Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de:

Navarra

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Cristina Vidal Brazales

Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

CURSO: 2018 - 2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B

Opción A

EJERCICIO 1:

Sea la expresión matricial $B^t - A X = B$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz **X.** (1 punto)

ii) Calcule la matriz **X.** (2.5 puntos)

EJERCICIO 2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \le x \le 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)

ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)

iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)

iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

EJERCICIO 3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)

ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Opción B

EJERCICIO 1:

Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

i) Calcule la derivada de la función $f(x) = cos^3(5x^2) + x\ln(1-2x)$ (1 punto)

ii) Calcule $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)

iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2}\,dx$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

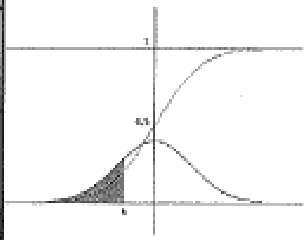
En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)
ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3.5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3.4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3.3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3.2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3.1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3.0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2.9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2.8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2.7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2.6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2.5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2.4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2.3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2.2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2.1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2.0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1.9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1.8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1.7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1.6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1.5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1.4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1.3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1.2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1.1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1.0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0.9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0.8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0.7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0.6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0.5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0.4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0.3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0.2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0.1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0.0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1.0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2.0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2.2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2.3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2.4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2.5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2.6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2.7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2.8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2.9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3.0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3.1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3.2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3.3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3.4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3.5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Sea la expresión matricial $\mathbf{B}^t - \mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$, siendo **A** y **B** las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

i) Despeje la matriz **X**. (1 punto)

ii) Calcule la matriz **X**. (2.5 puntos)

Solución:

i. $B^t - AX = B$; $B^t - B = AX$; Si la matriz A tiene inversa, podemos despejar X. La matriz A es cuadrada, así que calculamos su determinante:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{-1 \neq 0}$$

Y al ser distinto de cero, tiene inversa, por lo que: $X = A^{-1}(B^t - B)$.

$$\boldsymbol{X = A^{-1}(B^t - B)}$$

ii. Como $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \operatorname{Adj}(A)^t$, $\quad (A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$X = A^{-1}(B^t - B) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -12 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema A.2:

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$, con $0 \leq x \leq 8$, donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

i) ¿Cuál es el beneficio si la empresa no gasta en publicidad? ¿Cuál es el beneficio si la empresa gasta 1000 euros en publicidad? (0.5 puntos)

ii) Determine el gasto en publicidad que produce el máximo beneficio. ¿Cuál es el máximo beneficio? (1 punto)

iii) Explique cómo aumenta o disminuye el beneficio en función del gasto en publicidad. (0.75 puntos)

iv) ¿Cuánto gasta la empresa en publicidad cuando el beneficio es mínimo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (0.75 puntos)

Solución:

i. $f(x) = -3x^2 + 30x + 20$. Si la empresa no gasta en publicidad, entonces $x = 0$, $f(0) = 20$, y el beneficio es de 20 000 euros.

Si gasta 1 000 euros en publicidad, entonces $x = 1$, y el beneficio es $f(1) = -3 + 30 + 20 = 47$, de 47 000 euros.

Si la empresa no gasta en publicidad el beneficio es de **20 000** euros. Y si gasta 1 000 euros, es de **47 000** euros.

ii. Para obtener el beneficio máximo, derivamos e igualamos a cero: $f'(x) = -6x + 30 = 0 \Rightarrow x = 5$, $f(5) = -3 \cdot 25 + 30 \cdot 5 + 20 = 95$, siendo el beneficio máximo de 95 000 euros.

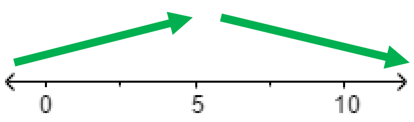
Comprobamos que en efecto es un máximo utilizando la derivada segunda: $f''(x) = -6 < 0$.

Luego es un máximo.

El beneficio máximo es de **95 000** euros, cuando el gasto en publicidad es de **5 000** euros

iii. La función beneficio es una parábola con coeficiente de a negativo, por lo que crece hasta su vértice, (5, 95), y luego decrece. El beneficio aumenta al gastar en publicidad hasta un gasto de 5 000 euros, y luego comienza a descender.

