MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Cantabria

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: José Gallegos Fernández

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2019

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t, el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = (x + 10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Ejercicio 3

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

Ejercicio 4

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M.

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Ejercicio 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{a - x^2}{2 + x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Ejercicio 3

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2.

Ejercicio 4

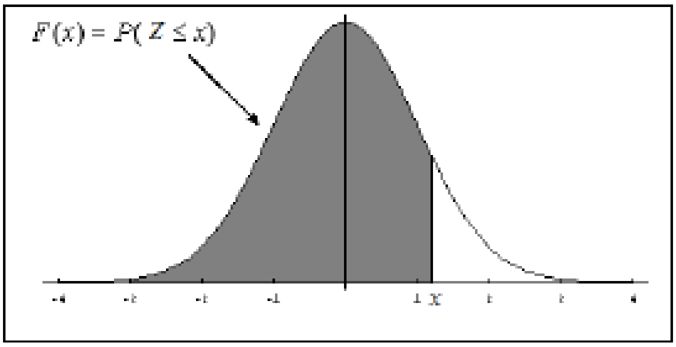
El peso de una población sigue una distribución normal de media 70kg y desviación típica de 10kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Distrito Universitario de Canarias



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

OPCIÓN 1

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.1:

Considere el sistema $\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ t & -1 & 1 \\ t & 0 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro t.

1) [1.5 PUNTOS] Clasifique, en función del valor de t, el tipo de sistema.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución:

1) Escribimos la matriz ampliada del sistema y operamos con las filas y columnas para conseguir un sistema triangular.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} t & 1 & 1 & 0 \\ t & -1 & 1 & 0 \\ t & 0 & t & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} y & z & x & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ -1 & 1 & t & 0 \\ 0 & t & t & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim_{2^aF \to 1^aF + 2^aF} \begin{array}{c} \begin{matrix} y & z & x & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 2 & 2t & 0 \\ 0 & t & t & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim_{\substack{2^aF \to 1/2\, 2^aF \\ 3^aF \to t/2\, 2^aF - 3^aF}} \begin{array}{c} \begin{matrix} y & z & x & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 - t & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

a) Si $t^2 - t \neq 0$ entonces el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada es 3, luego es un sistema compatible y determinado, cuya única solución es la solución trivial, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

Por tanto, si $t^2 - t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0; z = 0; y = 0 \quad \Rightarrow \quad Sol = \{(0,0,0)\}$

Si $t^2 - t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

Si $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = 0;\ y = 0;\ x = \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad Sols = \{(\lambda, 0,0)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ El rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2. Luego es un sistema compatible indeterminado.

Si $t = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = -z = \lambda \in \mathbb{R};\ y = 0 \quad \Rightarrow \quad Sols = \{(\lambda, 0, -\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$ El rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada es 2. Luego es un sistema compatible indeterminado.

Si $t \neq 0$ y $t \neq 1$ entonces	**Sistema Compatible Determinado**
Si $t = 0$ entonces	**Sistema Compatible Indeterminado**
Si $t = 1$ entonces	**Sistema Compatible Indeterminado**

2) Como ya aparece en el apartado anterior, si $t = 1$ hay infinitas soluciones dependientes de un parámetro libre y serían de la forma $\{(\lambda, 0, -\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$.

Para $t = 1$ las infinitas soluciones son: $\{(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}, -\boldsymbol{\lambda})/\lambda \in \mathbb{R}\}$.

Problema 1.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Considere la función $f(x) = (x+10)e^{2x}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule una primitiva $F(x)$ tal que $F(0) = 0$. Use la derivada para comprobar su solución.

2) [0.5 PUNTOS] Calcule $\int_0^5 f(x)dx$.

Solución:

1) Hagamos la integral de *f(x)* para obtener una primitiva. La descomponemos en dos integrales, la primera se puede hacer por partes y la segunda es inmediata:

$$F(x) = \int (x+10)\cdot e^{2x}dx \quad = \quad \int x\cdot e^{2x}dx + 10\cdot\int e^{2x}dx \quad \overset{(*)}{=} \quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\int e^{2x}dx + 10\cdot \int e^{2x}dx \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} + \frac{19}{2}\cdot\int e^{2x}dx \quad \overset{(**)}{=} \quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} + \frac{19}{4}\cdot e^{2x} + C \quad = \quad \left(x+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2} + C$$

Calculamos por partes la primera integral:

$$(*) \quad \int x\cdot e^{2x}dx \quad = \quad \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow & u' = 1 \\ v' = e^{2x} & \Rightarrow & v = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} \end{bmatrix} \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\int e^{2x}dx$$

Calculamos la integral inmediata:

$$(**) \quad \int e^{2x}dx \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot e^{2x}dx \quad = \quad \frac{1}{2}\cdot e^{2x}$$

Imponemos la condición: $0 = F(0) = \left(0+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^0}{2} + C = \frac{19}{4} + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-19}{4}$

Y la primitiva buscada es:

$$\boxed{\boldsymbol{F(x) = \left(x+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \frac{19}{4}}}$$

Comprobación:

Su derivada debe darnos la función dada:

$$F'(x) = \left[\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x} + \frac{19}{4}\cdot e^{2x} - \frac{19}{4}\right]' = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x}\cdot 2 + \frac{19}{4}\cdot e^{2x}\cdot 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + x\cdot e^{2x} + \frac{19}{2}\cdot e^{2x} = 10\cdot e^{2x} + x\cdot e^{2x} = (x+10)\cdot e^{2x} = f(x)$$

En efecto, es la primitiva buscada.

