

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

Asturias

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Ver soluciones en la web de la Universidad de Oviedo: www.uniovi.es





Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

- a) [1 punto] Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.
- b) [2 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

3. El abogado A se encargó del 30% de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70% en los tribunales. El abogado B se encargó del 60% de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90%. Por último, el abogado C se encargó del 10% restante de casos, ganando en los tribunales el 50% de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?
- b) [1 punto] Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado B?

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

- a) [1 punto] Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95% de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)



Universidad de Oviedo
Universidá d'Oviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas *A* y *B* con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina *A* realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina *B* realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

a) [2 puntos] ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina *A* y 30 horas la *B*?

b) [1 punto] El coste por cada hora de trabajo de la máquina *A* es de 2500 euros y el de la máquina *B* es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0,02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

a) [0,75 puntos] Determinar la función cotización F , si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.

b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca *A* y 100 de la marca *B*. Además se sabe que el 5% de los tetrabriks de la marca *A* están caducados, así como el 10% de los tetrabriks de la marca *B*. Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

a) [1 punto] Determinar la probabilidad de que sea de la marca *B* y no esté caducado.

b) [1 punto] Determinar la probabilidad de que sea de la marca *B* o esté caducado.

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Se supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

a) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90% de confianza.

b) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90% de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Universidad de Oviedo
Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2018-2019



SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ my \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Si $A^3 \cdot B + C = A^2 \cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .
- b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 1$.

Solución:

Debemos realizar las operaciones:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, A^2D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } A^3B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + 3y \\ -3x - 2y \end{pmatrix}$$

Así pues, la ecuación $A^3B + C = AD$ resulta en el sistema:

$$\begin{pmatrix} 4x + 3y \\ -3x - 2y + my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ o bien } \begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -3x + (m - 2)y = -4 \end{cases}$$

Calculamos el determinante del sistema.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & m - 2 \end{vmatrix} = 4m - 8 + 9 = 4m + 1$$

Igualando a 0, tenemos que, para $m \neq -1/4$ el sistema tiene solución única. Si sustituimos m por ese valor, resulta ser

$$\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -3x \pm \frac{9}{4}y = -4 \end{cases}$$

Eso corresponde a la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ -3 & \frac{-9}{4} & 4 \end{pmatrix}$, que multiplicando la segunda fila por 4 y sumando la primera multiplicada por 3 es equivalente a $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ o el sistema $\begin{cases} 4x + 3y = -7 \\ 0 = -5 \end{cases}$ claramente sin solución.

En resumen, el sistema no tiene solución si $m = -1/4$.

Si $m \neq -1/4$ tiene solución y además única.

El caso $m = 1$ da el sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ -3x - y = -4 \end{cases}$ que ya sabemos que tiene solución única. Multiplicando la segunda ecuación por 3 y sumando tenemos $-5x = -5$ es decir $x = 1$. Si la llevamos a la segunda ecuación (valdría igual la primera) nos da $-3 - y = -4$ es decir $y = 1$.

La solución sería pues $x = y = 1$.

Problema A.2:

2. El precio de una llamada a una línea de pago se descompone en dos conceptos: el establecimiento de llamada (precio fijo) más un coste variable en función de la duración. El coste del establecimiento de llamada es de 1 euro y el coste variable es de 1,2 euros por cada minuto hablado durante los primeros 30 minutos (inclusive), pasando a tarifar los minutos restantes a partir de ese momento a 0,8 euros por minuto.

- a) [1 punto] Si $f(x)$ representa el coste total en euros de la llamada en función de la duración en minutos de la misma (x), obtén la expresión de dicha función f y estudia su continuidad en el punto $x = 30$.
- b) [2 puntos] Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una llamada ha sido de 45 euros, ¿cuánto ha durado la llamada?

Solución:**Apartado a)**

En primer lugar, vamos a dar la expresión de la función. La lógica nos dice que si no descolgamos el teléfono, no pagamos nada así que $f(0) = 0$

Sabemos que $f(x) = 1 + 1.2x$, si $0 < x \leq 30$

Si hablamos 30 minutos es $f(x) = 1 + 1.2(30) = 37$ de modo que pagamos 37 euros. Como los demás van a 0.8 es $f(x) = 37 + 0.8(x - 30)$, si $30 < x$

Poniéndolo todo junto sería

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1 + 1.2x, & 0 < x \leq 30 \\ 37 + 0.8(x - 30), & 30 < x \end{cases}$$

El problema es ambiguo en cuanto a si se deberían considerar llamadas de 0 minutos (que realmente es no llamar) de modo que también sería válido

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x, & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 37 + 0.8(x - 30) & \text{si } 30 < x \end{cases}$$

En el punto $x = 30$ ya hemos visto que la función vale 30. Calculemos sus límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 30^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^-} 1 + 1.2x = 37$$

Por otra parte:

$$\lim_{x \rightarrow 30^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 30^+} 37 + 0.8(x - 30) = 37$$

Ambos límites coinciden y por tanto la función es continua.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x, & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 37 + 0.8(x - 30) & \text{si } 30 < x \end{cases}, \text{ la función es continua.}$$

Apartado b)

Piden estudiar la función en $(0, \infty)$ de modo que ahora no hay ambigüedad, el 0 no está. De hecho, después de hacer este apartado quizás sea más razonable considerar en el a) solo

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 1.2x, & \text{si } 0 < x \leq 30 \\ 37 + 0.8(x - 30) & \text{si } 30 < x \end{cases}$$

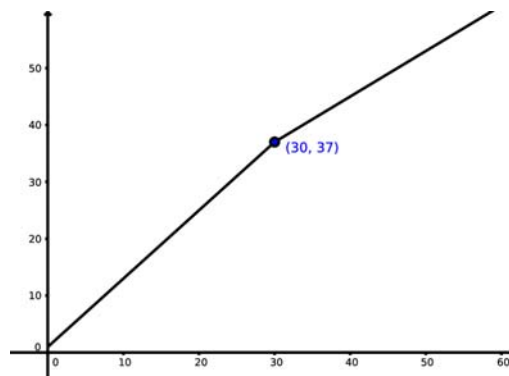
Derivando tenemos $f'(x) = \begin{cases} 1.2 & \text{si } 0 < x < 30 \\ 0.8 & \text{si } 30 < x \end{cases}$ (obsérvese que no hemos considerado $x = 30$ y, de hecho, en ese punto no es derivable por no coincidir las derivadas laterales).

Obtenemos que $f'(x) > 0$ y por tanto la función es creciente en $(0, 30)$ y en $(30, \infty)$.

Derivando otra vez tenemos $f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < 30 \\ 0 & \text{si } 30 < x \end{cases}$ (obsérvese que, otra vez, no tiene sentido en $x = 30$). En los intervalos $(0, 30)$ y $(30, \infty)$ la curvatura es nula luego se trata de dos líneas rectas, como es de hecho claro por su propia expresión.

Para representar una recta, bastan dos valores. Luego podemos tomar dos valores en $(0, 30)$ como $f(5) = 7$ y $f(10) = 13$ y otros dos en el otro intervalo como $f(40) = 45$ y $f(50) = 53$.