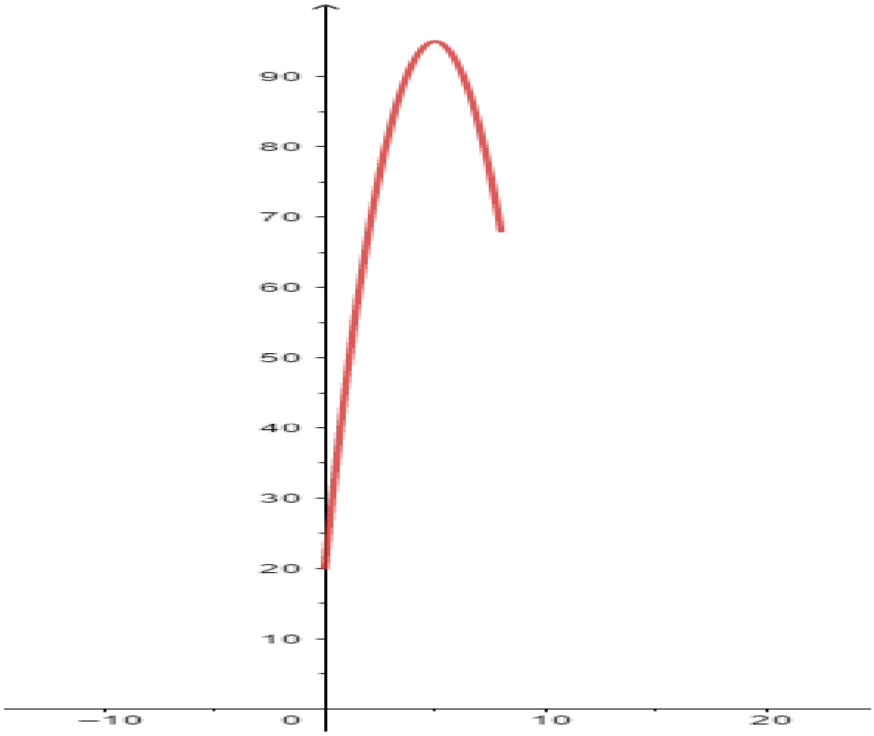
El beneficio crece hasta un gasto de ***5 000*** euros y decrece hasta el gasto de ***8000*** euros.



iv. La función está definida para $0 \leq x \leq 8$. Los valores mínimos deben estar en los extremos del intervalo de definición. Ya sabemos que $f(0) = 20$.

Calculamos $f(8) = -3 \cdot 64 + 30 \cdot 8 + 20 = 68 > 20$, luego tenemos el mínimo beneficio si no hay gasto en publicidad.

El beneficio mínimo de **20 000** euros es para un gasto de **0** euros en publicidad.



Problema A.3:

Un centro tiene dos clases de bachillerato (A y B). La clase A tiene 40 estudiantes, de los cuales 10 estudian alemán. La clase B tiene 25 estudiantes, de los cuales 5 estudian alemán. Se seleccionan al azar dos estudiantes de la clase A y uno de B. Calcule:

i) La probabilidad de que ninguno de los tres estudie alemán. (1 punto)

ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

iii) La probabilidad de que alguno de ellos estudie alemán. (1.25 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

Sucesos: A_I = estudia alemán de la clase A (I), A_{II}= estudia alemán de la clase B (II)

i. $P(\text{Ninguno estudie alemán}) = P(\overline{A_I} \cap \overline{A_I} \cap \overline{A_{II}}) = P(\overline{A_I})\cdot P(\overline{A_I}/\overline{A_I})\cdot P(\overline{A_{II}}) =$

$$= \frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{20}{25} = 0.44615.$$

La probabilidad de que ninguno estudie alemán es **0.446**.

ii. $P(\text{Únicamente uno estudie alemán})=P(A_I \cap \overline{A_I} \cap \overline{A_{II}})+P(\overline{A_I} \cap A_I \cap \overline{A_{II}})+P(\overline{A_I} \cap \overline{A_I} \cap A_{II})$

$= P(A_I)\cdot P(\overline{A_I}/A_I)\cdot P(\overline{A_{II}})+P(\overline{A_I})\cdot P(A_I/\overline{A_I})\cdot P(\overline{A_{II}})+P(\overline{A_I})\cdot P(\overline{A_I}/\overline{A_I})\cdot P(A_{II}) =$

$$= \frac{10}{40}\cdot\frac{30}{39}\cdot\frac{20}{25}+\frac{30}{40}\cdot\frac{10}{39}\cdot\frac{20}{25}+\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{5}{25} = \frac{6000+6000+4350}{40\cdot39\cdot25} = \frac{16350}{39000} = 0.419.$$

La probabilidad de que únicamente uno estudie alemán es **0.419**.

iii. P(Alguno estudie alemán)= 1 – P(Ninguno estudie alemán) = 1 – 0.446 = 0.554.

La probabilidad de que alguno estudie alemán es **0.554**.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Un agricultor quiere dedicar al menos 4 hectáreas al cultivo de dos productos (C1 y C2). El beneficio neto obtenido por cada hectárea cultivada es de 3000 € y 1500 €, respectivamente. Las necesidades por hectárea y temporada de horas de maquinaria y de kilos de abono son 20 horas y 100 kilos para el cultivo C1 y 10 horas y 300 kilos para el cultivo C2. Determine cuántas hectáreas conviene dedicar a cada cultivo para que el beneficio total sea máximo, si dispone para esta temporada de 180 horas maquinaria y de 2400 kilos de abono.

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si además se desea que el número de hectáreas dedicadas al cultivo C2 sea no menor que el doble del número de hectáreas dedicadas al cultivo C1. (0.5 puntos)

Solución:

Se trata de un problema de programación lineal con dos variables. Llamamos $\boldsymbol{x}$ al número de hectáreas dedicadas al producto C1, e $\boldsymbol{y}$ al dedicado a C2.

Si traducimos los datos a restricciones obtenemos:

$$\begin{cases} x + y \geq 4,\ \ x \geq 0\,,\ \ y \geq 0 \\ 20x + 10y \leq 180 \\ 100x + 300y \leq 2400 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} \boldsymbol{x + y \geq 4,\ \ x \geq 0\,,\ \ y \geq 0} \\ \boldsymbol{2x + y \leq 18} \\ \boldsymbol{x + 3y \leq 24} \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** es la siguiente: $B(x, y) = 3000x + 1500y$

Representamos la región que define este sistema de ecuaciones:

Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

$A)\ \begin{cases} x + y = 4 \\ x = 0, y = 4 \end{cases} \rightarrow \qquad \text{A}(0, 4)$

$\text{B)}\ \begin{cases} x + y = 4 \\ y = 0, x\ =\ 4 \end{cases} \rightarrow \qquad \text{B}(4, 0)$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

C) $\begin{cases} 2x + y = 18 \\ y = 0, x = 9 \end{cases} \rightarrow$ C(9, 0)

$D)$ $\begin{cases} 2x + y = 18 \\ x + 3y = 24 \end{cases} \rightarrow$ D(6, 6)

$E)$ $\begin{cases} x + 3y = 24 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$ E(0, 8)

Los vértices de la región son: $A(0, 4)$, $B(4, 0)$, $C(9, 0)$, $D(6, 6)$ y $E(0, 8)$.

Calculemos para cada vértice el Beneficio: ***B(x, y) = 3000x + 1500y***

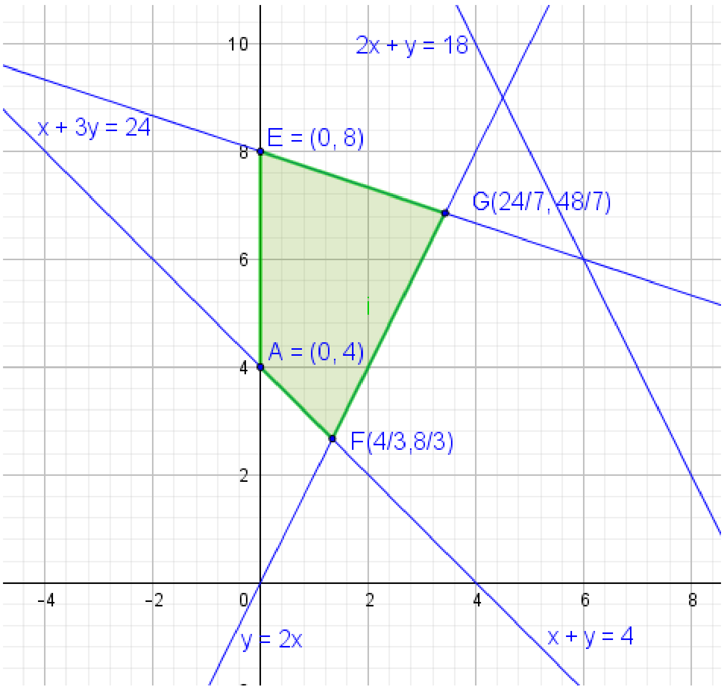
- $B(0, 4) = 1500 \cdot 4 = 6\,000$
- $B(4, 0) = 3000 \cdot 4 = 12\,000$
- $B(9, 0) = 3000 \cdot 9 = 27\,000$
- $B(6, 6) = 3000 \cdot 6 + 1500 \cdot 6 = 18000 + 9000 = 27\,000$
- $B(0, 8) = 1500 \cdot 8 = 12\,000$

Se obtiene el máximo beneficio en dos de los vértices: **C*(9, 0)*, D*(6, 6)***, lo que significa que el beneficio es máximo para cualquier punto del segmento ***CD***: (9, 0), (8, 2), (7, 4), (6, 6).

Por tanto, para obtener el máximo ingreso deberá elaborar:

9 hectáreas de C1, o ***6*** hectáreas de C1 y ***6*** hectáreas de C2, u otro punto del segmento ***CD***.

Añadimos la nueva restricción: $\boldsymbol{y \geq 2x}$



Se observa que la restricción $20x + 10y \leq 180$, número de horas, queda irrelevante.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.2:

i) Calcule la derivada de la función $f(x) = cos^3(5x^2) + x\ln(1-2x)$ (1 punto)

ii) Calcule $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}}$ (1 punto)

iii) Calcule $\int_0^1 2xe^{3x^2}\,dx$ (1.5 puntos)

Solución:

i. Derivada de: $f(x) = cos^3(5x^2) + xln(1-2x)$

$$f'(x) = 3\cos^2(5x^2)\cdot(-\text{sen}(5x^2))\cdot 10x + \ln(1-2x) + x\frac{1}{1-2x}\cdot(-2) =$$

$$-30x\cdot cos^2(5x^2)\cdot sen(5x^2) + ln(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}.$$

$$\boldsymbol{f'(x) = -30x\cdot cos^2(5x^2)\cdot sen(5x^2) + ln(1-2x) - \frac{2x}{1-2x}.}$$

ii. Resolvemos la integral:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{8}\int 8x(4x^2+1)^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{1}{8}(4x^2+1)^{\frac{-1}{2}+1}\cdot 2 = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + K.$$

$$\boldsymbol{\int\frac{x\,dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+1} + K}$$

iii. Integral definida:

$$\int_0^1 2xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 6xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}\left[e^{3x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}(e^3-1).$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 2xe^{3x^2}dx = \frac{1}{3}(e^3-1)}$$

Problema B.3:

En una muestra aleatoria entre estudiantes de bachillerato de una región, 150 afirmaron que participan en actividades de voluntariado y 350 afirmaron que no realizan ese tipo de actividades.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que no realizan actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 96%. (1.5 puntos)

ii) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que participan en actividades de voluntariado, con un nivel de confianza del 92%. (1.5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

El intervalo de confianza para un nivel de confianza de 96 % viene dado por la expresión:

$$\left(p - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad p + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

En el ejercicio nos dicen que: n = 500, p = 350/500 = 0.7, $Z_{\frac{\propto}{2}} = 2.055$, sustituyendo, tenemos:

$$\left(0.7 - 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}}\ ,\ 0.7 + 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}}\right) = (0.658, \ \ 0.742).$$

Intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que NO realizan voluntariado al 96 %: $(\mathbf{0.658}, \ \ \mathbf{0.742})$.

El intervalo de confianza para un nivel de confianza de 92 % viene dado por la expresión:

$$\left(p - Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \quad p + Z_{\frac{\propto}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

En el ejercicio nos dicen que: $\boldsymbol{n}$ = 500, $\boldsymbol{p}$ = 150/500 = 0.3.

Calculamos el nuevo $\boldsymbol{Z_{\frac{\propto}{2}}}$**,** y obtenemos: $\boldsymbol{Z_{\frac{\propto}{2}}} = \mathbf{1.75}$ sustituyendo, tenemos:

$$\left(0.3 - 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}}\ , \quad 0.3 + 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.7(1-0.3)}{500}}\right) = (0.296, \ \ 0.335)$$

Intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que realizan voluntariado al 92 %: $(\mathbf{0.296}, \ \ \mathbf{0.335})$.

upna Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

CURSO: 2018 - 2019

ASIGNATURA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B

Opción A

EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas.

i) Calcule $A^2 - B^2$ (1 punto)

ii) Calcule $(A - B)(A + B)$ (1 punto)

iii) Calcule $C^{-1} C^t - I$ (1.5 puntos)

EJERCICIO 2:

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

i) Intervalos de concavidad y convexidad. Punto de inflexión. (2 puntos)

ii) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$. (1.5 puntos)

EJERCICIO 3:

La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

i) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98%. (2 puntos)

ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Opción B

EJERCICIO 1:

Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 240 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad. (0.5 puntos)

EJERCICIO 2:

i) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x$, $y = -x$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$. (1 punto)

ii) Calcule el área de dicho recinto. (2.5 puntos)

EJERCICIO 3:

Según un estudio reciente, el 80% de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40% tiene un contrato laboral y el 25% simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar.

i) Calcule la probabilidad de que únicamente estudie. (1 punto)

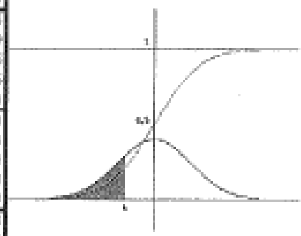
ii) Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje. (1 punto)

iii) Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z < k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\, dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES OPCIÓN A

Problema A.1:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas.

i) Calcule A^2-B^2 (1 punto)

ii) Calcule $(A-B)(A+B)$ (1 punto)

iii) Calcule $C^{-1}C^{t}$ - I (1.5 puntos)

Solución:

i. $A^2-B^2=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}20 & -10\\ -10 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & -5\\ -5 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -5\\ -5 & -5\end{pmatrix}.$

$$\boldsymbol{A^2-B^2=\begin{pmatrix}15 & -5\\ -5 & -5\end{pmatrix}.}$$

ii. $(A-B)\cdot(A+B)=\left(\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\right)=$

$\begin{pmatrix}-6 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 0\\ -10 & -5\end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{(A-B)\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}15 & 0\\ -10 & -5\end{pmatrix}}$$

iii. C-1 Ct – I:

Calculamos C^{-1} y C^t:

$$C^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{1}{|C|}\cdot Adj(C)^t=(1/-2)\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}.$$

$$C^{-1}C^t-I=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C^{-1}C^t-I=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}$$

Problema A.2:

Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$, calcule:

i) Intervalos de concavidad y convexidad. Punto de inflexión. (2 puntos)

ii) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x = -2$. (1.5 puntos)

Solución:

i. Para estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión, calculamos la derivada segunda de la función:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$.

Igualamos a cero para determinar los posibles puntos de inflexión: $6x - 12 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 2}$.

Analizamos el signo de la derivada segunda:

En $(-\infty, 2)$ el signo es negativo. La función es cóncava ($\cap$).

En $(2, +\infty)$ es positivo, la función es convexa ($\cup$).

El punto $\boldsymbol{x = 2}$ es de inflexión: (2, 8).

La función es **cóncava** en $(-\infty, 2)$, **convexa** en $(2, +\infty)$, y tiene un **punto de inflexión**: $(2, 8)$.

ii. Cálculo de la recta tangente en $x = -2$.

La ecuación de la recta tangente en $\boldsymbol{x = a}$ es: $\boldsymbol{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$.

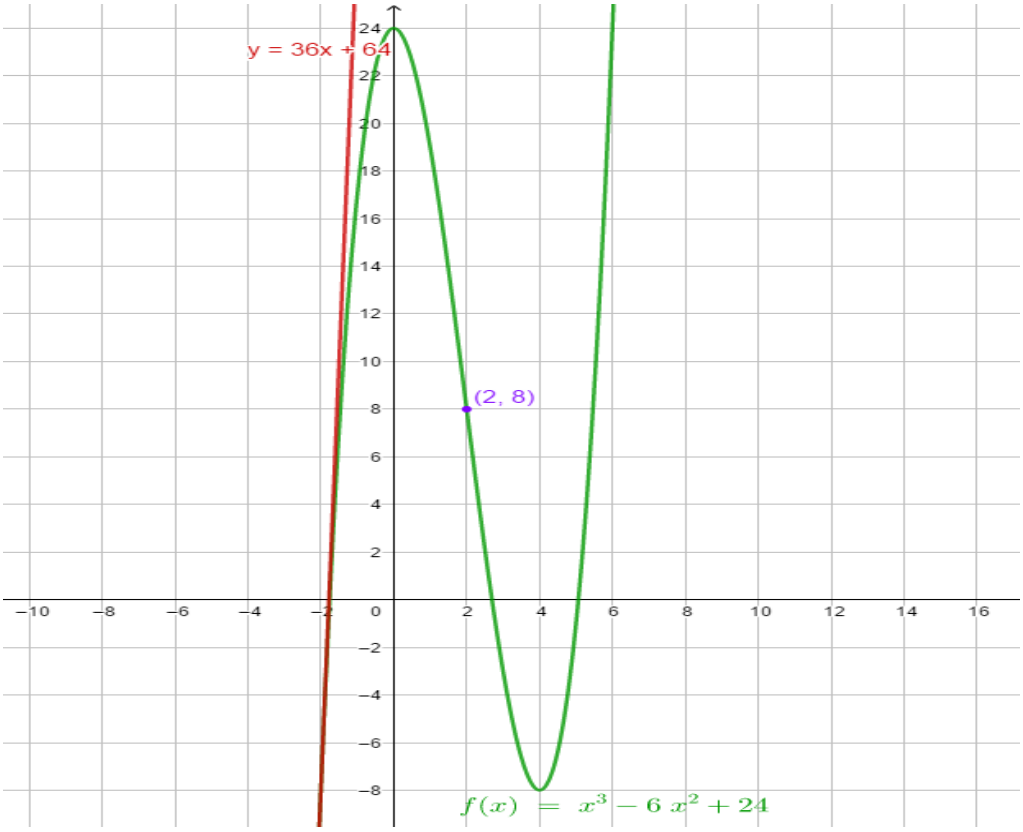
$f(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 24 = -8 - 24 + 24 = -8 \Rightarrow$

Con la derivada primera obtenemos la pendiente de la recta:

$f'(x) = 3x^2 - 12x \Rightarrow f'(-2) = 3(-2)^2 - 12(-2) = 12 + 24 = 36$.

La recta tangente es: $\boldsymbol{y = f(a) + f'(a)(x - a)} \Rightarrow y = -8 + 36(x - (-2)) = 36x + 64$.

La recta tangente es: $y = 36x + 64$.


y = 36x + 64
(2, 8)
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 24$

Problema A.3:

La duración de un tipo de batería para teléfonos móviles es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de tres meses. Se toma una muestra aleatoria de diez baterías y se miden las siguientes duraciones (en meses): 15.7, 7.2, 21.6, 19.4, 14.5, 17.3, 15.2, 23.4, 21.5 y 15.8

i) Construya un intervalo de confianza para la duración media de este tipo de baterías, con un nivel de confianza del 98%. (2 puntos)

ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que el error máximo se reduzca a la mitad. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

i. Los datos son: X = duración baterías = $N(\mu, 3)$, $n = 10$.

El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos la media muestral: $\bar{x} = \frac{15.7+7.2+21.6+19.4+14.5+17.3+15.2+23.4+21.5+15.8}{10} = 17.16.$

Con el nivel de confianza del 98 %, $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$**,** sustituyendo, tenemos:

$$\left(17.16 - 2.33 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\ \ 17.16 + 2.33 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}\ \right) = (14.95,\ \ 19.37).$$

La duración media de las baterías se encuentra entre **14.95** meses y **19.37** meses con una confianza del 98 %

ii. El error máximo viene dado por: $\text{Error} = \boldsymbol{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$. En nuestro caso por:

$$\text{Error} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.21.$$

Debemos reducirlo a la mitad, es decir, a 1.105, por lo que el nuevo error debe ser:

$\text{Error} = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.105$, siendo $2.33 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1.105$, por lo que $\sqrt{n} = \frac{2.33 \cdot 3}{1.105} = 6.32$, y $n \sim 40.01$.

El número de baterías es entero, por lo que:

El número mínimo de baterías debe ser de **41** baterías.

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B

Problema B.1:

Una empresa tiene dos plantas (P1 y P2) en las que produce bobinas de acero de tres anchuras (A1, A2, A3). La planta P1 tiene maquinaria capaz de fabricar cada hora 10 bobinas de anchura A1, 10 bobinas de anchura A2 y 20 bobinas de anchura A3. La planta P2 tiene capacidad para fabricar cada hora 10, 50 y 10 bobinas de cada tipo de anchura, respectivamente. El coste de operación por hora es de 70 euros en la planta P1 y de 120 euros en la planta P2. La empresa tiene que suministrar cada día al menos 180 bobinas de anchura A1, al menos 300 bobinas de anchura A2 y al menos 240 bobinas de anchura A3. ¿Cuántas horas diarias deberá trabajar cada planta para atender la demanda si se desea minimizar el coste total de operación?

i) Plantee el problema. (1.5 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente. (1.5 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda de bobinas de anchura A1 se redujera a la mitad. (0.5 puntos)

Solución:

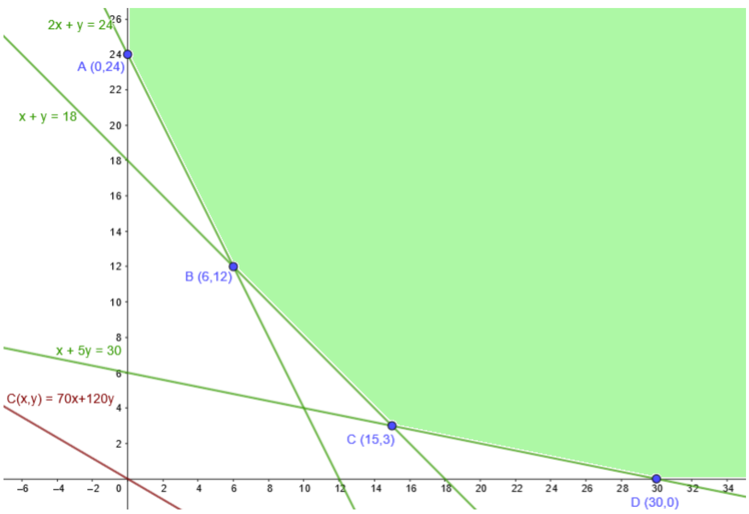
i) Se trata de un problema de programación lineal con dos variables. Llamamos ***x*** al número de horas diarias que trabaja P1, e ***y*** al de horas que trabaja P2.

Las bobinas de anchura A1 que se fabrican son: $10x + 10y$ y deben ser al menos 180. Las de anchura A2 son: $10x + 50y$, y al menos 300. Las de anchura A3: $20x + 10y$, al menos 240. Traducimos a inecuaciones las restricciones:

$$\begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0,\ \ 10x + 10y \geq 180 \\ \qquad 10x + 50y \geq 300 \\ \qquad 20x + 10y \geq 240 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} x \geq 0\,,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \geq 18 \\ \qquad x + 5y \geq 30 \\ \qquad 2x + y \geq 24 \end{cases}$$

Por otro lado, la **función objetivo** que debemos minimizar es la siguiente: $70x + 120y = Coste(x, y)$

ii) Representamos la región que define este sistema de ecuaciones. Dibujamos las rectas y dando valores determinamos la región factible. Por ejemplo, el punto (12, 12) verifica todas las desigualdades.



Para obtener los vértices resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

$A) \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y = 24 \end{cases} \rightarrow$ A(0, 24)

B) $\begin{cases} 2x + y = 24 \\ x + y = 18 \end{cases} \rightarrow$ B(6, 12)

C) $\begin{cases} x + y = 18 \\ x + 5y = 30 \end{cases} \rightarrow$ C(15, 3)

$D) \begin{cases} x + 5y = 30 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ D(30, 0)

Los vértices de la región son: $A(0, 24)$, $B(6, 12)$, $C(15, 3)$ y $D(30, 0)$.

Calculemos para cada vértice el coste de operación por hora: $\boldsymbol{C(x, y) = 70x + 120y}$

- $C(0, 24) = 70 \cdot 0 + 120 \cdot 24 = 8400$
- $C(6, 12) = 70 \cdot 6 + 120 \cdot 12 = 1860$
- $C(15, 3) = 70 \cdot 15 + 120 \cdot 3 = 1410$
- $C(30, 0) = 70 \cdot 30 + 120 \cdot 0 = 2100$

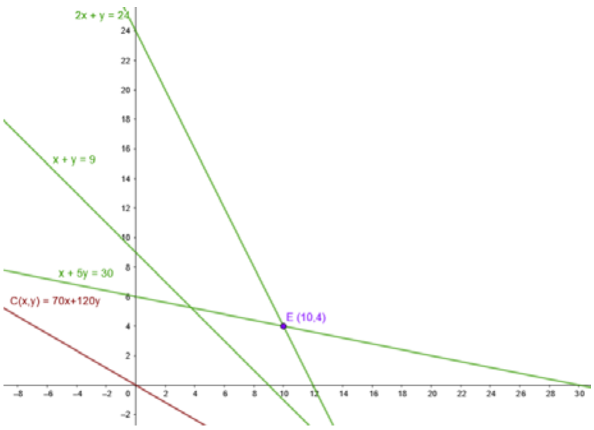
Por tanto, para obtener el mínimo coste deberá trabajar:

15 horas diarias la planta P1 y **3** horas diarias la planta P2.

iii)

Si la demanda de bobinas A1 se reduce a la mitad:

$$\begin{cases} x \geq 0\,, \quad y \geq 0, \quad 10x + 10y \geq 90 \\ 10x + 50y \geq 300 \\ 20x + 10y \geq 240 \end{cases} \quad \text{simplificando} \quad \begin{cases} x \geq 0\,, \quad y \geq 0, \quad x + y \geq 9 \\ x + 5y \geq 30 \\ 2x + y \geq 24 \end{cases}$$



La producción de bobinas del ancho A1 no influye en la minimización del gasto

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema B.2:

i) Dibuje el recinto comprendido entre las curvas $y = x^3 - 4x$, $y = -x$, y las rectas $x = 1$, $x = -1$.

(1 punto)

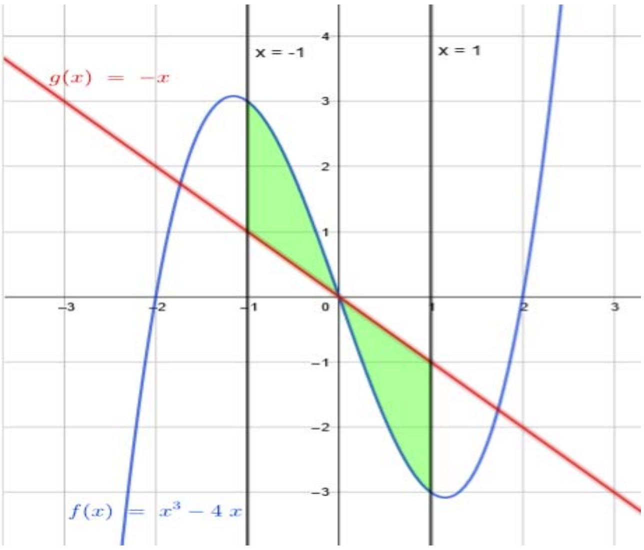
ii) Calcule el área de dicho recinto. (2.5 puntos)

Solución:

i. Buscamos los puntos de intersección: $y = x^3 - 4x$; $y = -x$. En el intervalo [–1, 1] sólo está en origen: (0, 0).

Para x = –1 corta a la curva en –1 + 4 = 3. Para x = 1 corta a la curva en 1 – 4 = –3.

Representamos las gráficas:



ii. El área pedida es:

$$\int_{-1}^{0}\left((x^3 - 4x) - (-x)\right)dx + \int_{0}^{1}\left((-x) - (x^3 - 4x)\right)dx = \int_{-1}^{0}(x^3 - 3x)dx + \int_{0}^{1}(-x^3 + 3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}.$$

Por tanto, el área pedida es $\frac{5}{2}\boldsymbol{u^2}$

Autora: Cristina Vidal Brazales
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

Según un estudio reciente, el 80% de los jóvenes españoles entre 18 y 23 años estudia, el 40% tiene un contrato laboral y el 25% simultanea estudios y trabajo. Se selecciona un joven al azar.

i) Calcule la probabilidad de que únicamente estudie. (1 punto)
ii) Calcule la probabilidad de que no estudie ni trabaje. (1 punto)
iii) Sabiendo que no estudia, calcule la probabilidad de que trabaje. (1 punto)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Solución:

Nombramos los sucesos: E = Estudia, T = Trabaja, *no* E = No estudia, *no* T = No trabaja.

Los datos que nos dan son:

$$P(E) = 80\ \% = 0.8, \quad P(T) = 40\ \% = 0.4, \quad P(\bar{E}) = 0.2, \quad P(\bar{T}) = 0.6.$$
$$P(E \cap T) = 25\ \% = 0.25$$

Hacemos la tabla de contingencia:

	Estudia (E)	No estudia ($\bar{E}$)	Total
Trabaja (T)	0.25		0.4
No trabaja ($\bar{T}$)			0.6
Total	0.8	0.2	1

Completamos la tabla:

	Estudia (E)	No estudia ($\bar{E}$)	Total
Trabaja (T)	0.25	**0.15**	0.4
No trabaja ($\bar{T}$)	**0.55**	**0.05**	0.6
Total	0.8	0.2	1

i. Mirando en la tabla: $P($únicamente estudie$) = P(E \cap \bar{T}) = 0.55$.

La probabilidad de que únicamente estudie es del **0.55**.

ii. Mirando en la tabla: $P($ni estudie ni trabaje$) = P(\bar{E} \cap \bar{T}) = 0.05$.

La probabilidad de que ni estudie ni trabaje es **0.05**.

iii. Probabilidad condicionada. Entre los que no estudian, calcular la probabilidad de que trabaje:

$P($trabaje/no estudia$) = P(T \cap \bar{E})/P(\bar{E}) = 0.15/0.2 = 0.75$.

Sabiendo que no estudia, la probabilidad de que trabaje es **0.75**.