2) $\int_0^5 f(x)dx \quad \overset{\text{Regla Barrow}}{=} \quad F(5) - F(0) = \left(5+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^{10}}{2}\boxed{-\frac{19}{4}} - \left(0+\frac{19}{2}\right)\cdot\frac{e^0}{2}\boxed{+\frac{19}{4}} = \boxed{\frac{29}{4}\cdot e^{10} - \frac{19}{4}}$

$$\boldsymbol{\int_0^5 f(x)dx = \boxed{\frac{29}{4}\cdot e^{10} - \frac{19}{4}}}$$

Problema 1.3:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Tomemos el plano $\Pi \equiv 2x + ay + z = 2$ y la recta $r(t) \equiv (0,0,0) + t\overrightarrow{(2,1,1)}$.

1) [0.5 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean ortogonales.

2) [2 PUNTOS] Determine a para que r y Π sean paralelos. Calcule la distancia entre r y Π en este caso.

Solución:

1) Un vector normal al plano Π es $\vec{n}(2, a, 1)$. Este deberá ser paralelo al vector director $\vec{u}(2, 1, 1)$ de la recta para que r y Π sean perpendiculares. Claramente si *a* = 1 esto se cumple.

Aun así, si hacemos las cuentas para comprobarlo:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (2,1,1)\cdot(2,a,1) = 4 + a + 1 = 5 + a = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\,180º = \sqrt{6}\cdot\sqrt{5+a^2}\cdot(-1) \quad \Rightarrow$$

$$(a+5)^2 = 6\cdot(a^2+5) \quad \Rightarrow \quad a^2 + 10a + 25 = 6a^2 + 30 \quad \Rightarrow \quad 5a^2 - 10a + 5 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

Para que *r* y Π sean ortogonales ***a*** debe ser igual a **1**.

2) En este caso, el vector normal al plano Π $\vec{n}(2, a, 1)$ y el vector director $\vec{u}(2,1,1)$ de la recta *r* deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar será 0:

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = (2,1,1)\cdot(2,a,1) = 4 + a + 1 = 5 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -5}$$

Para que *r* y Π sean paralelos ***a*** debe ser igual a $\mathbf{-5}$.

La distancia entre la recta *r* y el plano Π es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano, por ejemplo, el *O* = (0, 0, 0), al plano $\Pi \equiv \mathbf{2}x - \mathbf{5}y + z - \mathbf{2} = \mathbf{0}$ y viene dada por:

$$d(r, \Pi) = d(O, \Pi) = \frac{|2\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{30}} = \boxed{\frac{\sqrt{30}}{15}\;u}$$

La distancia entre la recta *r* y el plano Π es $\frac{\sqrt{30}}{15}$ ***u***

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema 1.4:

Una prueba rápida para detectar una enfermedad da un 2% de falsos positivos (personas sanas en las que la prueba da positivo, clasificándolas como enfermas) y un 1% de falsos negativos (personas enfermas en las que la prueba da negativo, clasificándolas como sanas). En una población hay un 4% de enfermos.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que el test dé un resultado negativo.

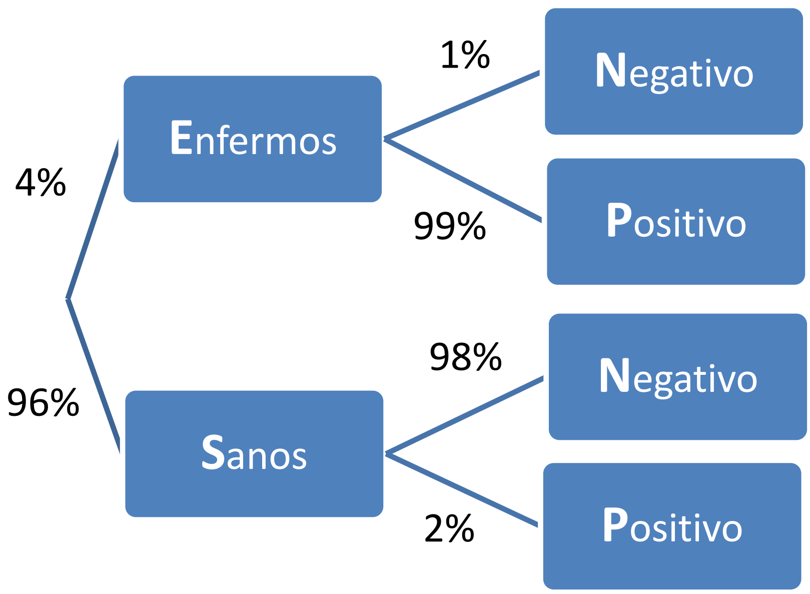
2) [1 PUNTO] La prueba da un resultado positivo (clasificando a la persona como enferma). Calcule la probabilidad de que realmente esté sana.

