MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

MADRID

Textos Marea Verde

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.
b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.
c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.
b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv\ 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ ***y*** $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$***, se pide:***

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a.
b) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A M para el caso a = 0.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: Vídeo solución: https://youtu.be/QXvmb0mD2A0

a) Se cumple que $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+3=5\neq 0$, por lo que $rg(A)\geq 2$,

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2-6+8+4\,a-4-3\,a = a^2+a-2=0 \Leftrightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=1,-2.$

Entonces si $\boldsymbol{a\neq 1 \text{ o de } -2, rg(A)=3}$.

Si $\boldsymbol{a=1}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-3+2+1-2+3=0$, luego $\boldsymbol{rg(A)=2.}$

Si $\boldsymbol{a=-2}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, ya que $F_3=-F_2$, luego: $\boldsymbol{rg(A)=2.}$

b) Si $a=0$, $A\,M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, con:

$|A\,M| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6+2-4+6=-2\neq 0$. Se cumple que $A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-4$,

$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=0$, $A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2$, $A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=8$, $A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-1$,

$A23=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-5$, $A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=6$, $A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1$, $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3$,

por lo que:

$$\boldsymbol{(A\,M)^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x>0$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y=f(x)$.

b) (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y=f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$ y $x=e$.

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/Y6ywRtjfutU

a) Para encontrar una asíntota horizontal se debe calcular el límite de la función en el infinito.

Se cumple que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{lnx}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$, por lo que $y=0$ es asíntota horizontal de f

(En la segunda igualdad hemos aplicado la regla de L'Hôpital ya que tanto el numerador como el denominador tienden a infinito).

Asíntota horizontal $y=0$.

b) Para encontrar un punto de tangente horizontal se debe calcular la derivada e igualarla a cero.

Se cumple que $\boldsymbol{f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}=0\Leftrightarrow lnx=1\Leftrightarrow x=e}$, luego en $\boldsymbol{x=e}$ la recta tangente a la curva es horizontal.

Para determinar si es un extremo relativo se calcula la segunda derivada en dicho punto.

Tenemos que $\boldsymbol{f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-(1-lnx)\,2\,x}{x^4}=\frac{-1-(1-lnx)\,2}{x^3}\Rightarrow f''(e)=\frac{-1-(1-lne)\,2}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0}$.

Al ser la derivada segunda en ese punto, $\boldsymbol{x=e}$, negativa sabemos que $\boldsymbol{f}$ tiene un máximo relativo.

En el punto $(\boldsymbol{e}, 1/\,\boldsymbol{e})$ la curva tiene la tangente horizontal y es un máximo relativo.

c) Punto de corte de $\boldsymbol{f}$ con el eje X: $\boldsymbol{\frac{lnx}{x}=0\Leftrightarrow lnx=0\Leftrightarrow x=1}$. Como $\boldsymbol{lnx>0\Leftrightarrow x>1}$, tenemos que $\boldsymbol{f(x)\geq 0}$ en $[\boldsymbol{1,e}]$, por lo que $\boldsymbol{A=\int_1^e\frac{lnx}{x}\,dx=\left[\frac{ln^2x}{2}\right]_1^e=\frac{ln^2e}{2}-\frac{ln^21}{2}=\frac{1}{2}}$.

El área es igual a 1/2 u^2.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.3:

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2,-5,1)$ y tiene dirección $(-1,0,-1)$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.

b) (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s.

c) (0.5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/8KW6g5SzIww

a) Para estudiar la posición relativa buscamos los vectores directores de ambas rectas.

La segunda recta es $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{0} = \frac{z-1}{-1}$.

La primera pasa por $(1,3,0)$ y tiene como vector director $(2,-2,1)$.

Los vectores directores no son proporcionales luego las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

Hallamos el vector que une un punto de r con otro de s: $(2,-5,1)-(1,3,0)=(1,-8,1)$.

Como $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 1 \end{vmatrix} = 2+8-16-2=-8 \neq 0$, las rectas r y s se cruzan.

Las rectas r y s se cruzan

b) Como contiene a s, pasa por $(2,-5,1)$ y tiene como vector de orientación $(-1,0,-1)$.

Como es paralelo a r, tiene como el otro vector de orientación $(2,-2,1)$, luego el plano es:

$(x,y,z)=(2,-5,1)+\lambda\,(-1,0,-1)+\mu\,(2,-2,1)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 = -2(x-2)-(y+5)+2(z-1)$$

El plano es: $-2\,x - y + 2z - 3 = 0$

c) Como es perpendicular a r, tendrá como vector perpendicular al plano el vector de dirección de la recta: $2\,x - 2\,y + z = C$.

Como pasa por el origen es $C=0$, luego el plano es $2\,x-2\,y+z=0$.

El plano es: $2\,x - 2\,y + z = 0$

Problema A.4:

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.

b) (1.5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/aEUU-VNOYWM

a) Es una distribución binomial con $n = 10$ y $p = 0.1$. Se cumple que:

$$P(\{al\ menos\ 2\ de\ 10\ sigan\ vivos\ en\ 5\ años\}) = P(\{2\ sigan\ vivos\ en\ 5\ años\}) + \cdots + P(\{los\ 10\ sigan\ vivos\ en\ 5\ años\}) = \binom{10}{2}(0.1)^2(0.9)^8 + \cdots + \binom{10}{10}(0.1)^{10} \approx 0.26$$

También podemos calcularlo usando el suceso contrario. La probabilidad pedida es igual a:

$$1 - \left(P\left(\{ningún\ pez\ siga\ vivo\ en\ 5\ años\}\right) + P(\{1\ pez\ siga\ vivo\ en\ 5\ años\})\right).$$

La probabilidad es aproximadamente igual a 0.26.

b) La variable X sigue una distribución binomial $B(200, 0.1)$. Si la aproximamos por una variable W que sigue una $N\left(200 \cdot 0.1, \sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot 0.9}\right) = N\left(20, \sqrt{18}\right)$, tenemos que:

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - P(W \leq 9.5) = 1 - P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{9.5-20}{\sqrt{18}}\right) =$$

$$1 - P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \leq \frac{9.5-20}{\sqrt{18}} \approx -2.47\right) = 1 - P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \geq 2.47\right) =$$

$$P\left(\frac{W-20}{\sqrt{18}} \leq 2.47\right) = 0.9932$$

La probabilidad de que hayan sobrevivido al cabo de 5 años al menos 10 de ellos es de 0.9932.

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema B.1:

Vídeo con la solución: Haz clic en:

IMG_0079.MP4

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros.
Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be

Debemos plantear un sistema de ecuaciones. Si llamamos x al precio del bocadillo, y al precio del refresco y z al precio de la bolsa, lo que le cobraron es $4\,x + 2\,y + 3\,z = 19$.

Lo que le tenían que haber cobrado es $3\,x + 2\,y + 2\,z = 15$.

El precio con descuento del bocadillo y el refresco es $x + y - \frac{40}{100}\,(x+y) = 3$.

Por tanto, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} 4\,x + 2\,y + 3\,z = 19 \\ 3\,x + 2\,y + 2\,z = 15 \\ x + y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 5 - x,\ \left.\begin{array}{r} 4\,x + 10 - 2\,x + 3\,z = 19 \\ 3\,x + 10 - 2\,x + 2\,z = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\,x + 3\,z = 9 \\ x + 2\,z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$x = 5 - 2\,z, \qquad 10 - 4\,z + 3\,z = 9 \Rightarrow$$

$$z = 1, x = 3, y = 2$$

Un bocadillo cuesta 3 euros, un refresco 2 euros una bolsa de patatas, 1 euro.

Problema B.2:

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar su dominio.

b) (1.5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

c) (0.5 puntos) Calcular los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

Solución

a) Una función raíz de índice par no está definida cuando el radicando es negativo.

Se cumple que $D(f) = \{x \in \mathbb{R}: 4\,x^2 - x^4 = x^2(4 - x^2) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 4\} = [-2, 2]$

Ya que x^2 es siempre positivo, y $4 - x^2$ es positivo cuando $x^2 \leq 4$.

$$\boldsymbol{D(f) = [-2, 2]}$$

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento debemos estudiar la primera derivada, si es positiva será creciente y si negativa, decreciente.

Se cumple que $f'(x) = \frac{8\,x - 4\,x^3}{2\sqrt{4\,x^2 - x^4}} = \frac{4\,x - 2\,x^3}{\sqrt{4\,x^2 - x^4}} = \frac{2\,x\,(2 - x^2)}{\sqrt{4\,x^2 - x^4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$.

Si $x < -\sqrt{2}$, tenemos que $2\,x < 0$, $2 - x^2 < 0$, por lo que $f'(x) = \frac{2\,x\,(2 - x^2)}{\sqrt{4\,x^2 - x^4}} > 0$ y f es estrictamente creciente.

Si $-\sqrt{2} < x < 0$, tenemos que $2\,x < 0$, $2 - x^2 > 0$, por lo que $f'(x) = \frac{2\,x\,(2 - x^2)}{\sqrt{4\,x^2 - x^4}} < 0$ y f es estrictamente decreciente.

Si $0 < x < \sqrt{2}$, tenemos que $2\,x > 0$, $2 - x^2 > 0$, por lo que: $f'(x) = \frac{2\,x\,(2 - x^2)}{\sqrt{4\,x^2 - x^4}} > 0$ y f es estrictamente creciente.

Si $\sqrt{2} < x < 2$, tenemos que: $2\,x > 0$, $2 - x^2 < 0$, por lo que $f'(x) = \frac{2\,x\,(2 - x^2)}{\sqrt{4\,x^2 - x^4}} < 0$ y f es estrictamente decreciente.

$\boldsymbol{0 < x < -\sqrt{2},}$	**f es estrictamente creciente.**
$\boldsymbol{-\sqrt{2} < x < 0,}$	**f es estrictamente decreciente.**
$\boldsymbol{0 < x < \sqrt{2},}$	**f es estrictamente creciente.**
$\boldsymbol{\sqrt{2} < x < 2,}$	**f es estrictamente decreciente.**

c) Se cumple que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4\,x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\,\sqrt{4-x^2}}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \sqrt{4-\ x^2} = -\sqrt{4-\ 0^2} = -2,$

que se obtienen simplemente simplificando y sustituyendo. Pero hay que observar que la función f(x) es distinta en cada caso

$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4\,x^2 - x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,\sqrt{4-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{4-\ x^2} = \sqrt{4-\ 0^2} = 2.$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -2,}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2}$$

Problema B.3:

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto $A(2,1,0)$ y el plano $\pi \equiv\ 2x+3y+4z=36$, se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π.
b) (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A.
c) (0.75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π.

Solución

a) Utilizamos la expresión de la distancia de un punto a un plano:

Se cumple que $\boldsymbol{d(A,\pi)} = \frac{|2(2)+3(1)+4(0)-36|}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$.

La distancia del punto al plano es de: $d(A,\pi) = \sqrt{29}$.

b) Para encontrar dicho punto buscamos la recta perpendicular al plano que pase por el punto.

Recta perpendicular a π que pasa por A: $(x,y,z) = (2,1,0) + \lambda\,(2,3,4) = (2+2\,\lambda, 1+3\,\lambda, 4\,\lambda)$.

Hallamos la intersección de esa recta con el plano

Intersección con π: $2\,x+3\,y+4\,z = 4+4\,\lambda+3+9\,\lambda+16\,\lambda = 7+29\,\lambda = 36 \Rightarrow \lambda = 1$, luego el punto pedido es $(2+2, 1+3, 4) = (4,4,4)$.

$\boldsymbol{P(4,4,4)}$

c) Como ya conocemos el punto $P\ (4,4,4)$ basta imponer que ese punto sea el punto medio entre el punto $A\ (2,1,0)$y el buscado (x,y,z).

Se cumple que $\frac{1}{2}\left((2,1,0)+(x,y,z)\right) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z}{2}\right) = (4,4,4) \Rightarrow \frac{x+2}{2} = 4, \frac{y+1}{2} = 4,\ \frac{z}{2} = 4 \Rightarrow$

$x = 6, y = 7, z = 8$, por lo que:

El punto simétrico es $(6,7,8)$

Problema B.4:

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

a) (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.

b) (1.5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución

a) Sabemos que $\boldsymbol{P(\{tome\ medicamento\})} = 0.5$ pues dice el enunciado que la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento.

$P(\{mejore\}/\{tome\ medicamento\}) = 0.8$ ya que el medicamento alivia la dermatitis en un 80 %.

$P(\{mejore\}/\{tome\ placebo\}) = 0.1$ ya que dice el enunciado que si un enfermo es tratado con un placebo la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %.

Se cumple que:

$$P(\{mejore\}) = P(\{mejore\} \cap \{tome\ medicamento\}) + P(\{mejore\} \cap \{tome\ placebo\}) =$$

$$P(\{mejore\}/\{tome\ medicamento\})\ P(\{tome\ medicamento\}) + P(\{mejore\}/\{tome\ placebo\})\ P(\{tome\ placebo\}) =$$

$$0.8 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5 = 0.45.$$

La probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado es de 0.45, es decir 45 %.

b) Utilizamos la definición de probabilidad condicionada. Se cumple que:

$$P(\{tratado\ con\ medicamento\}/\{ha\ mejorado\}) = \frac{P(\{ha\ mejorado\} \cap \{tratado\ con\ medicamento\})}{P(\{ha\ mejorado\})} = \frac{0.8 \times 0.5}{0.45} = \frac{0.4}{0.45} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}.$$

Si un paciente elegido al azar ha mejorado, la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento es de 8/9 aproximadamente igual a 0.88888889 ≅ 0.89, es decir el 89 %.

uc3m Universidad Carlos III de Madrid

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} kx & + & (k+1)y & + & z & = & 0, \\ -x & + & ky & - & z & = & 0, \\ (k-1)x & - & y & & & = & -(k+1), \end{array}\right.$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1,\ f'(1) = 2,\ g(1) = 3,\ g'(1) = 4.$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \operatorname{sen} x$.)

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1, 2, 3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} kx + (k+1)y + z = 0, \\ -x + ky - z = 0, \\ (k-1)x - y = -(k+1), \end{cases}$ se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro real k.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $k = -1$.

Solución

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ -1 & k & -1 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k+1 & 1 \\ k-1 & 2\,k+1 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(k-1) - (k-1)\,(2\,k+1) =$$

$$-(k-1)\,(2\,k+2) = 0 \Leftrightarrow k-1 = 0 \text{ ó } 2\,k+2 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$$

Entonces si $k \neq 1, -1$, el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al número de incógnitas, igual al rango de la matriz ampliada, luego el sistema es compatible determinado.

Si $k = 1$, el rango de la matriz de los coeficientes es 2, y calculamos el rango de la matriz ampliada: Tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, = -8 \neq 0$, luego el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es incompatible ($rg(A) = 2 < rg(A^*) = 3$)

Si $k = -1$, tenemos que el sistema es homogéneo con $rg(A) < 3 = número\ incógnitas$, luego es compatible indeterminado.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -1$	**$\Rightarrow$ rango A = 3 = rango A^***	**sistema compatible determinado**
Si $k = 1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2, rango A^* = 3**	**sistema es incompatible**
Si $k = -1$	**$\Rightarrow$ rango A = 2 < número incógnitas**	**Sistema homogéneo compatible indeterminado**

b) El sistema queda: $\left.\begin{array}{r} -x + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ -2\,x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$z = x, y = -2\,x$, luego las soluciones son $(x, -2\,x, x)$.

$$\boldsymbol{(x, -2\,x, x)}$$

Problema A.2:

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.25 puntos) Sean f y g dos funciones derivables de las que se conocen los siguientes datos:

$$f(1) = 1,\ f'(1) = 2,\ g(1) = 3,\ g'(1) = 4.$$

Dada $h(x) = f((x+1)^2)$, use la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. Dada $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, calcule $k'(1)$.

b) (1.25 puntos) Calcule la integral $\int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^3 dx$. (Se puede usar el cambio de variables $t = \operatorname{sen} x$.)

Solución

a) Por la regla de la cadena, se cumple que:

$h'(x) = f'((x+1)^2)\ 2\ (x+1) \Rightarrow\ h'(0) = f'(1)\ 2 = 4$, sustituyendo.

$k'(x) = \frac{f\prime(x)\ g(x) - f(x)\ g\prime(x)}{g^2(x)} \Rightarrow\ k'(1) = \frac{f\prime(1)\ g(1) - f(1)\ g\prime(1)}{g^2(1)} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{3^2} = \frac{2}{9}$.

$$\boldsymbol{h'(0) = 4\ ,\ k'(1) = \frac{2}{9}}$$

b) Haciendo el cambio $senx = t \Rightarrow cosx\ dx = dt$, tenemos que:

$sen^4x\ cos^3x\ dx = sen^4x\ (1 - sen^2x)\ cosx\ dx = t^4\ (1 - t^2)\ dt =$

$\int (t^4 - t^6)\ dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \mathrm{C} = \frac{sen^5x}{5} - \frac{sen^7x}{7} + C.$

$$\boldsymbol{sen^4x\ cos^3x\ dx = \frac{sen^5x}{5} - \frac{sen^7x}{7} + C}$$

Problema A.3:

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,3,-3)$ y $C(-3,-1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (0.5 puntos) Obtener un punto D (distinto de A, B y C) tal que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean linealmente dependientes.

c) (1 punto) Encontrar un punto P del eje OX, de modo que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P sea igual a 1.

Solución

a) Para determinar un plano se necesita conocer un punto y dos vectores de orientación del plano.

Los vectores de orientación son $(1,3,-3)-(1,1,1)=(0,2,-4)$, $(-3,-1,1)-(1,1,1)=(-4,-2,0)$, luego el plano es: $(x, y\ z)=(1,1,1)+\lambda\,(0,2,-4)+\mu\,(-4,-2,0)$.

$$\boldsymbol{(x, y\ z)=(1,1,1)+\lambda\,(0,2,-4)+\mu\,(-4,-2,0)}$$

b) Tiene que ser otro punto del plano, luego dando $\lambda=\mu=1$, obtenemos:

$D=(1,1,1)+(0,2,-4)+(-4,-2,0)=(-3,1,-3)$.

Y, en efecto, los vectores $(0,2,-4),(-4,-2,0),(-4,0,-4)$ son linealmente dependientes.

$$\boldsymbol{D=(-3,1,-3).}$$

c) Será $P=(a,0,0)$, e imponemos que el volumen sea igual a 1:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & -3\\ 1 & -3 & -1 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}|11+9-3-1-\mathrm{a}\,(-1-3-3-1)|=\frac{1}{6}|16+8\,a|=1\Leftrightarrow|16+8\,a|=6.$$

Si $16+8a>0$, será $16+8a=6\Leftrightarrow a=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}$, que cumple la condición: $16+8\,\frac{5}{4}=26>0$, luego es un posible valor de a que da $P=\left(\frac{-5}{4},0,0\right)$.

Si $16+8a<0$, será $-16-8a=6\Leftrightarrow a=\frac{-22}{8}=\frac{-11}{4}$, que cumple la condición: $16+8\left(\frac{-11}{4}\right)=-6<0$, luego es un posible valor de a que da $P=\left(\frac{-11}{4},0,0\right)$.

$$\boldsymbol{P=\left(\frac{-5}{4},0,0\right);\ P=\left(\frac{-11}{4},0,0\right)}$$

Problema A.4:

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa ha llevado a cabo un proceso de selección de personal.

a) (1.25 puntos) Se sabe que el 40 % del total de aspirantes han sido seleccionados en el proceso. Si entre los aspirantes había un grupo de 8 amigos, calcule la probabilidad de que al menos 2 de ellos hayan sido seleccionados.

b) (1.25 puntos) Las puntuaciones obtenidas por los aspirantes en el proceso de selección siguen una distribución normal, X, de media 5.6 y desviación típica σ. Sabiendo que la probabilidad de obtener una puntuación $X \leq 8.2$ es 0.67, calcule σ.

Solución

a) Es una distribución Binomial de probabilidad 0.4 = 2/5, y n = 8. Se cumple que:

$P(\{al\ menos\ 2\ sean\ seleccionados\}) = P(\{2\ sean\ seleccionados\}) + \cdots +$
$P(\{8\ sean\ seleccionados\}) = \binom{8}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^6 + \binom{8}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \cdots + \binom{8}{8}\left(\frac{2}{5}\right)^8 = 0.89362432$

(Ya que $P(\{ser\ seleccionado\}) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \Rightarrow P(\{no\ ser\ seleccionado\}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$).

La probabilidad de que al menos dos de los amigos hayan sido seleccionados es aproximadamente del **0.89**.

b) Nos dicen que la distribución es normal $X \sim N(5.6, \sigma)$, *por lo que*

$$P(X \leq 8.2) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{8.2-5.6}{\sigma} = \frac{2..6}{\sigma}\right) = 0.67, \text{ donde: } \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1),$$

por lo que mirando en las tablas tenemos que:

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2..6}{\sigma}\right) = 0.67 \Leftrightarrow \frac{2..6}{\sigma} = 0.44 \Leftrightarrow \sigma = \frac{2..6}{0.44} = \frac{260}{44} = \frac{45}{11} = 5.91.$$

La desviación típica es de: $\boldsymbol{\sigma}$ = **5.91**

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1 \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular para qué valores $a \in \mathbb{R}$ se verifica $A^2 - I = 2A$.

b) (0.75 puntos) Calcular los números reales a para los que la matriz A admite inversa y calcularla, cuando sea posible, en función del parámetro a.

c) (0.75 puntos) Calcular, en función de a, el determinante de la matriz $(AA^t)^2$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución

a) Se cumple que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\,\alpha+\alpha^2+1 & 2 \\ 2 & 1+1+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\,\alpha+\alpha^2 & 2 \\ 2 & 2+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 2-2\,\alpha+\alpha^2 & 2 \\ 2 & 2+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\,\alpha+\alpha^2 & 2 \\ 2 & 1+2\,\alpha+\alpha^2 \end{pmatrix} = 2\,A = \begin{pmatrix} 2-2\,\alpha & 2 \\ 2 & 2+2\,\alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow 1-2\,\alpha+\alpha^2 = 2-2\,\alpha, 1+2\,\alpha+\alpha^2 = 2+2\,\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1.$$

$$\boldsymbol{\alpha = \pm 1}$$

b) Se cumple que $|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{vmatrix} = 1-\alpha^2-1 = -\alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$, por lo que A admite inversa $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.

En ese caso, $A^{-1} = \frac{1}{-\alpha^2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 \\ -1 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{\alpha \neq 0.\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha^2} \\ \frac{1}{\alpha^2} & -\frac{1-\alpha}{\alpha^2} \end{pmatrix}}$$

c) Se cumple que $|(A\,A^t)^2| = |A\,A^t|^2 = |A|^2|A^t|^2 = |A|^4 = (-\alpha^2)^4 = \alpha^8$.

$$\boldsymbol{|(A\,A^t)^2| = \alpha^8}$$

Problema B.2:

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un brote de una enfermedad se propaga a lo largo de unos días. El número de enfermos t días después de iniciarse el brote viene dado por una función $F(t)$ tal que $F'(t) = t^2(10-t)$.

a) (1 punto) Sabiendo que inicialmente había 6 personas afectadas, calcule la función $F(t)$.

b) (1 punto) Calcule cuántos días después de iniciarse el brote se alcanza el número máximo de enfermos y cuál es ese número.

c) (0.5 puntos) Calcule, usando el teorema de Bolzano, cuántos días dura el brote.

Solución

a) Se cumple que $F(t) = \int t^2\,(10-t) = \int (10\,t^2 - t^3)\,dt = \frac{10\,t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + C$, con:

$F(0) = \frac{10\,0^3}{3} - \frac{0^4}{4} + C = C = 6 \Rightarrow F(t) = \frac{10\,t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6.$

$$\boldsymbol{F(t) = \frac{10\,t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + 6}$$

b) Se cumple que $F'(t) = t^2\,(10-t) = 0 \Leftrightarrow t = 10$ (ya que $t > 0$), con $F'(t) = t^2\,(10-t) > 0 \Leftrightarrow 0 < t < 10$, $F'(t) = t^2\,(10-t) < 0 \Leftrightarrow t > 10$, por lo que F es estrictamente creciente si $0 < t < 10$, F es estrictamente decreciente si $t > 10$ y F tiene el máximo absoluto en $t = 10$ días, siendo ese máximo (número máximo de enfermos) $F(10) = \frac{10\,10^3}{3} - \frac{10^4}{4} + 6 = \frac{10^4}{12} + 6 = \frac{2500}{3} + 6$ = 839.3333.

El número máximo de enfermos se alcanza a los 10 días, siendo aproximadamente de 839.

c) Se cumple que

$F(13) = \frac{10\,13^3}{3} - \frac{13^4}{4} + 6 = 13^3\,\frac{1}{12} + 6 > 0,$

$F(14) = \frac{10\,14^3}{3} - \frac{14^4}{4} + 6 = -14^3\,\frac{1}{6} + 6 = -\frac{98}{6} + 6 < 0,$

por lo que existe un $t_0 \in (13, 14)$ tal que $F(t_0) = 0$

(Bolzano: F es continua al ser un polinomio):

El brote se acaba en t_0, es decir, en el día 14.

Problema B.3:

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano, $\pi \equiv 2x + 3y - z = 4$, y las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ y $s \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,0,1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el punto simétrico de $P(1,2,3)$ respecto de π.

b) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al plano π, que pasa por el punto intersección de las rectas r y s.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que forman entre sí las rectas r y s.

Solución

a) Se cumple que el vector característico de π es $(2,3,-1)$, luego la recta que pasa por P perpendicular a π es $(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda\,(2,3,-1) = (1+2\,\lambda, 2+3\,\lambda, 3-\lambda)$.

Intersección con π:

$$2\,x + 3\,y - z = 2 + 4\,\lambda + 6 + 9\,\lambda - 3 + \lambda = 5 + 14\,\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{14}$$

Por tanto el simétrico es $(1,2,3) + 2\,\lambda\,(2,3,-1) = (1,2,3) - \frac{1}{7}\,(2,3,-1) = \left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$.

Punto simétrico: $\left(\frac{5}{7}, \frac{11}{7}, \frac{22}{7}\right)$

b) Se cumple que s es $(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda\,(1,0,1) = (1+\lambda, 2, 3+\lambda)$, luego su intersección con r es:

$$x + y + z = 1 + \lambda + 2 + 3 + \lambda = 6 + 2\,\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow (x,y,z) = (1-2, 2, 3-2) = (-1,2,1).$$

Entonces la recta pedida es:

$$(x,y,z) = (-1,2,1) + \lambda\,(2,3,-1) = (-1+2\,\lambda, 2+3\,\lambda, 1-\lambda)$$

Ecuación de la recta: $\boldsymbol{(x,y,z) = (-1,2,1) + \lambda\,(2,3,-1) = (-1+2\,\lambda, 2+3\,\lambda, 1-\lambda)}$

c) Es el que forman sus vectores directores, es decir:

$$(1,1,-1) \times (1,1,1) = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\,\bar{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\,\bar{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\,\bar{k} = 2\,\bar{\imath} - 2\,\bar{\jmath} = (2,-2,0) \text{ y } (1,0,1),$$

por lo que el ángulo pedido es:

$$\alpha = arccos\left(\frac{(2,-2,0)^\circ(1,0,1)}{\|(2,-2,0)\|\,\|(1,0,1)\|}\right) = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{8}\,\sqrt{2}}\right) = arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}}$ = 60º

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.4:

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Un concesionario dispone de vehículos de baja y alta gama, siendo los de alta gama 1/3 de las existencias. Entre los de baja gama, la probabilidad de tener un defecto de fabricación que obligue a revisarlos durante el rodaje es del 1.6 %, mientras que para los de alta gama es del 0.9 %. En un control de calidad preventa, se elige al azar un vehículo para examinarlo.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que el vehículo elegido resulte defectuoso.

b) (1.5 puntos) Si se comprueba que el vehículo elegido es defectuoso, calcule la probabilidad de que sea de gama baja.

Solución

a) Se cumple que:

$$P(\{defectuoso\}) = P(\{defectuoso\} \cap \{alta\ gama\}) + P(\{defectuoso\} \cap \{baja\ gama\}) = P(\{defectuoso\}/\{alta\ gama\})\ P(\{alta\ gama\}) + P(\{defectuoso\}/\{baja\ gama\})\ P(\{baja\ gama\}) = \frac{0.9}{100}\frac{1}{3} + \frac{1.6}{100}\frac{2}{3} = \frac{1}{300}(0.9 + 3.2) = \frac{4.1}{300} = \frac{41}{3000} = 0.0136\ldots$$

La probabilidad de que el vehículo elegido sea defectuoso es aproximadamente de 0.014.

b) Se cumple que:

$$P(\{baja\ gama\}/\{defectuoso\}) = \frac{P(\{baja\ gama\} \cap \{defectuoso\})}{P(\{defectuoso\})} = \frac{P(\{defectuoso\}/\{baja\ gama\})\ P(\{baja\ gama\})}{\frac{41}{3000}} = \frac{\frac{3.2}{300}}{\frac{41}{3000}} = \frac{32}{41} \approx 0.78.$$

Si el vehículo elegido es defectuoso, la probabilidad de que sea de gama baja es aproximadamente de 0.78.

Autor: Javier Rodrigo Hitos
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo