

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II Selectividad 2019 Comunidad autónoma de Cataluña

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

http://universitats.gencat.cat/ca/pau/model_examens/

Revisores: Luis Carlos Vidal Del Campo





Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 1

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

- En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte.

[2 punts]

- Resoleu les qüestions següents:

- Considerem la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0$, en què I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la.

[1 punt]

- Considerem la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A , és a dir, que compleixen que $A \cdot B = B \cdot A$.

[1 punt]

- La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt $(-2, -6)$ i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix de les abscisses.

- Calculeu el valor de a .

[1 punt]

- Calculeu el valor de b .

[1 punt]



4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x , en què x és el dia del mes de febrer.
- a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer?
[0,75 punts]
- b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitats se'n van vendre?
[1,25 punts]
5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per a fabricar bicicletes de muntanya i de passeig, que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.
- a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]
- b) Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici.
[0,75 punts]
6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Sabem que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:
- $$I(t) = -5(m - t)^2 + n,$$
- per a $10 \leq t \leq 21$.
- a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
[1 punt]
- b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
[1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés





Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

Proves d'accés a la universitat

2019

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 4

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt.
 [2 punts]

2. L'empresa d'esport d'aventura Xtrem prepara per a la darrera setmana de juny dos paquets: el paquet bàsic (PB) i el paquet súper (PS). El PB inclou una baixada de ràfting, una baixada fent barranquisme i un salt de pont, i té un preu de 50 €. D'altra banda, el PS inclou tres baixades de ràfting, dues fent barranquisme i un salt de pont, i el preu és de 120 €.

Per limitacions climàtiques i de personal, només es poden fer 12 baixades de ràfting, 9 fent barranquisme i 8 salts de pont.

Per a fer la promoció turística, es vol saber quina combinació de paquets proporciona més ingressos.

 - a) Trobeu les inequacions que han de complir totes les possibles combinacions de paquets. Dibuixeu la regió del pla en què es troben aquestes possibles solucions i trobeu la funció que dona els ingressos en funció del nombre de paquets de cada tipus.
 [1,25 punts]
 - b) Trobeu el nombre de paquets de cada tipus que ha d'oferir l'empresa per a obtenir els ingressos màxims i digueu quins serien aquests ingressos.
 [0,75 punts]



3. Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

- a) Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$.
[0,75 punts]
- b) Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment.
[1,25 punts]

4. Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capsas de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb un llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capsas petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capsas de cada tipus han elaborat?
[2 punts]

5. Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:
- a) Escriviu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte.
[1 punt]
- b) Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és un màxim. Determineu quantes unitats vendrà.
[1 punt]

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdors $p1$, $p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- a) Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$.
[0,5 punts]
- b) Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per a tota la comanda? Quin és aquest preu?
[1,5 punts]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés



SOLUCIONES SÈRIE 1

Problema 1.1:

1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte. [2 punts]

Solución:

Con los datos del enunciado planteamos un sistema de ecuaciones.

Llamamos x al número de personas que ha escogido el producto A, y al B, y z al C.

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = 32 + x + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 500 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = -32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 500 \\ x - y + z = -32 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & -1 & 1 & -32 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & 0 & 0 & 532 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 532 \end{array}\right)$$

Restamos a la primera fila, la segunda. Cambiamos de orden la primera columna por la segunda. Cambiamos de orden la tercera fila por la segunda. ¡Ya podemos resolver, teniendo cuidado cuáles son ahora cada una de las incógnitas!

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 2x - y = 0 \\ 2y = 532 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 500 - x - y = 500 - 133 - 266 = 101 \\ y = 2x = 266 \rightarrow x = 133 \\ y = 266 \end{cases}$$

El producto A lo han escogido **133** personas, el B, **266**, y el producto C, **101** personas.

Problema 1.2:

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0$, en què I és la matriu identitat $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és la matriu nul·la. [1 punt]

b) Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius B que commuten amb la matriu A , és a dir, que compleixen que $A \cdot B = B \cdot A$.

Solución:

a) Planteamos la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} M^2 + a \cdot M + b \cdot I = 0 &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 14 + 2a + b & 5 + 5a \\ 2 + 2a & 11 - a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos cuatro ecuaciones y dos incógnitas. De la ecuación: $2 + 2a = 0$, obtenemos $a = -1$; sustituimos en: $11 - a + b = 0$ y obtenemos $b = -12$; Comprobamos que verifican la primera ecuación: $14 + 2a + b = 0 = 14 + 2(-1) - 12$.

$$a = -1; b = -12$$

b) Planteamos ahora la ecuación:

$$A \cdot B = B \cdot A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} z & r \\ x - z & y - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x - y \\ r & z - r \end{pmatrix}$$

Tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} z = y \\ r = x - y \\ r = x - z \\ y - r = z - r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y \\ r = x - y \\ r = x - y \\ z - r = z - r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = y \\ r = x - y \end{cases}$$

Al sustituir el valor de z , observamos que la cuarta ecuación es una identidad, y que la segunda y la tercera son iguales, con lo que ahora tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas. Todas las matrices B pedidas son de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix}$$

La matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x - y \end{pmatrix}$ conmutará con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 1.3:

3. La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt $(-2, -6)$ i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.
- a) Calculeu el valor de a . [1 punt]
 - b) Calculeu el valor de b . [1 punt]

Solució:

De la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ nos dicen que:

- 1) pasa por el punto $(-2, -6)$ y que
- 2) la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

Imponemos 1) $f(-2) = -6 = a(-2) + b + \frac{8}{(-2)} = -2a + b - 4 \rightarrow -2 = -2a + b$.

a) Imponemos 2) $f(x) = ax + b + \frac{8}{x} \rightarrow f'(x) = a - \frac{8}{x^2} \rightarrow f'(-2) = 0 = a - \frac{8}{(-2)^2} = a - 2 \rightarrow$
 $a = 2$

b) De 1) tenemos: $-2 = -2a + b \rightarrow -2 = -2(2) + b \rightarrow b = 4 - 2 = 2$.

$$a = 2 \text{ y } b = 2$$

Problema 1.4:

4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x , en què x és el dia del mes de febrer.

- a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer?
Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer? [0,75 punts.]
- b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre? [1,25 punts.]

Solució:

a) Las unidades de venta vienen dadas por:

$$f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125}$$

El día 5 de febrero se venderán: $f(5) = \frac{40}{5^2 - 22 \cdot 5 + 125} = \frac{40}{25 - 110 + 125} = \frac{40}{40} = 1$, es decir, mil unidades.

El incremento de ventas entre el 9 y el 7 es:

$$f(9) - f(7) = \frac{40}{9^2 - 22 \cdot 9 + 125} - \frac{40}{7^2 - 22 \cdot 7 + 125} = \frac{40}{206 - 198} - \frac{40}{174 - 154} = \frac{40}{8} - \frac{40}{20} = 5 - 2 = 3.$$

El incremento de ventas ha sido de 3 000 unidades.

El 5 de febrero se vendieron **1 000** unidades y el incremento de ventas entre el 9 y el 7 ha sido de **3 000** unidades.

b) Para estudiar el día de máximas ventas debemos utilizar la derivada primera:

$$f(x) = \frac{40}{x^2 - 22x + 125} \rightarrow f'(x) = \frac{-40(2x - 22)}{(x^2 - 22x + 125)^2} = 0 \rightarrow 2x = 22 \rightarrow x = 11.$$

El 11 tenemos un posible máximo o mínimo. Para determinarlo podemos usar la derivada segunda o el signo de la derivada primera.

El denominador de la derivada primera es siempre positivo. El numerador $-40(2x - 22)$ cambia de signo en 11. Para $x > 11$ el signo es negativo, luego la función es decreciente. Para $x < 11$ el signo es positivo, luego la función es creciente. Por tanto, para $x = 11$ tenemos un máximo.

$$f(11) = \frac{40}{11^2 - 22 \cdot 11 + 125} = \frac{40}{121 - 242 + 125} = \frac{40}{246 - 242} = \frac{40}{4} = 10.$$

El día **11** de febrero es el día de máximas ventas que son **10 000** unidades.

Problema A.5:

5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per fabricar bicicletes de muntanya i de passeig que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.
- a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]
- b) Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici. [0,75 punts]

Solució:

Llamamos x a las bicicletas de montaña e y a las de paseo.

a) Función objetivo: $f(x, y) = 200x + 150y$.

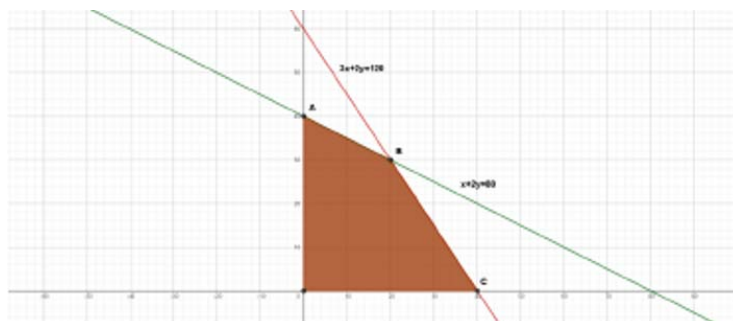
Restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

Para dibujar la región factible buscamos los puntos de intersección de las rectas que lo limitan.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \rightarrow B(20, 30); \rightarrow \begin{cases} x = 0; \\ x + 2y = 80 \rightarrow C(0, 40) \\ 3x + 2y = 120 \rightarrow E(0, 60) \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 80 \rightarrow (80, 0) \\ 3x + 2y = 120 \rightarrow A(40, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Los vértices de la región factible son: $A(40, 0)$; $B(20, 30)$; $C(0, 40)$; $O(0, 0)$.



b) Evaluamos la función objetivo en los vértices:

$$A(40, 0): f(40, 0) = 200(40) + 150(0) = 8\,000.$$

$$B(20, 30): f(20, 30) = 200(20) + 150(30) = 4\,000 + 4\,500 = 8\,500.$$

$$C(0, 40): f(0, 40) = 200(0) + 150(40) = 6\,000.$$

$$O(0, 0): f(0, 0) = 200(0) + 150(0) = 0.$$

El beneficio es máximo en el vértice $B(20, 30)$. Por lo tanto, se deben fabricar:

20 bicicletas de montaña y **30** de paseo para que el beneficio sea máximo, de **8 500** euros.

Problema A.6:

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Se sap que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m - t)^2 + n,$$

per a $10 \leq t \leq 21$

- a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
[1 punt]
- b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
[1 punt]

Solució:

La funció, ingresos por las ventas, viene dada por:

$$I(t) = -5(m - t)^2 + n, 10 \leq t \leq 21.$$

- a) Queremos que los beneficios sean máximos a las 18 horas. Para ello, debemos usar la derivada primera:

$$I(t) = -5(m - t)^2 + n \rightarrow I'(t) = -10(m - t)(-1) \rightarrow I'(18) = 10(m - 18) = 0 \rightarrow m = 18.$$

$$m = 18.$$

- b) Nos dicen que los ingresos a las 21 horas son de 500 euros:

$$I(t) = -5(m - t)^2 + n \rightarrow I(21) = 500 = -5(m - 21)^2 + n = -5(18 - 21)^2 + n = -45 + n.$$

Luego n es igual a 545.

$$I(t) = -5(18 - t)^2 + 545, 10 \leq t \leq 21.$$

$$n = 545.$$

SOLUCIONES SÈRIE 4

Problema B.1:

- c) Considereu la funció $f(x) = 2x^3 + ax$. Calculeu el valor de la constant a per tal que aquesta funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$. Digueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim i doneu també el valor que pren la funció $f(x)$ en aquest punt. [2 punts]

Solución:

- c) Para determinar que la función tenga un extremo relativo utilizamos la derivada primera:

$$f(x) = 2x^3 + ax \rightarrow f'(x) = 6x^2 + a \rightarrow f'(-1) = 0 = 6(-1)^2 + a = 6 + a \rightarrow a = -6$$

La función tendrá un extremo relativo en $x = -1$ si $a = -6$.

Para determinar si es un máximo o un mínimo podemos determinar el signo de la derivada primera cerca del punto, o utilizar la derivada segunda:

$$f(x) = 2x^3 - 6x \rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6 \rightarrow f''(x) = 12x \rightarrow f''(-1) = -12 < 0$$

Como la derivada segunda en el punto es menor que cero, entonces es un máximo relativo.

Nos piden el valor de dicho máximo:

$$f(x) = 2x^3 - 6x \rightarrow f(-1) = 2(-1)^3 - 6(-1) = -2 + 6 = 4.$$

$a = -6$; El punto $(-1, 4)$ es un máximo relativo.

Problema B.2:

L'empresa d'esport d'aventura Xtrem prepara per a la darrera setmana de juny dos paquets: el paquet bàsic (PB) i el paquet súper (PS). El PB inclou una baixada de ràfting, una baixada fent barranquisme i un salt de pont, i té un preu de 50€. D'altra banda, el PS inclou tres baixades de ràfting, dues fent barranquisme i un salt de pont, i el preu és de 120€.

Per limitacions climàtiques i de personal, només es poden fer 12 baixades de ràfting, 9 fent barranquisme i 8 salts de pont.

Per a fer la promoció turística, es vol saber quina combinació de paquets proporciona més ingressos.

- a) Trobeu les inequacions que han de complir totes les possibles combinacions de paquets. Dibuixeu la regió del pla en què es troben aquestes possibles solucions i trobeu la funció que dona els ingressos en funció del nombre de paquets de cada tipus. [1,25 punts]
- b) Trobeu el nombre de paquets de cada tipus que ha d'ofrir l'empresa per a obtenir els ingressos màxims i digueu quins serien aquests ingressos. [0,75 punts]

Solució:

- a) Escribimos la función objetivo y las restricciones. Llamamos r a las bajadas de rafting, b a barranquismo y p a los saltos de puente. Llamamos x a los paquetes básicos PB, e y a los paquetes super:

Función beneficio: $B(x, y) = 50x + 120y$

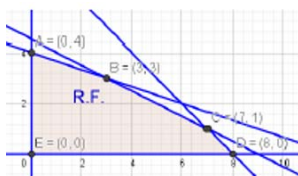
$$0 \leq r \leq 12; 0 \leq b \leq 9; 0 \leq p \leq 8$$

Restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + 2y \leq 9 : x \geq 0; y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$$

Hallamos los vértices de la región

$$\begin{cases} x = 0: x + 3y = 12 \rightarrow y = 4; x + 2y = 9 \rightarrow y = 4.5; x + y = 8 \rightarrow y = 4 \rightarrow A(0,4) \\ x + 3y = 12; x + 2y = 9 \rightarrow B(3,3); x + 2y = 9; x + y = 8 \rightarrow y = 1, x = 7 \rightarrow C(7,1) \\ y = 0: x + 3y = 12 \rightarrow x = 12; x + 2y = 9 \rightarrow x = 9; x + y = 8 \rightarrow x = 8 \rightarrow D(8,0); E(0,0) \end{cases}$$



- b) Calculamos la función beneficio en cada uno de los vértices:

$$A(0,4) \rightarrow B(0,4) = 50(0) + 120(4) = 480;$$

$$B(3,3) \rightarrow B(3,3) = 50(3) + 120(3) = 150 + 360 = 510;$$

$$C(7,1) \rightarrow B(7,1) = 50(7) + 120(1) = 350 + 120 = 470;$$

$$D(8,0) \rightarrow B(8,0) = 50(8) + 120(0) = 400 = 400;$$

Se obtiene el máximo beneficio, 510 euros, si se ofrecen 3 paquetes de cada tipo.

Problema B.3:

- 3 Un nutricionista, després de fer un estudi personalitzat a un pacient, li proposa una dieta. Segons el model del nutricionista, el pes en kilograms del pacient seguirà la funció

$$f(x) = \frac{63x+510}{x+6},$$

en què x denota el nombre de mesos que fa que segueix la dieta.

- Justifiqueu que la funció f és estrictament decreixent quan $x \geq 0$. [0,75 punts]
- Determineu el pes inicial del pacient i quant pesarà al cap de dos mesos de seguir la dieta segons el model. Cap a quin valor tendirà el seu pes a llarg termini? Argumenteu si aquest valor límit s'assolirà en algun moment. [1,25 punts]

Solució:

- a) La funció peso según el número de meses viene dada por:

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6}$$

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función analizamos el signo de la derivada primera:

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6} \rightarrow f'(x) = \frac{63(x + 6) - (63x + 510)1}{(x + 6)^2} = \frac{378 - 510}{(x + 6)^2} = \frac{-132}{(x + 6)^2} < 0$$

El denominador es siempre positivo, y el numerador siempre negativo, luego la función es siempre decreciente.

- b) El peso inicial del paciente es el peso en el mes cero:

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6} \rightarrow f(0) = \frac{63(0) + 510}{0 + 6} = \frac{510}{6} = 85$$

El peso inicial del paciente es de 85 kilogramos.

Al cabo de dos meses pesará:

$$f(x) = \frac{63x + 510}{x + 6} \rightarrow f(2) = \frac{63(2) + 510}{2 + 6} = \frac{636}{8} = 79.5$$

Pesará 79.5 kilogramos.

Aunque la función sea decreciente existe un valor límite del que no se bajará de peso. Vamos a calcularlo.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{63x + 510}{x + 6} = 63$$

Nunca pesará 63 kilogramos, ni menos que 63 kilogramos, por muchos meses que haga dieta.

El peso inicial del paciente es de **85** kg, al cabo de dos meses pesará **79.5** kg. Nunca llegará a pesar **63** kg.

Problema B.4:

- 4 Per la Festa Major, la pastisseria del poble elabora unes capses de bombons especials. La capsa petita conté 10 bombons, la mitjana té 15 bombons i la gran en té 25. Cada capsa va decorada amb una llaç commemoratiu. En total han utilitzat 210 llaços i 2.650 bombons. Tenint en compte que han elaborat el doble de capses petites que de mitjanes i grans juntes, quantes capses de cada tipus han elaborat? [2 punts]

Solució:

Planteamos un sistema de ecuaciones con los datos del enunciado.

Llamamos x al número de cajas pequeñas que se elaboran, y al de medianas y z al de grandes.

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ 10x + 15y + 25z = 2650 \\ x = 2(y + z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 210 \\ 2x + 3y + 5z = 530 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Hemos dividido por 5 la segunda ecuación, y pasado las incógnitas al primer miembro en la tercera.

Para resolverlo usamos el Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 2 & 3 & 5 & 530 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 3 & 3 & 210 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 210 \\ 0 & 1 & 3 & 110 \\ 0 & 0 & 6 & 120 \end{array} \right)$$

Hemos restado a la segunda fila, la primera multiplicada por 2. Hemos restado a la primera fila, la tercera. Hemos restado a la tercera, la segunda multiplicada por 3.

Nos queda el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 210 \\ y + 3z = 110 \\ 6z = 120 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 210 \rightarrow x = 210 - 50 - 20 = 140 \\ y + 3(20) = 110 \rightarrow y = 110 - 60 = 50 \\ z = 20 \end{cases}$$

Se elaboran **140** cajas pequeñas, **50** medianas y **20** grandes.

Problema B.5:

- 5 Un comerciant pot comprar articles a 350 € la unitat. Si els ven a 750 € la unitat, en ven 30. Sabem que la relació entre aquestes dues variables (el preu de venda i el nombre d'unitats venudes) és lineal i que, per cada descompte de 20 € en el preu de venda, incrementa les vendes en 3 unitats. Considerant que el comerciant només comprarà el nombre d'articles que sap que vendrà:
- Escribiu la funció de beneficis a partir del nombre de vegades x que s'aplica el descompte. [1 punt]
 - Determineu el preu de venda que fa màxims els beneficis del comerciant i justifiqueu que és un màxim. Determineu quantes unitats vendrà. [1 punt]

Solució:

Llamamos x al número de veces que el comerciante aplica el descuento.

- a) Cada unidad vendida a 750 euros y comprada a 350 euros, gana $750 - 350 = 400$ euros. Entonces vende 30 unidades. Si hace un descuento de 20 euros en cada unidad, incrementa la venta en 3 unidades. La relación entre el precio de venta y el número de unidades es lineal: $30 + 3x$. Por tanto:

La función beneficio es:

$$f(x) = (400 - 20x)(30 + 3x) = -60x^2 + 1200x - 600x + 12000 = -60x^2 + 600x + 12000$$

- b) Debemos determinar los máximos beneficios usando la derivada primera, e igualándola a cero:

$$f'(x) = -120x + 600 = 0 \rightarrow x = \frac{600}{120} = 5$$

Para determinar si es un máximo o un mínimo, hallamos la derivada segunda:

$$f''(x) = -120 < 0$$

Es menor que cero en todos los puntos, luego es un máximo.

Determinamos con ese precio de venta cuál es el beneficio:

$$f(x) = -60x^2 + 600x + 12000 \rightarrow f(5) = -60(5)^2 + 600(5) + 12000 = 13500$$

El precio de venta es: $700 - 20(5) = 600$.

Cada mes el comerciante venderá: $30 + 3(5) = 45$ unidades.

Precio de venta: **600** euros. Venderá **45** unidades.

Problema B.6:

6. En una oficina tenen tres proveïdors que els subministren el material. La matriu P ens dona els preus unitaris, en euros, de cada un dels articles $A1$, $A2$ i $A3$, segons els proveïdor $p1$, $p2$ i $p3$.

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

Representem una comanda de x unitats de $A1$, y unitats de $A2$ i z unitats de $A3$ per un vector fila $C = (x \ y \ z)$.

- Expliqueu què representen cadascun dels elements del vector que resulta de multiplicar $C \cdot P$. [0,5 punts]
- Si hem de comprar 25 unitats de $A1$, 10 de $A2$ i 15 de $A3$, quin dels tres proveïdors ens ofereix un millor preu per tota la comanda? Quin és aquest preu? [1,5 punts]

Solución:

- a) Nos dicen que $C(x, y, z)$, y que $P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$.

$$C \cdot P = (x, y, z) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Indica los pedidos de cada artículo multiplicado por su precio, según cada uno de los proveedores.

$$b) \ C \cdot P = (x, y, z) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (25, 10, 15) \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 11 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} = (430 \quad 415 \quad 410)$$

El precio del pedido del proveedor $p1$ es de 430 euros, el de $p2$ de 415 euros y el de $p3$ de 410 euros.

El mejor precio es **410** euros, el del proveedor **p3**.

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 5

Responen a CINC de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2 punts.

Poden utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d \ m \ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = (5 \ -5 \ 5).$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

- a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem? [0,75 punts]
 - b) Si el vector codificat que ens ha arribat és $(2036 \ 1 \ -13)$, quina és la data sense codificar? [1,25 punts]
2. Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.
 - a) Escriu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet. [1 punt]
 - b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtidran amb aquest preu. [1 punt]
 3. Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció $P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2}$, en què t mesura el temps en anys des del moment actual ($t = 0$).
 - a) Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini. [1 punt]
 - b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona? [1 punt]

4. En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sorteigs junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sorteigs. [2 punts]
5. Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.
- Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. [1 punt]
 - Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(0, 3)$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt. [1 punt]
6. Un forn artesà fa dos tipus de panets, els integrals i els de cereals. En l'elaboració, a més a més de la farina corresponent, es fa servir llevat de massa mare i aigua. La quantitat de llevat de massa mare i d'aigua que s'utilitza en l'elaboració de cada panet depèn de si es tracta d'un panet integral o de cereals.

Volem saber quants panets de cada tipus es poden fer. Després de comprovar la quantitat de massa mare i d'aigua de què es disposa, i tenint en compte que la quantitat de panets de cereals no pot superar la de panets integrals, s'obté la regió següent amb totes les possibilitats.



En el gràfic, l'eix de les x representa el nombre de panets integrals, i el de les y , el nombre de panets de cereals.

- Escriuiu les inequacions que donen lloc a aquesta regió factible. [1 punt]
- Si els panets integrals es venen a 8 € cada unitat i els de cereals a 10 €, quants panets de cada tipus cal vendre per a obtenir els màxims ingressos? Quins són aquests màxims ingressos? [1 punt]



Institut
d'Estudis
Catalans

L'Institut d'Estudis Catalans ha tingut cura de la correcció lingüística i de l'edició d'aquesta prova d'accés



Problema 1.1:

1. Volem enviar una data codificada. Per a fer-ho, considerem el vector de tres components $X = (d \ m \ a)$, en el qual d expressa el dia, m el mes i a l'any. Tot seguit, fem l'operació $X \cdot A + B$, en què A i B són les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ i } B = (5 \ -5 \ 5).$$

El resultat d'aquesta operació és el vector codificat que enviem.

- a) Si la data que volem enviar és l'1 de gener de 2019, és a dir, si $X = (1 \ 1 \ 2019)$, quin és el vector codificat que enviarem? [0,75 punts]
 b) Si el vector codificat que ens ha arribat és $(2036 \ 1 \ -13)$, quina és la data sense codificar? [1,25 punts]

Solución:

- a) Debemos hacer la operación:

$$(1 \ 1 \ 2019) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \ -5 \ 5) = (2020 \ 1 \ -2) + (5 \ -5 \ 5) = (2025 \ -4 \ 3)$$

Debemos enviar **(2025 -4 3)**

- b) La situación ahora es:

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (5 \ -5 \ 5) = (2036 \ 1 \ -13) \rightarrow$$

$$(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (2031 \ 6 \ -18)$$

Podemos plantear el sistema de ecuaciones, o calcular la matriz inversa de A , que existe, ya que su determinante es distinto de cero, es 1.

$$(x \ y \ z) = (2031 \ 6 \ -18) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x \ y \ z) = (2031 \ 6 \ -18) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (12 \ 6 \ 2019)$$

La fecha que queremos transmitir es **6 de junio de 2019**.

Problema 1.2:

2. Per a la campanya d'aquest estiu, una botiga d'esports que ven patinets elèctrics espera vendre 40 patinets a un preu de 1.000 € per patinet. Segons un estudi de mercat, la relació entre el nombre de vegades que es rebaixa el preu del patinet en 50 € i el nombre de patinets venuts és lineal, i, per cada 50 € de rebaixa en el preu de venda de cada patinet, hi haurà un increment de les vendes de 10 patinets més.
- a) Escribiu la funció d'ingressos de la botiga en funció del nombre de vegades que rebaixi en 50 € el preu inicial de 1.000 € del patinet. [1 punt]
- b) Trobeu quin ha de ser el preu del patinet per tal d'obtenir els ingressos màxims. Trobeu també el nombre de patinets que es vendran i els ingressos que s'obtindran amb aquest preu. [1 punt]

Solució:

- a) Llamamos x al número de veces que se rebaja el precio del patinete. Nos dicen que según un estudio de mercado la relación es lineal entre el número de veces que se rebaja el precio y el número de patinetes vendidos. Y por cada 50 euros de rebaja en el precio se incrementan las ventas en 10 patinetes más. La función ingresos de la tienda es el número de patinetes vendidos $(40 + 10x)$ multiplicado por el precio de cada patinete $(1000 - 50x)$.

$$I(x) = (40 + 10x)(1000 - 50x)$$

- b) Para calcular los ingresos máximos, usamos la derivada de la función ingresos:

$$\begin{aligned} I(x) &= (40 + 10x)(1000 - 50x) = 40000 - 2000x + 10000x - 500x^2 \\ &= 40000 + 8000x - 500x^2 \rightarrow I'(x) = 8000 - 1000x = 0 \rightarrow x = \frac{8000}{1000} = 8. \end{aligned}$$

Para determinar si es un máximo o un mínimo calculamos la derivada segunda:

$$I''(x) = -1000 \rightarrow I''(8) = -1000 < 0$$

Es siempre menor que cero, luego es un máximo.

Precio del patinete: $1000 - 50x = 1000 - 50(8) = 600$ euros.

Se venderán **8** patinetes.

El beneficio obtenido:

$$I(x) = (40 + 10x)(1000 - 50x) \rightarrow I(8) = (40 + 10(8))(1000 - 50(8)) = (120)(600) = 72000$$

Se obtendrá un beneficio de **72 000** euros.

Problema 1.3:

3. Es preveu un canvi important en la població d'una determinada zona per qüestions mediambientals. El nombre d'habitants de la zona, en milions, vindrà donat per la funció
- $$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2},$$
- en què t mesura el temps en anys des del moment actual ($t = 0$).
- a) Digueu quin és el nombre d'habitants de la zona actualment i quin serà aquest nombre a molt llarg termini. [1 punt]
- b) En quin moment s'arribarà al nombre mínim d'habitants? Quants habitants hi haurà en aquell moment? Quin és el nombre màxim d'habitants que s'assoleix en aquesta zona? [1 punt]

Solución:

- a) El número de habitantes viene dado por la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2}$$

En el momento actual, $t = 0$, luego:

$$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2} \rightarrow P(0) = \frac{(0)^2 + 28}{((0) + 2)^2} = \frac{28}{4} = 7$$

Actualmente hay **7 millones** de habitantes.

Calculamos ahora el límite cuando el tiempo tiende a infinito.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

La población tenderá al millón de habitantes.

- b) Para calcular máximos y mínimos usamos la derivada primera:

$$P(t) = \frac{t^2 + 28}{(t + 2)^2} \rightarrow P'(t) = \frac{2t(t + 2)^2 - (t^2 + 28)2(t + 2)}{(t + 2)^4} = \frac{2t(t + 2) - 2(t^2 + 28)}{(t + 2)^3} = \frac{4(t - 14)}{(t + 2)^3}$$

$$= 0 \rightarrow t = 14$$

Si $t > -2$ el denominador es positivo. Si $t > 14$ la derivada primera es positiva, y si menor, es negativa, por lo que la función pasa en 14 de decreciente a creciente, luego en 14 hay un mínimo.

La población irá decreciendo hasta dentro de 14 años, cuando habrá $P(14) = \frac{(14)^2 + 28}{(14 + 2)^2} = 0.875$.

Dentro de **14 años** habrá **875 000** habitantes.

Para determinar el máximo, sólo puede estar en los extremos del intervalo. Ya hemos visto que en $+\infty$ vale 1 millón de habitantes, y que en el instante inicial vale 7 millones, luego es ahora cuando tiene el mayor número de habitantes.

El número máximo de habitantes es de 7 millones y se alcanza en el momento actual.

Problema 1.4:

4. En tres sortejos consecutius de la Lotto 6/49 hi ha hagut 51 persones que han encertat els 6 números de la combinació guanyadora en algun dels tres sortejos. El nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el tercer sorteig és la meitat del total de persones que la van encertar en els dos primers sortejos junts. També sabem que el nombre de persones que van encertar la combinació guanyadora en el primer sorteig supera en 11 el total de persones que van encertar-la en el segon i en el tercer sortejos junts. Amb aquestes dades, calculeu quantes persones van encertar la combinació guanyadora de la Lotto 6/49 en cada un dels tres sortejos. [2 punts]

Solució:

Llamamos x al número de personas que han acertado la combinación ganadora en el primer sorteo, y al que lo han acertado en el segundo, y z al número de personas acertantes en el tercer sorteo.

Escribimos en forma de ecuaciones lo que nos dice el enunciado:

$$\begin{cases} x + y + z = 51 \\ 2z = x + y \\ x = 11 + y + z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 51 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = 11 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \\ 0 & 2 & 2 & 40 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51 \\ 0 & 2 & 2 & 40 \\ 0 & 0 & 3 & 51 \end{array}\right)$$

Hemos restado a la primera fila, la segunda. Hemos restado a la primera fila, la tercera. Intercambiamos la segunda fila con la tercera.

Y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 51 \\ 2y + 2z = 40 \\ 3z = 51 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 51 \\ y + z = 20 \\ z = 17 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 3 + 17 = 51 \rightarrow x = 31 \\ y + 17 = 20 \rightarrow y = 3 \\ z = 17 \end{cases}$$

En el primer sorteo han acertado **31** personas, **3** en el segundo, y **17** en el tercero.

Problema 1.5:

5. Considereu una funció $f(x)$ que té com a primera derivada $f'(x) = 2x^2 + bx + 4$, en què b és un paràmetre real.
- a) Determineu el valor de b perquè $f(x)$ tingui un extrem relatiu en $x = -1$ i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim. [1 punt]
- b) Si sabem que la gràfica de la funció $f(x)$ passa pel punt $(0, 3)$, trobeu l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en aquest punt. [1 punt]

Solució:

a) Sabemos que:

$$f'(x) = 2x^2 + bx + 4$$

Nos dicen que en $x = -1$ hay un extremo relativo, luego en dicho punto se debe anular la derivada primera:

$$f'(-1) = 2(-1)^2 + b(-1) + 4 = 2 - b + 4 = 6 - b = 0 \rightarrow b = 6$$

Por lo que b debe ser igual a 6.

$$b = 6$$

Para saber si se trata de un máximo o un mínimo, hallamos la derivada segunda:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 \rightarrow f''(x) = 4x + 6 \rightarrow f''(-1) = 4(-1) + 6 = 2 > 0$$

Como es mayor que cero, el extremo relativo es un mínimo.

En $x = -1$ hay un mínimo.

- b) Para calcular la ecuación de la recta tangente conocemos un punto $(0, 3)$, y debemos calcular la pendiente. Sabemos que $f'(x) = 2x^2 + 6x + 4$, luego la pendiente en $(0, 3)$ es:

$$f'(x) = 2x^2 + 6x + 4 \rightarrow f'(0) = 4.$$

La ecuación de la recta tangente es:

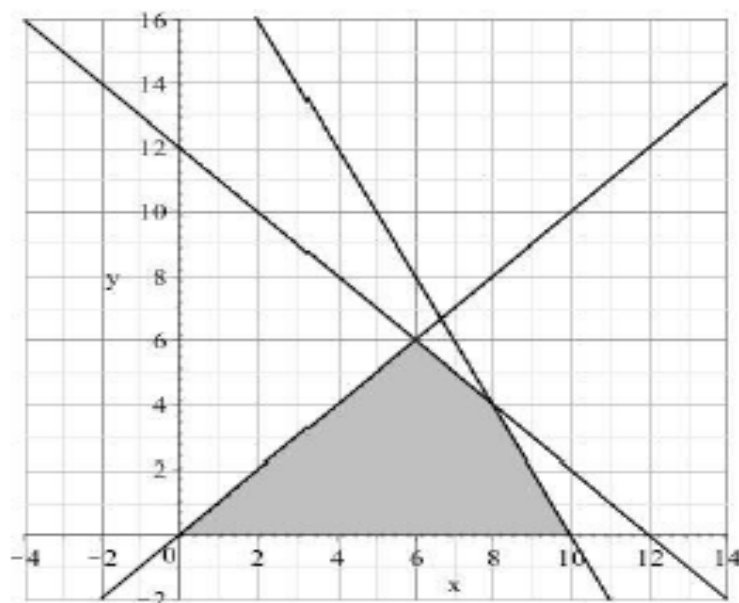
$$y - 3 = 4(x - 0) \rightarrow y = 3 + 4x$$

Recta tangente: $y = 3 + 4x$

Problema 1.6:

6. Un forn artesà fa dos tipus de panets, els integrals i els de cereals. En l'elaboració, a més a més de la farina corresponent, es fa servir llevat de massa mare i aigua. La quantitat de llevat de massa mare i d'aigua que s'utilitza en l'elaboració de cada panet depèn de si es tracta d'un panet integral o de cereals.

Volem saber quants panets de cada tipus es poden fer. Després de comprovar la quantitat de massa mare i d'aigua de què es disposa, i tenint en compte que la quantitat de panets de cereals no pot superar la de panets integrals, s'obté la regió següent amb totes les possibilitats.



En el gràfic, l'eix de les x representa el nombre de panets integrals, i el de les y , el nombre de panets de cereals.

- Escriu les inequacions que donen lloc a aquesta regió factible. [1 punt]
- Si els panets integrals es venen a 8 € cada unitat i els de cereals a 10 €, quants panets de cada tipus cal vendre per a obtenir els màxims ingressos? Quins són aquests màxims ingressos? [1 punt]

Solució:

- a) Nos dicen que x es el número de panes integrales e y el de panes de cereales.

Además de los ejes coordenados tenemos tres rectas.

Una pasa por el origen de coordenadas $(0, 0)$ y por $(6, 6)$, luego es la recta $y = x$.

Otra pasa por el punto $(0, 12)$ y por $(12, 0)$, luego es: $y = 12 + mx \rightarrow y = 12 - x$.

La tercera pasa por el punto $(10, 0)$, por $(8, 4)$, por $(6, 8)$...:

$$y = b + mx \rightarrow 0 = b + 10m \rightarrow 4 = b + 8m$$

$$\text{Restando: } -4 = 2m \rightarrow m = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow b = -10m = 20 \rightarrow y = 20 - 2x.$$

Ahora sólo nos queda determinar el signo de las regiones:

Las ecuaciones de la región factible son:

$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0; y \leq x \\ y \leq 12 - x \\ y \leq 20 - 2x \end{cases}$$

b) Escribimos la función objetivo. Los ingresos obtenidos son:

$$I(x, y) = 8x + 10y$$

Los vértices de la región factible, según la gráfica, son: $A(0, 0)$; $B(6, 6)$; $C(8, 4)$; $D(10, 0)$. Calculamos la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$A(0, 0): I(0, 0) = 8(0) + 10(0) = 0$$

$$B(6, 6): I(6, 6) = 8(6) + 10(6) = 48 + 60 = 108$$

$$C(8, 4): I(8, 4) = 8(8) + 10(4) = 64 + 40 = 104$$

$$D(10, 0): I(10, 0) = 8(10) + 10(0) = 80$$

Los máximos ingresos se obtienen vendiendo **6** panes integrales y **6** panes de cereales.