2,2,0)-\left(-\frac{1}{2}\right)(2,2,0)=(3,3,0)$

Son los mismos puntos y esto no es sorprendente, pues no se especifica el lado en el que están.

En resumen

Los otros dos puntos del rombo son ***C* = (3, 3, 0) y *D* = (1, 1, 0)** o viceversa: [D = (3, 3, 0) y C = (1, 1, 0)]

Problema A.4:

4. Alicia tiene dos cajones. En uno tiene las camisetas y en el otro las faldas. La tabla muestra el número de todas las prendas que guarda en los dos cajones agrupadas en tres tipos: lisas, dibujos o rayas.

	Lisas	Dibujos	Rayas
Camisetas	10	5	10
Faldas	5	15	5

Se elige al azar una prenda de cada cajón. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de rayas.
b) Las dos sean del mismo tipo.
c) Al menos una de ellas no sea de rayas.

Solución:

Apartado a)

Llamamos C_L, C_D y C_R a los sucesos "extraer camiseta lisa", "extraer camiseta de dibujos" y "extraer camiseta de rayas". Llamamos F_L, F_D y F_R a los sucesos "extraer falda lisa", "extraer falda de dibujos" y "extraer falda de rayas".

Las extracciones de cada cajón son independientes. Nos piden $P(C_R \cap F_R) = \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{2}{25}$ que es 0.08 o el 8 %.

La probabilidad de que Alicia saque dos prendas de rayas es **2/28 = 0.08** $\rightarrow$ 8 %.

Apartado b)

Sacar liso, de dibujos y de rayas son mutuamente incompatibles. Así pues:

$$P\left[(C_L \cap F_L) \cup (C_D \cap F_D) \cup (C_R \cap F_R)\right] = P(C_L \cap F_L) + P(C_D \cap F_D) + P(C_R \cap F_R)$$

Sustituyendo cada uno por su valor

$$\frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} + \frac{5}{25} \cdot \frac{15}{25} + \frac{10}{25} \cdot \frac{5}{25} = \frac{2+3+2}{25} = \frac{7}{25}$$

que es 0.28 o el 28 %.

La probabilidad de que sacar dos prendas del mismo tipo es **7/25 = 0.28** $\rightarrow$ 28 %.

Apartado c)

Denotamos con raya superior el complementario $\overline{C_R}$.

$$P(\overline{C_R} \cup \overline{F_R}) = P(\overline{C_R}) + P(\overline{F_R}) - P(\overline{C_R} \cap \overline{F_R})$$

Todas se obtienen sin dificultad y resulta:

$$\frac{15}{25} + \frac{20}{25} - \frac{15}{25} \cdot \frac{20}{25} = \frac{35}{25} - \frac{12}{25} = \frac{23}{25}$$

que es 0.92 o el 92 %

La probabilidad de que Alicia no saque dos prendas de rayas es **23/25 = 0.92** $\rightarrow$ 92 %

PRUEBA B CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

a) Estudia para qué valores de x se cumple $A^3 - I = O$ (I matriz identidad y O matriz nula). (1 punto)

b) Calcula A^{12} para los valores de x que verifican la condición anterior. (0.75 puntos)

c) Para $x = 0$ y sabiendo que ese valor verifica la condición del primer apartado, calcula, si existe, la inversa de A. (0.75 puntos)

Solución:

a) Calculamos las potencias de la matriz:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^3 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix}$$

$A^3 - I = 0 \Leftrightarrow A^3 = I$ de modo que igualamos ambas matrices

$$\begin{pmatrix} x^3+1 & -2x & -3x^3 \\ -x^2 & 1 & 2x \\ -2x & x^2 & x^3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vale casi cualquier elemento. Por ejemplo, el (1, 2) nos da $-2x = 0$, es decir $x = 0$. Si sustituimos x por 0 en la primera matriz obtenemos la identidad.

El único valor que hace que se cumpla la ecuación matricial es $\boldsymbol{x = 0}$.

b) Puesto que $A^3 = I$, se tiene $A^{12} = (A^3)^4 = I^4 = I$

Para los valores que cumplen el apartado a), es $A^{12} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Podría hacerse sin problemas por cualquiera de los métodos habituales (el de Gauss o el de adjuntos). Pero vamos a aprovechar los cálculos anteriores.

Sabemos que $A^3 = I$, luego $A \cdot A^2 = I$, por tanto: Y $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 & -1 & -2x \\ -x & 0 & 1 \\ -1 & x & x^2 \end{pmatrix}$ que la teníamos calculada de antes. Sustituyendo x por 0 se tiene la inversa:

$$A^{-1} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el caso $x = 0$ la inversa es $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Problema B.2:

2. Dadas las curvas $y = x^2/2$, $y = 4/x$.

a) Calcula sus puntos de corte. (0.5 puntos)

b) Esboza una gráfica de las curvas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

c) Calcula el área que delimitan entre ellas en el intervalo $[1, 3]$. (1 punto)

Solución:

Apartado a)

Los puntos de corte son las soluciones del sistema $\begin{cases} y = x^2/2 \\ y = 4/x \end{cases}$ que resolvemos por igualación como $x^2/2 = 4/x$.

Multiplicando por *x* se tiene $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

Sustituyendo da *y* = 2.

El único punto de corte es (2, 2).

Apartado b):

Llamamos $f(x) = x^2/2$ y $g(x) = 4/x$. La primera es una función cuadrática (parábola) con vértice en $\frac{0}{\frac{2\cdot 1}{2}} = 0$.

Además $f(0) = 0$. Las ramas van hacia arriba pues el coeficiente de x^2 es 1/2, que es positivo.

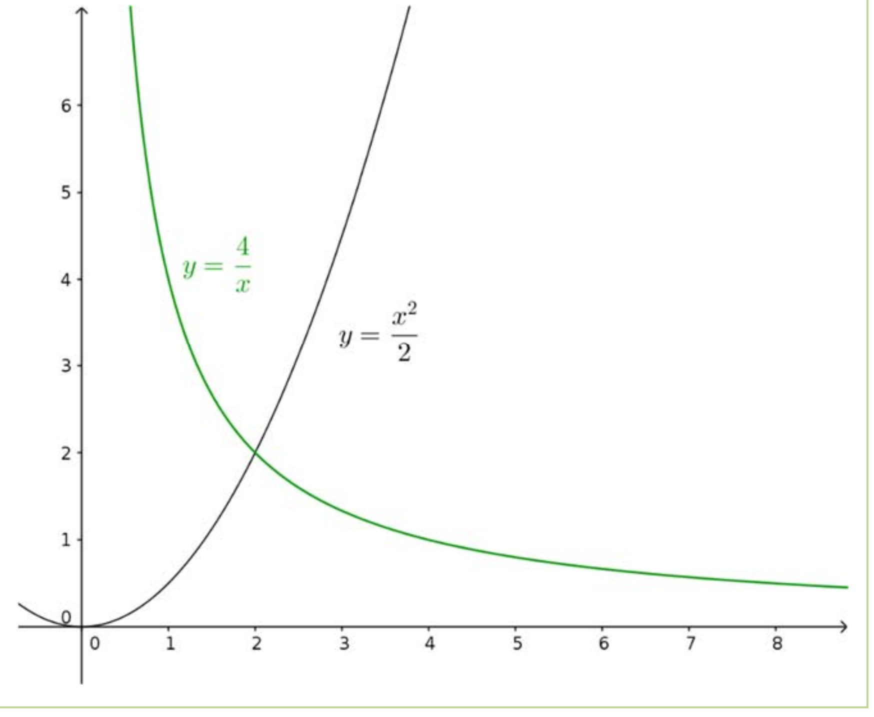
Para los valores, damos los extremos del intervalo y el 2, pues es el punto donde se corta con *g*. Los valores 1, 2 y 3 resultan en $1/2 = 0.5$, 2 y $9/2 = 4.5$ respectivamente.

En cuanto a la segunda, tiene una discontinuidad en *x* = 0, lo que no nos afecta pues nos piden en [1, 3]. Allí es continua.

$g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ que es siempre negativo en el intervalo de interés por lo que es decreciente. Y su segunda derivada es $g'(x) = \frac{2}{x^3}$ positiva por lo que tiene curvatura positiva (en forma de ∩).

$g(1) = 4$, $g(2) = 2$ y $g(3) = 4/3 \approx 1.33$

La gráfica conjunta es pues:



Apartado c):

En el intervalo [1, 2], $4/x$ está por encima de $x^2/2$ y es al revés en el intervalo [2, 3].

Por tanto, el área comprendida entre ambas funciones es:

$$\int_1^3 |x^2/2-4/x|dx=\int_1^2 4/x-x^2/2\,dx+\int_2^3 x^2/2-4/x\,dx$$

Es más fácil hacer la integral indefinida y sustituir. La primera es

$$\int 4/x-x^2/2\,dx=\int 4/x\,dx-\int x^2/2\,dx=4\ln(x)-x^3/6$$

en tanto la segunda es la primera cambiada de signo:

$$\int_1^2 4/x-x^2/2\,dx=[4\ln(x)-x^3/6]_1^2=\{4\ln(2)-8/6\}-\{4\ln(1)-1/6\}=4\ln(2)-7/6$$

$$\int_2^3 x^2/2-4/x\,dx=[x^3/6-4\ln(x)]_2^3=\{27/6-4\ln(3)\}-\{8/6-4\ln(2)\}=19/6-4\ln(3)+4\ln(2)$$

Sumando queda:

$$12/6+8\ln(2)-4\ln(3)=2+\ln\left(\frac{2^8}{3^4}\right)\approx 3.15$$

Es costumbre escribirlo como unidades cuadradas, si bien esto presupone que la unidad de cada eje es la misma.

