Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

MADRID

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz $A - 2B$ sea nulo.
b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 3)$.
b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\bigcup$) y convexidad ($\bigcap$) de esta función.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0'6$, $P(B) = 0'8$ y $P(A \cap \overline{B}) = 0'1$.
a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso B.
b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.
a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2 % para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real m:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ x+my-z & = & 0 \\ x-y-mz & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Determínense los valores del parámetro real m para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $x = y = z = 0$.
b) Resuélvase el sistema para $m = 1$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{8}{x^2+4}$$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.
b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)

La función real de variable real, $f(x)$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de k.
b) Considerando $k = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0'60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0'30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0'15. Seleccionado un niño al azar de esta región,

a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar.
b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kilogramos y desviación típica $\sigma = 1'5$ kilogramos.
a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95 %. La amplitud de este intervalo resultó ser 0'49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra.
b) Supóngase que $\mu = 6$ kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5'75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A.1:

Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz A - $2B$ sea nulo.

b) Determínese si las matrices C y $(C^t \cdot C)$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Solución

a) Se cumple que:

$$A-2\,B=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A-2\,B|=\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\,k-4-24-1=2\,k-29=0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{k=\frac{29}{2}}$$

b) $\boldsymbol{C}$ no es invertible al no ser cuadrada.

$$C^t \cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ con: } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0 \text{ por lo que:}$$

$\boldsymbol{C^t \cdot C}$ es invertible.

Tenemos que:

$$(C^t \cdot C)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(C^t \cdot C)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

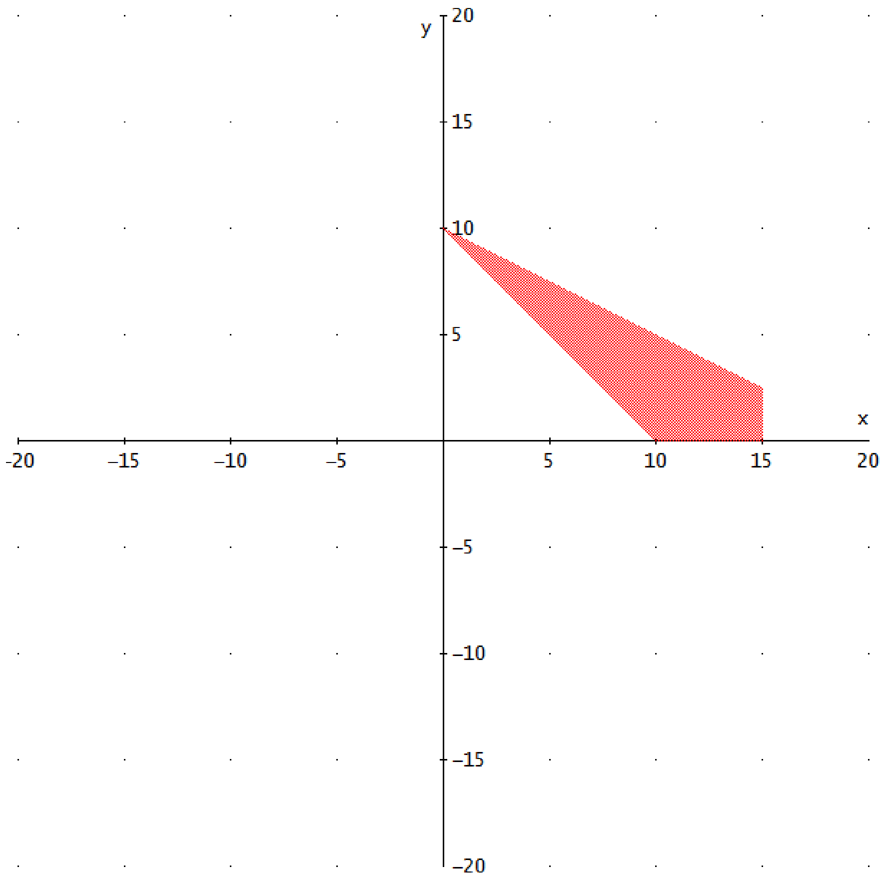
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.

a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.