Solución:

Consideremos los siguientes sucesos:

E = "estar enfermo", **S** = "estar sano", **-** = "dar negativo en la prueba" y **+** = "dar positivo en la prueba"

Representamos los datos del problema en un diagrama en árbol. Sabemos que si hay un 4 % de enfermos entonces el suceso contrario, "estar sano", es del 96 %. Y lo mismo con los otros sucesos contrarios:



1) Usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(-) \overset{T^{ma}\text{ total Prob.}}{=} P(E)\cdot P(-/E) + P(S)\cdot P(-/S) = \frac{4}{100}\cdot\frac{1}{100} + \frac{96}{100}\cdot\frac{98}{100} = \frac{9412}{1000} = \boxed{94.12\%}$$

$$P(-) = \mathbf{0.9412}\ (\boxed{94.12\%})$$

2) Estar sano es el suceso contrario a estar enfermo, luego

$$(*)\quad P(+) = 1 - P(-) = 1 - \frac{94.12}{100} = \frac{5.88}{100}$$

Aplicamos el Teorema de Bayes:

$$P(S/+) \overset{\text{Bayes Teorema}}{=} \frac{P(+/S)\cdot P(S)}{P(+)} \underset{(*)}{=} \frac{\frac{2}{100}\cdot\frac{96}{\boxed{100}}}{\frac{5.88}{\boxed{100}}} = \boxed{32.65\%}$$

$$P(S/+) = \mathbf{0.3265}\ (\boxed{32.65\%})$$

OPCIÓN 2

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 2.1:

Sean $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcule, razonadamente, el rango de M.

2) [2 PUNTOS] Determine todos los vectores v tales que $M^2 \cdot v = M^{-1} \cdot v$.

Solución:

1) Calculamos el determinante:

1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4 - 1 + 0) - (0 + 0 - 6) = -5 + 6 = 1 \neq 0$ luego:

rango(M) = 3.

2) Trabajando previamente en la ecuación matricial obtenemos:

$$M \cdot M^2 \cdot v = M \cdot M^{-1} \cdot v \quad \Rightarrow \quad M^3 \cdot v = I_3 \cdot v \quad \Rightarrow \quad M^3 \cdot v - I_3 \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (M^3 - I_3) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$M^3 - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 9 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$(M^3 - I_3) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overset{\substack{\text{ecuaciones} \\ \text{simplificando}}}{\Rightarrow} \quad \begin{cases} -x + z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado, y por tanto:

Todos los vectores de la forma $v = (\lambda, 2\lambda, \lambda)$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ cumplirían la ecuación matricial.

Problema 2.2:

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen(x)}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{a - x^2}{2 + x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

1) [1 PUNTOS] Determine, si existe, el valor de a que haga a la función continua en $x = 0$.

2) [1.5 PUNTOS] Calcule el valor de a para que f tenga un extremo relativo en $x = 2$. ¿Es este extremo un máximo o mínimo local?

3) [0.5 PUNTOS] Sea $g(x)$ una función integrable, si $\int_0^3 g(x)dx = 4$ y $\int_2^3 g(x)dx = 6$, ¿Cuánto vale $\int_0^2 g(x)dx$?

Solución:

1) Para que la función sea continua deben ser iguales los dos límites laterales e iguales al valor de la función:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \left[\frac{a-x^2}{2+x}\right]_{x=0} = \frac{a}{2} = \lim_{x\to0^+} f(x) \\ \lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left[\frac{\sin x}{2x}\right] = \left(\underset{\text{Indet}}{\frac{0}{0}}\right) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to0^-}\left[\frac{\cos x}{2}\right] = \frac{1}{2} \end{array}\right\} f \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a = 1}$$

Para a = 1 la función es continua en $\boldsymbol{x = 0}$.

2) $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x\cdot\cos x - 2\cdot\sin x}{4x^2} & si \quad x < 0 \\ \frac{-x^2-4x-a}{(x+2)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$;

Anulamos la derivada en 2:

$$0 \overset{\substack{\text{extremo} \\ x=2}}{=} f'(2) = \left[\frac{-x^2-4x-a}{(x+2)^2}\right]_{x=2} = \frac{-4-8-a}{16} = \frac{-12-a}{16} \quad \Leftrightarrow \quad -12 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a = -12}$$

En ese caso, el signo de la derivada sería igual que el signo del numerador de la fracción, ya que el denominador siempre es positivo (está elevado al cuadrado), es decir, igual que el signo del polinomio $-x^2 - 4x + 12 = (-1)\cdot(x - 2)\cdot(x + 6)$.

Este es negativo antes del *–6* y después del *2*, mientras que es positivo entre *–6* y *2*.

Esto determina unos intervalos de decrecimiento del $(-\infty, -\boldsymbol{6}) \cup (\boldsymbol{2}, \infty)$ y de crecimiento del $(-\boldsymbol{6}, \boldsymbol{2})$.

Por tanto, en *x = 2* la función es continua y derivable (por ser una función racional y pertenecer dicho punto al dominio de definición de la misma) y se produce un cambio de crecer a decrecer, siendo por tanto dicho extremo un **máximo relativo**, que correspondería con el punto $(\boldsymbol{2}, f(\boldsymbol{2})) = (\boldsymbol{2}, -\boldsymbol{4})$.

Para $\boxed{\boldsymbol{a = -12}}$ la función tiene un máximo relativo.

3) $\int_0^2 g(x)dx \overset{\substack{\text{límites de integración} \\ \text{linealidad de los}}}{=} \int_0^3 g(x)dx - \int_2^3 g(x)dx = 4 - 6 = \boxed{-2}$

$$\int_0^2 \boldsymbol{g(x)dx} = \boxed{-2}$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2.3:

Sean las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 13 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 3 \end{cases}$ y el punto $A = (0, 0, 3)$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule la ecuación general (implícita) del plano que pasa por A y es paralelo a r_1 y a r_2.

Solución:

a) Calculemos un vector de dirección de la recta r_1:

Si $z = 1$, entonces $x = 6$ e $y = 2$. Por tanto, $P_1(6, 2, 1)$ es un punto de r_1:

Si $z = 3$, entonces $x = 5$ e $y = 2$. Por tanto, $Q_1(5, 2, 3)$ es un punto de r_1:

El vector $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OP_1} = (5, 2, 3) - (6, 2, 1) = (-1, 0, 2)$ es director de la recta r_1:

b) Calculemos un vector de dirección de la recta r_2:

Si $z = 1$, entonces $x = 4$ e $y = 0$. Por tanto, $P_2(4, 0, 1)$ es un punto de r_2:

Si $z = 3$, entonces $x = 6$ e $y = -1$. Por tanto, $Q_2(6, -1, 3)$ es un punto de r_2:

El vector $\overrightarrow{P_2Q_2} = \overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OP_2} = (4, 0, 1) - (6, -1, 3) = (-2, 1, -2)$ es director de la recta r_2:

c) Nuestro plano debe pasar por el punto $A(0, 0, 3)$ y ser paralelo a ambas rectas r_1 y r_2, por lo que debe tener como vectores directores los mismos que las rectas. Así pues, nuestro plano queda determinado por el punto A y los vectores $\overrightarrow{P_1Q_1}$ y $\overrightarrow{P_2Q_2}$. Si (x, y, z) es otro punto cualquiera de nuestro plano, entonces la ecuación general implícita del mismo es:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & -2 & x-0 \\ 0 & 1 & y-0 \\ 2 & -2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -z + 3 - 4y - 2x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{2x + 6y + z - 3 = 0}$$

El plano pedido es: $\boxed{\mathbf{2x + 6y + z - 3 = 0}}$

Problema 2.4:

El peso de una población sigue una distribución normal de media 70kg y desviación típica de 10kg.

1) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa entre 65 y 75 kg.

2) [1 PUNTO] Calcule el porcentaje de población que pesa al menos 85 kg.

Solución:

El peso sería una variable $X \sim N(70, 10)$. Normalizando, $Z = \frac{X-70}{10} \sim N(0,1)$.

1) $P[65 \leq X \leq 75] = P[-0.5 \leq Z \leq 0.5] = P[Z \leq 0.5] - P[Z \leq -0.5] = P[Z \leq 0.5] - P[Z \geq 0.5] =$
$= P[Z \leq 0.5] - \{1 - P[Z \leq 0.5]\} = 1 - 2 \cdot P[Z \leq 0.5] = 1 - 2 \cdot 0.6915 = 0.383 \simeq \boxed{38.3\%}$

$$\boldsymbol{P[65 \leq X \leq 75] = 0.383} \simeq \boxed{38.3\%}$$

2) $P[X \geq 85] = P[Z \geq 1.5] = 1 - P[Z \leq 1.5] = 1 - 0.9332 = 0.0668 \simeq \boxed{6.68\%}$

$$\boldsymbol{P[X \geq 85] = 0.0668} \simeq \boxed{6.68\%}$$

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2019

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x + ay + z = -1 \\ ax + ay + a^2z = 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro a.

1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro a, el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).

2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso $a = 2$.

Ejercicio 2

Considere la función $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 7x - 8}$.

1) [2.75 PUNTOS] Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f.

2) [0.25 PUNTOS] Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x = 2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

Ejercicio 3

Sea el plano $\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto $A = (2,1,3)$.

1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π.

2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A.

Ejercicio 4

Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30° y desviación típica de 6°.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42°.

2) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25° y 30°.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t:

$$\begin{cases} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{cases}$$

1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Ejercicio 2

Sea $f(x)$ la función definida en $(0, \infty)$ dada por $f(x) = x\ln(x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

1) [1 PUNTO] Calcule $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2) [2 PUNTOS] Calcule $\int_2^e f(x)dx$.

Ejercicio 3

Sean los puntos $P = (0,1,0)$, $Q = (-1,1,2)$, $R = (2,0,-1)$ y el plano $\Pi \equiv \begin{cases} x = 2+4t \\ y = -5t+s \\ z = -1+4s \end{cases}$

1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P, Q y R y el plano Π.

2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q.

Ejercicio 4

Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40%, 35% y 25% de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5%, 3% y 2% respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

1) [1 PUNTO] ¿Cual es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?

2) [1 PUNTO] Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

OPCIÓN 1

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 1.1:

Considere el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} a^2x + ay + z = -1 \\ ax + ay + a^2z = 0 \end{cases}$ dependiente del parámetro a.

1) [1.25 PUNTOS] Clasifique, en función del parámetro a, el sistema anterior (existencia y unicidad de soluciones).

2) [1.25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones en el caso $a = 2$.

Solución:

1) Consideremos la matriz ampliada del sistema $(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a^2 & a & 1 & -1 \\ a & a & a^2 & 0 \end{array}\right)$.

En ella los menores se anulan si: $\begin{cases} a^3 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \\ a = 1 \end{cases} \\ a^4 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases} \\ a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \\ a = 0 \end{cases}$.

Es decir:

a) Si $\boldsymbol{a = 0}$: rango$\left(A|b\right)$ = 1 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ Sistema **Compatible Indeterminado** con dos parámetros libres: $\quad Solución = \{(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{-1}) / \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}\}$

b) Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{1}$: rango$\left(A|b\right)$ = 2 ≠ 1 = rango(A) $\Rightarrow$ Sistema incompatible

c) Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{-1}$: rango$\left(A|b\right)$ = 2 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ Sistema **Compatible Indeterminado** con un parámetro libre: $\quad Solución = \left\{\left(\frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1+2\lambda}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda}\right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\right\}$

d) En **cualquier otro caso**: rango$\left(A|b\right)$ = 2 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ Sistema **Compatible Indeterminado** con un parámetro libre

2) Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \overset{2ªF \to 1ªF - 2\cdot 2ªF}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -7 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = -1 \\ 2y + 7z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = \lambda \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{1 - 7\lambda}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \lambda - 1 + 7\lambda}{4} = \dfrac{3\lambda - 1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$\boxed{\boldsymbol{Solución} = \left\{\left(\frac{\mathbf{-1+3\lambda}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1-7\lambda}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda}\right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\right\}}$ **Sistema Compatible Indeterminado**

Problema 1.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Considere la función $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-7x-8}$.

1) [2.75 PUNTOS] Estudie el dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos de la función f.

2) [0.25 PUNTOS] Si g es una función derivable con un máximo relativo en $x = 2$, ¿Cuánto vale $g'(2)$?

Solución:

1) $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 7x - 8 \neq 0\} \quad \Rightarrow$

$$x^2 - 7x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 8 \end{cases} \boxed{Dom\ f = \mathbb{R} - \{-\mathbf{1}; \mathbf{8}\}}$$

Estudiamos las posibles asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left(\frac{3}{0}\right) = \begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = -\infty \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -1}} \text{ Asíntota Vertical}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left(\frac{12}{0}\right) = \begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to 8^-} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 8^+} \dfrac{x+4}{x^2-7x-8} = +\infty \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = 8}} \text{ Asíntota Vertical}$$

Y la posible asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)_{\text{Indet}} = 0 \quad \text{porque el grado}(numerador)\text{<grado}(denominador)$$

$$\Rightarrow \quad Luego\ en\ \boxed{\boldsymbol{y = 0}} \text{ hay una asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+4}{x^2-7x-8} = \lim_{x\to \infty} \frac{-x+4}{x^2+7x-8} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)_{\text{Indet}} = 0 \quad \text{pq grado}\left(n^{\text{dor}}\right)\text{<grado}\left(d^{\text{dor}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0} \text{ A.H.}$$