El área es aproximadamente **3.15 u²**.

Problema B.3:

3. Dados el plano $\pi : x + y = 1$ y la recta r que pasa por el punto $A(1,1,1)$ con vector director $\vec{v}_r = (0,1,1)$. Calcula:

a) El punto P intersección del plano π y de la recta r. (1.25 puntos)

b) El punto A' simétrico de A respecto al plano π. (1.25 puntos)

Solución:

Apartado a)

Necesitamos la intersección de la recta con el plano. Una posibilidad es pasar la recta a ecuación de intersección de dos planos. Pero es más sencillo tomar un punto genérico y despejar el valor.

La ecuación vectorial es:

$$(x, y, z) = (1,1,1) + \lambda(0,1,1)$$

con lo que tenemos $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

Insertándolo en la ecuación del plano tenemos:

$(1)+(1+\lambda)=1$, que da $\lambda = -1$

De modo que

$(x, y, z) = (1,1,1) + (-1)(0,1,1) = (1,0,0)$

El punto de corte de la recta y el plano es **(1, 0, 0)**.

Apartado b)

Calculamos la recta perpendicular al plano que pasa por A. El plano es $x + y = 1$ por lo que su vector perpendicular es (1, 1, 0) [los coeficientes de x, y, z]. Otra manera es dar tres puntos, calcular sus vectores y el producto vectorial de estos nos da el vector perpendicular.

En cualquier caso, ya tenemos un punto y un vector, luego la recta perpendicular es:

$$r \equiv \{(x, y, z) = (1,1,1) + \lambda(1,1,0)\}$$

Exactamente igual que antes, calculamos la intersección de r y π.

$(1+\lambda)+(1+\lambda)=1$ que da $2\lambda = -1$ es decir $\lambda = -1/2$

Así pues, el punto de corte es $P \equiv (1,1,1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\lambda(1,1,0)$ y el simétrico es sumarle dos veces el vector que une A con P es decir $(1,1,1) + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(1,1,0) = (0,0,1)$

El punto A' simétrico de A respecto a π es **(0, 0, 1).**

Problema B.4:

4. Las calificaciones de un examen en una clase siguen una distribución normal de media $\mu = 20$ y desviación típica $\sigma = 10$. Calcula:

a) La probabilidad de que un alumno obtenga una calificación entre 15 y 25. (1.25 puntos)

b) La calificación que sólo superan o igualan el 20 % de los alumnos. (1.25 puntos)

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(-0.8416) = 0.2$, $F(0.8416) = 0.8$, $F(0.4) = 0.6554$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6) = 0.7257$

Solución

Apartado a)

Si $X \approx N(20{,}10)$ entonces $X = 20 + 10Z$ con $Z \approx N(0{,}1)$

$$P(15 < X < 25) = P(15 < 20 + 10Z < 25) = P(-5 < 10Z < 5) = P(0.5 < Z < 0.5)$$

Y eso es, usando la función de distribución:

$$P(-0.5 < Z < 0.5) = F(0.5) - F(-0.5)$$

No tenemos $F(-0.5)$ pero sabemos que $F(-x) = 1 - F(x)$ de modo que:

$$F(-0.5) = 1 - F(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

Sustituyendo es:

$$F(0.5) - F(-0.5) = 0.6915 - 0.3085 = 0.383$$

La probabilidad de estar entre 15 y 25 es **0.383** o el 38.3 %.

Apartado b)

Como antes, si $X \approx N(20{,}10)$ entonces $X = 20 + 10Z$ con $Z \approx N(0{,}1)$. Nos piden ahora calcular M para que $P(X > M) = 0.2$

Sustituyendo $P(20 + 10Z > M) = 0.2 \Rightarrow P\left(Z > \dfrac{M-20}{10}\right) = 0.2$

Pasando al suceso complementario:

$$0.2 = P\left(Z > \frac{M-20}{10}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{M-20}{10}\right)$$

de donde, despejando

$$P\left(Z \leq \frac{M-20}{10}\right) = 1 - 0.2 = 0.8$$

Es decir, $F\left(\dfrac{M-20}{10}\right) = 0.8$. Buscando en la tabla es $F(0.8416) = 0.8$ de donde $\dfrac{M-20}{10} = 0.8416$ que resulta en $M = 10 \cdot 0.8416 + 20 = 28.416$

La calificación de **28.416** solo la supera el **20 %** de los alumnos.