b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Solución

a) Si llamamos x_1 a la cantidad de helado que prepara y x_2 a la cantidad de horchata, las restricciones son $0 \leq x_1 \leq 15$, $x_1 + x_2 \geq 10$, $x_1 + 2\,x_2 \leq 20$, $x_2 \geq 0$. Representación:



El beneficio es $b(x_1, x_2) = 25\,x_1 + 12\,x_2$. Como el problema es lineal, el máximo se alcanza en uno de los vértices. Se cumple que $b(0,10) = 12 \times 10 = 120$, $b(10,0) = 25 \times 10 = 250$, $b(15,0) = 25 \times 15 = 375$. El otro vértice es el punto de corte entre $x_1 = 15$, $x_1 + 2\,x_2 = 20 \Rightarrow 15 + 2\,x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}$, con $b\left(15, \frac{5}{2}\right) = 25 \times 15 + 12 \times \frac{5}{2} = 405$ €.

Beneficio máximo de **405** euros que tiene que preparar con **15** litros de helado y **2.5** litros de horchata.

Problema A.3:

La derivada de una función real de variable real, $f(x)$, viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{f'(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6}$$

a) Obténgase la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 3).

b) Determínense los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad (⋃) y convexidad (⋂) de esta función.

Solución

a) Se cumple que:

$f(x) = \int (2\,x^2 - 4\,x - 6)\;dx = 2\,\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 - 6\,x + C \Rightarrow f(0) = 2\,\frac{0^3}{3} - 2\,0^2 - 0 + C = C = 3$, por lo que

$$\boldsymbol{f(x) = 2\,\frac{x^3}{3} - 2\,x^2 - 6\,x + 3}$$

b) Tenemos que $f'(x) = 2\,x^2 - 4\,x - 6 = 2\,(x^2 - 2\,x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{16}}{2} = 3, -1$, con $f'(x) = 2\,(x^2 - 2\,x - 3) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$, por lo que f es estrictamente creciente si $x < -1$, f es estrictamente decreciente si $-1 < x < 3$, que f es estrictamente creciente si $x > 3$ y entonces:

$\boldsymbol{f}$ tiene un máximo relativo en $\boldsymbol{-1}$ y un mínimo relativo en $\boldsymbol{3}$.

Se cumple que $f''(x) = 4\,x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, con $f''(x) = 4\,(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x < 1$, por lo que

$\boldsymbol{f}$ es convexa si $\boldsymbol{x < 1}$ y $\boldsymbol{f}$ es cóncava si $\boldsymbol{x > 1}$

Problema A.4:

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A)$ = 0.6, $P(B)$ = 0.8 y $P(A \cap \bar{B})$) = 0.1.

a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso A si no ha ocurrido el suceso B y determínese si los sucesos A y B son independientes. $\bar{B}$ denota el complementario del suceso B.

b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o B.

Solución

a) Se cumple que $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.1}{1-0.8} = \frac{1}{2}$.

Por otro lado,

$0.6 = P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5 \neq P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48$,

luego A y B no son independientes.

La probabilidad de que ocurra el suceso $\boldsymbol{A}$ si no ha ocurrido el suceso $\boldsymbol{B}$ es $\boldsymbol{P(A/\bar{B}) = \frac{1}{2}}$. $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no son independientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$

La probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, A o $\boldsymbol{B}$, es $\boldsymbol{P(A \cup B) = 0.9}$

Problema A.5:

El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media $\boldsymbol{\mu}$ euros y varianza 49 euros^2.

a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99.2 % para estimar el precio medio mensual, $\boldsymbol{\mu}$, de las clases de Pilates.

b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Solución:

a) Se cumple que $X = precio$ sigue una $N(\mu, 49)$, por lo que $Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{64}\sum_{i=1}^{64} X_i - \mu}{\frac{7}{8}} \sim N(0,1)$

Tenemos que $P(-z \le Y \le z) = P(Y \le z) - P(Y \le -z) = P(Y \le z) - P(Y \ge z) = P(Y \le z) - \big(1 - P(Y \le z)\big) = 2\,P(Y \le z) - 1 = 0.992 \Rightarrow P(Y \le z) = \frac{1.992}{2} = 0.996.$