Para conocer máximos, mínimos, crecimiento… estudiamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-7x-8)-(x+4)\cdot(2x-7)}{(x+1)^2\cdot(x-8)^2} = \frac{-x^2-8x+20}{(x+1)^2\cdot(x-8)^2} = \frac{(-1)\cdot(x+10)\cdot(x-2)}{(x+1)^2\cdot(x-8)^2}$$ luego el signo de la derivada es:

$$\boxed{\begin{cases} + \ (\boldsymbol{creciente}) \ (-\mathbf{10}, \mathbf{2}) \\ - \ (\boldsymbol{decreciente}) \ (-\infty, -\mathbf{10}) \cup (\mathbf{2}, \infty) \end{cases}}$$ con cambios en la monotonía en los puntos de abscisa $x = -10$ y $x = 2$, ambos en el dominio de definición de la función, con la función continua y derivable. Por tanto, son extremos:

$$\boxed{\begin{cases} \left(-10, \frac{-1}{27}\right) \ \textit{mínimo relativo} \ \text{(cambia de decrecer a crecer)} \\ \left(2, \frac{-1}{3}\right) \ \textit{máximo relativo} \ \text{(cambia de crecer a decrecer)} \end{cases}}$$

2) $\boldsymbol{g'(2) = 0}$ porque la derivada se anula en los extremos, al producirse un cambio en la monotonía (la pendiente de la recta tangente en ese punto es 0). Si una función es derivable en un punto y alcanza en él un máximo o un mínimo relativo entonces la derivada en ese punto vale cero.

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema 1.3:

Sea el plano $\Pi \equiv (2,1,0) + t\overrightarrow{(2,1,0)} + s\overrightarrow{(0,1,-1)}$ y el punto $A = (2,1,3)$.

1) [1.5 PUNTOS] Calcule la distancia entre A y Π.

2) [1 PUNTOS] Calcule la recta ortogonal (perpendicular) a Π que contiene al punto A.

Solución:

Escribimos la ecuación implícita del plano:

1) $\Pi \equiv \begin{vmatrix} 2 & 0 & x-2 \\ 1 & 1 & y-1 \\ 0 & -1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2z - x\boxed{+2} + 2y\boxed{-2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi \equiv x - 2y - 2z = 0$

Calculamos la distancia, aplicando la fórmula:

$$d(A,\Pi) = \frac{|2-2\cdot 1-2\cdot 3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{6}{3} = \boxed{2\ u}$$

$$d(A,\Pi) = \frac{6}{3} = \boxed{2\ \ u}$$

2) El vector $\vec{n}(1,-2,-2)$ es perpendicular al plano. Por tanto, sirve como vector director de la recta perpendicular a dicho plano. Como dicha recta tiene que pasar por el punto $A(2, 1, 3)$:

-Ecuación vectorial: $r \equiv (2,1,3) + \lambda \cdot (1,-2,-2) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

-Ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1-2\lambda \\ z = 3-2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

-Ecuaciones continuas: $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-2}$

-Ecuaciones implícitas: $\boxed{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 2x + z - 7 = 0 \end{cases}}}$

Problema 1.4:

Las temperaturas de una ciudad durante el verano han seguido una distribución normal de media 30° y desviación típica de 6°.

1) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar se mida una temperatura de menos de 42°.

2) [1 PUNTO] Calcule la probabilidad de que un día al azar haga entre 25° y 30°.

Solución:

Las temperaturas de la ciudad durante el verano determinan una variable $X \sim N(30, 6)$. Normalizando, $Z = \frac{X-30}{6} \sim N(0, 1)$.

1) $P[X \leq 42] = P[Z \leq 2] = 0{,}9772 \simeq \boxed{97.72\%}$

$$\boldsymbol{P[X \leq 42] = 0.9772}$$

2) $P[25 \leq X \leq 30] = P\left[\frac{-5}{6} \leq Z \leq 0\right] = P[Z \leq 0] - P\left[Z \leq \frac{-5}{6}\right] = P[Z \leq 0] - P\left[Z \geq \frac{5}{6}\right] =$
$= P[Z \leq 0] - \{1 - P[Z \leq 0.83]\} = 0.5 - 1 + 0.7967 = 0.2967 \simeq \boxed{29.67\%}$

$$\boldsymbol{P[25 \leq X \leq 30] = 0.2967}$$

OPCIÓN 2

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE JULIO

Problema 2.1:

Consideremos el sistema dependiente del parámetro t:

$$\begin{cases} tx + y - z = 0 \\ 2ty + z = 1 \\ -x + ty + 2z = 1 \end{cases}$$

1) [1.5 PUNTOS] Determine razonadamente si el sistema es incompatible o compatible, determinado o indeterminado en función del valor del parámetro t.

2) [1 PUNTO] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $t = 1$.

