MATEMÁTICAS II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Navarra

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad y \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades.

(2 puntos)

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}} \qquad \text{(1 punto)}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \qquad \text{(1 punto)}$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (-1,3)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = \left[x^2 + \log\left(x^2 - 2x + 7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{2-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN B

B1) Resuleve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) $P \equiv (1,-1,1)$, $Q \equiv (5,-3,5)$ y $R \equiv (7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x - 1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

upna

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad
Batxilergoaren ebaluazioa unibertsitatean sartzeko

CURSO / IKASTURTEA: 2018 - 2019

ASIGNATURA / *IRAKASGAIA*: **Matemáticas II /Matematika II**

Criterios de calificación y corrección / *Zalifikatzeko eta uzentzeko irizpideak*

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder exclusivamente a las preguntas de una de las dos opciones (A o B). Si alguien responde a cuestiones de las dos opciones, la nota final será **la peor** de las dos puntuaciones obtenidas.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - si reflejan fallos de concepto.
  - si producen simplificaciones relevantes.
  - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

A1) Se valorará con 2 puntos la discusión completa, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

A4) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 2 puntos los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

B2) Se puede obtener la máxima puntuación aunque se halle sólo uno de los dos centros posibles.

B3) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 1 punto los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

B4) Se valorará con 0,5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 2 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la puntuación máxima aunque no se incluya el dibujo.

PRUEBA A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ (-a-2)x + 2y + (a^2-a)z = 3a-1 \\ (a+2)x - 2y + (2-2a)z = -2a \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes: $C = \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{vmatrix}$, $|C| = 0 \Leftrightarrow -a^3+3a-2 = 0 \Leftrightarrow a = 2,\ a = 1,\ a = -2$

Si $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq -2$, $Rg(C)$ = 3, por tanto, $Rg(C)$ = 3 = nº incógnitas, luego es un **Sistema Compatible Determinado.**

Lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{cases} (a+2)x - y - az = -a \\ y + a(a-2)z = 2a-1 \\ (a-1)(a-2)z = a-1 \end{cases}$$

Obtenemos $\begin{cases} z = \frac{a-1}{(a-1)(a-2)} = \frac{1}{a-2} \\ y = 2a-1-a(a-2)\frac{1}{a-2} = a-1 \\ (a+2)x = -1+a-1-\frac{a}{a-2} \to x = \frac{2}{a^2-4} \end{cases}$ Por tanto,

$$x = \frac{2}{a^2-4},\quad y = a-1,\quad z = \frac{1}{a-2}$$

Si ***a* = –2** el sistema queda $\begin{cases} -y+2z = 2 \\ y+8z = -5 \\ 12z = -3 \end{cases}$, sumando las dos primeras filas obtenemos

$\begin{cases} -y+2z = 2 \\ 10z = -3 \\ 12z = -3 \end{cases}$, el sistema es **Incompatible**.

Si ***a* = 1** el sistema queda $\begin{cases} 3x-y-z = -1 \\ y-z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$, es **compatible indeterminado**, obtenemos $\begin{cases} x = 2/3(z) \\ y = 1+z \\ z = z \end{cases}$

Si ***a* = 2** el sistema queda $\begin{cases} 4x-y-2z = -2 \\ y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$, es **Incompatible.**

Problema A.2:

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad y \quad s \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades.

(2 puntos)

Solución:

El plano π al ser paralelo a $\boldsymbol{r}$, tendrá como vector de orientación del plano el vector director de $\boldsymbol{r}$ $\vec{\boldsymbol{u}}$. Para que diste de la recta $\boldsymbol{s}$ 3 unidades también debe ser paralelo a $\boldsymbol{s}$, ya que ni lo corta ni es coincidente, y tener como vector de orientación el vector director de s $\vec{\boldsymbol{v}}$.