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 2.65$, por lo que el intervalo es:

$$\left[34 - 2.65\,\frac{7}{8},\ 34 + 2.65\frac{7}{8}\right] = [31.6813,\ 36.3188].$$

El intervalo de confianza es de $[\mathbf{31.6813},\ \mathbf{36.3188}]$

b) Como $2\,P(Y \le z) - 1 = 0.95 \Rightarrow P(Y \le z) = \frac{1.95}{2} = 0.975.$

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 1.96$, por lo que el radio del intervalo es:

$1.96\frac{7}{\sqrt{n}} \le 3 \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{13.72}{3} = 4.57 \Rightarrow n \ge (4.57)^2 = 20.88 \Rightarrow n = 21$ al ser n natural.

El tamaño muestral mínimo es $\boldsymbol{n} = \mathbf{21}$

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente de un parámetro real $\boldsymbol{m}$:

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{-x+y+z=0}\\ \boldsymbol{x+m\,y-z=0}\\ \boldsymbol{x-y-m\,z=0}\end{array}\right\}$$

a) Determínense los valores del parámetro real $\boldsymbol{m}$ para que el sistema tenga soluciones diferentes a la solución trivial $\boldsymbol{x=y=}$ z = 0.

b) Resuélvase el sistema para $\boldsymbol{m}$ = 1.

Solución

a) Para que tenga infinitas soluciones ha de ser:

$$\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & -1 & -m\end{vmatrix} = m^2+1-1-m-1+m = m^2-1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

El sistema tiene soluciones distintas de la trivial, si $\boldsymbol{m=\pm 1}$

b) Para $\boldsymbol{m}$ = 1, el sistema queda $\left.\begin{array}{r}-x+y+z=0\\ x+y-z=0\\ x-y-z=0\end{array}\right\}$.

Sobra la tercera ecuación, ya que es igual a la primera.

Sumando las dos primeras, queda $2\,y=0 \Rightarrow y=0$.

Sustituyendo en la primera, $-x+0+z=0 \Rightarrow z=x$.

Luego las soluciones son:

$(\boldsymbol{x},\ \mathbf{0},\ \boldsymbol{x}),\ x\in\mathbb{R}$

Problema B.2:

Se considera la función real de variable real: $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{x^2+4}}$

a) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $\boldsymbol{f(x)}$ y obténganse sus asíntotas verticales y horizontales, si las tuviese.

b) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $\boldsymbol{x}$ = 2.

Solución:

a) Se cumple que $f'(x) = \frac{\acute{}-16\,x}{(x^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, con:

$f'(x) = \frac{\acute{}-16\,x}{(x^2+4)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$ y $f'(x) = \frac{\acute{}-16\,x}{(x^2+4)^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0$ (ya que el denominador es siempre positivo).

Por tanto

$\boldsymbol{f}$ es estrictamente **creciente** si $\boldsymbol{x < 0}$, y $\boldsymbol{f}$ es estrictamente **decreciente** si $\boldsymbol{x > 0}$**.**

Como f es continua (cociente de funciones continuas: funciones polinómicas, no se anula el denominador), no tiene asíntotas verticales.

Se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{8}{x^2+4} = \frac{8}{\infty} = 0$, luego

$\boldsymbol{y = 0}$ **es asíntota vertical**.

b) Se cumple que $f(2) = \frac{8}{2^2+4} = 1$, $f'(2) = \frac{\acute{}-32}{(2^2+4)^2} = -\frac{1}{2}$, luego la recta pedida es $y = 1 - \frac{1}{2}\,(x-2)$

La recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $\boldsymbol{x}$ = 2 es $\boldsymbol{y = 1 - \frac{1}{2}\,(x-2)}$

Problema B.3:

La función real de variable real, $\boldsymbol{f(x)}$, se define según la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + k \; si \; x \leq 0 \\ 1 - x^2 \; si \; 0 < x \leq 3 \\ \dfrac{1}{x-3} \; si \; x > 3 \end{cases}$$

a) Analícese la continuidad de la función en todo su dominio según los valores de $\boldsymbol{k}$.

b) Considerando $\boldsymbol{k} = 0$, obténgase el área del recinto acotado delimitado por la función $\boldsymbol{f(x)}$, el eje de abscisas y las rectas $\boldsymbol{x} = -\mathbf{1}$ y $\boldsymbol{x} = 1$.

Solución:

a) Se cumple que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x + k) = e^0 + k = 1 + k,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1 - x^2) = 1 - 0^2 = 1,$$

por lo que f es continua en 0 si y sólo si: $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 + k = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Leftrightarrow k = 0$

Se cumple que

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{3-3} = \infty,$$

por lo que f no es continua en 3.

En los demás puntos f es continua al estar compuesta de exponenciales y funciones polinómicas, continuas, y no anularse el denominador.

La función **no** es continua en $\boldsymbol{x} = 3$, ni en $x = \mathbf{0}$ para $\boldsymbol{k}$ distinto de cero.

b) Se cumple que:

$$A = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} e^x\,dx + \int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = [e^x]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1 - e^{-1} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} - \frac{1}{e} = \frac{5\,e - 3}{3\,e}$$

$$A = \frac{5\,e - 3}{3\,e}\ \mathrm{u}^2$$

Problema B.4:

De un estudio realizado en una región, se deduce que la probabilidad de que un niño de primaria juegue con consolas de videojuegos más tiempo del recomendado por los especialistas es 0.60. Entre estos niños, la probabilidad de fracaso escolar se eleva a 0.30 mientras que, si no juegan más tiempo del recomendado, la probabilidad de fracaso escolar es 0.15. Seleccionado un niño al azar de esta región, a) Obténgase la probabilidad de que tenga fracaso escolar. b) Si tiene fracaso escolar, determínese cuál es la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado.

Solución

a) Se cumple que:

$$P(\{fracaso\}) = P(\{fracaso\} \cap \{juega\ más\ tiempo\}) + P(\{fracaso\} \cap \{no\ juega\ más\ tiempo\}) =$$

$$P(\{fracaso\}/\{juega\ más\ tiempo\}) \cdot P(\{juega\ más\ tiempo\}) + P(\{fracaso\}/\{no\ juega\ más\ tiempo\}) \cdot P(\{no\ juega\ más\ tiempo\})$$

$$= 0.3 \cdot 0.6 + 0.15 \cdot 0.4 = 0.18 + 0.6 = 0.78.$$

La probabilidad de que tenga fracaso escolar es de 0.78.

b) Se cumple que:

$$P(\{no\ juega\ más\ tiempo\}/\{fracaso\}) = \frac{P(\{fracaso\} \cap \{no\ juega\ más\ tiempo\})}{P(\{fracaso\})}$$

$$= \frac{P(\{fracaso\}/\{no\ juega\ más\ tiempo\})\, P(\{no\ juega\ más\ tiempo\})}{P(\{fracaso\})}$$

$$= \frac{0.15 \cdot 0.4}{0.78} = \frac{0.06}{0.78} = \frac{6}{780} = \frac{1}{130}.$$

Si tiene fracaso escolar, la probabilidad de que no juegue con estas consolas más tiempo del recomendado es de $\mathbf{\frac{1}{130} = 0.00769}$, menor de un 1 por ciento.

Problema B.5:

El peso de las mochilas escolares de los niños de 5º y 6º de primaria, medido en kilogramos, puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media µ kilogramos y desviación típica σ = 105 kilogramos. a) En un estudio se tomó una muestra aleatoria simple de dichas mochilas escolares y se estimó el peso medio utilizando un intervalo de confianza del 95%. La amplitud de este intervalo resultó ser 0.49 kilogramos. Obténgase el número de mochilas seleccionadas en la muestra. b) Supóngase que µ = 6 kilogramos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 225 mochilas escolares, calcúlese la probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5.75 kilogramos, que es la cantidad máxima recomendada para los escolares de estos cursos.

Solución

a) Como $2\,P(Y \leq z) - 1 = 0.95 \Rightarrow P(Y \leq z) = \frac{1.95}{2} = 0.975$.

Mirando en la tabla, obtenemos $z = 1.96$, por lo que el radio del intervalo es: $1.96\frac{105}{\sqrt{n}} = 0.49 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96\ 105}{0.49} = 420 \Rightarrow n = 420^2 = 176\,400$ mochilas.