Solución:

1) El determinante de la matriz del sistema es:

$$\begin{vmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & 2t & 1 \\ -1 & t & 2 \end{vmatrix} = 4t^2 - 1 - 2t - t^2 = 3t^2 - 2t - 1 = 3\cdot\left(t + \frac{1}{3}\right)\cdot(t-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t = \dfrac{-1}{3} \\ t = 1 \end{cases}$$

Por tanto:

-Si ***t* = *1***: rango($A|b$) = 2 = rango(A) < 3 (nº incógnitas) $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado** con un parámetro libre:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{3^aF\to 1^aF+3^aF}{\overset{2^aF\to 2^aF}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Solución = \left\{\left(\frac{\mathbf{3\lambda - 1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{-\lambda + 1}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda}\right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\right\}$$

-Si ***t* = –1/3**: rango($A|b$) = 2 $\neq$ 1 = rango(A) $\Rightarrow$ **Sistema Incompatible**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & -1 & 6 & 3 \end{array}\right) \underset{3^aF\to 3\cdot 1^aF+3^aF}{\overset{2^aF\to 2^aF}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -10 & 15 & 3 \end{array}\right) \underset{3^aF\to 5\cdot 2^aF+3^aF}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad Solución = \emptyset$

-En cualquier otro caso rango($A|b$) = 3 = rango(A) = número incógnitas $\Rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado**

Resumiendo:

Si $t \neq -1/3;\ 1$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A/b) = 3}$	**Sistema Compatible Determinado**
Si $t = -1/3$	$\boldsymbol{rg(A) = 1 \neq rg(A/b) = 2}$	**Sistema Incompatible (No hay solución)**
Si $t = 1$	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A/b) = 2}$	**Compatible Indeterminado (Infinitas soluciones)**

2) Como ya hemos visto en el apartado anterior, en el caso t = 1 el conjunto de las soluciones es:

$$\boxed{\boldsymbol{Sols} = \left\{\left(\frac{\mathbf{3\lambda - 1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{-\lambda + 1}}{\mathbf{2}}, \boldsymbol{\lambda}\right) / \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}\right\}}$$

Problema 2.2:

Sea $f(x)$ la función definida en $(0, \infty)$ dada por $f(x) = x\ln(x)$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

1) [1 PUNTO] Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2) [2 PUNTOS] Calcule $\int_2^e f(x)dx$.

Solución:

1) En principio es un límite indeterminado del tipo $\underset{\text{Indet}}{0\cdot\infty}$ que dividiendo por x transformamos en un límite indeterminado del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que calculamos aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot ln\,x) = \left[\underset{\text{Indet}}{0\cdot\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln\,x}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\underset{\text{Indet}}{\frac{\infty}{\infty}}\right] \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{-1}{x}\right)^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot ln\,x) = \boxed{0}$$

2) Calculamos la integral por partes:

$$\int x\cdot ln\,x\ \,dx = \begin{bmatrix} u = x & \Rightarrow & u' = 1 \\ v' = ln\,x & \Rightarrow & v \overset{(*)}{=} -x + x\cdot ln\,x \end{bmatrix}$$

$$= -x^2 + x^2\cdot ln\,x + \int x dx - \int x\cdot ln\,x\ \,dx \quad \Rightarrow \quad 2\cdot\int x\cdot ln\,x\ \,dx = -x^2 + x^2\cdot ln\,x + \frac{x^2}{2}$$

Y la integral intermedia también por partes:

$$(*)\quad \int ln\,x\ \,dx = \begin{bmatrix} u = ln\,x & \Rightarrow & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & \Rightarrow & v = x \end{bmatrix} = x\cdot ln\,x - \int 1dx = x\cdot ln\,x - x = (-1 + ln\,x)\cdot x$$

Luego $\int x\cdot ln\,x\ \,dx = \frac{-1}{4}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot ln\,x = \frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{-1}{2} + ln\,x\right)$.

Para calcular la integral definida aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_2^e x\cdot ln\,x\ \,dx \underset{\text{Regla}}{\overset{\text{Barrow}}{=}} \left[\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot\left(\frac{-1}{2} + ln\,x\right)\right]_{x=2}^{x=e} = \frac{1}{2}\cdot e^2\cdot\left(\frac{-1}{2} + ln\,e\right) - \frac{1}{\boxed{2}}\cdot 2^{\boxed{2}}\cdot\left(\frac{-1}{2} + ln\,2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\left(\frac{-1}{2} + ln\,2\right) = \boxed{\frac{e^2}{4} + 1 - 2\cdot ln\,2}$$

$$\int_2^e x\cdot ln\,x\ \,dx = \boxed{\frac{e^2}{4} + 1 - 2\cdot ln\,2}$$

Problema 2.3:

Sean los puntos $P = (0,1,0)$, $Q = (-1,1,2)$, $R = (2,0,-1)$ y el plano $\Pi \equiv \begin{cases} x &= 2+4t \\ y &= -5t+s \\ z &= -1+4s \end{cases}$

1) [2.25 PUNTOS] Calcule el ángulo formado por el plano que contiene a P, Q y R y el plano Π.

2) [0.25 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y Q.

Solución:

1) Calculamos los vectores directores de del plano P, Q y R:

Los vectores $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (-1,1,2) - (0,1,0) = (-1,0,2)$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (2,0,-1) - (0,1,0) = (2,-1,-1)$ son directores del plano Π' que contiene a los puntos P, Q y R. Por tanto, su ecuación implícita será:

$$\Pi' \equiv \begin{vmatrix} -1 & 2 & x-0 \\ 0 & -1 & y-1 \\ 2 & -1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z + 4y - 4 + 2x - y + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Pi' \equiv 2x + 3y + z - 3 = 0$$

En las ecuaciones paramétricas del plano Π, observamos que pasa por (2, 0, –1) y tiene vectores directores (4, –5, 0) y (0, 1, 4). Por tanto, la ecuación implícita del mismo es:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} 4 & 0 & x-2 \\ -5 & 1 & y-0 \\ 0 & 4 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z + 4 - 20x + 40 - 16y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Pi \equiv 20x + 16y - z - 44 = 0$$

El ángulo que forman ambos planos es el mismo que el que forman los vectores normales a ambos:

$$cos\left(\widehat{\vec{n},\vec{n}'}\right) = \frac{|(2,3,1)\cdot(20,16,-1)|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{20^2+16^2+(-1)^2}} = \frac{|40+48-1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{657}} = \frac{87}{\sqrt{9189}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\left(\widehat{\vec{n},\vec{n}'}\right) = 24.89^\circ}$$

2) $d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(-1,0,2)| = \sqrt{(-1)^2+0^2+2^2} = \boxed{\sqrt{5}\ \ u}$

$$d(P,Q) = \boxed{\sqrt{5}\ \ \mathbf{u}}$$

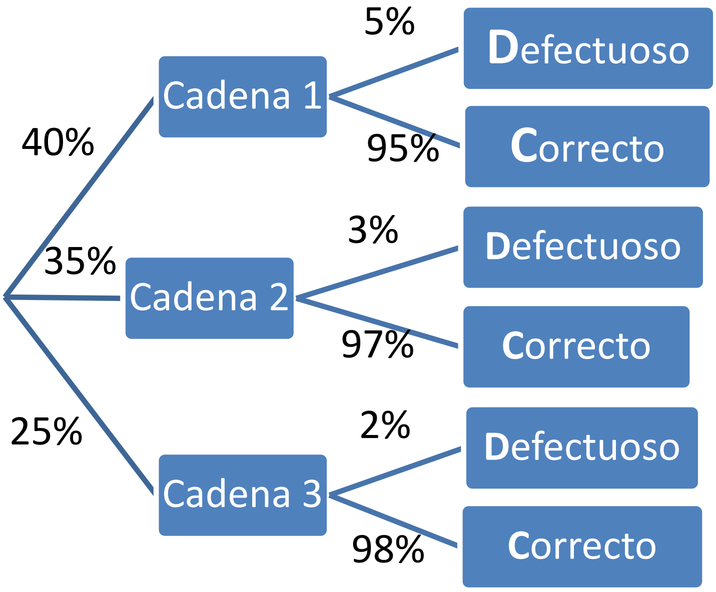
Problema 2.4:

Una empresa de teléfonos tiene tres cadenas de producción para un modelo de teléfono. Cada cadena fabrica, respectivamente, un 40%, 35% y 25% de la producción total. La probabilidad de que un teléfono sea defectuoso es del 5%, 3% y 2% respectivamente. Se toma un teléfono al azar.

1) [1 PUNTO] ¿Cual es la probabilidad de que el teléfono sea defectuoso?

2) [1 PUNTO] Si el teléfono es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que se haya fabricado en la segunda cadena?

Solución:



Llevamos los datos del enunciado a un diagrama de árbol, que completamos usando la probabilidad del suceso contrario.

1) Para calcular la probabilidad de que un teléfono sea defectuoso usamos el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(D) \overset{T^{\text{ma}}\ \text{Prob. total}}{=} P(D/1)\cdot P(1) + P(D/2)\cdot P(2) + P(D/3)\cdot P(3) =$$

$$= \frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100} + \frac{345}{100}\cdot\frac{3}{100} + \frac{25}{100}\cdot\frac{2}{100} = \frac{355}{10000} = \boxed{3.55\ \%}$$

$$\boldsymbol{P(D) \quad = \boxed{0.0355}}$$

2) Usamos el Teorema de Bayes:

$$P(2/D) \overset{\text{Bayes Teorema}}{=} \frac{P(D/2)\cdot P(2)}{P(D)} = \frac{\frac{35}{100}\cdot\frac{3}{\boxed{100}}}{\frac{3.55}{\boxed{100}}} \simeq \boxed{30\%}$$

$$\boldsymbol{P(2/D) = \boxed{0.30}}$$

Autor: José Gallegos Fernández
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo