MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Castilla y León

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jorge Muñoz Yáñez y
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$. **(1 punto)**

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, \ 2, \ 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B} = (2, \ 1, \ 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

E4.- a) Calcular $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x \operatorname{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x) = 4x$ y de $g(x) = x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k = 2$. **(1 punto)**

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano π. **(1 punto)**

b) La recta r esté contenida en el plano π. **(1 punto)**

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d. **(2 puntos)**

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}(x)}{3\cos(x)-3}$. **(1punto)**

E5.- En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**

b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN A

Problema A.1:

E1.- Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 6\end{pmatrix}$.

a) Estudie la existencia y unicidad de soluciones según los valores del parámetro m. **(1 punto)**

b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior para el caso $m = 2$. **(1 punto)**

Solución:

a) Empezamos por calcular el determinante de A e igualarlo a cero:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & m\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix} = 2m - 2 = 0.$$

De donde se deduce que el determinante será cero cuando $m = 1$.

El rango de la matriz ampliada es siempre 3, ya que $\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 2 & 6\end{vmatrix}$ es distinto de cero.

Se presentan dos casos:

1. $m = 1 \rightarrow$ El sistema es indeterminado porque el rango de la matriz de los coeficientes es menor de tres, menor que el número de incógnitas.
2. $m \neq 1 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado porque el rango de la matriz de los coeficientes es tres, igual al rango de la matriz ampliada, e igual al número de incógnitas.

Si $m \neq 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 3 = rango matiz ampliada $\Rightarrow$**	**Compatible determinado**
Si $m = 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2 < rango matriz ampliada $\Rightarrow$**	**Compatible indeterminado**

b) Resolviendo la ecuación matricial $A \cdot X = v$, resulta: $X = inv(A) \cdot v$

Sustituyendo $m = 2$, y gracias al resultado anterior ($|A| = 2$ distinto de cero), se calcula la inversa de A como:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix};\ inv(A) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ -4 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

y multiplicando:

$$X = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ -4 & -2 & 4\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, **x = 1, y = 1, z = 1.**

Problema A.2:

E2.- a) Calcular la ecuación del plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ y pasa por el punto $A = (1, \ 2, \ 1)$. **(1 punto)**

b) Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto $\boldsymbol{B} = (2, \ 1, \ 2)$ y es perpendicular a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$ y $s_2 \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. **(1 punto)**

Solución:

a) El plano π viene determinado por los puntos A = (1, 2, 1), que nos dan, B = (1, 1, 1) de la recta r, y por el vector $\vec{\boldsymbol{v}}$ = (2, 3, 2) también de la recta r. El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$ = (0, 1, 0) es de orientación del plano, y el punto A.

Luego la ecuación de π es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 = 2z - 2x \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x - z = 0}$$

b) Si la recta r es perpendicular a las dos rectas dadas, su vector director será el vector ortogonal a los vectores de dirección de dichas rectas:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 6j + 8k$$

Es decir, r: $\begin{cases} punto \ \ B = (2,1,2) \\ vector\ director\ \vec{v} = (-2,-6,8) \ \rightarrow \ (1,3,-4) \end{cases}$

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = 1 + 3\lambda} \\ \boldsymbol{z = 2 + -4\lambda} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-4}}$$

Problema A.3:

E3.- Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$, para $x \in \mathbb{R}$.

a) Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcule el máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-2,2]$. **(1 punto)**

Solución:

a) Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 0.$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos valores, $x = 1, x = -2$, que corresponden a las abscisas de los posibles máximos o mínimos.

Derivando por segunda vez, se obtiene $f''(x) = 12x + 6$, y sustituyendo dichas abscisas resulta:

- $f''(1) = 18$. Positivo → Hay un mínimo en $x = 1$, de ordenada $f(1) = -7$.
- $f''(-2) = -18$. Negativo → Hay un máximo en -2, de ordenada $f(-2) = 20$.

Como hay un máximo en $x = -2$, la función es creciente si $x < -2$ y decreciente si $x \in (-2, 1)$.

Como hay un mínimo en $x = 1$, la función es decreciente si $x \in (-2, 1)$ y creciente si $x > 1$.

Por ser de tercer orden, hay tres intervalos con la misma tendencia y dos cambios en la tendencia, que coinciden con el máximo y mínimo relativos. Las tendencias son, por orden de abscisas:

Creciente si $x < -2$ → $f(-2) = 20$, $(-2, 20)$ **máximo relativo** → decreciente si $x \in (-2, 1)$

Decreciente si $x \in (-2, 1)$ → $f(1) = -7$, $(1, -7)$ **mínimo relativo** → creciente si $x > 1$.

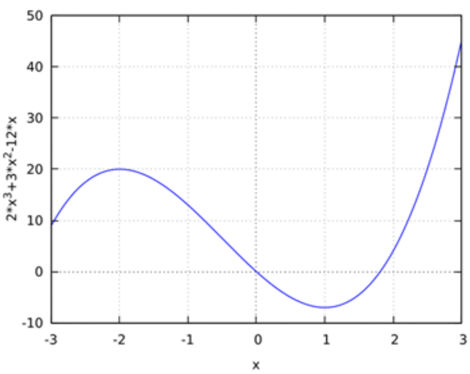
b) Los valores de $f(x)$ en los extremos del intervalo $[-2, 2]$ son $f(-2) = 20$, $f(2) = 4$. Dentro del intervalo hay un único mínimo en $f(1) = -7$, por tanto el menor de los tres valores tiene que ser el mínimo absoluto.

Mínimo absoluto en $[-2, 2]$: $(1, -7)$.

Al ser un mínimo único en el intervalo, el mayor de los valores restantes será el máximo absoluto.

Máximo absoluto en $[-2, 2]$: $(-2, 20)$.

La siguiente figura muestra las soluciones de forma gráfica:



Problema A.4:

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x\,\mathrm{sen}(x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular el área encerrada por las gráficas de $f(x)=4x$ y de $g(x)=x^3$ en el intervalo $[0,2]$, probando anteriormente que en dicho intervalo $f \geq g$. **(1 punto)**

Solución:

a) Primero hallamos el límite en cero, como en cero se anula tanto el numerador como el denominador, tenemos una indeterminación del tipo: 0/0.

Usando L'Hôpital resulta $L = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{x\ sen(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{sin(x)}{sin(x)+xcos(x)}$, y al sustituir por cero continúan anulándose numerador y denominador, luego se mantiene la indeterminación: 0/0.

Usando de nuevo L'Hôpital resulta:

$$L = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{sin(x)}{sin(x)+xcos(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{cos(x)}{2cos(x)-xsin(x)}\right) = -\frac{cos(0)}{2cos(0)-0\cdot sin(0)} = -\frac{1}{2},$$

De forma que el límite cuando x tiende a cero es $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{x\ sen(x)} = -\frac{1}{2}}$.

b) Calculando los valores de las funciones en los extremos del intervalo resulta:

- $f(0) = g(0) = 0$,
- $f(2) = g(2) = 8$.

Como son iguales, los valores intermedios son los que determinan que función es mayor.

Los valores en mitad del intervalo son:

- $f(1) = 4$, $g(1) = 1$,

así que $f(x)$ es mayor durante el intervalo [0, 2].

Ahora, calculando la integral indefinida para ambas funciones resulta:

- $F(x) = 2x^2$
- $G(x) = \frac{x^4}{4}$

El área resultante de cada función es:

$AF = 2\cdot 2^2 - 2\cdot 0^2 = 8$,

$AG = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$.

Y el área encerrada por las gráficas es la diferencia entre la mayor y la menor: $A = 8 - 4 = 4$ u^2.

$A = 4$ u^2.

Problema A.5:

E5.- Las notas de Matemáticas II de 500 alumnos presentados al examen de EBAU tienen una distribución normal con media 6,5 y desviación típica 2.

a) Calcule la probabilidad de que un alumno haya obtenido más de 8 puntos. **(1 punto)**

b) ¿Cuántos alumnos obtuvieron notas menores de 5 puntos? **(1 punto)**

Solución:

a) Tipificando para la variable en $x = 8$ de media 6.5 y desviación típica 2, resulta $Z_8 = \frac{8-6.5}{2} = 0.75$.

Por otro lado, $P(x > 8) = P(Z > 0.75) = 1 - P(Z < 0.75)$

Buscado en la tabla, se obtiene $P(Z < 0.75) = 0.7734$, de manera que la probabilidad de obtener mas de 8 es de $P(x > 8) = P(Z > 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$.

$$P(x > 8) = \mathbf{0.2266}.$$

a) Tipificando para la variable $x = 5$ resulta $Z_5 = \frac{5-6.5}{2} = -0.75$.

Como, $P(Z < -0.75) = 1 - P(Z < 0.75)$ y se conoce el valor $P(Z < 0.75) = 0.7734$ por el apartado anterior, la probabilidad de obtener menos de 5 es de:

$$P(x < 5) = P(Z < -0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266.$$

Siendo 500 alumnos, el 22.66 % son 113.3:

Así que, aproximadamente $\mathbf{113}$ estudiantes obtuvieron notas menores de 5.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRUEBA B

Problema B.1:

E1.- a) Encontrar los valores de k para que la matriz $A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sea invertible. **(1 punto)**

b) Encontrar la inversa de A para $k = 2$. **(1 punto)**

Solución:

a) La condición para que sea invertible es que el determinante de la matriz sea distinto de cero: $|A| \neq 0$, calculando el determinante e igualando a cero se obtiene:

$$\begin{vmatrix} k-1 & 2 & -2 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (k-2)\cdot(k-1) - 2(2-k) + 2 = k^2 - k = 0.$$

Resolviendo para k, se obtiene $k = 0$ y $k = 1$, de manera que es invertible para $k \neq 0$ y $k \neq 1$.

A es invertible para $\boldsymbol{k \neq 0}$ y $\boldsymbol{k \neq 1}$.

b) Cuando $k = 2$, la matriz resultante es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Su determinante es 2, y su inversa, es:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{3/2} & \mathbf{-1/2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

E2.- Sean la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + y + kz = 0$.

Encontrar m y k para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano π. **(1 punto)**

b) La recta r esté contenida en el plano π. **(1 punto)**

Solución:

a) El vector de dirección de la recta r es $(m, 2, 4)$ y el vector ortogonal del plano π es: $(1, 1, k)$. Para que la recta sea ortogonal al plano ambos vectores deben ser linealmente dependientes (tener la misma dirección):

$$\frac{m}{1} = \frac{2}{1} = \frac{4}{k}, \text{ luego } m = 2 \text{ y } k = 2.$$

m = 2 y k = 2

b) Para que la recta esté contenida en el plano, a) el punto de la recta, (1, 1, 1) debe verificar la ecuación del plano, y b) el vector de dirección de la recta $(m, 2, 4)$, debe ser ortogonal al vector ortogonal al plano: $(1, 1, k)$, por lo que su producto escalar debe ser cero.

a) Ecuación del plano: $x + y + kz = 0$, luego 1 + 1`+ k = 0, por lo que k = −2.

b) Producto escalar: $(m, 2, 4)\ (1, 1, k) = m + 2 + 4k = 0 = m + 2 + 4(-2)$ luego $m = 6$.

m = 6 y k = −2

Problema B.3:

E3.- Sea el polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ del cual sabemos que $f(0) = 1, f(1) = 0$ y que tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 1$. Calcular a, b, c y d.

Solución:

Como se sabe el valor de la función en las abscisas cero y uno, se pueden obtener dos ecuaciones simplemente sustituyendo $x = 0$ y $x = 1$.

1. $f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 1 \rightarrow d = 1$
2. $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0 \rightarrow d + c + b + a = 0$

Ahora, también se sabe que en las mismas abscisas tiene extremos relativos, y por lo tanto su derivada debe ser cero. La derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Una vez más, sustituyendo e igualando al valor de ordenadas de la función $f'(x)$, que es cero en ambos casos por ser extremos, resulta:

3. $f'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$
4. $f'(1) = 3a \cdot 1^3 + 2b \cdot 1^2 + c = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Ahora, como hay un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, se puede resolver.

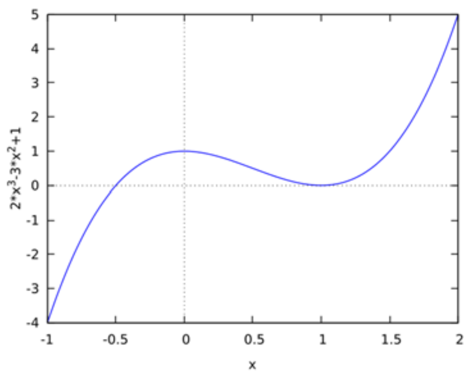
Ya se conocen dos, $(d = 1, c = 0)$ así que se puede reducir el sistema a dos ecuaciones y dos incógnitas sustituyendo:

- $b + a = -1,$ (1)
- $2b + 3a = 0,$ (2)

Haciendo por ejemplo (2) - 2*(1), resulta $a = 2$, y por lo tanto $b = -3$, resultando la solución del sistema:

$\boldsymbol{a = 2, b = -3, c = 0, d = 1}$, y la función: $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1}$

El gráfico siguiente muestra la función entre -1 y 2:



Problema B.4:

E4.- a) Sea $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$. Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. **(1 punto)**

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}(x)}{3\cos(x)-3}$. **(1punto)**

Solución:

a) Estudiamos la función:

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+1};\ f(0) = 3;\ f(2) = \frac{7}{11};\ f(-3/2) = 0$$

El único punto de corte con el eje de abscisas está fuera del intervalo [0, 2], luego toda la gráfica tiene el mismo signo, positivo:

$$Área = \int_0^2 \left(\frac{2x+3}{x^2+3x+1}\right)dx = [ln(x^2+3x+1)]^2{}_0 =$$

$$ln(4+6+1) - ln(1) = ln(11) = 2.39789 \cong 2.4$$

Área = $\boldsymbol{ln(11) \cong 2.4}$.

b) La función, cociente de dos funciones polinómicas, se anula para x = 0 tanto el numerador como el denominador, por lo que aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{xsenx}{3cosx-3}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{senx + xcosx)}{-3senx}\right)$$

De nuevo se anula numerador para x = 0, luego volvemos a aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{cosx + cosx - xsenx}{-3cosx}\right) = \frac{2}{-3}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{xsenx}{3cosx-3}\right) = \frac{2}{-3}}$$

Problema B.5:

E5.-En una competición de tiro olímpico hay 10 rifles, 4 con visor telescópico y 6 sin él. La probabilidad de que un tirador haga blanco con un rifle con visor telescópico es 0,95 y sin él es de 0,65.

a) Halla la probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar. **(1 punto)**
b) Si el tirador hace blanco. ¿Es más probable que haya disparado con un rifle con visor telescópico o sin él? **(1 punto)**

Solución:

a) Llamamos T a hacer blanco disparando con un rifle de visor telescópico, y noT a disparar con un rifle sin él. Llamamos B a hacer blanco, y $no\ B$ a no hacerlo.

Hacemos una tabla de contingencia, y completamos los datos del enunciado: $P(T)$ = 0.4; $P(noT)$ = 0.6.

	B	noB	
T			4/10 = 0.4
noT			6/10 = 0.6
			1

$P(B/T)$ = 0.95; $P(B/noT)$ = 0.65. Luego por probabilidad del suceso contrario: $P(noB/T)$ = 0.05; $P(noB/noT)$ = 0.35.

a) Calculamos:

$P(B \cap T) = P(T) \cdot P(B/T)$ = 0.4 · 0.95 = 0.38.

$P(B \cap noT) = P(noT) \cdot P(B/noT)$ = 0.6 · 0.65 = 0.39.

Por lo que $P(B)$ = 0.38 + 0.39 = 0.77.

Completamos la tabla de contingencia:

	B	noB	
T	**0.38**	***0.02***	4/10 = 0.4
noT	**0.39**	***0.21***	6/10 = 0.6
	0.77	***0.23***	1

La probabilidad de hacer blanco escogiendo un rifle al azar es de 0.77.

b) Debemos calcular $P(T/B)$ y comparar con $P(noT/B)$.

$P(T/B) = P(B \cap T)/P(B)$ = 0.38/0.77 = 0.4935…

$P(noT/B) = P(B \cap noT)/P(B)$ = 0.39/0.77 = 0.5064…

Son probabilidades muy parecidas, pero es **más probable** que haya disparado con rifle **sin visor telescópico**.

	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para $m=1$. **(1 punto)**

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u}=(1,1,a)$ y $\vec{v}=(1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p}=(1,2,3)$ y $\vec{q}=(1,-2,-3)$. **(1,5 puntos)**

E3.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x, & \text{si } x<0 \\ x^2-4x, & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2. **(1,4 puntos)**

b) Probar que no posee extremo relativo en 0. **(0,6 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x-\cos x}$ **(1 punto)**

b) Calcular a, siendo $a>1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=x$, $g(x)=ax$ y $x=1$ sea 1. **(1 punto)**

E5- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC. **(1 punto)**

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N. **(2 puntos)**

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1, 2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

E4.- Determínense los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. **(2 puntos)**

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: $A =$ "tener menos de 45 años", $B =$ "tener entre 45 y 55 años", $C =$ "tener más de 55 años" e $I =$ "hablar inglés":

a) Calcular $P(I/A)$, $P(I/B)$ y $P(I/C)$. **(0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro m el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + mz = 4 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para $m = 1$. **(1 punto)**

Solución:

a) Empezamos por analizar los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada:

$$rango\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix} = 2 = rango\ B\ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & m & 4 \end{pmatrix} < \ nº\ incógnitas;$$

De donde se deduce que el sistema es **compatible indeterminado para todo valor de *m***.

Para todo valor de ***m*** el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Su solución es: $\begin{cases} x = 3 - (m+1)\lambda \\ y = -2 + (m+2)\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Para m = 1:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 3 - 2\lambda} \\ \boldsymbol{y = -2 + 3\lambda} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases}$$

Problema A.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u} = (1,1,a)$ y $\vec{v} = (1,-1,a)$. Calcular a para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p} = (1,2,3)$ y $\vec{q} = (1,-2,-3)$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Para que los vectores dados sean ortogonales su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 = (1,1,a)\cdot(1,-1,a) = 1-1+a^2 = a^2 \rightarrow a = 0$$

***a* = 0**

b) Para obtener un vector ortogonal a los dos vectores dados calculamos su producto vectorial:

$$\vec{p}\ x\ \vec{q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0i - 6j + 4k$$

Por tanto, el vector (0, −6, 4) es ortogonal a los dados, pero no es unitario. Calculamos su módulo, y dividimos por él:

Si la recta *r* es perpendicular al plano π, su vector director será el vector normal del plano.

Módulo: $\sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

Vector unitario: $0i - \frac{6}{\sqrt{52}}j + \frac{4}{\sqrt{52}}k = 0i - \frac{3}{\sqrt{13}}j + \frac{2}{\sqrt{13}}k \rightarrow (0, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})$

$$\mathbf{(0, -\frac{6}{\sqrt{52}}, \frac{4}{\sqrt{52}}) = (0, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}})}$$

Problema A.3:

E3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2.

b) Probar que no posee extremo relativo en 0.

Solución:

a) Lo primero es calcular la derivada de la función e igualar a cero:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < 0 \\ 2x - 4, & x > 0 \end{cases}$$

La primera ecuación se anula en $x = -1 < 0$ y la segunda en $x = 2 > 0$, luego ambos puntos que corresponden a abscisas de posibles máximos o mínimos.

Derivando por segunda vez, se obtiene $f''(x) = \begin{cases} -2 < 0, & x < 0 \\ 2 > 0, & x > 0 \end{cases}$, por lo que $x = -1$ se tiene un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo. Sustituyendo dichas abscisas resulta: $(-1, 1), (2, -4)$.

$(-1, 1)$ **máximo relativo** → creciente si $x \in (-\infty, -1)$; decreciente si $x \in (-1, 2)$.

$(2, -4)$ **mínimo relativo** → creciente si $x > 2$.

b) Estudiamos la derivada en $x = 0$.

$$f'(0) = \begin{cases} -2x - 2 = -2 < 0, & x < 0 \\ 2x - 4 = -4 < 0, & x > 0 \end{cases},$$

por lo que la derivada antes y después de $x = 0$ es negativa, no hay cambio de signo y no se anula. La función al pasar por $x = 0$ es siempre decreciente. No posee un extremo relativo en $(0, 0)$.

La función está formada por dos parábolas, que en $x = 0$ ambas son decrecientes, y en dicho punto se unen, por lo que la función es continua en toda la recta real.

En $(0, 0)$ la función es decreciente. No tiene un extremo relativo.

Problema A.4:

E4.- a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - \cos x}$ **(1 punto)**

b) Calcular a, siendo $a > 1$, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = ax$ y $x = 1$ sea 1. **(1 punto)**

Solución:

a) La función, cociente de dos funciones polinómicas, se anula para $x = 0$ tanto el numerador como el denominador, por lo que aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{\mathrm{e^x - cosx}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{cosx)}{\mathrm{e^x} + senx}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{\mathrm{e^x - cosx}}\right) = 1}$$

b) Las funciones dadas son rectas. Hallamos su punto de corte:

$$x = ax, x(1 - a) = 0 \to x = 0$$

Si $a = 1$, ambas rectas son la misma. Si $a > 1$, la recta $y = ax$ va por encima de la recta $y = x$.

$$\int_0^1 |x(1-a)|dx = \left|\left[\frac{x^2}{2}(1-a)\right]_0^1\right| = \left|\left(\frac{1-a}{2}\right) - 0\right| = 1 \to a - 1 = 2 \to a = 3.$$

$$\boldsymbol{a} = 3.$$

Problema A.5: $\mu\sigma$

E5- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC.

Solución:

a) Nos piden calcular $P(36 < X < 38) = P(X < 38) - P(X < 36)$

Sabemos que: $\mu = 37$ y que $\sigma = 0.5$. Tipificamos: 38 – 37/ 0.5 = 2; 36 – 37/ 0.5 = –2.

$$P(36 < X < 38) = P(z < 2) - P(z < -2) = P(z < 2) - (1 - P(z < 2)) = 2(P(z < 2)) - 1 = 2(0.9772) - 1 = 0.9544.$$

La probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36 y 38 grados es de **0.9544**.

b) $P(X < 36.5)$.

Tipificamos: 36.5 – 37/ 0.5 = –1;

$$P(X < 36.5) = P(z < -1) = 1 - P(z < -1) = 1 - 0.843 = 0.157.$$

La probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor a 36.5 grados es menor que **0.157**.

Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

E1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N. **(2 puntos)**

Solución:

a) Empezamos por calcular el producto AM:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ x-y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y & 1 \\ -x+y & 1 \end{pmatrix}.$$

Y la matriz inversa de N, que existe pues su determinante es distinto de cero, vale 1.

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualamos:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + y = 1 \end{cases}.$$

Al sumar las dos ecuaciones, se obtiene $x = 3$, y al sustituir en la segunda, $y = 4$.

Por lo tanto, $AM = N^{-1}$ si $\boldsymbol{x = 3, y = 4}$.

Problema B.2:

E2.- Hallar a y b para que los vectores $(a, -1{,}2)$ y $(1, b, -2)$ sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

Solución:

a) Para que los vectores dados sean ortogonales su producto escalar debe ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = (a, -1, 2) \cdot (1, b, -2) = a - b - 4$$

Calculamos su producto vectorial:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -1 & 2 \\ 1 & b & -2 \end{vmatrix} = (2 - 2b)i \ + (2a + 2)j \ + (ab + 1)k$$

Igualamos las dos primeras coordenadas de su producto vectorial:

$$2 - 2b = 2a + 2 \rightarrow -b = a$$

Sustituimos en la ecuación del producto escalar:

$$0 = a - b - 4 = a \ + \ a \ - 4 \rightarrow a \ = \ 2 \rightarrow b = -2.$$

$$\boldsymbol{a \ = \ 2; b = -2}$$

Problema B.3:

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función $f(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

Solución:

a) Teorema de Rolle:

Si s una función **continua** definida en un intervalo **cerrado** **derivable** sobre el intervalo **abierto** y , entonces: Existe al menos un punto perteneciente al intervalo abierto tal que .

b) Nos piden probar que la función: $f(x) = 2x - sen(x)$ únicamente se anula en un punto.

Es claro que se anula en $x = 0$, ya que $f(0) = 2(0) - sen(0) = 0$.

Para probar que ese es el único punto en el que se anula, vamos a usar el teorema de Rolle por contradicción, es decir, si no se cumple la conclusión, es que algo de la hipótesis no debe ser cierto.

La función es continua y derivable en toda la recta real.

Su derivada es: $f'(x) = 2 - cos(x)$, que se anularía sólo si el coseno valiera 2, lo que nunca ocurre ya que es siempre menor que 1.

Al no verificarse la conclusión de que exista un punto dónde se anula la derivada, debe fallar alguna de las hipótesis.

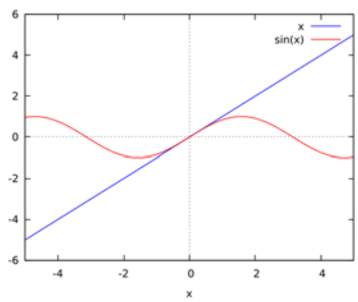
Son tres:

La función es continua y derivable en toda la recta real. Esta se cumple siempre.

Luego, lo que contradice el que la función pudiera anularse en otro punto al darse entonces las condiciones del teorema de Rolle.

La función únicamente se anula en $x = 0$.

La siguiente figura muestra el resultado anterior de forma gráfica:



Autor: Jorge Muñoz Yáñez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

E4.- Determínense los valores de a y de b para los cuales la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a + \cos x, & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 1, & \text{si } x > 0 \end{cases},$$

es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$.

Solución:

La función está definida a trozos por dos funciones continuas en toda la recta real, por lo que, únicamente puede tener un punto de discontinuidad en donde se unen los trozos, es decir, en x = 0.

Estudiamos el valor de la función a ambos lados, e imponemos que sean iguales:

$$f(x) = \begin{cases} a + cosx, x \leq 0 \\ x^2 - 2bx + 1, x > 0 \end{cases} \to a + cos(0) = a + 1 = 1 \to a = 0.$$

Imponemos ahora lo del área. Entre 0 y 1 la función es la parábola:

$$\int_0^1 (x^2 - 2bx + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2b\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - b + 1 = \frac{1}{3} \to b = 1.$$

$$\boldsymbol{a = 0} \text{ y } \boldsymbol{b = 1}.$$

Problema B.5:

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor:
- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: $A =$ "tener menos de 45 años", $B =$ "tener entre 45 y 55 años", $C =$ "tener más de 55 años" e $I =$ "hablar inglés":

a) Calcular $P(I/A)$, $P(I/B)$ y $P(I/C)$. **(0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

Solución:

a) Llamamos A al suceso, tener menos de 45 años, B a tener entre 45 y 55 años, y C a tener más de 55 años. Llamamos I al suceso hablar inglés, y noI a no hablarlo. Nos dan los siguientes datos:

$P(A) = 50/100 = 0.5$; $P(B) = 30/100 = 0.3$; $P(C) = 20/100 = 0.2$.

$P(A \cap I) = 15/100 = 0.15$; $P(B \cap I) = 6/100 = 0.06$; $P(C \cap I) = 3/100 = 0.03$.

Nos piden calcular $P(I/A) = P(I \cap A) / P(A) = 0.15/0.5 = 0.3$.

$P(I/B) = P(I \cap B) / P(B) = 0.06/0.3 = 6/30 = 0.2$.

$P(I/C) = P(I \cap C) / P(C) = 0.03/0.2 = 3/20 = 0.15$.

$$P(I/A) = 0.3;\ P(I/B) = 0.2;\ P(I/C) = 0.15.$$

b) Ahora debemos calcular y una nueva probabilidad condicionada: $P(A/I) = P(A \cap I) / P(I)$.

Calculamos $P(I)$. Podemos hacerlo completando una table de contingencia, o bien, sabemos que solo hablan inglés: $15 + 6 + 3 = 24$. Luego $P(I) = 24/100 = 0.24$.

$P(A/I) = P(A \cap I) / P(I) = 0.15/0.24 = 0.625$.

$$P(A/I) = 0.625.$$