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k} \quad ; \quad \vec{v} = (1, 2, 2)$$

El vector ortogonal al plano π es, por tanto: $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 8\vec{k}$

Luego la ecuación del plano es: π: $2x + y - 2z + D = 0$

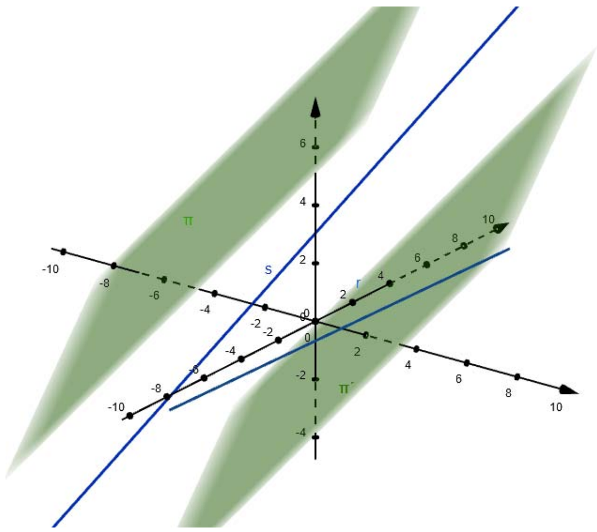
Imponemos que diste de la recta s 3 unidades, para lo que buscamos un punto de s: $P(-2, 1, 1)$.

$$d(\pi, s) = d(P, \pi) = 3 = \frac{|2(-2) + 1 - 2(1) + D|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|-5 + D|}{3} \to 9 = |-5 + D| \to 5 - D = \pm 9 \to$$

$$D = -4, \ D = 14.$$

La solución del ejercicio nos da dos planos:

$$\boldsymbol{\pi: 2x + y - 2z - 4 = 0, \quad \pi': 2x + y - 2z + 14 = 0.}$$



Problema A.3:

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}} \qquad \text{(1 punto)}$$

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} \qquad \text{(1 punto)}$$

Solución:

Trabajamos con la función $\boldsymbol{f(x)}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} ln \frac{1-cos2x}{sen\ 2x} = \frac{1}{2}(ln(1-cos2x) - ln(sen\ 2x))$$

Derivamos:

$$f´(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2sen\ 2x}{1-cos\ 2x} - \frac{2cos\ 2x}{sen\ 2x}\right) = \frac{sen\ 2x}{1-cos\ 2x} - \frac{cos\ 2x}{sen\ 2x} = \frac{sen^2 2x - cos\ 2x + cos^2 2x}{(1-cos\ 2x)\ sen\ 2x} = \frac{1-cos\ 2x}{(1-cos\ 2x)\ sen\ 2x} = \frac{1}{sen\ 2x} = cosec\ 2x.$$

$$\boldsymbol{f´(x) = \frac{1}{sen\ 2x} = cosec\ 2x.}$$

Trabajamos con la función $\boldsymbol{g(x)}$:

$$g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x}$$

Utilizamos derivación logarítmica:

$$ln(g(x)) = ln\left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = -x(ln\frac{1}{x}) = -x(ln\ 1 - ln\ x) = -x(-ln\ x) = xlnx$$

Derivamos:

$$\frac{g´(x)}{g(x)} = 1 \cdot ln\ x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\ x + 1$$

Por lo que:

$$\boldsymbol{g´(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{-x}(ln\ x + 1) = x^x(ln\ x + 1)}$$

Problema A.4:

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = -\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x) = \left[x^2 + \log\left(x^2 - 2x + 7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(3 puntos)

Solución:

El teorema de **Lagrange** o del **valor medio** dice: Si una función es:

Continua en $[a, b]$ y

Derivable en (a, b)

Entonces existe un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

La función es composición de funciones continuas y derivables en toda la recta real: polinómicas, logarítmica (que no se anula en ningún punto), raíz cúbica, exponencial… La parábola $y = x^2 - 2x + 7$ tiene su vértice en el punto (1, 6).

La función f es continua y derivable en todo R, ya que $x^2 - 2x + 7 > 1$.