El número de mochilas seleccionadas en la muestra es de $\mathbf{176\,400}$ mochilas

b) Se cumple que $X = peso$ sigue una $N(6,\ 105^2)$, por lo que $Y = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i - 6}{\frac{105}{15}} = \frac{\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i - 6}{7} \sim N(0,1)$

Tenemos que

$$P\left(\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i > 5.75\right) = P\left(\frac{\frac{1}{225}\sum_{i=1}^{225} X_i - 6}{7} > \frac{5.75-6}{7} = -0.035\right) = P(Y < 0.035) \approx 0.512.$$

La probabilidad de que el peso medio muestral supere los 5.75 kilogramos es de $\mathbf{0.512}$.

uc3m Universidad Carlos III de Madrid	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2018-2019** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las características siguientes: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, almacenamiento de datos alfanuméricos, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.
a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.
b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 - 9} & \text{si} \quad x < 3, \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.
b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio
a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.
a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.
b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

OPCIÓN B

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.
b) Calcúlese B^{-1}.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos con $P(A) = 0'3$, $P(B \mid A) = 0'4$, $P(B \mid \overline{A}) = 0'6$. Calcúlese:

a) $P(A \mid B)$
b) $P(\overline{A} \mid \overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.

a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es $P = 0'22$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

SOLUCIONES OPCIÓN A

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene matriz inversa.
b) Para $a = 3$, calcúlese la matriz inversa de A y resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Solución

a) Se cumple que $|A| = \begin{vmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 4 - 2\,a - 4 = a^2 - 2\,a = a\,(a-2) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 2$

Luego, $\boldsymbol{A}$ no tiene inversa $\Leftrightarrow \boldsymbol{a = 0, a = 2}$

b) Si $a = 3$, $|A| = 3\,(3-2) = 3$, con $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$, por lo que $adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Entonces la solución es $X = A^{-1}\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} \end{pmatrix}$$

Problema A.2:

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x) = 2x^3 - 8x$.
a) Determínese en qué puntos la tangente a la curva $y = f(x)$ es horizontal.
b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución

a) Por ser la tangente horizontal se cumple que se anula la derivada:

$$f'(x) = 6\,x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \; x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}},$$

luego los puntos pedidos son: $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{-32}{3\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{32}{3\sqrt{3}}\right)$$

b) Se cumple que la función corta al eje de abscisas si:

$$f(x) = 2\,x^3 - 8\,x = x\,(2\,x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 2.$$

Como $f(1) = 2 - 8 = -6 < 0$, tenemos que $f(x) \leq 0$ si $x \in [0, 2]$, por lo que el área pedida es:

$$A = \int_0^2 -(2\,x^3 - 8\,x)\,dx = \left[-2\frac{x^4}{4} + 8\,\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -8 + 16 = 8.$$

$$\boldsymbol{A = \; 8\ \mathrm{u}^2}$$

Problema A.3:

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2-9} & \text{si} \quad x < 3, \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 3. \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de f.
b) Determínese si f tiene asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Solución

a) Estudio de la continuidad:

Si $x > 3$, f es continua (función polinómica).

Si $x < -3$, f es continua al ser cociente de polinomios, salvo si se anula el denominador:

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3.$$

Estudiamos el límite en el punto de unión de las ramas.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x^3}{x^2-9} = \frac{3^3}{3^2-9} = \frac{27}{-0} = -\infty$, luego f no es continua en 3.

f no es continua en 3.

b) Como $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ (apartado a), $x = 3$ es asíntota vertical.

Como en – 3 se anula el denominador y no el numerador, $x = -3$ es asíntota vertical

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$, f no tiene asíntota horizontal.

Como $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2-4}{x} = +\infty$, f no tiene asíntota oblicua en $+\infty$.

Tenemos que:

$m = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-9}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^3-9\,x} = \frac{1}{1} = 1$,

$n = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - m\,x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-9} - x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9\,x}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9}{x} = 0$, luego:

$y = x$ es asíntota oblicua en $-\infty$.

Asíntotas verticales: $\boldsymbol{x = 3}$ y $\boldsymbol{x = -3}$.

No tiene asíntota horizontal.

Tiene asíntota oblicua en $-\infty$: $\boldsymbol{y = x}$

Problema A.4:

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Los escolares de un cierto colegio de Madrid fueron encuestados acerca de su alimentación y de su ejercicio físico. Una proporción de 2/5 hacían ejercicio regularmente y 2/3 siempre desayunaban. Además, entre los que siempre desayunan, una proporción de 9/25 hacían ejercicio regularmente. Se elige al azar un escolar de ese colegio

a) ¿Es independiente que siempre desayune y que haga ejercicio regularmente?
b) Calcúlese la probabilidad de que no siempre desayune y no haga ejercicio regularmente.

Solución:

Como $P(\{hacer\ ejercicio\}/\{desayunar\}) = \frac{9}{25} \neq P(\{hacer\ ejercicio\}) = \frac{2}{5}$.

No es independiente que desayune con que haga ejercicio.

b) Se cumple que:

$P(\{no\ hacer\ ejercicio\} \cap \{no\ desayunar\}) = P((\{hacer\ ejercicio\} \cup \{desayunar\})^c) = 1 - P(\{hacer\ ejercicio\} \cup \{desayunar\}) = 1 - \big(P(\{hacer\ ejercicio\}) + P(\{desayunar\}) - P(\{hacer\ ejercicio\} \cap \{desayunar\})\big) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - P(\{hacer\ ejercicio\} \cap \{desayunar\})\right)$

Tenemos que:

$$P(\{hacer\ ejercicio\} \cap \{desayunar\}) =$$
$$= P(\{hacer\ ejercicio\}/\{desayunar\})\ P(\{desayunar\}) = \frac{9}{25}\frac{2}{3} = \frac{6}{25},$$

por lo que

$P(\{no\ hacer\ ejercicio\} \cap \{no\ desayunar\}) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{6}{25}\right) = 1 - \frac{62}{75} = \frac{13}{75}.$

$$\boldsymbol{P(\{no\ hacer\ ejercicio\} \cap \{no\ desayunar\}) = \frac{13}{75}}$$

Problema A.5:

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una máquina rellena paquetes de harina. El peso de la harina en cada paquete se puede aproximar por una distribución normal de media μ y desviación típica 25 gramos.

a) Se analiza el peso del contenido de 15 paquetes. La media muestral de estos pesos resulta ser 560 gramos. Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para la media poblacional.
b) Se sabe que la media poblacional del peso de la harina de un paquete es 560 gramos. Calcúlese la probabilidad de que la media muestral no sea menor que 565 gramos para una muestra de 50 paquetes.

Solución:

a) Tenemos que $n = 15$, $\sigma = 25$. El intervalo de confianza de la media poblacional μ es:

$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ cumple que:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(1 - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right)$$

$$= 2\,P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1+\frac{19}{20}}{2} = \frac{39}{40} = 0.975,$$

siendo $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Mirando en la tabla, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

La media muestral es $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{25} = 560$, por lo que el intervalo pedido es:

$\left[560 - 1.96\,\frac{25}{\sqrt{15}},\ 560 + 1.96\,\frac{25}{\sqrt{15}}\right] \approx [547.35, 572.65]$.

El intervalo pedido es aproximadamente: $[\mathbf{547.35},\ \mathbf{572.65}]$.

b) Tenemos que $n = 50$, $\sigma = 25$, $\mu = 560$. Entonces:

$$P(\bar{X} \ge 565) = P\left(\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \ge \frac{565-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} = \sqrt{2}\right) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \le \sqrt{2} \approx 1.41\right),$$

siendo $\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \sim N(0,1)$. Mirando en la tabla, tenemos que:

$$P(\bar{X} \ge 565) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}-560}{\frac{25}{\sqrt{50}}} \le 1.41\right) = 1 - 0.9207 = 0.0793$$

$$\boldsymbol{P(\bar{X} \ge 565) = 0.0793}$$

SOLUCIONES OPCIÓN B

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho. Cada metro del ancho del estanque cuesta 1000 euros y cada metro de largo 500 euros. Y se cuenta con un presupuesto de 9000 euros.

a) Determínese la región del plano delimitada por las restricciones anteriores sobre las dimensiones del estanque.
b) Si se desea que el estanque respetando esas características tenga el mayor ancho posible, determínense el largo del estanque y su coste.

Solución:

a) Si llamamos x al número de metros de largo, y al número de metros de ancho, se cumple que $x \geq 5$, $y \geq 2$, $3\,y \geq x \geq 2\,y$ y como el coste total es $500\,x + 1000\,y$ y el presupuesto 9000, ha de ser:

$500\,x + 1000\,y \leq 9000 \Leftrightarrow x + 2\,y \leq 18$, luego la región es:

$$R = \{(x, y)/x \geq 5, y \geq 2{,}3\,y \geq x \geq 2\,y, x + 2\,y \leq 18\}.$$

Representación:

b) Hay que hallar el mínimo de y en R. Como y es lineal y las restricciones también, el máximo se alcanzará en algún vértice de R. Por el dibujo vemos que los vértices son

$$(5, 2),$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 5 \\ x = 2\,y \end{array}\right\} \Rightarrow 5 = 2\,y \Rightarrow y = \tfrac{5}{2}: \left(5, \tfrac{5}{2}\right),$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 2 \\ y = \frac{x}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 6: (6, 2),$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 2\,y \\ x + 2\,y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\,y + 2\,y = 18 \Rightarrow y = \tfrac{18}{4} = \tfrac{9}{2}, x == 2\,\tfrac{9}{2} = 9: \left(9, \tfrac{9}{2}\right),$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 3\,y \\ x + 2\,y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\,y + 2\,y = 5\,y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5}, x = 2\,\frac{18}{5} = \frac{36}{5}: \left(\frac{36}{5}, \frac{18}{5}\right).$$

La máxima coordenada y de estos vértices es $\frac{9}{2}$ (se ve también en el dibujo), luego el mayor ancho es $\frac{9}{2}$, siendo el largo $x = 9$ y el coste $500\,x + 1000\,y = 9000$ (ya que el vértice que maximiza está en esta recta).

El ancho debe ser de $\mathbf{4.5}$ m, el largo de $\mathbf{9}$ m, y el coste de $\mathbf{9\,000}$ euros.

Problema B.2:

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

y la matriz B es tal que

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

a) Calcúlese A^{-1}.
b) Calcúlese B^{-1}.

Solución:

a) Se cumple que $|A|=\begin{vmatrix}2 & 8 & 10\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 6\end{vmatrix}=12+64+60-40-12-96=-12$, con $A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=0$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-4$, $A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=6-4=2$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}8 & 10\\ 3 & 6\end{vmatrix}=-18$, $A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 10\\ 4 & 6\end{vmatrix}=12-40=-28$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\end{vmatrix}=26$, $A_{31}=\begin{vmatrix}8 & 10\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 10\\ 2 & 2\end{vmatrix}=16$, $A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 8\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-14$, por lo que $adj(A)=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ -18 & -28 & 26\\ 6 & 16 & -14\end{pmatrix}$ y:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)^t=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}0 & -18 & 6\\ -4 & -28 & 16\\ 2 & 26 & -14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}}$$

b) Se cumple que

$$(A\,B)^{-1}=B^{-1}\,A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 11 & 16 \end{pmatrix}$$

Problema B.3:

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
a) Determínense los puntos de corte con los ejes de coordenadas así como los límites de la función cuando x tiende a infinito y a menos infinito.
b) Determínense los valores de x en los que la pendiente de la recta tangente a la función es igual a 3.

Solución:

a) Se cumple que $f(1) = 1^3 + 1^2 - 5 + 3 = 0$, luego $(1, 0)$ es un punto de corte con el eje X. Probando por Ruffini, vemos que f se factoriza como $f(x) = (x-1)(x^2 + 2x - 3)$, luego las otras raíces son $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1, -3$, por lo que el otro punto de corte es $(-3, 0)$.

Si $x = 0$, entonces $y = 3$, luego otro punto de corte es $(0, 3)$.

Puntos de corte: $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$, $(-\mathbf{3}, \mathbf{0})$ y **(0, 3)**

Se cumple que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$,

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 - 5x + 3) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

b) La pendiente de la recta tangente viene dada por la derivada de la función, $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ como deseamos que sea igual a 3, $3x^2 + 2x - 5 = 3 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+96}}{6} = \frac{-2 \pm 10}{6} = -2 \; y \; \frac{4}{3}$, obtenemos: $x = -2$ y $x = 4/3$.

Los valores de ***x*** para que la pendiente de la recta tangente sea igual a 3, son ***x = –2*** y ***x = 4/3***.

Problema B.4:

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos con $P(A)=0'3$, $P(B/A)=0'4$, $P(B/\overline{A})=0'6$. Calcúlese:

a) $P(A/B)$

b) $P(\overline{A}/\overline{B})$

Nota: $\overline{S}$ denota al suceso complementario del suceso S.

Solución:

a) Se cumple que $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. Tenemos que:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B\cap A)}{0.3}=0.4\Rightarrow P(A\cap B)=0.3\cdot 0.4=0.12,$$

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{P(B\cap\bar{A})}{0.7}=0.6\Rightarrow P(B\cap\bar{A})=0.7\cdot 0.6=0.42,$$ por lo que:

$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\bar{A})=0.12+0.42=0.54$ y $P(A/B)=\frac{0.12}{0.54}=\frac{12}{54}=\frac{2}{9}$

$$\boldsymbol{P(A/B)=\frac{2}{9}}$$

b) Se cumple que:

$$P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-0.54}=\frac{1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)}{0.46}=\frac{1-(0.3+0.54-0.12)}{0.46}=\frac{0.28}{0.46}=\frac{28}{46}=\frac{14}{23}$$

$$\boldsymbol{P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{14}{23}}$$

Problema B.5:

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Para estudiar el absentismo laboral injustificado, se desea estimar la proporción de trabajadores, P, que no acuden a su puesto de trabajo sin justificación al menos un día al año.
a) Sabiendo que la proporción poblacional de absentismo laboral injustificado es P = 0'22, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de trabajadores para garantizar que, con una confianza del 99 %, el margen de error en la estimación no supera el 4 %.
b) Tomada al azar una muestra de 1000 trabajadores, se encontró que 250 había faltado injustificadamente a su puesto de trabajo al menos una vez al año. Determínese un intervalo de confianza al 95% para la proporción de individuos que se ausentan en el trabajo al menos una vez al año sin ninguna justificación.

Solución:

a) El absentismo sigue una binomial con $p = 0.22$ (probabilidad de absentismo), por lo que:

$\sigma = \sqrt{p\,(1-p)} = \sqrt{0.22 \times 0.78}$. Si aproximamos por una $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se cumple que la media muestral $\bar{X}$ sigue una $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, siendo el intervalo de confianza de la media teórica μ:

$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ cumple que:

$$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \ge z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(1 - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right)$$

$$= 2\,P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = \frac{99}{100} \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1+\frac{99}{100}}{2} = \frac{199}{200} = 0.995, \text{ siendo } \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1).$$

Mirando en la tabla, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.575$.

Entonces el error es como mucho el radio del intervalo: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 2.575 \frac{\sqrt{0.22\ 0.78}}{\sqrt{n}}$, y entonces: $2.575 \frac{\sqrt{0.22 \times 0.78}}{\sqrt{n}} \le \frac{4}{100} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sqrt{n} \ge 2.575 \times 25\,\sqrt{0.22 \times 0.78} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n \ge 2.575^2 \times 625 \times 0.22 \times 0.78 = 711.13\ldots$ y entonces el tamaño mínimo es $n = 712$ al ser entero.

El tamaño mínimo es de **712** trabajadores.

b) Tenemos que $n = 1000\ p = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$ (probabilidad de absentismo), por lo que:

$\sigma = \sqrt{p\,(1-p)} = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. El intervalo de confianza de la media teórica μ es:

$\left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$, donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ cumple que:

$P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \left(1 - P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\right) = 2\,P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - 1 = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \Rightarrow P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1+\frac{19}{20}}{2} = \frac{39}{40} = 0.975$, siendo $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Mirando en la tabla, tenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

La media muestral $\bar{X}$ es $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i}{1000} = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4} = p$, por lo que el intervalo pedido es:

$$\left[\frac{1}{4} - 1.96\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{10\sqrt{10}},\ \frac{1}{4} + 1.96\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{10\sqrt{10}}\right] \approx [0.22,\ 0.28].$$

El intervalo de confianza es de $\mathbf{[0.22,\ 0.28]}$.