La gráfica sería la siguiente:



Finalmente, si la llamada ha costado 45 €, es evidente que ha costado más de 37 y por tanto han sido más de 30 minutos.

De ahí que la expresión a usar sea $37 + 0.8(x - 30)$ que debemos igualar a 45.

Tenemos pues $37 + 0.8(x - 30) = 45$ cuya solución es $x = 40$.

La llamada ha durado, pues, **40 minutos**.

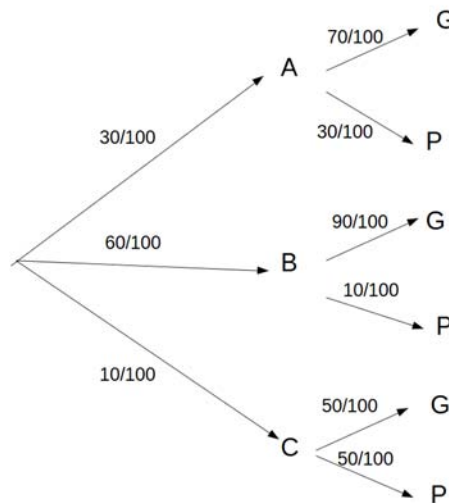
Problema A.3:

3. El abogado *A* se encargó del 30 % de los casos que llegaron a un bufete el año pasado, de los cuales ganó el 70 % en los tribunales. El abogado *B* se encargó del 60 % de los casos que llegaron, de los que ganó en los tribunales el 90 %. Por último, el abogado *C* se encargó del 10 % restante de casos, ganando en los tribunales el 50 % de ellos. Si se elige al azar un caso que los que llegó el año pasado al bufete:

- a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que se haya ganado en los tribunales?
- b) [1 punto] Si el caso elegido se ganó, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya llevado el abogado *B*?

Solución:**Apartado a)**

Lo más sencillo es hacer un diagrama de árbol para mostrar todos los datos. *A*, *B* y *C* representan al abogado, *G* quiere decir ganar y *P* representa perder. Lo completamos de modo que en cada rama los porcentajes sumen 100.



Nos piden la probabilidad de ganar. Por la fórmula de la probabilidad total:

$P(G) = P(G/A) \cdot P(A) + P(G/B) \cdot P(B) + P(G/C) \cdot P(C)$ que, sustituyendo nos da:

$$P(G) = \frac{30}{100} \cdot \frac{70}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{80}{100} = 0.8, \text{ luego la probabilidad de ganar es:}$$

$$P(G) = 0.8$$

Apartado b)

Es directamente la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(B/G) = \frac{P(G/B) \cdot P(B)}{P(G)} = \frac{\frac{60}{100} \cdot \frac{90}{100}}{\frac{80}{100}} = \frac{54}{80} = 0.675$$

$$P(B/G) = 0.675$$

Problema A.4:

4. Se supone que el tiempo de cada consulta en un determinado centro de salud sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 1,5 minutos.

- a) [1 punto] Para estimar dicho tiempo medio por consulta, se considera una muestra aleatoria de 961 consultas, las cuales han tenido una duración media de 6 minutos. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media de las consultas en ese centro de salud, al 95 % de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media por consulta a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,2 minutos y un nivel de confianza del 95 %?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:**Apartado a)**

Se trata de una distribución $N(\mu, 1.5)$ con μ desconocida. Por tanto, $N(\mu, 1.5/\sqrt{961})$ o, aproximadamente $N(\mu, 0.0484)$

Si $Z \approx N(0,1)$, calculamos M tal que $P(-M < Z < M) = 0.95$. Eso se obtiene con:

$2F(M) - 1 = 0.95$ o, lo que es lo mismo $F(M) = 0.975$. En los valores obtenemos $M = 1.96$.

Así pues, el intervalo es $(6 - 0.0484 \cdot 1.96, 6 + 0.0484 \cdot 1.96) \approx (5.91, 6.09)$.

El intervalo de confianza para la duración media de las consultas es aproximadamente de **(5.91, 6.09) minutos**.

Apartado b)

La semiamplitud del intervalo al 95 % es 1.96 por la desviación típica, es decir $\frac{1.96 \cdot 1.5}{\sqrt{n}}$. Igualando a 0.2 sale $1.96 \frac{1.5}{\sqrt{n}} = 0.2$ o $n = \left(\frac{1.96 \cdot 1.5}{0.2}\right)^2 \approx 216.09$.

Como no se puede tomar una muestra de 216.09 pasamos al siguiente número. Hay que tomar 217 datos.

El tamaño muestral mínimo es de **217** datos.

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Una empresa de joyería tiene dos máquinas *A* y *B* con las que puede hacer anillos, pulseras y collares y tiene que decidir el número de horas de trabajo de cada una de las máquinas para la próxima semana. En cada hora de trabajo, la máquina *A* realiza 1 anillo, 4 pulseras y 2 collares, mientras que la máquina *B* realiza 4 anillos, 2 pulseras y 3 collares. Durante la próxima semana, la empresa debe producir al menos 80 anillos, 96 pulseras y 120 collares.

- a) [2 puntos] ¿Cuántas horas debe trabajar cada máquina para satisfacer estos requisitos de demanda? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría usarse 10 horas la máquina *A* y 30 horas la *B*?
- b) [1 punto] El coste por cada hora de trabajo de la máquina *A* es de 2500 euros y el de la máquina *B* es de 2000 euros. ¿Cuántas horas tiene que trabajar cada máquina para minimizar el coste total? ¿a cuánto asciende dicho coste mínimo?

Solución:

Apartado a)

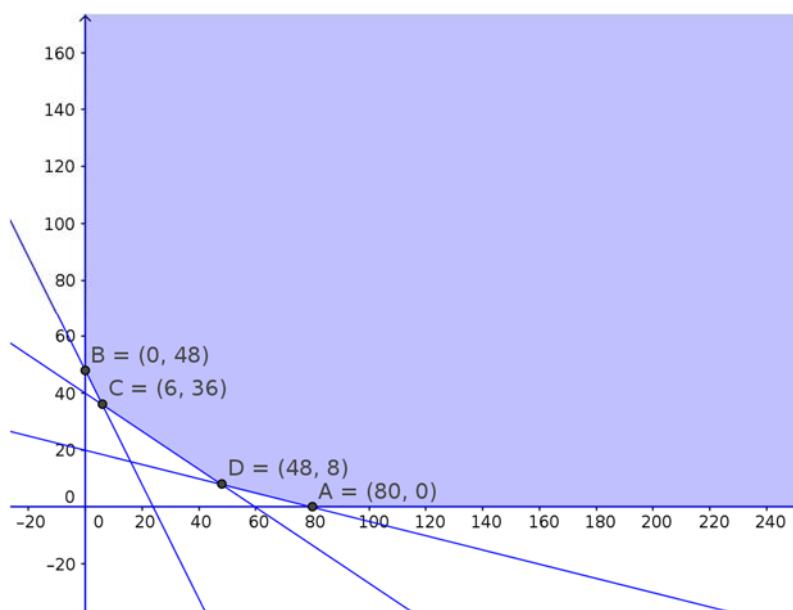
Sea x el tiempo que se emplea la máquina *A* e y el tiempo que se emplea la máquina *B*, expresados ambos en horas.

La máquina *A*, en x horas, produce x anillos, $4x$ pulseras y $2x$ collares en tanto la máquina *B* produce $4y$ anillos, $2y$ pulseras y $3y$ collares.

Si sumamos ambas producciones tenemos las restricciones:

$$\begin{cases} (\text{Anillos}) x + 4y \geq 80 \\ (\text{Pulseras}) 4x + 2y \geq 96 \\ (\text{Collares}) 2x + 3y \geq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Representado gráficamente es:



La pregunta es bastante ambigua. Si por “cada máquina” se refiere a “las máquinas conjuntamente” es el conjunto que se ha representado arriba. Si se refiere a “cada máquina por separado” es la siguiente respuesta.

Si usáramos solo la primera máquina, necesitaría 80 horas para hacer los anillos, $96/4 = 24$ horas en hacer las pulseras y $120/2 = 60$ horas para hacer los collares. Como todo lo hace a la vez, necesitaría 80 horas (y haría pulseras y collares de más).

De la misma manera, la segunda máquina necesitaría $80/4 = 20$ horas para los collares, 48 horas para las pulseras y 40 horas para los anillos. En 48 horas finalizaría el trabajo haciendo anillos y pulseras de más.

En resumen, **80 horas la máquina A en solitario y 48 horas la máquina B en solitario.**

Finalmente, usando 10 horas la máquina A y 30 la B obtendríamos

$$\begin{cases} (\text{Anillos}) 10 + 4(30) = 130 \\ (\text{Pulseras}) 4(10) + 2(30) = 100 \\ (\text{Collares}) 2(10) + 3(30) = 110 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

que cumple sobradamente las especificaciones de anillos y pulseras pero NO la de collares (por 10 unidades).

No puede usarse 10 horas la máquina A y 30 la B porque no se cumplen las especificaciones. Faltarían 10 collares.

Apartado b)

$$\text{Min } 2500x + 2000y$$

$$x + 4y \geq 80$$

$$\text{El problema es } \begin{cases} 4x + 2y \geq 96 \\ 2x + 3y \geq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$2x + 3y \geq 120$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Los vértices del conjunto se calculan haciendo los puntos de corte de las restricciones. Son A(80,0) [1ª con $\{x = 0\}$], B(0,48) [2ª con $\{y = 0\}$], C(6,36) [2ª con 3ª] y D(48,8) [1ª con 3ª].

Si no viéramos el dibujo, habría que hacer los cortes de todas dos a dos. Sin embargo salen puntos fuera de la región factible (por ejemplo la 1ª con la 2ª sale (16,16) que no cumple la tercera restricción).

En cualquier caso, la función de coste es $F(x, y) = 2500x + 2000y$. El óptimo es en uno de los vértices.

$$F(A) = 2500(80) + 2000(0) = 200\,000, \quad F(B) = 2500(0) + 2000(48) = 96\,000$$

$$F(C) = 2500(6) + 2000(36) = 87\,000, \quad F(D) = 2500(48) + 2000(8) = 136\,000.$$

El coste mínimo se obtiene al usar 6 horas la máquina A y 36 la máquina B.

Dicho coste mínimo son 87 000 euros.

Problema B.2:

2. La variación instantánea de la cotización viene dada por la función $f(x) = 0,02x^2 + 1$ donde x representa el tiempo que lleva cotizando desde el comienzo de la semana. Se pide:

- [0,75 puntos]** Determinar la función cotización F , si se sabe que dicha función es la primitiva de f y que en el momento inicial la cotización era de 5.
- [2,25 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función g definida como $g(x) = f(x) - 9, \forall x \in \mathbb{R}$ y calcular el área limitada por la curva g y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:**Apartado a)**

La variación instantánea es la derivada. De modo que $F'(x) = f(x)$ con lo que $F(x) = \int f(x)dx$ a falta de determinar la constante de integración.

$$\int f(x)dx = \int (0.02x^2 + 1)dx = \frac{0.02x^3}{3} + x + C$$

¿Cuánto vale C ? Pues sabemos que $F(0) = 5$ y sustituyendo $\frac{0^3}{3} + 0 + C = 5$ da $C = 5$. Por ello la solución es $F(x) = \frac{0.02x^3}{3} + x + 5$

$$\text{La función que describe la cotización es } F(x) = \frac{0.02x^3}{3} + x + 5$$

También se podría haber expresado como $F(x) = \frac{2x^3}{300} + x + 5$; $F(x) = \frac{x^3}{150} + x + 5$ o

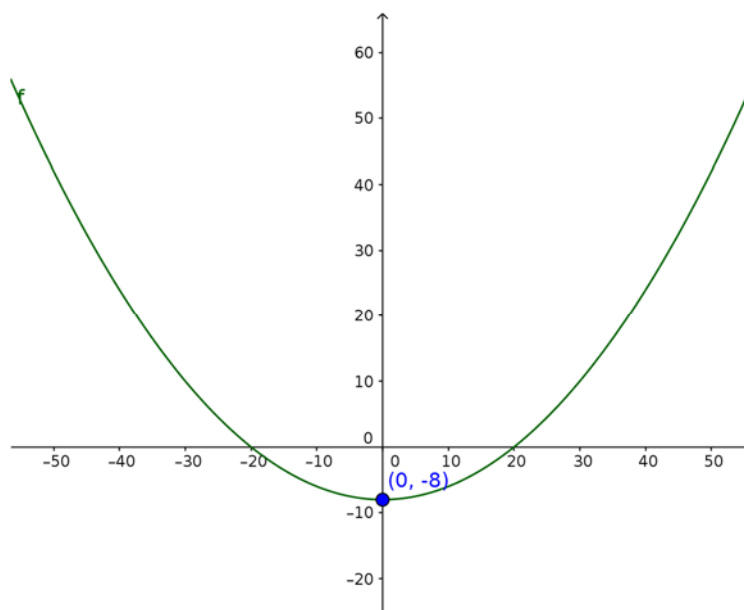
$$F(x) = \frac{x^3 + 150x + 750}{150}. \text{ Las cuatro expresiones son totalmente equivalentes.}$$

Apartado b)

$$g(x) - 9 = 0.02x^2 - 8$$

Se trata de una función cuadrática, de modo que no requiere un estudio general, basta saber sus elementos.

- Su dominio son todos los reales y es siempre continua.
- El coeficiente $0.02 > 0$. Tiene las ramas hacia arriba (curvatura positiva, forma de U).
- La coordenada en abscisas del vértice es $\frac{0}{2(0.02)} = 0$. En ordenadas es $g(0) = -8$. Por tanto es decreciente en $(-\infty, 8)$ y creciente en $(8, +\infty)$.
- Es simétrica respecto de su vértice, que acabamos de ver que es $x = 0$.
- Su corte con el eje X es $(0, -8)$, calculado más arriba.
- Sus cortes con el eje Y son las soluciones de $0.02x^2 - 8 = 0$, $x = \pm 20$
- No tiene asíntotas de ningún tipo.



Puesto que la función está por debajo del eje en todo el intervalo, el área es:

$$-\left(\int_0^3 0.02x^2 - 8 \, dx\right) = \left[\frac{0.02x^3}{3} - 8x\right]_0^3$$

que es igual a:

$$\left[\frac{0.02(-3)^3}{3} - 8(-3)\right] - (0 - 0) = 24 - 0.18 = 23.82$$

$$\text{Área} = 23.82 \, \text{u}^2.$$

Problema B.3:

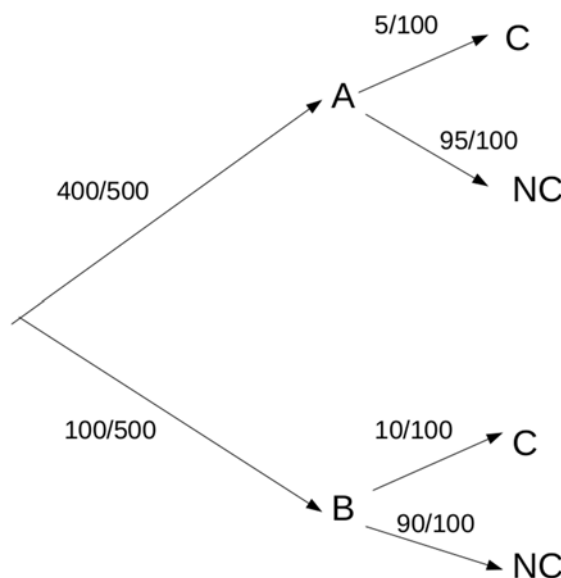
3. En el almacén de un supermercado hay 400 tetrabriks de leche de la marca A y 100 de la marca B . Además se sabe que el 5 % de los tetrabriks de la marca A están caducados, así como el 10% de los tetrabriks de la marca B . Si se elige un tetrabrik de leche al azar de esos 500 tetrabriks que hay en el almacén, se pide:

- [1 punto] Determinar la probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado.
- [1 punto] Determinar la probabilidad de que sea de la marca B o esté caducado.

Solución:

Lo más sencillo es hacer un diagrama de árbol. Llamamos A al suceso “ser de la marca A ”, B a “ser de la marca B ”, C al suceso “estar caducado” y NC a su complementario, no estar caducado.

El árbol es el siguiente:

**Apartado a):**

$$P(B \cap NC) = \frac{100}{500} \cdot \frac{90}{100} = \frac{90}{500} = 0.18.$$

La probabilidad de que sea de la marca B y no esté caducado es de **0.18**.

Apartado b)

$$P(B \cup C) = P(B) + P(A \cap C) = \frac{100}{500} + \frac{400}{500} \cdot \frac{5}{100} = 0.2 + 0.04 = 0.24$$

La probabilidad de que sea de la marca B o no esté caducado es de **0.24**.

Problema B.4

4. Para hacer un estudio sobre el uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los adolescentes, se tomó una muestra aleatoria de 100 adolescentes, de los cuales 10 respondieron que las usaban 4 horas a la semana, 15 que las usaban 5 horas por semana, 20 que las usaban 7 horas por semana y otros 20 que las usaban 8 horas por semana, 15 adolescentes dijeron que las usaban 9 horas a la semana, 10 que las usaban 10 horas y otros 10 que las usaban 15 horas. Se supone además que el tiempo que dedican semanalmente a las nuevas tecnologías los adolescentes sigue una distribución normal con desviación típica 1,7 horas.

- a) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el tiempo medio semanal dedicado a las NT por los adolescentes, al 90 % de confianza.
- b) [1 punto] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que usan las nuevas tecnologías más de 6 horas a la semana, al 90 % de confianza.

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:**Apartado a):**

En primer lugar, necesitamos la media, pues la desviación típica ya nos la dan, es 1,7. La estimamos por el valor muestral.

$$E[X] = \frac{1}{100} [4 \cdot 10 + 5 \cdot 15 + 7 \cdot 20 + 8 \cdot 20 + 9 \cdot 15 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 10] = 8$$

La media muestral, que es el estimador del tiempo medio semanal es por tanto, $N(\mu, 1.7/\sqrt{100}) = N(\mu, 0.17)$. Se trata de una distribución normal con μ desconocida. Por tanto

Si $Z \approx N(0, 1)$, calculamos M tal que $P(-M < Z < M) = 0.90$. Eso se obtiene con:

$$2F(M) - 1 = 0.90 \text{ o, lo que es lo mismo } F(M) = 0.95. \text{ En los valores obtenemos } M = 1.64.$$

Así pues, el intervalo es $(8 - 0.17 \cdot 1.64, 8 + 0.17 \cdot 1.64) \approx (7.72, 8.28)$

El intervalo de confianza para el tiempo medio semanal de uso de las TIC es aproximadamente de **(7.72, 8.28)** horas.

Apartado b)

Llamamos Y a la variable aleatoria que toma el valor 1 si el adolescente usa las TIC más de 6 horas y 0 si no lo hace.

Hay 100 adolescentes luego es una variable binomial $B(100, p)$. Nos piden un intervalo para p .

Por el teorema central del límite, sabemos que $Y \approx N(E[Y], \sqrt{Var(Y)})$ es decir,

$$Y \approx N(100p, \sqrt{100p(1-p)})$$

Si llamamos R (razón) a la proporción, es $R = Y/100 \approx N(p, \sqrt{p(1-p)/100})$ de donde

$$Z = \frac{R - p}{\sqrt{p(1-p)/100}} \approx N(0, 1)$$

Buscamos ahora un valor M de modo que $P(-M < Z < M) = 0.9$ y resulta que ya lo teníamos calculado del apartado a) es $M = 1.64$.

$$P(-M < Z < M) = 0.9$$

Es repetir el apartado a) quitando de la muestra el 4 y el 5. El intervalo ahora de la forma $(H, +\infty)$. Si $Z \approx N(0,1)$, calculamos R_{tal} que $-1.64 < Z < 1.64 \Leftrightarrow -1.64 < \frac{R-p}{\sqrt{p(1-p)/100}} < 1.64$

Despejando R es $p - 1.64 \cdot \sqrt{p(1-p)/100} < R < p + 1.64 \cdot \sqrt{p(1-p)/100}$ luego el intervalo es $(p - 1.64 \cdot \sqrt{p(1-p)/100}, p + 1.64 \cdot \sqrt{p(1-p)/100})$

Necesitamos una estimación de p . Esa es la proporción muestral observada

$$\frac{20+20+15+10+10}{100} = 0.75$$

El intervalo es $(0.75 - 1.64 \cdot \sqrt{0.75(1-0.75)/100}, 0.75 + 1.64 \cdot \sqrt{0.75(1-0.75)/100})$ es decir aproximadamente (0.6788, 0.8212)

El intervalo de confianza para la proporción de adolescentes que pasan más de 6 horas con las TIC es **(0.6788, 0.8212)** [en porcentaje (67.88 %, 82.12 %)]



Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN A

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.

- [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.
- [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0, 6]$ se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B, se pide:

- [1 punto] Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?
- [1 punto] Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.
- [1 punto] Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

- [1 punto] Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?
- [1 punto] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95%?

- [1 punto] En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95%, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Universidad de Oviedo
Pruebas de evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad
2018-2019





Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Pruebas de evaluación de Bachillerato para el
acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen presenta dos opciones: A y B. Elige una de ellas y responde **razonadamente** a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción.

OPCIÓN B

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

- [2 puntos] ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?
- [1 punto] Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
- [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

3. En una agencia de viajes *online* se ha observado que el 80% de los clientes compra un billete de avión, el 60% compra un bono de hotel y el 50% compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

- [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.
- [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

- [1 punto] Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99% de confianza.
- [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

1. Una persona ha obtenido 4000 euros de beneficio el último año por invertir en dos empresas A y B. La cantidad de dinero invertida en A fue m veces lo invertido en B, y los beneficios fueron el 10% en A y el 20% en B.

a) [1 punto] Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean las cantidades invertidas en ambas empresas, respectivamente.

b) [2 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir, ¿es siempre única? ¿Es posible que en la empresa A se haya invertido el doble que en B? En caso afirmativo, ¿cuánto se invirtió en A?

Solución:

Apartado a)

Tal como nos dice el enunciado, llamamos x a la cantidad invertida en la empresa A e y a la cantidad invertida en la empresa B.

Puesto que la primera es m veces la segunda, la primera ecuación del sistema es:

$$x = my$$

El beneficio es la suma de los beneficios en ambas, es decir $\frac{10}{100}x + \frac{20}{100}y$.

Igualando a 4000 será $\frac{10}{100}x + \frac{20}{100}y = 4000$

y poniendo las ecuaciones juntas tenemos lo que nos piden:

$$\text{El sistema para calcular las cantidades es } \begin{cases} x = my \\ \frac{10}{100}x + \frac{20}{100}y = 4000 \end{cases}$$

Apartado b)

Lo primero, arreglamos un poco el sistema. Pasamos las variables a la izquierda, y multiplicamos la segunda ecuación por 10. queda, pues:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ x + 2y = 40000 \end{cases}$$

El determinante del sistema es $\begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + m$ de modo que, para $m \neq -2$ siempre hay solución única.

El caso $m = -2$ lo tratamos aparte. El sistema es pues $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 40000 \end{cases}$ que es incompatible. Puede verse directamente porque igualando ambas implica la ecuación imposible $0 = 40\,000$.

O bien, aplicando el método de Gauss y restando la segunda de la primera también llegamos a la misma ecuación imposible y a la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 40000 \end{pmatrix}$ que es obviamente de un sistema

incompatible (el rango de la matriz de coeficientes es uno y el de la matriz ampliada 2).

Nos preguntan ahora si es posible que se invirtiera en A el doble que en B o, en otras palabras, qué ocurre si $m = 2$. Lo primero, por lo anterior sí hay solución única porque $m \neq -2$.

Para resolverlo, sustituimos:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 2y = 40000 \end{cases}$$

Sumando tenemos $2x = 40\,000$ que da $x = 20\,000$ e $y = 10\,000$

En resumen:

- El sistema tiene solución si y solamente si m es distinto de -2 .
- Si la solución existe, siempre es única.
- Es perfectamente posible que se haya invertido en A el doble que en B .
- En tal caso, la solución es única y corresponde a invertir $20\,000$ € en A y $10\,000$ en B .

Problema A.2:

2. Dos fuentes de energía A y B producen electricidad a la vez durante 6 horas. Si dado un instante de tiempo x en el intervalo $[0, 6]$ se tiene que $f(x) = -x^2 + 6x + 3$ representa la electricidad producida por la fuente A y $g(x) = x + 9$ representa la electricidad producida por la fuente B , se pide:

- [1 punto] Determinar en qué momentos están produciendo la misma cantidad de electricidad ambas fuentes. ¿A cuánto asciende la producción de electricidad de cualquiera de las dos fuentes en esos momentos?
- [1 punto] Determinar en qué momentos la producción de la fuente A decrece.
- [1 punto] Obtener el instante de tiempo en el que la producción conjunta de las dos fuentes es máxima.

Solución:**Apartado a)**

Igualando ambas funciones se tiene $-x^2 + 6x + 3 = x + 9$ que resulta $x^2 - 5x + 6 = 0$ cuyas soluciones vienen dadas por la conocida fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}, \text{ es decir, } 2 \text{ y } 3.$$

En $x = 2$ son $2 + 9 = 11$ mientras que en $x = 3$ es $3 + 9 = 12$

Ambas producen la misma electricidad a las **2 horas** (una cantidad de **11**) y a las **3 horas** (una cantidad de **12**).

Apartado b)

Derivando f e igualando a 0 tenemos $-2x + 6 = 0$ que da $x = 3$.

Para ver si crece o decrece estudiamos el signo, dando valores:

$$f'(2) = 2 > 0, f'(4) = -2 < 0.$$

Por tanto:

La producción de A decrece en el intervalo $(3, 6]$

Apartado c)

Sumando ambas, la producción conjunta es la función

$$c(x) = (-x^2 + 6x + 3) + (x + 9) = -x^2 + 7x + 12$$

Derivando c e igualando a 0 tenemos $-2x + 7 = 0$ que da $x = 3.5$.

Para ver si crece o decrece estudiamos el signo, dando valores:

$$c'(3) = 1 > 0, c'(4) = -2 < 0.$$

Por tanto, crece a la derecha y decrece a la izquierda con lo que efectivamente es un máximo.

La producción conjunta es máxima a las **tres horas y media**.

Problema A.3:

3. De los estudiantes de secundaria que fueron al viaje de estudios, se determina que tres quintas partes de ellos han consumido alcohol y que un cuarto de ellos han fumado. Además se sabe que el veinte por ciento de ellos han consumido alcohol y fumado.

- a) [1 punto] Si un estudiante elegido al azar ha fumado, ¿cuál es la probabilidad de que haya consumido alcohol?
- b) [1 punto] Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya fumado y no haya bebido alcohol?

Solución:**Apartado a)**

La manera más fácil de mostrar la información es hacer una tabla. Llamamos A a haber bebido alcohol y F a fumar.

	Alcohol (A)	No alcohol	Total
Fumar (F)	20/ 100		1 /4
No fumar			
Total	3/ 5		

Poniendo denominador común (sería 20 el mínimo, pero es más cómodo 100 y además son porcentajes).

	Alcohol (A)	No alcohol	Total
Fumar (F)	20/100		25/100
No fumar			
Total	60/100		

Así pues, la tabla se completa sin dificultad:

	Alcohol (A)	No alcohol	Total
Fumar (F)	20/100	5/ 100	25/100
No fumar	40/100	35/100	75/100
Total	60/100	40/100	100/100

Ya tenemos todos los datos.

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{20}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

Si un estudiante ha fumado hay una probabilidad de $4/5 = 0.8$ o un 80 % de que también haya consumido alcohol.

Apartado b)

Directamente de la tabla 35/100 o 7/20.

$$P(\bar{A} \cap \bar{F}) = \frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0.35$$

La probabilidad de no haber fumado ni consumido alcohol es $7/20 = 0.35$ o 35 %.

Problema A.4:

4. a) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para que pueda estimarse la verdadera proporción de turistas asiáticos en Asturias a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0,05 y un nivel de confianza del 95 %?
- b) [1 punto] En una muestra aleatoria de 800 turistas que visitan Asturias se obtuvo que solo 80 de ellos son asiáticos. En función de esta muestra obtén, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de turistas asiáticos en Asturias
- (Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:**Apartado a)**

Llamamos Y a la variable aleatoria que toma el valor 1 si el turista es asiático y 0 si no lo es. Es una variable binomial $B(n, p)$ donde ambos parámetros son desconocidos. Nos piden un intervalo para p .

Por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{Y} = Y/n \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$ y tomamos para la varianza el caso más desfavorable, que ya sabemos teóricamente que es $p = 1/2$.

Es decir, $\bar{Y} \approx N(p, \sqrt{\frac{1}{4n}}) = N(p, \frac{1}{2\sqrt{n}})$. Así pues $Z = \frac{\bar{Y}-p}{1/2\sqrt{n}} \approx N(0, 1)$

Buscamos ahora un valor M de modo que $P(-M < Z < M) = 0.95$ de donde:

$F(M) - F(-M) = 0.95$; $F(M) - [1 - F(M)] = 0.95$, así que:

$F(M) = 1 + 0.952 = 0.975$ que da $M = 1.96$.

$P(-1.96 < \frac{\bar{Y}-p}{1/2\sqrt{n}} < 1.96) = 0.95$, luego el error es $1.96 \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Igualando tenemos $\frac{1.96}{2\sqrt{n}} = 0.05$ de donde $n = (\frac{1.96}{2 \cdot 0.05})^2 = 384.16$

No pueden buscarse 0.16 personas, así que redondeando al siguiente tenemos el resultado.

Para estimar la proporción al 95 % con un error menor que 0.05 es necesario usar una muestra de al menos **385** personas.

Apartado b)

Llamamos X la variable aleatoria que toma el valor 1 si el turista es asiático y 0 si no lo es. Es una variable binomial $B(n, p)$ pero ahora sabemos que $n = 800$. Nos piden un intervalo para p .

Por el teorema central del límite, sabemos que $\bar{X} = X/n \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$ pero, nuevamente en este caso, tenemos más datos.

En vez de tomar el caso más desfavorable, usamos la proporción muestral $80/800 = 0.1$ y el valor $n = 800$.

Es decir, $\bar{Y} \approx N(p, \sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{800}}) \approx N(p, 0.0106)$.

Como en el apartado anterior

$P(-1.96 < \frac{\bar{Y}-p}{0.0106} < 1.96) = 0.95$ o, equivalentemente $P(-1.96 < \frac{p-\bar{Y}}{0.0106} < 1.96) = 0.95$ luego el intervalo es $(\bar{Y} - 1.96 \cdot 0.0106, \bar{Y} + 1.96 \cdot 0.0106)$. Sustituyendo $\bar{Y}$ por 0.1 es (0.792, 0.121)

El intervalo para la proporción de turistas asiáticos es **(0.792, 0.121)** o,

expresado en porcentaje (7.92 %, 12.1 %)

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

1. Una empresa construye dos tipos de motocicletas eléctricas A y B. Cada jornada dispone de 3600 euros para la fabricación de estas motocicletas, siendo el coste de manufactura de 200 euros para la motocicleta tipo A y de 400 euros para la motocicleta tipo B. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de motocicletas fabricadas por jornada no sea mayor de 12. Por otro lado, debido a la organización de la producción en esa empresa, cada jornada no puede fabricar más de 8 motocicletas de tipo B.

- a) [2 puntos] ¿Cuántas motocicletas de cada tipo puede fabricar una jornada para cumplir todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían fabricar 4 motocicletas de tipo A y el doble de tipo B?
- b) [1 punto] Sabiendo que el beneficio obtenido en la venta de una motocicleta de tipo A es de 200 euros y en la de tipo B es de 320 euros y suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas motocicletas de cada tipo deben fabricar en una jornada para que el beneficio sea máximo? ¿y para maximizar el número de motocicletas de tipo A fabricadas?

Solución:

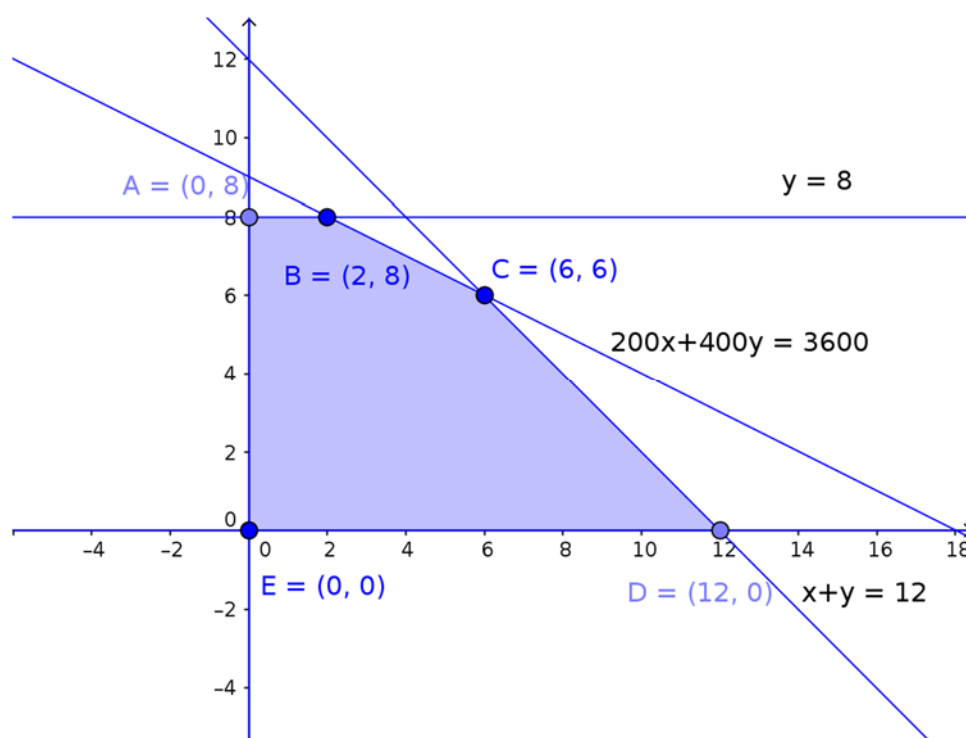
Apartado a)

Denotamos con x al número de motocicletas de tipo A y y al número de motocicletas de tipo B.

Las **restricciones** son, pues:

$$\begin{cases} (\text{Total dinero}) 200x + 400y \leq 3600 \\ (\text{Total motos}) x + y \leq 12 \\ (\text{Motos B}) y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Representado gráficamente es:



Producir 4 motos de A y el doble de B corresponde a $x = 4$ e $y = 8$ que no es admisible pues no cumple la primera restricción. Al sustituir tenemos que $200(4) + 400(8) = 4000$ que es mayor que 3600.

No se pueden fabricar 4 motos de A y el doble (8) de B . No cumple la restricción de dinero.

Apartado b)

El problema es:

$$\begin{cases} \text{Max } 200x + 320y \\ 200x + 400y \leq 3600 \\ x + y \leq 12 \\ y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Los vértices del conjunto se calculan haciendo los puntos de corte de las restricciones. Son $A(0, 8)$ [3^{a} con $\{x = 0\}$], $B(2, 8)$ [1^{a} con 3^{a}], $C(6, 6)$ [1^{a} con 2^{a}], $D(12, 0)$ [2^{a} con $\{y = 0\}$] y $E(0, 0)$ [$\{x = 0\}$ con $\{y = 0\}$].

Si no viéramos el dibujo, habría que hacer los cortes de todas dos a dos. Sin embargo, salen puntos fuera de la región factible (por ejemplo, la 2^{a} con la 3^{a} sale $(4, 8)$ que no cumple la primera restricción) que habría que comprobar si cumplen las demás y en su caso, eliminarlos.

Independientemente de cómo procedamos, la función de coste es $F(x, y) = 200x + 320y$. El óptimo es en uno de los vértices.

$$F(A) = 200(0) + 320(8) = 2560,$$

$$F(B) = 200(2) + 320(8) = 2960,$$

$$F(C) = 200(6) + 320(6) = 3120,$$

$$F(D) = 200(12) + 320(0) = 2400,$$

$$F(E) = 200(0) + 320(0) = 0.$$

Por tanto, es el punto $(6, 6)$. Basta interpretarlo.

El beneficio máximo se obtiene fabricando 6 motocicletas de cada tipo

Finalmente, el número máximo de motocicletas de tipo A también se alcanza en uno de los puntos. Pero esta vez se ve directamente que es el $(12, 0)$.

El máximo de bicicletas de tipo A son 12 y, en tal caso, no se fabrica ninguna B .

Problema B.2:

2. Dada la función $f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$, se pide:

- a) [0,75 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 20$.
- b) [2,25 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 12$.

Solución:**Apartado a)**

Calculamos la integral indefinida

$$\int f(x) = \int \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1 dx$$

Separando y sacando fuera las constantes queda:

$$\int f(x) = 9 \int \frac{dx}{x} - 18 \int \frac{dx}{x^2} - \int dx = \ln(x) + \frac{18}{x} - x + K$$

donde K es una constante a determinar.

Sabemos que $F(x) = 9\ln(x) + \frac{18}{x} - x + K$ y que $F(1) = 20$ de modo que sustituyendo nos da:

$$20 = 9\ln(1) + \frac{18}{1} - 1 + K = 0 + 18 - 1 + K = K + 17$$

es decir, $K = 3$.

La primitiva que cumple $F(1) = 20$ es $F(x) = 9\ln(x) + \frac{18}{x} - x + 3$.

Apartado b)

La única operación que puede fallar es la división. La función no está definida en 0 de modo que el dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ o, dicho de otro modo $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Es claro que es continua en todo ese dominio.

Para los cortes con los ejes, en primer lugar no se puede cortar con OY puesto que $f(0)$ no está definida.

Para OX , $0 = f(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$. Multiplicamos por x^2 y resolvemos:

$$0 = 9x - 18 - x^2 \text{ que es } x^2 - 9x + 18 = 0,$$

y con la fórmula da $x = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 18}}{2}$ con soluciones $x = 3$ y $x = 6$.

Para derivar, es más cómodo expresarla con exponentes negativos:

$$f(x) = 9x^{-1} - 18x^{-2} - 1$$

[Naturalmente todos los resultados las cuentas salen igual si no la ponemos de esa manera, pero es más complicado].

La derivada es $f'(x) = -9x^{-2} + 36x^{-3}$ que igualada a 0 es $9x^{-2} - 36x^{-3} = 0$ y, multiplicando por x^3 queda $-9x + 36 = 0$ y sale $x = 4$. La derivada se anula en el punto de abscisa $x = 4$.

Hay que estudiar tres intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, +\infty)$ delimitados por los puntos de discontinuidad y ceros. Dando valores y estudiando el signo, por ejemplo, con $f'(-1) = -45 < 0$; $f'(1) = 27 > 0$ y

$f'(10) = -0.09 + 0.0036 < 0$ vemos que es decreciente en $(-\infty, 0)$, *creciente en* $(0, 4)$ y otra vez decreciente en $(4, +\infty)$

En cuanto a la segunda derivada es $f''(x) = 18x^{-3} - 108x^{-4}$ que igualada a 0 es:

$$-18x^{-3} + 108x^{-4} = 0.$$

De modo similar al caso anterior, multiplicamos por x^3 y queda $18x - 108 = 0$ y sale $x = 6$.

Hay que estudiar tres intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 6)$ y $(6, +\infty)$ delimitados por los puntos de discontinuidad y ceros. Dando valores y estudiando el signo, por ejemplo, con $f''(-1) = -126 < 0$; $f''(1) = -90 < 0$ y $f''(10) = 0.018 - 0.0108 > 0$ vemos la curvatura:

En que es negativa en $(-\infty, 0) \cup (0, 6)$ tiene curvatura positiva (forma de U) en tanto en $(6, +\infty)$ tiene curvatura negativa (forma de $\cap$).

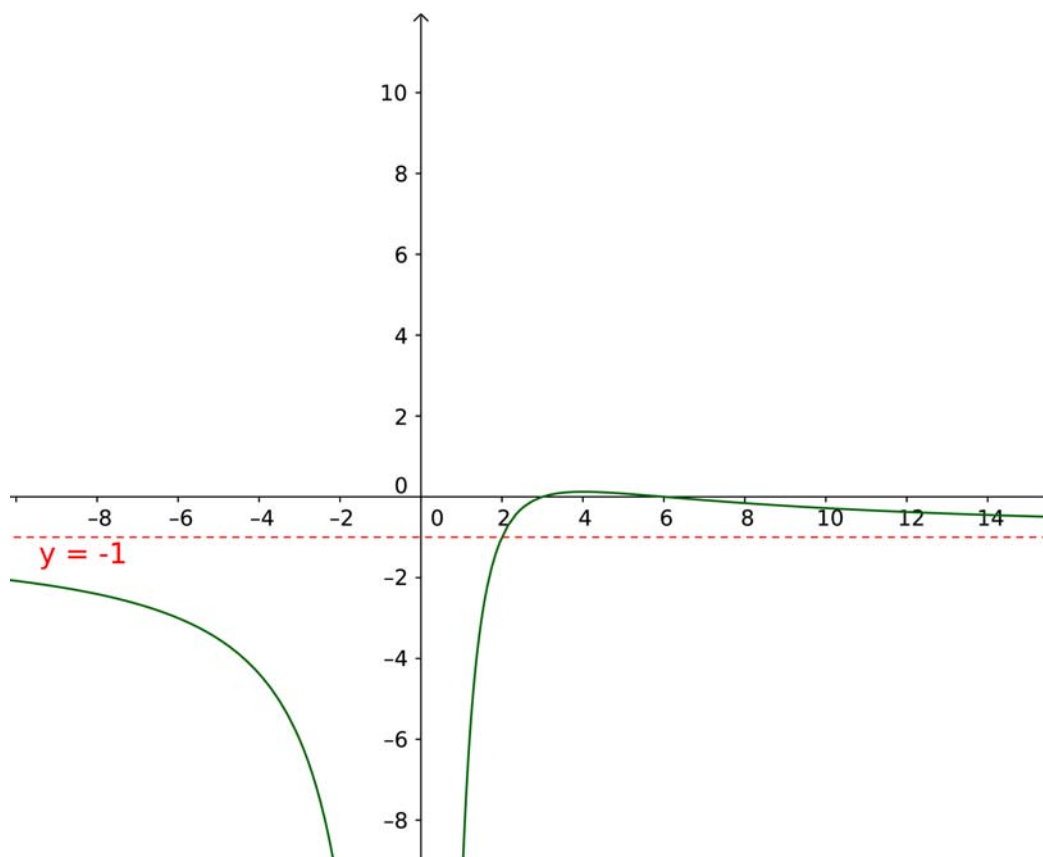
Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y los límites en el infinito son $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ por lo que tiene una asíntota horizontal y ninguna oblicua.

Dando los valores 0.1 y -0.1 tenemos $f(0.1) = 90 - 1800 - 1 < 0$ y $f(-0.1) = -90 - 1800 - 1 < 0$ de modo que vemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ pues ambos límites laterales salen menos infinito.

Tenemos la siguiente tabla de valores. Damos el valor -1 en $(-\infty, 0)$ como adicional, los demás son obligatorios (extremos del dominio, cortes con los ejes, puntos de discontinuidad y ceros de derivadas).

x	$-\infty$	-1	0^-	0	0^+	3	4	6	$+\infty$
$f(x)$	-1	-28	$-\infty$	No existe	$-\infty$	0	0.125	0	-1

La gráfica es aproximadamente:



El área es por definición: $\int_1^{12} |f(x)| dx$ pero hay que ver el signo del valor absoluto:

Entre $x = 1$ y $x = 12$ la función corta al eje dos veces, en $x = 3$ y en $x = 6$.

$$\int_1^{12} |f(x)| dx = - \int_1^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx - \int_6^{12} f(x) dx$$

Ya hemos calculado la primitiva general que es $F(x) = \ln(x) + \frac{18}{x} - x + K$. La integral definida no depende de la primitiva que escojamos así que podemos tomar $K = 0$.

Sustituyendo:

$$\int_1^{12} |f(x)| dx = -[9\ln(x) + \frac{18}{x} - x]_1^3 + [9\ln(x) + \frac{18}{x} - x]_3^6 - [9\ln(x) + \frac{18}{x} - x]_6^{12}$$

que es

$$\begin{aligned} & -[9\ln(3) + 6 - 3] - [9\ln(1) + 18 - 1] + [9\ln(6) + 3 - 6] - [9\ln(3) + 6 - 3] \\ & -\{[9\ln(12) + \frac{18}{12} - 12] - [9\ln(6) + 3 - 6]\} \end{aligned}$$

y operando resulta 5.61.

El área entre 1 y 12 de la función es **5.61 u²**.

Problema B.3:

3. En una agencia de viajes *online* se ha observado que el 80% de los clientes compra un billete de avión, el 60 % compra un bono de hotel y el 50% compra las dos cosas. Elegido un cliente al azar de esa agencia, se pide:

- a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un billete de avión o un bono de hotel.
 b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que compre un bono de hotel si se sabe que compró un billete de avión.

Solución:**Apartado a)**

La manera más fácil de mostrar la información es hacer una tabla. Llamamos A a comprar un billete de avión y H a comprar un bono de hotel.

	Hotel	No hotel	Total
Avión	50/100		80/100
No avión			
Total	60/100		100/100

Completar la tabla es sencillo:

	Hotel	No hotel	Total
Avión	50/100	30/100	80/100
No avión	10/100	10/100	20/100
Total	60/100	40/100	100/100

Nos piden ahora $P(A \cup H)$. Se calcula sumando las tres casillas [la línea encima denota el complementario].

$$P(A \cup H) = P(A \cap H) + P(A \cap \bar{H}) + P(\bar{A} \cap H) = \frac{50}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100} = \frac{90}{100}$$

Otra manera de hacerlo es directamente con la fórmula:

$$P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H) = \frac{80}{100} + \frac{60}{100} - \frac{50}{100} = \frac{90}{100}$$

En cualquier caso, tenemos:

La probabilidad de comprar un billete de avión o un bono de hotel es **0.9 (90%)**.

Apartado b)

Se trata de una condicionada. Basta aplicar la fórmula:

$$P(H/A) = \frac{P(A \cap H)}{P(A)}$$

Tenemos todos los datos en la tabla.

$$P(H/A) = \frac{P(A \cap H)}{P(A)} = \frac{\frac{50}{100}}{\frac{80}{100}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

La probabilidad de comprar un bono de hotel si sabemos que ha comprado un billete de avión es de **0.625 = 5/8 o 62.5%**

Problema B.4:

4. Con el objetivo de estudiar los ingresos anuales de los ejecutivos de multinacionales, se seleccionó una muestra aleatoria de 576 ejecutivos, cuyos ingresos totales (suma de los ingresos de los 576 ejecutivos) el último año ascendieron a 28,8 millones de euros. Se supone además que los ingresos anuales de este tipo de ejecutivos sigue una distribución normal con desviación típica 3000 euros.

- a) [1 punto] Construye un intervalo de confianza para los ingresos medios anuales de este colectivo, al 99% de confianza.
- b) [1 punto] ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar los verdaderos ingresos medios anuales a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 500 euros y un nivel de confianza del 99%?

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
 $F(1,28) = 0,90$; $F(1,64) = 0,95$; $F(1,96) = 0,975$; $F(2,33) = 0,99$; $F(2,58) = 0,995$.)

Solución:**Apartado a)**

$X \approx N(\mu, 3000)$ de modo que la media es $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{3000}{\sqrt{576}}) = N(\mu, 125)$. Si la suma es 28.8 millones de euros (28 800 000 €) la media es $\frac{28800000}{576} = \frac{100000}{2} = 50000$.

Si $Z \approx N(0, 1)$, calculamos M tal que $P(-M < Z < M) = 0.99$. Eso se obtiene con:

$$2F(M) - 1 = 0.99$$

o, lo que es lo mismo $F(M) = 0.995$. En los valores obtenemos $M = 2.58$.

Así pues, el intervalo es $(50000 - 125 \cdot 2.58, 50000 + 125 \cdot 2.58) \approx (49678, 50322)$

El intervalo de confianza para el salario medio de los ejecutivos es **(49 678, 50 322) euros**.

Apartado b)

Ya hemos calculado M , era 2.58. La desviación típica es $\frac{3000}{\sqrt{N}}$ de modo que el error es $\frac{2.58 \cdot 3000}{\sqrt{N}}$.

Igualemos a 500 y despejamos:

$$\frac{2.58 \cdot 3000}{\sqrt{N}} = 500 \text{ con lo que } N = \left(\frac{2.58 \cdot 3000}{500}\right)^2 = 239.63$$

Como no se pueden medir los ingresos de 0.63 ejecutivos, redondeamos al siguiente número natural.

Es necesario medir los ingresos de **240** ejecutivos.