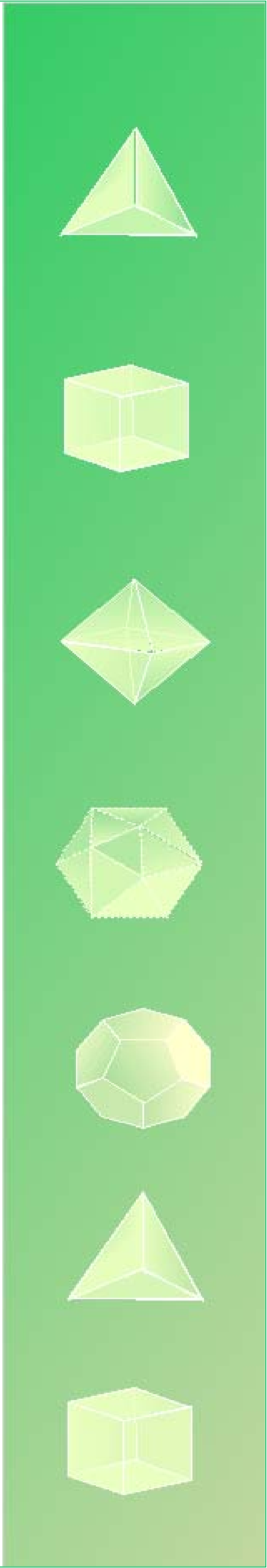


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Castilla La Mancha

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José María López Belinchón y

Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & \text{si } x\leqslant 1 \\ a\sqrt{x}-\dfrac{b}{x^2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Comprueba si la función $f(x)=x^2-4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3,3]$. **(1 punto)**

2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x)=-x^2+2x+3$, la recta $x=-2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x=4$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & & & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & ay & - & z & = & -(4+a) \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a=1$. **(1 punto)**

4A. Dados los puntos $A(1,2,0), B(0,-1,2), C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:

a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. **(1,25 puntos)**

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ **(1,25 puntos por límite)**

2B. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.
a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. **(1,5 puntos)**

4B. Sean la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:
a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**
a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**
b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1A.

1A. a) Determina el valor de a y de b para que la siguiente función $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ a\sqrt{x} - \dfrac{b}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Comprueba si la función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-3, 3]$. **(1 punto)**

Solución:

a) Primero, nótese que el ejercicio pide el cálculo de dos parámetros para que una función sea derivable en todo $\mathbb{R}$, para ello comencemos estudiando la **continuidad** de la función $\boldsymbol{f(x)}$ en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x < 1$, la función $f(x)$ es continua ya que tenemos una función polinómica, cuyo dominio de las funciones polinómicas es todo $\mathbb{R}$.
- Para $x > 1$, la función $f(x)$ es continua ya que tenemos resta de dos funciones continuas en el dominio de definición (por una parte tenemos $\sqrt{x}$ cuyo dominio es $[0, +\infty)$ y la función $\frac{1}{x^2}$ cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$).
- Para $x = 1$, utilizamos la definición de continuidad en un punto.

  Primero calculamos el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ y para ello tenemos que tomar límites laterales, ya que por la izquierda del 1 tenemos una función y por la derecha del 1 tenemos otra función.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (ax^2 + bx + 2) = a + b + 2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(a\sqrt{x} - \frac{b}{x^2}\right) = a - b$$

  Para que el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exista, los límites laterales deben coincidir, por tanto:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \iff a + b + 2 = a - b \iff b = -1$$

  Luego para el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ exista, $b = -1$.

  Y además, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = a + 1 = f(1)$, donde concluimos que para $b = -1$, la función $f(x)$ **es continua en *todo* $\mathbb{R}$.**

Segundo, estudiemos la **derivabilidad** de la función $f(x)$ *en todo* $\mathbb{R}$.

- Para $x < 1$, la función $f(x)$ es derivable ya que tenemos una función polinómica y toda función polinómica es siempre derivable.
- Para $x > 1$, la función $f(x)$ es derivable ya que tenemos resta de dos funciones derivables en el dominio de definición.

- Para $x = 1$, calculamos la derivada de la función:

$$\boldsymbol{f'(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{2ax - 1} & \boldsymbol{si\ x < 1} \\ \boldsymbol{\dfrac{a}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^3}} & \boldsymbol{si\ x > 1} \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x = 1$, las derivadas laterales en dicho punto deben coincidir.

$$f'_-(1) = f'_+(1) \iff 2a - 1 = \frac{a}{2} - 2 \iff 4a - 2 = a - 4 \iff a = \frac{-2}{3}$$

Conclusión del ejercicio:

Para que la función $f(x)$sea derivable en todo $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{a = \frac{-2}{3}}$ **y** $\boldsymbol{b = -1}$.

b) Recordemos cual es el enunciado del teorema de Rolle:

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y que se verifica que $f(a) = f(b)$. Entonces, existe un $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle tiene 3 hipótesis:

1) ¿Es $f(x) = x^2 - 4$ continua en $[-3,3]$? **Si.** El dominio de la función $f(x)$ es todo $\mathbb{R}$.

2) ¿Es $f(x) = x^2 - 4$ derivable en $(-3,3)$? **Si.** El dominio de la función $f'(x) = 2x$ es todo $\mathbb{R}$.

3) ¿Es $f(-3) = f(3)$? **Si.**

$$f(-3) = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

$$f(3) = (3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

Conclusión del ejercicio:

La función $f(x) = x^2 - 4$ verifica las **hipótesis del teorema de Rolle** en el intervalo $[\boldsymbol{-3,3}]$.

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2A.

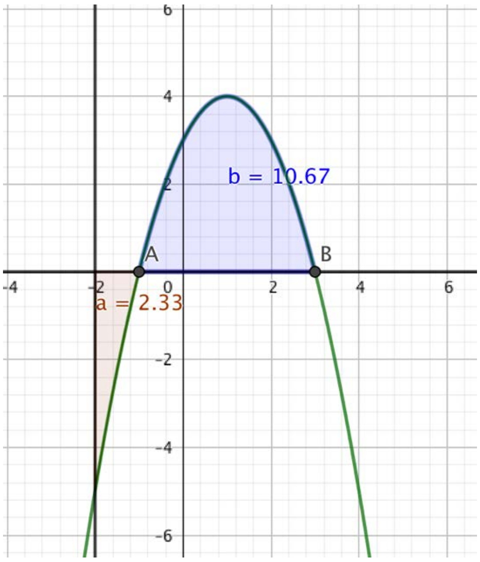
2A. a) Calcula razonadamente el área de los recintos limitados por la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, la recta $x = -2$ y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para calcular el área que nos piden, primero debemos representar la parábola $g(x)$ y las rectas que nos da el enunciado. Para ello, se comenzaría calculando los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas. Son los puntos $A(-1,0)$ y $B(3,0)$ como se ve en la gráfica.

El área que nos piden calcular es la que está sombreada en el dibujo.

Los extremos serían $x = -2$, $x = -1$ y $x = 3$



Por lo tanto

$$Área = \int_{-2}^{-1} [0 - g(x)]dx + \int_{-1}^{3} [g(x) - 0]dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 2x - 3)\, dx + \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left[\frac{5}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] + \left[9 - \left(\frac{-5}{3}\right)\right] = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = 13\, u^2.$$

$$\boldsymbol{Área = 13\, u^2}$$

b) Recordemos cual es la fórmula para poder calcular la ecuación de la recta normal a una función:

$$n \equiv y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Por tanto,

$$g(4) = -4^2 + 2 \cdot 4 + 3 = -16 + 8 + 3 = -5$$

$$g'(x) = -2x + 2\, ; g'(4) = -8 + 2 = -6$$

Luego, la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $g(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$ es:

$$n \equiv \boldsymbol{y + 5 = \frac{1}{6} \cdot (x - 4)}$$

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 3A.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & & & = & a^2 \\ -x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & ay & - & z & = & -(4+a) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Comenzamos escribiendo la matriz ampliada del sistema de ecuaciones y calculamos el determinante de la matriz de coeficientes (formada por las 3 primeras columnas):

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 & a^2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -a & -1 & -(4+a) \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \end{vmatrix} = a^2 - a = a \cdot (a-1)$$

Distinguimos casos:

1) Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 3 y el rango de la matriz ampliada es 3 y como el número de incógnitas es igual a 3, por el teorema de Rouche-Fröbenius, el sistema es compatible determinado.

2) Si $a = 0$, sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es menor que *3*, luego hay que mirar cual es el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

Para ello, vamos a calcular la matriz escalonada reducida de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 = 2F_2 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Luego, el rango de la matriz de coeficientes es 2 (se mira el número de filas distintas de cero una vez calculado la matriz reducida), mientras que el rango de la matriz ampliada es 3, por lo tanto, por el teorema de Rouche-Fröbenius para $a = 0$ es sistema es incompatible.

3) Si $a = 1$, sabemos que el rango de la matriz de coeficientes es menor que *3*, luego hay que mirar cual es el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada. Para ello, y para conocer otra forma de calcular el rango, lo haremos con determinantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos ahora el rango de la matriz ampliada:

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 0,\ por\ tanto, el\ rango\ de\ la\ matriz\ ampliada\ es\ 2.$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada también es 2, pero no coincide con el número de incógnitas, por tanto, por el teorema de Rouche-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo:

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq 1}$,	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 3}$	**Compatible Determinado (Única solución)**
Si $\boldsymbol{a = 0}$,	$\boldsymbol{rg(A) = 2 \neq rg(A') = 3}$	**Incompatible (No hay solución)**
Si $\boldsymbol{a = 1}$,	$\boldsymbol{rg(A) = rg(A') = 2}$	**Compatible Indeterminado** (Infinitas soluciones)

b) Para $a = 1$, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \quad 3y + z = 6 \end{cases}$$

Como el determinante formado por los coeficientes de x y z es distinto de 0, podemos dejar como incógnita libre y. Por tanto, la solución del sistema para $a = 1$ será:

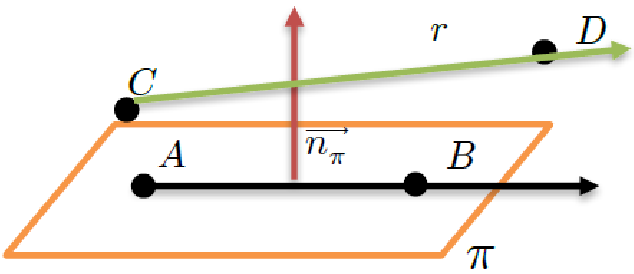
$$\boldsymbol{x = 1 - 2\lambda}$$
$$\boldsymbol{y = \quad \lambda}$$
$$\boldsymbol{z = 6 - 3\lambda}$$

Problema 4A.

4A. Dados los puntos $A(1,2,0), B(0,-1,2), C(2,-1,3)$ y $D(1,0,1)$:
a) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que contiene a la recta que pasa por A y B y es paralelo a la recta que pasa por C y D. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A, B, C y D. **(1,25 puntos)**

Solución:

a)



Como podemos ver en el dibujo, el vector normal de plano es un vector que es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ y al vector $\overrightarrow{CD}$, por tanto,

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (4,-4,-4)$$

Como se trata de un vector, se puede trabajar con $(4,-4,-4)$, o para simplificar las cuentas con el vector, $(1,-1,-1)$.

Sabemos que si el vector normal de un plano $\overrightarrow{n_\pi} = (A,B,C)$, entonces la ecuación del plano será:

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

Por lo tanto, la ecuación del plano que nos piden calcular es:

$\pi \equiv x - y - z + D = 0$, donde D lo calcularemos con el punto A ó B.

Como $A \in \pi \Rightarrow 1 - 2 - 0 + D = 0 \Leftrightarrow D = 1$

Solución:

El plano es $\pi \equiv \boldsymbol{x - y - z + 1 = 0}$.

b) Para resolver este apartado, debemos recordar cual es la fórmula que nos permite calcular el volumen de un tetraedro:

$$V = \left|\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right|\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{6} \cdot -4\right| = \frac{2}{3}\, u^3$$

$$\boldsymbol{V = \frac{2}{3}\, u^3}$$

Problema 5A.

5A. a) Una fábrica A produce el 30 % de los tractores que se demandan en una Comunidad Autónoma, una fábrica B produce el 20 % y la fábrica C el resto. El controlador de calidad sabe que son defectuosos el 4 % de los tractores fabricados por A, el 10 % de los fabricados por B y el 2 % de los fabricados por C. Elegido un tractor al azar, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salga defectuoso. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuoso, que no fuera fabricado por C. **(0,5 puntos)**

b) En una clase hay 16 chicas y 4 chicos. Cada día elijo a un estudiante al azar para que salga a la pizarra. Calcula razonadamente la probabilidad de que los cinco días laborables de la semana salgan a la pizarra:

b1) Tres chicas. **(0,75 puntos)**

b2) Al menos tres chicos. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución:

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes de realizar el diagrama de árbol, tenemos que escribir una leyenda:

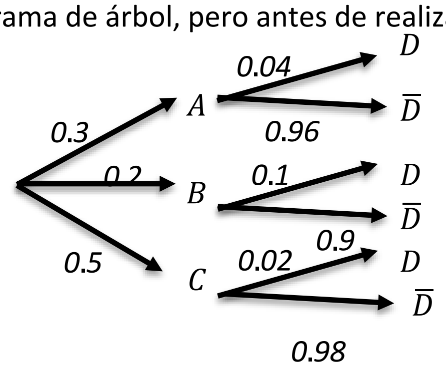
$A =$ "Ser fabricado por la fábrica A"

$B =$ "Ser fabricado por la fábrica B"

$C =$ "Ser fabricado por la fábrica C"

$D =$ "Ser defectuoso"

$\overline{D} =$ "No ser defectuoso"



Una vez realizado el diagrama de árbol, procedemos a resolver los 2 apartados del ejercicio:

a1) Aquí, aplicamos el teorema de la probabilidad total

$$P(\overline{D}) = P(\overline{D}|A)\cdot P(A) + P(\overline{D}|B)\cdot P(B) + P(\overline{D}|C)\cdot P(C)$$

$$= 0.96\cdot 0.3 + 0.9\cdot 0.2 + 0.98\cdot 0.5 = 0.958 = 0.96$$

$$\boldsymbol{P(\overline{D}) = 0.96}$$

a2) Aquí, aplicamos el teorema de Bayes y una propiedad de la probabilidad

$$P(\bar{C}|D) = 1 - P(C|D) = 1 - \frac{P(D|C)\cdot P(C)}{P(D)} = 1 - \frac{0.02\cdot 0.5}{1-0.958} = \frac{16}{21} \approx 0.76$$

$$\boldsymbol{P(\bar{C}|D) = \frac{16}{21} \approx 0.76}$$

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

b) Sea

$$X = \text{"Cantidad de chicos que salen a la pizarra en los cinco días laborales"} \sim \text{Bin}\left(5, \frac{4}{20}\right) = \text{Bin}(5, 0.2)$$

Nota: Observad que en la tabla que nos proporcionan en selectividad, solo aparecen las probabilidades hasta 0.5, es decir, podíamos haber trabajado en lugar de cantidad de chicos, con cantidad de chicas y entonces la probabilidad de éxito es 0.8, que no aparece en esa tabla, por eso es recomendable trabajar con la de chico.

b1) Está claro, la probabilidad de que salgan tres chicas es exactamente la misma que salgan 2 chicos.

$$P(X = 2) = [Buscamos\ en\ la\ tabla] = 0.2048$$

$$\boldsymbol{P(X = 2) = 0.2048}$$

b2) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = [Buscamos\ en\ la\ tabla] = 0.0512 + 0.0064 + 0.0003 = 0.0579$

$$\boldsymbol{P(X \geq 3) = 0.0579}$$

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ **(1,25 puntos por límite)**

2B. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ con $x\in\mathbb{R}$.
a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

3B. Dadas matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A\cdot X-2B=C$. **(1,5 puntos)**

4B. Sean la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi\equiv 2x+y-z=0$.
a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:
a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**
a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10,2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:
b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**
b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1B.

1B. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}}$ b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}$ **(1,25 puntos por límite)**

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = 1^{\pm\infty}\ [Indeterminación\ del\ número\ e]$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\cdot\frac{x}{x-1}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}-1\right)\cdot\frac{x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}x-x^2-x}{x^2-1}\right) = \frac{0}{0}\ [L'Hôpital]$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}x+2e^{x-1}-2x-1}{2x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1}\left(\frac{2e^{x-1}}{x+1}\right)^{\frac{x}{x-1}} = \sqrt{e}}$$

b)

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}\right) = \frac{0}{0}\ [L'Hôpital]$$

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}\right) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{-(2x)\cdot e^{x^2-1}-1}{2x+4}\right) = \frac{2\cdot 1-1}{-2+4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -1}\left(\frac{-e^{x^2-1}-x}{x^2+4x+3}\right) = \frac{1}{2}}$$

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2B.

2B. Dadas las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ con $x \in \mathbb{R}$.
a) Encuentra razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Observamos que el dominio de ambas funciones es $\mathbb{R}$.

Recordemos que una condición necesaria para que una función alcance un extremo relativo es que la primera derivada de la función en dicho punto tiene que ser 0. Entonces, para encontrar el extremo relativo, calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \;\; ; \;\; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ahora, para saber si es un extremo relativo, realizamos la tabla de signos de la primera derivada

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$-2x$	$+$	0	$-$
$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	Creciente	MÁXIMO RELATIVO	Decreciente

Luego, $f(x)$ alcanza un máximo relativo en $x = 0$.

Ahora, calculemos los extremos relativos de $g(x)$.

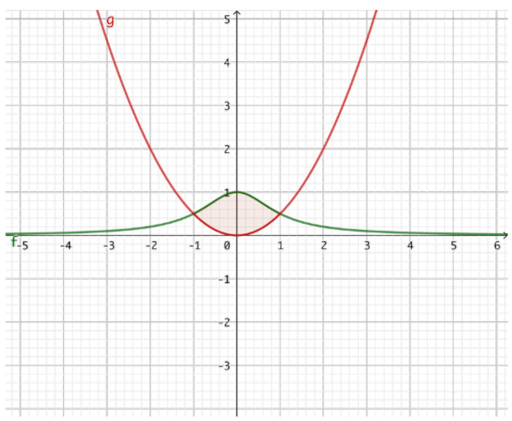
Es obvio que $g(x)$ alcanza un mínimo relativo en $x = 0$, ya que es una parábola con vértice en $(0, 0)$.

$f(x)$ alcanza un **máximo relativo** en $\left(0, f(0)\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

$g(x)$ alcanza un **mínimo relativo** en $\left(0, g(0)\right) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

b) Para calcular el área, primero debemos representar (o esbozar) las dos funciones.

Como podemos ver en las gráficas, los puntos de corte entre ambas funciones es $x = -1$ y $x = 1$ (se pueden calcular, igualando ambas expresiones de las funciones y resolviendo una ecuación bicuadrada).



Por tanto, el área que nos piden:

$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[arctg(x) - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^{1}$$

$$= arctg(1) - \frac{1}{6} - \left(arctg(-1) + \frac{1}{6} \right)$$

$$= arctg(1) - arctg(-1) - \frac{2}{6}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \; u^2$$

$$\boldsymbol{A = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \; u^2}$$

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 3B.

3B. Dadas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente la matriz inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente la matriz X que verifica que $A \cdot X - 2B = C$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Para calcular la inversa de una matriz cuadrada, utilizamos la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}}$$

b) Primero, despejamos de la ecuación matricial, la matriz X, teniendo siempre en cuenta que el producto de matrices no suele cumplir la propiedad de conmutatividad:

$$A \cdot X - 2B = C \Leftrightarrow A \cdot X = C + 2B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot (C + 2B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 10 \\ -9 & -12 & -23 \end{pmatrix}}$$

Autor: José María López Belinchón
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 4B.

4B. Sean la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$, el punto $P(3,1,-1)$ y el plano $\pi \equiv 2x+y-z=0$.

a) Calcula la distancia del punto P a la recta r. **(1,25 puntos)**

b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P y por el punto Q, siendo Q el punto de corte de la recta r y el plano paralelo a π que contiene a P. **(1,25 puntos)**

Solución:

a) Para resolver este apartado, vamos a utilizar la siguiente fórmula, que nos da la distancia de un punto a una recta:

$d = \frac{||\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{V_r}||}{||\overrightarrow{V_r}||}$; siendo A un punto de la recta r: $A(1,0,-1) \Longrightarrow \overrightarrow{AP} = (2,1,0)$

$$d = \frac{||\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{V_r}||}{||\overrightarrow{V_r}||} = \frac{||(2,1,0)\times(3,1,2)||}{||(3,1,2)||} = \frac{||(2,-4,-1)||}{||(3,1,2)||} = \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{6}}{2}u$$

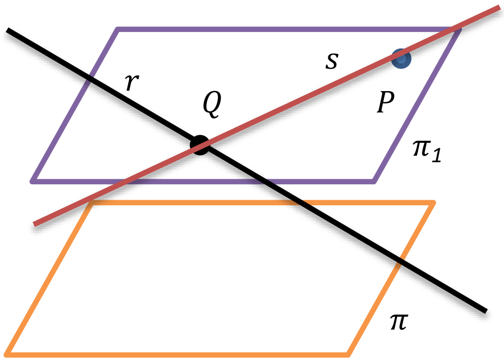
$$\boldsymbol{d = \frac{\sqrt{6}}{2}u}$$

b) Para resolver este ejercicio, seguimos los siguientes pasos:

Primero: Calculamos el plano paralelo a π que contiene a P, que lo llamaremos π_1 .

Segundo: Calculamos el punto de corte de π_1 con la recta r que, según la notación del problema, lo llamaremos Q.

Último paso: Calculamos la recta que pasa por P y Q, que la llamaremos s



Primer paso: El plano π_1 será:

$$\pi_1 \equiv 2x+y-z+D=0 \text{; para calcular } D \text{, utilizamos } P$$

Como $P \in \pi \Longrightarrow 2\cdot 3+1-(-1)+D=0 \Longrightarrow D=-8$: $\pi_1 \equiv 2x+y-z-8=0$

Segundo paso: Para simplificar mucho las cuentas, escribimos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$r \cap \pi_1 \Longrightarrow 2\cdot(1+3\lambda)+\lambda-(-1+2\lambda)-8=0 \Longrightarrow 5\lambda = 5 \Longrightarrow \lambda = 1$. Por lo tanto, $Q=(4,1,1)$.

Tercer paso: Escribimos la ecuación de la recta, en forma paramétrica, que pasa por los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{PQ} = (1,0,2) \Longrightarrow \boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = 3+\mu \\ y = 1 \\ z = -1+2\mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}}$$

Problema 5B.

5B. a) Una alarma de seguridad tiene instalados dos sensores. Ante una emergencia los sensores se activan de forma independiente. La probabilidad de que se active el primer sensor es de 0,98 y de que se active el segundo es de 0,96. Calcula razonadamente la probabilidad de que ante una emergencia:

a1) Se active al menos uno de los dos sensores. **(0,75 puntos)**

a2) Se active solo uno de los sensores. **(0,5 puntos)**

b) El tiempo, en horas, empleado en realizar cierta intervención quirúrgica sigue una distribución normal $N(10, 2)$. Calcular razonadamente el porcentaje de estas intervenciones que se pueden realizar:

b1) Entre 6,5 y 13 horas. **(0,75 puntos)**

b2) En menos de siete horas. **(0,5 puntos)**

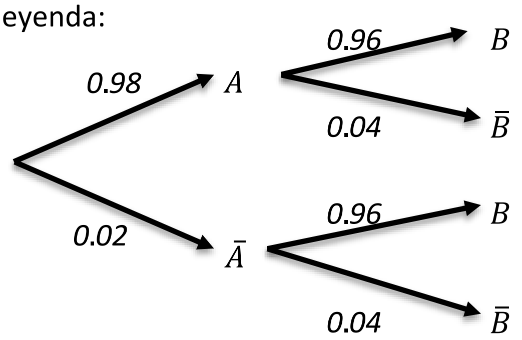
a	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución:

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes de realizar el diagrama de árbol, tenemos que escribir una leyenda:

$A =$ "Activar el primer sensor"

$B =$ "Activar el segundo sensor"



a1) $P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [Independencia] = 1 - 0.02 \cdot 0.04 = \mathbf{0.9992.}$

a2) $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0.98 \cdot 0.04 + 0.02 \cdot 0.96 = \mathbf{0.0584.}$

b) Sea $X =$ "Tiempo, en horas, en realizar una intervención quirúrgica" $\sim N(10,2)$

b1) $P(6.5 < X < 13) =_{\text{Tipificamos}} P\left(\frac{6.5-10}{2} < Z < \frac{13-10}{2}\right) = P(-1.75 < Z < 1.5)$

$= P(Z < 1.5) - P(Z < -1.75) = P(Z < 1.5) - \big(1 - P(Z < 1.75)\big) =_{\text{Tabla}}$

$= 0.9332 - (1 - 0.9599) = 0.8931 = \mathbf{89.31\%.}$

b2) $P(X < 7) =_{\text{Tipificamos}}= P\left(Z < \frac{7-10}{2}\right) = P(Z < -1.5) = 1 - P(Z < 1.5)$

$=_{\text{Tabla}} 1 - 0.9332 = 0.0668 = \mathbf{6.68\%}$

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2019

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = x\,e^{-x}$. **(1 punto)**

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x+2)^2 - 4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & (a-2)y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 3y & + & az & = & -a^2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. **(1 punto)**

4A. Dada la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. **(1,25 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. **(1,25 puntos)**

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A)=0,75 y P(B)=0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**
a2) Si $P(A \mid B) = 0,6$. **(0,5 puntos)**
Nota: $P(A \mid B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Dentro de cada opción el estudiante elegirá **cuatro** ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para $a = 1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. **(1,5 puntos)**

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**
a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:
b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**
b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES PROPUESTA A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A.

1A. a) Estudia la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. **(1,5 puntos)**
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x) = x\,e^{-x}$. **(1 punto)**

Solución:

a) La función es cociente de dos funciones polinómicas, continuas en toda la recta real, por lo que será continua, salvo en los puntos en los que se anule el denominador, es decir, cuando $x^2 - 1 = 0$. La función no es continua en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = -1$.

Estudiamos el tipo de discontinuidad, en cada caso:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x(x-1)(x+1/2)}{(x+1)(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x(x+1/2)}{(x+1)}\right) = \frac{3}{2}.$$

En $x = 1$ la discontinuidad es evitable. La función no está definida para ese valor, pero bastaría definirla como 3/2 en ese punto para que fuese continua.

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to -1}\left(\frac{2x(x-1)(x+1/2)}{(x+1)(x-1)}\right) = \pm\infty$$

En $x = -1$ el límite vale $-\infty$ a la izquierda y $+\infty$ a la derecha, luego es un “salto infinito”

La función tiene una **discontinuidad evitable en $x = 1$** y un **salto infinito en $x = -1$**.

b) Estudiamos la derivada primera y la derivada segunda de la función:

$$g(x) = xe^{-x}$$

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$

Igualamos a cero:

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = 0 = (1-x)e^{-x}$$

La función exponencial no se anula en ningún valor real. La derivada se anula en $x = 1$.

$$g''(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}.$$

Y en $x = 1$, $g''(1) = (1-2)e^{-1} = -e^{-1} < 0$.

Luego la función tiene un máximo en $x = 1$, en el punto $(1, 1/e)$.

En $-\infty$ la función tiende a $-\infty$, y en $+\infty$ tiende a 0. Es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

El único extremo relativo es el punto **$(1, 1/e)$** que es un **máximo (relativo y absoluto)**.

Problema 2A.

2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 16 - x^2$ y $g(x) = (x+2)^2 - 4$. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Las funciones dadas son dos parábolas, de vértices, (0, 16) con las ramas hacia abajo, y (–2, –4) con las ramas hacia arriba. Se cortan en los puntos (2, 12) y (–4, 0). Por tanto, el área limitada es:

$$\int_{-4}^{2}((16-x^2)-((x+2)^2-4))dx = \int_{-4}^{2}(-2\,x^2-4x+16)dx = \left[-2\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+16x\right]_{-4}^{2} =$$

$$= (-\frac{16}{3}-8+32)-(\frac{128}{3}-32-64) = \frac{-144}{3}+120 = 120\ -48 = 72$$

El área del recinto limitado es de **72 u²**.

b) La recta tangente pasa por el punto (1, 15). Calculamos su pendiente:

f'(*x*) = –2*x* luego *f'*(1) = –2.

La recta tangente es:

y = 15 –2(*x* – 1) = 15 – 2*x* +2 = 17 – 2*x*.

La ecuación de la recta tangente pedida es: ***y* = 17 – 2*x*.**

Problema 3A.

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & (a-2)y & - & z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & -4 \\ x & - & 3y & + & az & = & -a^2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 3$. **(1 punto)**

Solución:

a) Escribimos la matriz de coeficientes:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$, y calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a + 3 - a + 2 - (2 - 3 + a(-a+2)) = a^2 - 5a + 6$$

$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ o $a = 3$.

Escribimos la matriz ampliada:

Para $a = 2$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, luego $Rg(A') = 3$

Para $a = 3$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -9 \end{vmatrix} = 0$, luego $Rg(A') = 2$

Por tanto:

Para a = 2 el sistema es incompatible, pues el rango de la matriz de los coeficientes es 2, distinto del rango de la matriz ampliada, que es 3.

Para a = 3 el sistema es compatible indeterminado, pues el rango de la matriz de los coeficientes es 2, igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas, que es 3

Para el resto de los valores de a, ambos rangos son iguales a 3, e iguales al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible determinado.

Si **$a \neq 2$ y $a \neq 3$,** $Rg(A) = Rg(A') = 3$ = número de incógnitas el **Sistema Compatible Determinado**.

Para **$a = 2$** el sistema es **incompatible**.

Para **$a = 3$** el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Si a = 3 el sistema queda $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ 3x - 3y + 3z = -9 \end{cases}$, haciendo $F'_2 = -F_1 + F_2$ y $F'_3 = -3F_1 + F_3$,

obtenemos $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \\ +6z = -12 \end{cases}$, que ya es triangular. Resolvemos:

$$z = -2, y = 1, x = 0.$$

Comprobamos que, en efecto, es solución del sistema.

Si a = 3, *Sistema Compatible Determinado*, $\boldsymbol{x = 0, y = 1, z = -2}$.

Problema 4A.

4A. Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. **(1,25 puntos)**

b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. **(1,25 puntos)**

Solución:

a) Buscamos un punto de r, A = (1, 0, 0) y su vector director: $\vec{v}$ = (–1, 1, 2). Del plano conocemos un punto: B = (1, 0, –1), y dos vectores de orientación: $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{w}$ = (1, –1, 0).

Calculamos el valor del determinante formado por los tres vectores,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 2 + 2) - (2 + 2 + 0) = -4 \neq 0$$, por tanto:

La recta y el plano se cortan.

b) El plano pedido debe contener a la recta, por lo que ya conocemos un punto y uno de los vectores de orientación: A = (1, 0, 0) y $\vec{v}$ = (–1, 1, 2).

Para ser perpendicular debe tener como el otro vector de orientación, el vector perpendicular al plano dado:

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2i + 2j - 2k = (2, 2, -2) \to (1, 1, -1)$$

Obtenemos la ecuación del plano π' determinado por el punto A = (1, 0, 0) y los vectores (–1, 1, 2), (1, 1, –1).

Plano π': $$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 = -3(x-1) + y - 2z \to 3x - y + 2z - 3 = 0.$$

$$3x - y + 2z = 3.$$

Problema 5A.

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A)=0,75 y P(B)=0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. **(0,75 puntos)**

a2) Si $P(A \mid B) = 0,6$. **(0,5 puntos)**

Nota: $P(A \mid B)$ denota la probabilidad condicionada.

b) El 1 % de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos? Redondea el resultado a la centésima. **(0,75 puntos)**

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Solución:

a) Nos dicen que: $P(A) = 0.75$ y $P(B) = 0.35$.

Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Calculamos la probabilidad de la intersección en los dos supuestos dados:

a1) Si los sucesos son independientes entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.75 \cdot 0.35 = 0.2625$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.75 + 0.35 - 0.2625 = 0.8395$.

a2) Si $P(A/B) = 0.6$, entonces $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = 0.35 \cdot 0.6 = 0.21$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.75 + 0.35 - 0.21 = 0.89$.

a1) Si los sucesos son independientes entonces $P(A \cap B)$ = **0.2625** y $P(A \cup B)$ = **0.8395.**

a2) Si $P(A/B) = 0.6$, entonces $P(A \cap B)$ = **0.21** y $P(A \cup B)$ = **0.89**.

b) Es un problema de distribución binomial dónde se supone éxito, un cheque sin fondos, y $p = 0.01$.

b1) Ahora $n = 5$. Nos piden:

P(algún éxito) = $1 - P(k = 0) = 1 - \binom{5}{0}(0.01^0)(0.99^5) = 1 - 0.99^5 = 1 - 0.9509905 = 1 - 0.95 = 0.05$.

b2) P(al menos 3) = $P(k = 3) + P(k = 4) + P(k = 5) = \binom{5}{3}(0.01^3)(0.99^2) + \binom{5}{4}(0.01^4)(0.99^1) + \binom{5}{5}(0.01^5)(0.99^0) = 10\ (0.000001)\ (0.9801) + 5\ (0.00000001)\ (0.99) + 1\ (0.0000000001)\ (1) = 0.000009801 + 0.00000000495 + 0.0000000001 = 0.000009985 = 0.00$.

La probabilidad de algún cheque sin fondos es, redondeando a centésimas, **0.05**. La probabilidad de que al menos 3 sucursales reciban un cheque sin fondos es, redondeando a centésimas, **0.00**.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES PROPUESTA B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1B.

1B. a) Demuestra que la ecuación $\operatorname{sen} x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo $[0, \pi]$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando $x \in [-200, 200]$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para demostrarlo se usa el Teorema de Bolzano que dice que, si la función es continua en un intervalo cerrado, y tiene distinto signo en los extremos del intervalo, entonces necesariamente se anula en un punto del interior del intervalo:

La función $f(x) = sen\ x - 2x + 1$, es una función continua en toda la recta real ya que es suma de la función seno y de una función polinómica, ambas continua en toda la recta real.

$f(0) = sen\ 0 - 0 + 1 = 1 > 0$

$f(\pi) = sen\ \pi - 2\pi + 1 = 0 - 2\pi + 1 < 0$.

Por lo que se verifican las dos condiciones del Teorema de Bolzano, luego existe un punto en el intervalo $(0, \pi)$ en el que se anula la función.

Existe algún punto dónde se anula la función

b) De nuevo estudiamos el signo en los extremos del intervalo, siendo positivo en –200, y negativo en 200, luego al menos existe un punto dónde se anula la función. Estudiamos ahora el signo de la derivada, que es siempre negativa luego la función es siempre decreciente, por lo que sólo se anula en un punto.

$f'(x) = cos\ x - 2 < 0$ en toda la recta real, ya que el módulo de la función coseno es siempre menor o igual a 1.

La ecuación $sen\ x - 2x + 1 = 0$ se anula en [-200, 200] en un único punto.

No nos piden determinar ese punto. Dibujando la gráfica podemos estimar que es aproximadamente para $x = \pi/3$.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 2B.

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}\,dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

Solución:

a) Integramos por partes:

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx =$$

$$\begin{cases} u = x+1 & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{cases}$$

Aplicando la fórmula:

$$\int (x+1)e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x}$$

Aplicamos los límites de integración:

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx = (-(1+1)e^{-1} - e^{-1}) - (-(0+1)e^{-0} - e^{-0}) = -3/e + 2$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx = -3/e + 2}$$

b) $\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx}$

Hacemos el cambio de variables $\boldsymbol{t} = \sqrt{\boldsymbol{x}}$:

$$\begin{cases} t = \sqrt{x} & \rightarrow \quad x = t^2 \rightarrow dx = 2t\,dt \\ 1+x = 1+t^2 \end{cases}$$

Sustituyendo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \int \frac{2t}{t(1+t^2)}dt = \int \frac{2}{1+t^2}dt = 2(arctg\ t) + k = 2(arctg\sqrt{x}) + k.$$

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = 2(arctg\sqrt{x}) + k}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema 3B.

3B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para $a=1$ calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Calculamos el rango de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = a(a+2)+0+0-(0+0+0) = a(a+2) = 0, \Leftrightarrow a = 0 \text{ y } a = -2$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 0$ entonces	**Rango (A) = 3**
Si $a = -2$ o $a = 0$ entonces	**Rango (A) = 2.**

b) Para $a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$X \cdot A = B - X \Rightarrow X \cdot A + X = B \Rightarrow X(A + I) = B \Rightarrow X = B\,(A + I)^{-1}$.

Calculamos la matriz inversa de $A + I$:

$$A+I=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A+I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$$

$$(A+I)^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = B(A+I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{8} \end{pmatrix}}$$

Problema 4B.

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1,5 puntos)**
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos $Q(1, 5, 5)$ y $R(0, 4, 2)$ pertenecen o no a la recta. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que los vectores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{-1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{-2})$ y $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{1})$ sean ortogonales debe ser cero su producto escalar: $-a - 2 = 0$, por lo que $a = -2$.

El producto vectorial de $\vec{u} = (-1, 0, -2)$ y $\vec{v} = (a, b, 1)$ vale: $\vec{u} x \vec{v} = (2b, -2a + 1, -b)$, imponemos que sea igual a $\vec{w} = (2, 5, c)$, y se obtiene que, $2b = 2$; $-2a + 1 = 5$; $-b = c$, por lo que: $b = 1$; $a = -2$; $c = -b = -1$.

b = 1; a = –2; c = –1.

b) El vector normal al plano, $\vec{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$ debe ser el vector director de la recta pedida, que pasa por el punto $P = (-1, 3, 1)$, por lo que su ecuación es:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = \ 1 + 2t \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Veamos si el punto $Q = (1, 5, 5)$ pertenece a la recta: $\frac{\mathbf{1+1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{2} = \frac{\mathbf{5-3}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = \mathbf{2} = \frac{\mathbf{5-1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = \mathbf{2}$, por lo que si pertenece.

Veamos si el punto $R = (0, 4, 2)$ pertenece a la recta: $\frac{\mathbf{0+1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{1} = \frac{\mathbf{4-3}}{\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = \mathbf{1} \neq \frac{\mathbf{2-1}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, por lo que este punto NO pertenece a la recta.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + t} \\ \boldsymbol{y = 3 + t} \\ \boldsymbol{z = \ 1 + 2t} \end{cases} \rightarrow \frac{\boldsymbol{x+1}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{y-3}}{\mathbf{1}} = \frac{\boldsymbol{z-1}}{\mathbf{2}}; \quad \boldsymbol{Q} \textbf{ pertenece } \boldsymbol{r}; \quad \boldsymbol{R} \textbf{ no pertenece a } \boldsymbol{r};$$

Problema 5B.

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70 % de los pacientes son niñas. De los niños el 40 % son menores de 36 meses y de las niñas el 30 % tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. **(0,75 puntos)**

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. **(0,5 puntos)**

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. **(0,75 puntos)**

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

Solución:

a1) Llamamos a a que sea niña, o a que sea niño, y $P(<36)$ a la probabilidad de que tenga menos de 36 meses. Se cumple que:

$$P(<36) = P(a \cap <36) + P(o \cap <36) = 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.4 = 0.21 + 0.12 = 0.33$$

La probabilidad de que no tenga menos de 36 meses es el suceso contrario a que si tenga menos de 36 meses, luego la probabilidad pedida es igual a:

$$1 - P(\{tenga\ menos\ de\ 36\ meses\}) = 1 - 0.33 = 0.67$$

a2) Es una probabilidad condicionada:

$$P(a/<36) = \frac{P(a \cap <36)}{P(<36)} = \frac{0.7 \cdot 0.3}{0.33} = 0.636363\ldots \cong 0.64$$

a1) La probabilidad de que no tenga menos de 36 meses es igual a 0.67.

a2) Si el paciente es menor de 36 meses, la probabilidad de que sea niña es aproximadamente igual a 0.64

b1) La variable sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma) = N(60, 10)$. Tenemos que:

$P(x \geq 75) = P(z \geq \frac{75-60}{10}) = P(z \geq 1.5) = 1 - P(x < 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668.$

b2) Multiplicamos la $P(x < 1.5)$ por el número de opositores, 450, con lo que se obtiene:

$$P(x < 1.5) * 450 = 419.94 \cong 420$$

b1) La probabilidad de obtener 75 puntos o más es de 0.0668, es decir de aproximadamente un 7 %.

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 es aproximadamente 420.