Por lo que se verifica el teorema del valor medio o de Lagrange en el intervalo (–1, 3):

Existe un valor α en dicho intervalo, tal que:

$$\boldsymbol{f'(\alpha) = \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{(9+log(9-6+7))^{\sqrt[3]{\frac{3-3}{4}}}-(1+log(1+2+7))^{\sqrt[3]{\frac{3-(-1)}{4}}})}{4} = \frac{(9+log(10))^0-(1+log(10))^1)}{4} = \frac{(10)^0-(2)^1)}{4} = \frac{1-2}{4} = \frac{-1}{4}.}$$

$$\boldsymbol{f'(\alpha) = \frac{-1}{4}.}$$

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRUEBA B

Problema B.1:

B1) Resuleve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Solución:

Despejamos:

$$X \cdot A^{35} = A^{25} \rightarrow X = A^{25} \cdot A^{-35} = A^{-10}$$

Calculamos A^2 y A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por tanto}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I,\ luego\ A^2 = A^{-1} \text{ de donde } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos las potencias de A^{-1}: $A^{-2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{A};$

$$A^{-3} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I;$$

Por lo que:

$$X = A^{-10} = A^{-(3\cdot 3)-1} = I \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

P (1, –1, 1), Q (5, –3, 5) y R (7, –7, 1) son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo. (3 puntos)

Solución:

Analizamos la posición de los puntos dados

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (5, -3, 5) - (1, -1, 1) = (4, -2, 4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = (7, -7, 1) - (5, -3, 5) = (2, -4, -4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (7, -7, 1) - (1, -1, 1) = (6, -6, 0) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

Por lo que sabemos que P y R son vértices opuestos en la cara del plano π que contiene a los tres puntos.

Buscamos la ecuación de π: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(x-1) + 2(y+1) - (z-1) = 0 \Rightarrow$

$$\pi: 2x + 2y - z + 1 = 0.$$

Buscamos un vector $\overrightarrow{RS}$ perpendicular al plano, (2λ, 2λ, -λ)

y de módulo 6, $\sqrt{(2\lambda)^2 + (-2\lambda)^2 + (-\lambda)^2}$ = 6, obtenemos λ = 2 y λ = –2, hay dos soluciones,

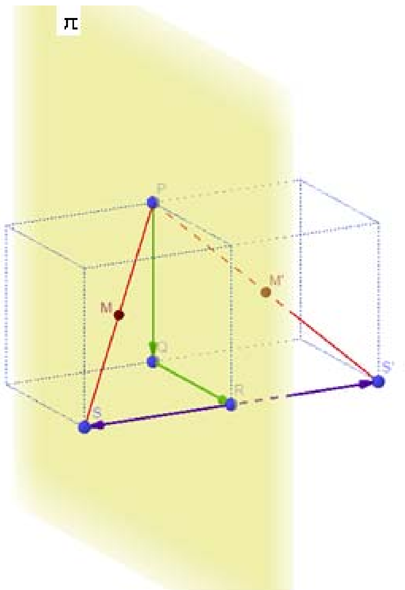
luego $\overrightarrow{RS} = (4, 4, -2) = S - R$ = (x, y, z) – (7, –7, 1), por lo que S = (11, –3, –1).

El centro del cubo será el punto medio, M, entre P y S: M = $\left(\frac{1+11}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$ = (6, –2, 0)

También $\overrightarrow{RS'} = (-4, -4, 2) = S' - R$ = (x, y, z) – (7, –7, 1), por lo que S' = (3, –11, 3)

El centro del cubo será el punto medio, M', entre P y S': M' = $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1-11}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ = (2, –6, 2)

M = (6, –2, 0) y M' = (2, –6, 2)



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x - 1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Solución: $\in$

Para probarlo vamos a utilizar el **teorema de Bolzano**.

El teorema de Bolzano dice:

Si una función f:

Es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y

Toma valores de signo contrario en los extremos, entonces

Existe al menos un punto del interior del intervalo, $\alpha \in (a, b)$, tal que $f(\alpha) = 0$.

En nuestro caso, $[a, b] = [1, 3]$.

La función tiene distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f(1) = \frac{ln(1-1+sen^2\left(\frac{\pi\cdot 1}{4}\right))}{4\cdot 1-(1)^2} = \frac{ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3} = \frac{ln1-ln2}{3} = \frac{-ln2}{3} < 0.$$

$$f(3) = \frac{ln(3-1+sen^2\left(\frac{\pi\cdot 3}{4}\right))}{4\cdot 3-(3)^2} = \frac{ln(2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2)}{3} > 0$$

La función es composición de funciones continuas en el intervalo [1, 3]:

El denominador es una función polinómica que se anula en $x = 0$ y en $x = 4$, que no pertenecen al intervalo.

La función seno es siempre continua y derivable.

La función logaritmo no está definida para el cero ni para valores negativos, pero:

$h(x) = x - 1 + sen^2\left(\frac{\pi\cdot x}{4}\right)$ es siempre positiva para $x > 1$.

Por tanto, la función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es continua en [1, 3] y tiene distinto signo en los extremos del intervalo, por lo que existe un valor $\alpha \in (1, 3)$, en el interior del intervalo, en el que se anula:

$$f(\alpha) = \frac{ln(\alpha-1+sen^2\left(\frac{\pi\cdot\alpha 3}{4}\right))}{4\cdot\alpha-(\alpha)^2} = 0$$

Problema B.4:

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \dfrac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de intersección:

$$5 - x = \frac{2}{x-2} \rightarrow (5-x)\cdot(x-2) = 2 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x = 3;\ x = 4.$$

La función $\boldsymbol{f}$ es una recta decreciente que corta al eje de ordenadas en $\boldsymbol{y} = 5$, y al eje de abscisas en $\boldsymbol{x} = 5$; $\boldsymbol{f}(3) = 2$; $\boldsymbol{f}(4) = 1$.

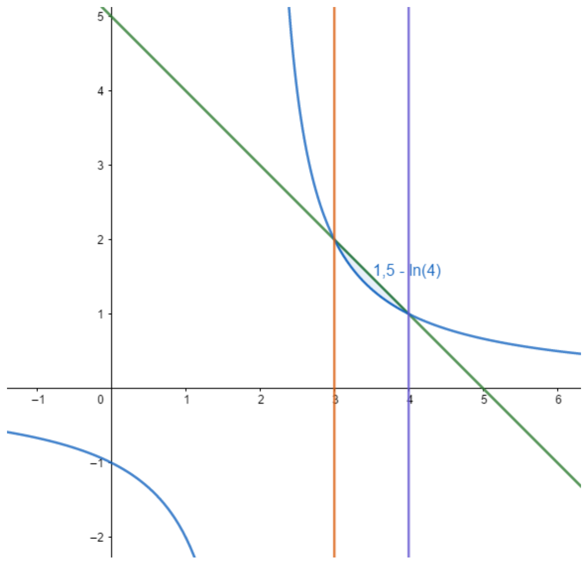
La función g es una hipérbola, $\boldsymbol{g}(0) = -1$.

Calculamos un valor del intervalo (3, 4); $\boldsymbol{x} = 7/2$, $\boldsymbol{f}(7/2) = 1.5 = 3/2$, $\boldsymbol{g}(7/2) = 4/3$. Por lo que la función $\boldsymbol{f}$ va por encima de la función $\boldsymbol{g}$.

El área pedida es, por tanto:

$$\int_3^4 (f-g)dx = \int_3^4 [(5-x) - \frac{2}{x-2}]dx = \int_3^4 (5 - x - \frac{2}{x-2})dx = \left[5x - \frac{x^2}{2} - 2\,ln(x-2)\right]_3^4$$
$$= (20 - 8 - 2\,ln(2)) - (15 - (9/2) - ln(1)) = (3/2) - ln\,(4)$$

***Área** = $((3/2) - \boldsymbol{ln}\,(4))\ \boldsymbol{u^2}$*



Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Los puntos $A \equiv (2,-3,2)$ y $B \equiv (0,1,-2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale $18\,u^2$.

(2 puntos)

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,e)$ tal que $f'(\alpha) = e+1$, siendo

$$f(x) = (x + e\,x - e)^{\frac{4}{3}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \dfrac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P = (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

B3) Calcula el valor del parámetro real a para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x^2+9\right) & x \le 1 \\ \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

upna Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

CURSO: 2018 - 2019

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS II**

Criterios de calificación y corrección

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder exclusivamente a las preguntas de una de las dos opciones (A o B). Si alguien responde a cuestiones de las dos opciones, la nota final será **la peor** de las dos puntuaciones obtenidas.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - si reflejan fallos de concepto.
  - si producen simplificaciones relevantes.
  - si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

A1) Se valorará con 2 puntos la discusión completa, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0,5 puntos la del caso compatible indeterminado.

A3) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 1 punto los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

A4) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 2 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la puntuación máxima aunque no se incluya el dibujo.

B3) Se valorará sobre 1,25 puntos el estudio de la continuidad en x=1 y sobre 0,75 puntos en el resto de los valores de x.

B4) Se valorará sobre 1 punto la mención justificada del teorema utilizado, haciendo referencia al cumplimiento de las hipótesis requeridas, y sobre 2 puntos los cálculos y la argumentación usados para su aplicación en la demostración de la existencia del punto pedido.

OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes: $C = \begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -(a+1) & 1-a^2 \end{pmatrix}$

$|C| = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -(a+1) & 1-a^2 \end{vmatrix}$, $|C| = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 1, a = -1$

Si $\boldsymbol{a \neq 1, a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq -1}$, $Rg(C) = 3$, por tanto, $Rg(C) = 3$ = nº incógnitas, luego es un **Sistema Compatible Determinado.**

Lo resolvemos por Gauss:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + 1 - az \qquad = a+1 \\ ay + (a^2-1)z = a \\ (a-1)z = -1 \end{cases}$$

Obtenemos
$$\begin{cases} z = \frac{-1}{(a-1)} \\ ay = a - (a^2-1)\frac{-1}{a-1} = a + a + 1 \quad \to y = \frac{2a+1}{a} \\ (a+1)x = a + 1 + \frac{2a+1}{a} - 1 + a\frac{-1}{(a-1)} = \frac{(a+1)^2}{a} \to x = \frac{a+1}{a} \end{cases}$$
Por tanto,

$$\boldsymbol{x = \frac{a+1}{a}, y = \frac{2a+1}{a}, z = \frac{-1}{(a-1)}}$$

Si $\boldsymbol{a = -1}$ el sistema queda $\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ -y = -1 \\ -2z = -1 \end{cases}$, el sistema es **compatible indeterminado**, $\begin{cases} \boldsymbol{x = \lambda} \\ \boldsymbol{y = 1} \\ \boldsymbol{z = 1/2} \end{cases}$,

Si $\boldsymbol{a = 1}$ el sistema queda $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}$, es **Incompatible**.

Si $\boldsymbol{a = 0}$ el sistema queda $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -z = 0 \\ -z = -1 \end{cases}$, es **Incompatible.**

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

A2) Los puntos $A \equiv (2, -3, 2)$ y $B \equiv (0, 1, -2)$ determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale $18\ u^2$.

Solución:

Llamamos C al vértice buscado. Como debe estar en la recta r sus coordenadas son:

$$C = (3 + 2\lambda, 4 - \lambda, 4 - 2\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 1, -2) - (2, -3, 2) = (-2, 4, -4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6$$

Por lo que la base del triángulo mide 6 u. Como el área mide 18 u^2, la altura debe medir 6 u. por lo que la distancia de C al punto medio, $M(1, -1, 0)$, entre A y B debe ser 6.

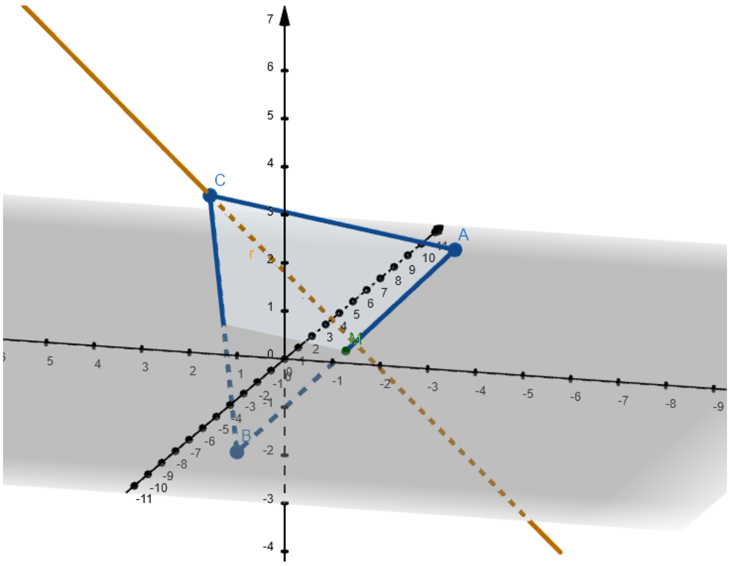
$$\mathrm{d}(C, M) = \left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{(3 + 2\lambda - 1)^2 + (4 - \lambda + 1)^2 + (4 - 2\lambda)^2} = 6 \Rightarrow$$

$36 = 4 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 25 + \lambda^2 - 10\lambda + 16 + 4\lambda^2 - 16\lambda = 45 - 18\lambda + 9\lambda^2 \Rightarrow 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$, por lo que $\lambda = 1$ y $C = (5, 3, 2)$.

$C = (5, 3, 2)$

Ahora bien, estamos en el espacio, conviene cerciorarse que ese punto equidista de A y de B. Si hubiéramos calculado el plano que equidista de A y B, hubiéramos visto que contiene a la recta r, por lo que todos los puntos de r equidistan de A y B.



Problema A.3:

A.3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e + 1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Solución:

El teorema de **Lagrange** o del **valor medio** dice: Si una función f es:

Continua en $[a, b]$

Derivable en (a, b)

Entonces existe un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{\boldsymbol{f(b)-f(a)}}{\boldsymbol{b-a}}.$$

La función es composición de funciones continuas y derivables en toda la recta real, excepto en x = 0, en que se anula el denominador del exponente: Es una función exponencial de base una función polinómica, y de exponente un cociente de polinomios que, como hemos dicho, se anula en x = 0.

Por tanto, la función es continua en [1, e]. Es derivable en (1, e).

Por lo que existe un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(e+e\cdot e-e)^1-(1+e-e)^e}{e-1} = \frac{e^2-1}{e-1} = e+1.$$

$$\mathbf{f'(\alpha) = \boldsymbol{e} + 1.}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.4:

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \dfrac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de intersección:

$$1 + \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 \rightarrow \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 1 \rightarrow \boldsymbol{x = 0;\ x = \pi;\ x = -\pi}.$$

Las gráficas se cortan en $\boldsymbol{x = 0;\ x = \pi;\ x = -\pi}$.

Las raíces las hemos obtenido sin necesidad de cálculos.

Observamos la posición relativa de las dos funciones en $(-\boldsymbol{\pi}, \mathbf{0})$, y $(0, \boldsymbol{\pi})$:

		f	g
$(-\boldsymbol{\pi}, \mathbf{0})$	$-\boldsymbol{\pi}/\mathbf{2}$	1	3/2
$(0, \boldsymbol{\pi})$	$\boldsymbol{\pi}/\mathbf{2}$	1	3/2

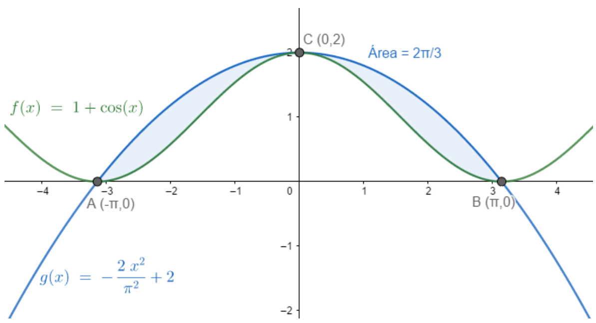
Ambas funciones son funciones pares.

El área pedida es, por tanto:

$$Área = 2\int_0^{\pi} (g - f)dx = 2\int_0^{\pi} [\frac{-2x^2}{\pi^2} + 2 - (1 + \cos x)]dx = 2\left[\frac{-2}{\pi^2}\frac{x^3}{3} + x - sen\ x\right]_0^{\pi}$$

$$= 2\left[\left(\frac{-2}{\pi^2}\frac{\pi^3}{3} + \pi - sen\ \pi\right) - (0)\right] = 2\left[\frac{-2\pi}{3} + \pi\right] = \frac{2\pi}{3}$$

Área $= \boldsymbol{\dfrac{2\pi}{3}\ u^2}$



OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Solución:

$$|A \cdot B| = |A + B| \ \rightarrow |A| \cdot |B| = |A + B|$$

Calculamos:

$$|A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{vmatrix} = |A + B| = \begin{vmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+a & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(t \cdot (t+1) \cdot (t-1)) \cdot (t \cdot \begin{vmatrix} t & t+1 \\ t-1 & t+1 \end{vmatrix}) = t^2 \cdot (t+1)^2 \cdot (t-1) = 0,$$

por tanto, verifican la igualdad si $t = 0$, o si $t = 1$ o si $t = -1$.

$$\boldsymbol{t = 0, \qquad t = 1, \qquad t = -1}$$

Problema B.2:

B2) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que pasa por el punto $P = (1, -2, -1)$ y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

Solución:

De la recta t conocemos un punto P. Buscamos el plano π que contiene a r y a t, del que conocemos que pertenece al haz de plano que pasa por r.

$$\pi = \lambda(-x + y - z - 1) + \alpha(3y - 2z + 3) = 0$$

Imponemos que contenga al punto P:

$$\lambda(-1 - 2 + 1 - 1) + \alpha(-6 + 2 + 3) = 0 = \lambda(-3) + \alpha(-1) = 0$$

$$\lambda = 1,\ \alpha = -3 \Rightarrow \pi = 1(-x + y - z - 1) - 3(3y - 2z + 3) = -x - 8y + 5z - 10 = 0$$

Buscamos ahora un punto Q que sea la intersección del plano π con la recta s:

Por estar en s: $x = 3$, $1 - y = z + 1 \Rightarrow z = -y$. Imponemos que esté en π:

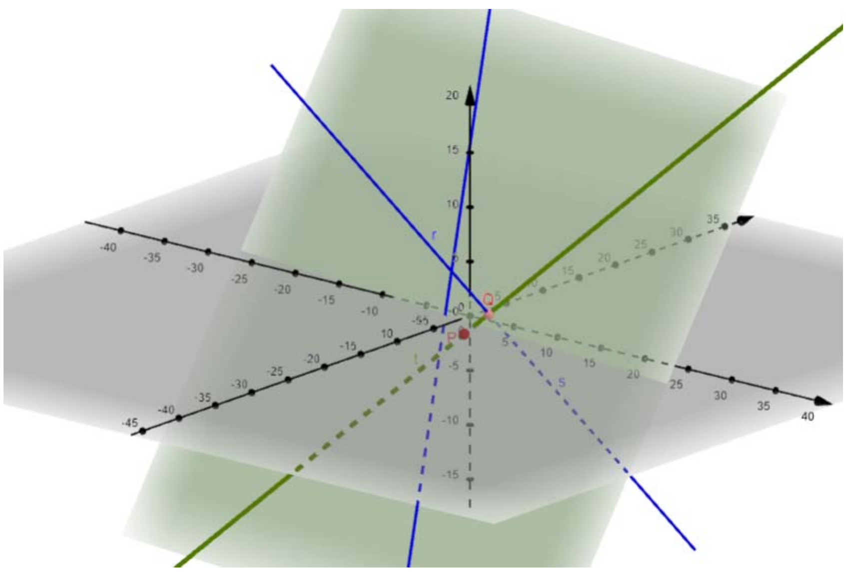
$-3 - 8y + 5(-y) - 10 = 0 = -13 - 13y \Rightarrow y = -1$, $z = 1$.

$$Q = (3, -1, 1)$$

La recta t pedida pasa por Q, pasa por P, luego tiene como vector de dirección:

$\overrightarrow{PQ}$ = Q – P = (3, –1, 1) – (1, –2, –1) = (2, 1, 2), luego la ecuación de t es: t = (3 + 2λ, –1 + λ, 1 + 2λ)

$$t = (3 + 2\lambda, -1 + \lambda, 1 + 2\lambda)$$



CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.3:

B3) Calcula el valor del parámetro real α para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x^2+9\right) & x \le 1 \\ \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha\cdot(1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

Solución:

La función $f(x)$ está definida en dos trozos.

En $(-\infty, 1)$, la función logaritmo es siempre continua pues $x^2 + 9$ es siempre mayor que cero.

En $(1, +\infty)$, la otra rama es cociente de dos funciones. El numerador es siempre una función continua. El denominador no lo es en $x = 1$.

Para que la función sea continua en $x = 1$, calculamos el valor de la función y los límites laterales:

$f(1) = log(1+9) = log\ 10 = 1.$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} log(1+9) = log\ 10 = 1.$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha(1-x)} = \frac{0}{0}$$

Tenemos una indeterminación. Aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{cos\frac{\pi x}{2}}{\alpha(1-x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi x}{2}}{-\alpha} = \frac{-\pi}{2(-\alpha)} = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Imponemos que los dos límites laterales sean iguales, e iguales al valor de la función:

$$f(1) = 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2\alpha}.$$

Por lo que α debe valer: $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{2}}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.4:

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(x) = \cos(\pi x) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Solución:

Una función puede alcanzar un máximo (o un mínimo) relativo en los extremos del intervalo de definición o en los puntos en que se anule la derivada.

Analizamos la función dada. Es producto de dos funciones, la función coseno que es continua en toda la recta real, y la función logaritmo que sólo está definida para valores positivos: $x^2 - 3x + 2$ vale cero para $x = 2$ y $x = 1$. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$, y es negativa en (1, 2). En resumen, la función dada es continua en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$, por lo tanto, es continua en el intervalo dado: (–1, 0).

Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = (-\pi\ sen\ \pi x) \cdot ln(x^2 - 3x + 2) + cos\ \pi x \cdot \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = 0$$

En el intervalo (–1, 0), $f'(x)$ verifica las condiciones del teorema de Bolzano:

a) Es continua, pues es composición y producto de funciones continuas. La función $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ es continua es ese intervalo, (–1, 0), pues ya vimos que se anulaba fuera del intervalo, en 1 y en 2.

b) Tiene distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f'(-1) = (-\pi\ sen\ (-\pi)) \cdot ln(1 + 3 + 2)\ +\ cos\ (-\pi) \cdot \frac{-2 - 3}{1 + 3 + 2} = 0 + \frac{(-1)(-5)}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

$$f'(0) = (-\pi\ sen\ (0) \cdot ln(2)\ +\ cos(0) \cdot \frac{-3}{2} = 0 + \frac{-3}{2} = \frac{-3}{2} < 0$$

Luego existe al menos un valor $\alpha \in (-1, 0)$ donde se anula la derivada, por lo que es un posible máximo o mínimo.

Y es un máximo relativo ya que la derivada pasa en –1 de ser positiva a ser negativa en 0.

Utilizamos el teorema de Bolzano para probar que al menos existe un valor $\alpha \in (-1, 0)$ donde se anula la derivada, y por el signo en los extremos ese valor es un máximo relativo.