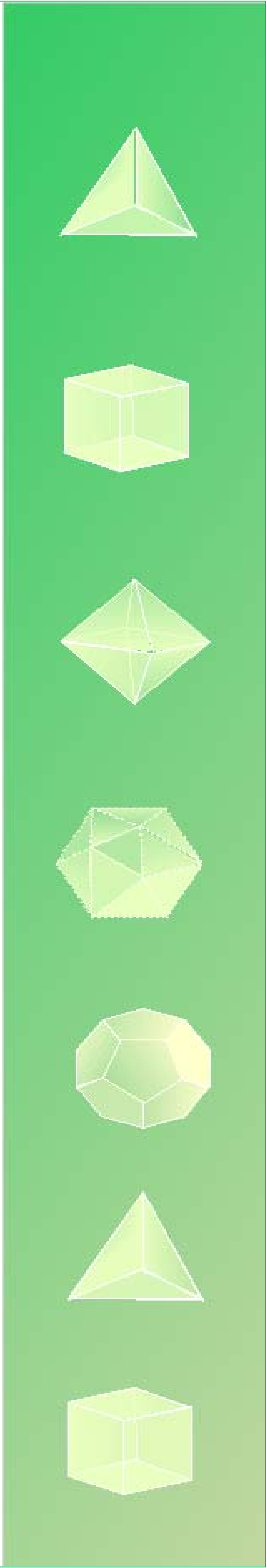


Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2019

Comunidad autónoma de

Valencia

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Un inversor dispone de 9 000 € y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5 000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2.7 % y la del producto B del 6.3 %.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Problema A.2:

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x},$$

se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Problema A.3:

En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$

b) Calcular $(AB^t - A^tB)$

c) Resolver la ecuación: $B^t X + A^t B = A^t$

Siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B respectivamente.

Problema B.2:

En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Problema B.3:

Sabemos que el 5 % de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5 000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5 000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5 000 euros?

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema A.1:

Un inversor dispone de 9 000 € y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5 000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2.7 % y la del producto B del 6.3 %.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos productos financieros (A y B), un objetivo (maximizar la rentabilidad) y unas restricciones (la inversión en A ha de superar los 5000 € y debe ser el doble, al menos, que la inversión en B).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuánto hay que invertir en A y en B por lo que las variables de decisión serán:

x - Dinero invertido en A.

y - Dinero invertido en B.

Función objetivo: Queremos maximizar la rentabilidad. Como la rentabilidad es de un 2.7 % por la cantidad invertida en A habremos ganado $0.027x$. La rentabilidad de B es un 6.3 % por la cantidad invertida habremos ganado $0.063y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$R(x, y) = 0.027x + 0.063y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos. ya que es posible: $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Como tenemos 9 000 € disponibles, la suma de ambas cantidades invertidas ha de ser menor o igual que 9 000: $x + y < 9\,000$.

Como la inversión en A ha de superar los 5 000 € la cantidad x ha de ser mayor que esa cantidad:

$$x > 5\,000.$$

Por último, como la cantidad A ha de ser el doble, al menos, que la cantidad en B tenemos que la cantidad x ha de ser mayor o igual que $2y$:

$$x \geq 2y$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \geq 0;\ y \geq 0$$

$$x + y < 9\,000$$

$$x > 5\,000$$

$$x \geq 2y$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y": $y = 9000 - x$.

Tabla de valores:

x	9000	4000	0
y	0	5000	9000

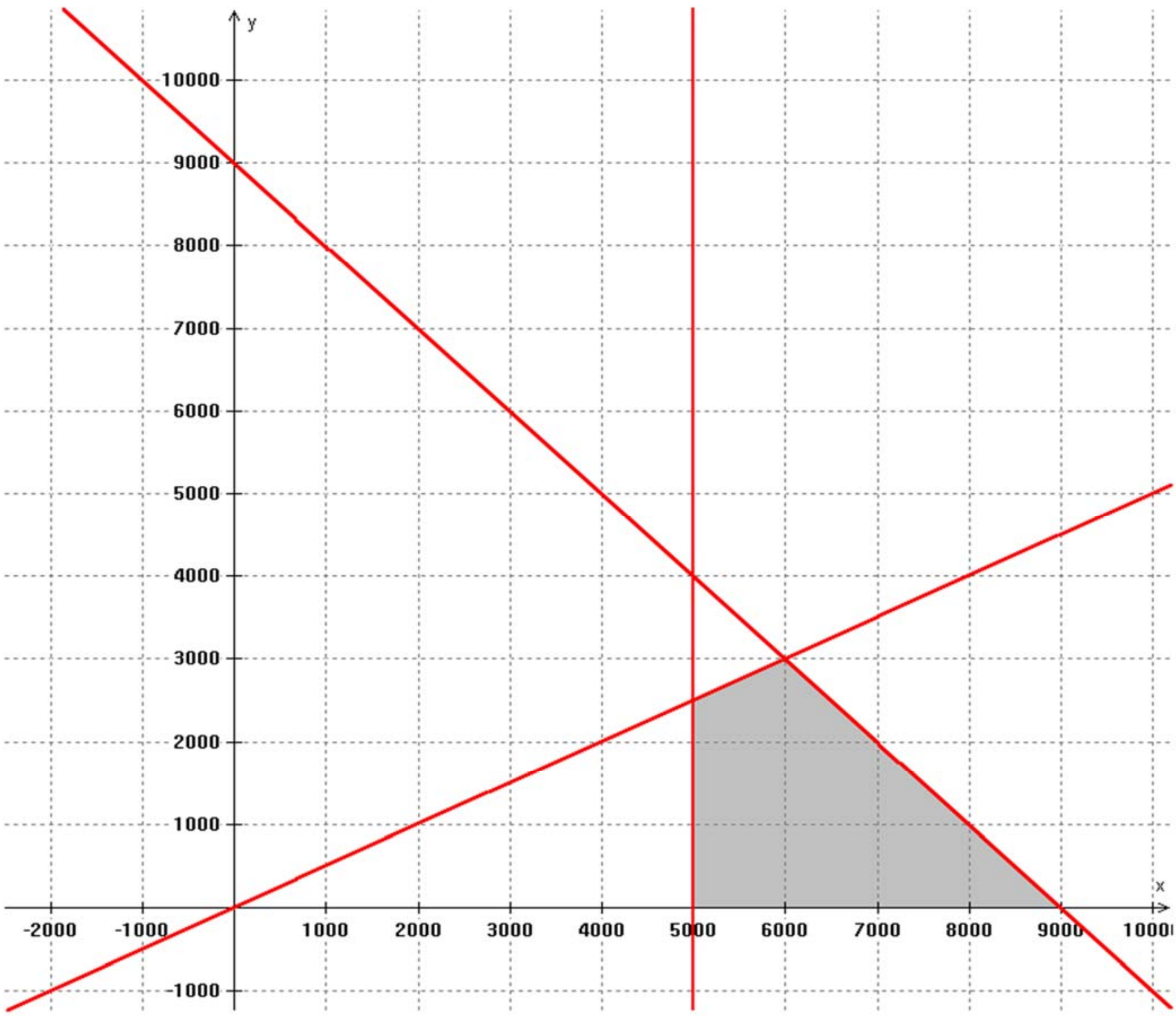
La cuarta es una línea vertical paralela al eje OY por el punto (5000, 0)

En la quinta quitamos la desigualdad y despejamos la "y": $y = x/2$.

Tabla de valores:

x	0	6000	9000
y	0	3000	4500

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en el tercer caso podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. En la cuarta nos sale lo contrario y en la quinta el (0, 0) no es válido por lo que utilizamos el (1 000, 0), por ejemplo y nos sale que no pertenece a la región solución, por lo que la representación queda:



La región tiene 4 vértices:

- El primero es el (5000, 0) que se ve a simple vista.
- El segundo es el (9000, 0) que también podemos ver en la representación.
- El tercero es el corte de $y = 9000 - x$ y $y = x/2$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

  $$9000 - x = x/2 \rightarrow 18000 - 2x = x \rightarrow x = 6000.$$

  la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos: $y = 3000$, por lo que el punto será (6000, 3000) (en la representación también se ve muy claro)
- El cuarto es el corte de $x = 5000$ y $y = x/2$ por lo que sustituimos ese valor en la recta y obtenemos $y = 2500$, por lo que el punto será (5000, 2500) (en la representación también se ve muy claro)

Los 4 vértices a estudiar son: (6000, 3000) (5000, 0) (9000, 0) y (5000, 2500).

La función objetivo era:

$$R(x, y) = 0.027x + 0.063y$$

sustituimos los vértices hallados:

$$R(6000, 3000) = 0.027 \cdot 6000 + 0.063 \cdot 3000 = 351 \text{ euros}$$

$$R(9000, 0) = 0.027 \cdot 9000 + 0.063 \cdot 0 = 243 \text{ euros}$$

$$R(5000, 0) = 0.027 \cdot 5000 + 0.063 \cdot 0 = 135 \text{ euros}$$

$$R(5000, 2500) = 0.027 \cdot 5000 + 0.063 \cdot 2500 = 292.5 \text{ euros}$$

Como buscamos la máxima rentabilidad tenemos que esta se da invirtiendo 6 000 € en el producto A y 3 000 € en el B y el beneficio es de 351 €.

Problema A.2:

Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x},$$

se pide:
a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores**.**

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador: $2 - x = 0 \to x = 2$, por lo que no existe en ese punto.

El **dominio** es: $Dom\ f(x) = \Re - \{2\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x}=0$$

por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador: $x^2 = 0 \to x = 0$, por lo que el punto es el (0, 0)

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0 \to f(0) = 0$ por lo que se repite el punto (0, 0).

El único punto de corte con los ejes coordenados es (0, 0).

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2-x}=\infty$$

al no ser finito el límite NO tiene asíntota horizontal.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno: $x = 2$, calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2-x}=\left(\frac{4}{0}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{2-x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{2-x}=-\infty\end{cases}$$

por lo que $x = 2$ es asíntota vertical.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

No lo pide y no puntúa, pero podemos saber, por la estructura de la función, que tiene una **asíntota oblicua**. Su dibujo nos puede ser de utilidad para la representación gráfica.

La asíntota oblicua tiene por ecuación $y = mx + n$, con los coeficientes:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2-x}-(-1)x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2-x}+x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+2x-x^2}{2-x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{2-x}\right]=-2$$

Luego tiene una asíntota oblicua en $y = -x - 2$. NO lo pide pero la vamos a dibujar para facilitar la representación.

Asíntota vertical en $x = 2$; no tiene asíntota horizontal; pero sí hay una asíntota oblicua: $y = -x - 2$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

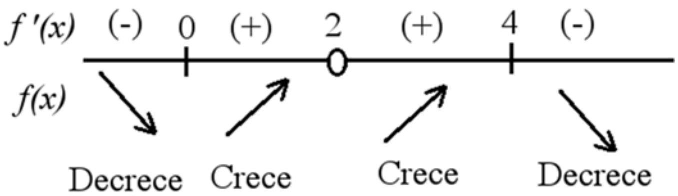
Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(2-x)-x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=0$$

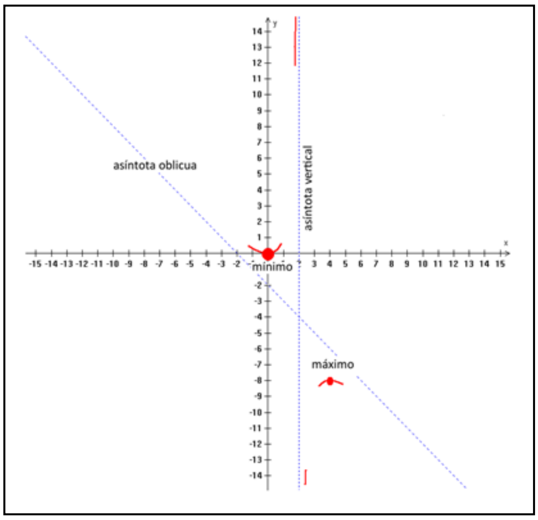
Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$4x - x^2 = 0 \rightarrow x(4 - x) = 0$, que tiene dos soluciones: $x = 0$ y $x = 4$.

Que son los posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión. Con estos puntos y la discontinuidad del dominio $x = 2$, estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados:



Por lo que tenemos que la función crece en]0, 2[U]2, 4[y decrece en]-∞, 0[U]4, +∞[



d) Los máximos y mínimos locales.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un mínimo en el punto $x = 0$ → (0, 0) y un máximo en el punto $x = 4$, que es el $f(4) = -8$,:

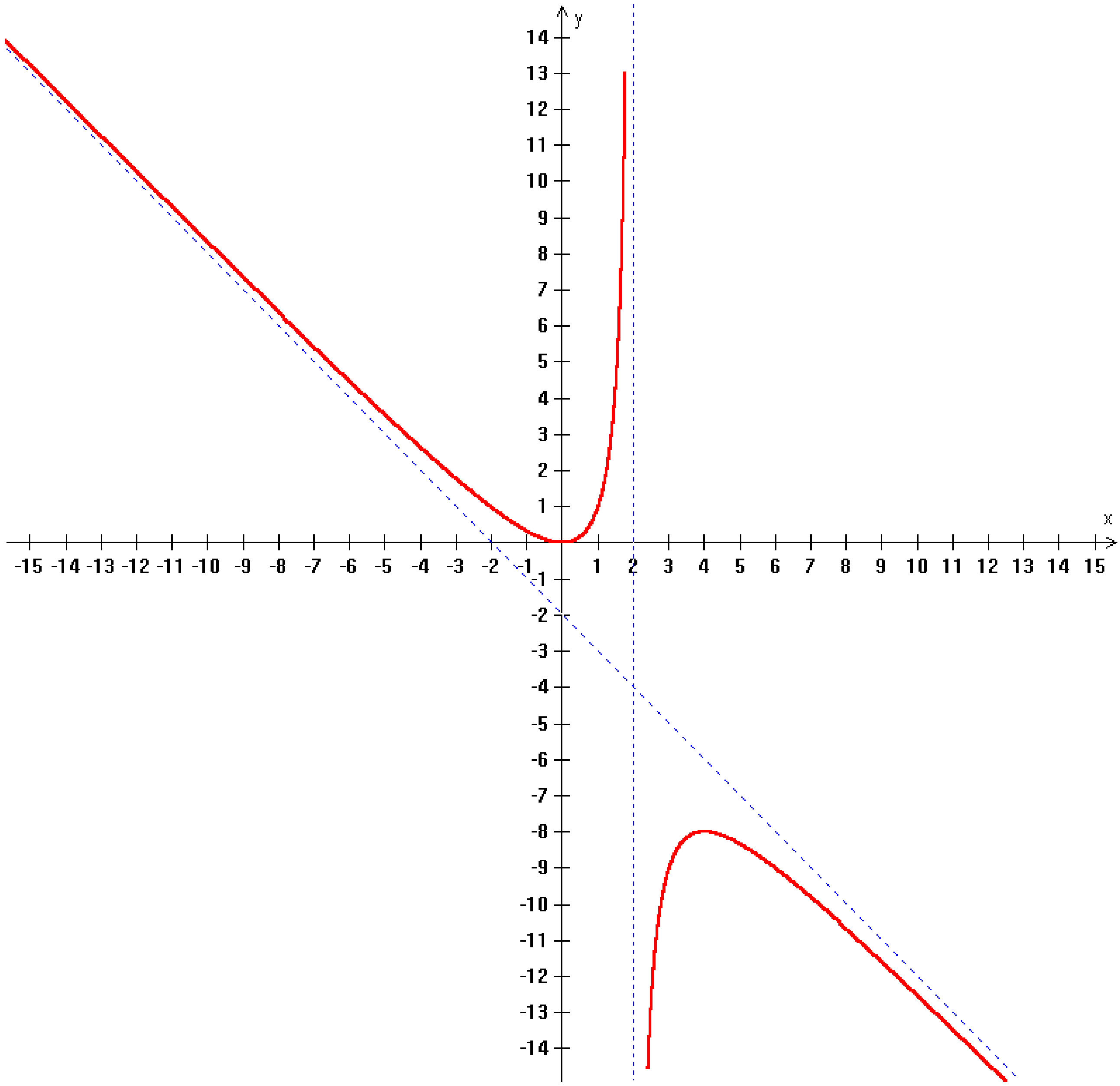
Mínimo: (0, 0); Máximo: (4, –8).

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Dibujamos el punto de corte (0, 0) que, además es mínimo, la asíntota vertical en $x = 2$ (con sus tendencias a infinito) y la asíntota oblicua en:

$y = -x - 2$, (no nos la piden).

La gráfica queda así:



Problema A.3:

En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

S → "El hogar tiene una Smart TV"

T → "Han contratado televisión de pago"

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV tenemos que $P(S)$ = 2/3 = 0.6667.
- Como de los hogares que tienen una Smart TV las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago: $P(T/S)$ = 3/8 = 0.375.
- Como si consideramos el total de hogares, han contratado algún servicio de televisión de pago el 30 % tenemos que: $P(T)$ = 3/10 = 0.3.

El problema se puede resolver por tabla de contingencias, por árbol, axiomática o diagrama de Venn. Como no tiene dos fases claramente diferenciadas lo más fácil es resolverlo por tabla de contingencias. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

<u>Por tabla de contingencias</u>:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos S y T y sus contrarios:

	S	$\bar{S}$	Total:
T			
$\bar{T}$			
Total:			1

Hay dos probabilidades que podemos poner directamente: $P(S)$ = 0.6667 y $P(T)$ = 0.3:

	S	$\bar{S}$	Total:
T			0.3
$\bar{T}$			
Total:	0.6667		1

La tercera probabilidad que tenemos es: $P(T/S)$ = 3/8 = 0.375 como $P(T/S)=\frac{P(T\cap S)}{P(S)}$

Sustituyendo valores: $0.375 = \frac{P(T\cap S)}{0.6667} \to P(T\cap S) = 0.375 \cdot 0.667 = 0.25$

Ponemos ese valor y completamos la tabla:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

	S	$\bar{S}$	Total:
T	0.25	0.05	0.3
$\bar{T}$	0.4167	0.2833	0.7
Total:	0.6667	0.3333	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

Nos piden (directamente de la tabla)

$$\boldsymbol{P(\bar{S}\cap T) = 0.05 \;\rightarrow 5\,\%}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

Nos piden

$$\boldsymbol{P(S/T) = \frac{P(T\cap S)}{P(T)} = \frac{0.25}{0.3} \cong 0.8333 \rightarrow \textit{83.33 \%}}$$

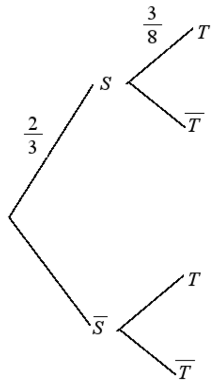
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Nos piden

$$\boldsymbol{P(\bar{S}/\bar{T}) = \frac{P(\bar{T}\cap\bar{S})}{P(\bar{T})} = \frac{0.2833}{0.7} \cong 0.4047 \rightarrow \textit{40.47 \%}}$$

<u>Por diagrama de árbol</u>:

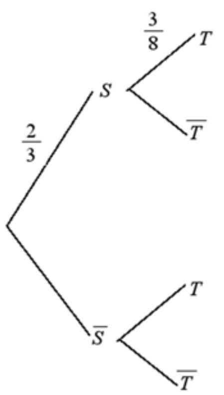
No hay unas fases claras pero podemos construir el árbol a partir de la probabilidad de tener o no Smart TV. Podemos situar los datos como ves en la figura:



Para completar el árbol procedemos de la siguiente manera: $P(\bar{S}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P(\bar{T}/S) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ $\quad P(S\cap T) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$ $\quad P(S\cap\bar{T}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8} = \frac{5}{12} \simeq 0.4167$

Los situamos en el árbol:



Ahora aplicamos el teorema de la probabilidad total para hallar las probabilidades que desconocemos:

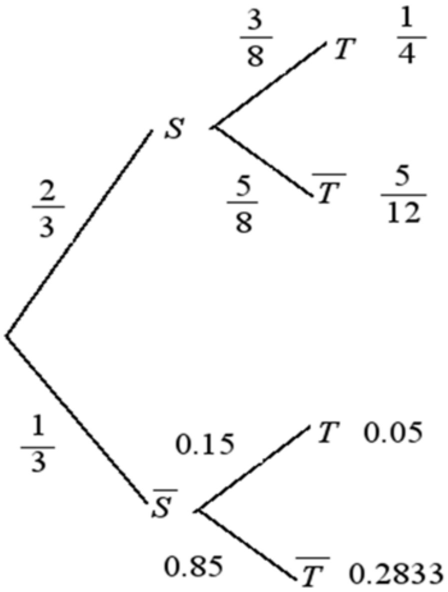
$P(T) = P(T\cap S) + P(T\cap\bar{S}) \rightarrow 0.3 = 0.25 + P(T\cap\bar{S}) \rightarrow P(T\cap\bar{S}) = 0.05$

Como

$P(T \cap \bar{S}) = P(\bar{S}) \cdot P(T/\bar{S}) \rightarrow 0.05 = \frac{1}{3} \cdot P(T/\bar{S}) \rightarrow P(T/\bar{S}) = 0.15$

Por lo tanto: $P(\bar{T}/\bar{S}) = 1 - 0.15 = 0.85$

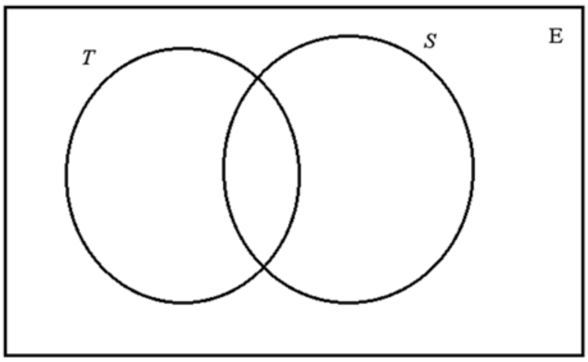
Con lo que el árbol completo es:



Una vez construido el árbol la resolución es igual que con tabla de contingencias.

<u>Por diagrama de Venn</u>:

Planteamos el diagrama como en la figura:



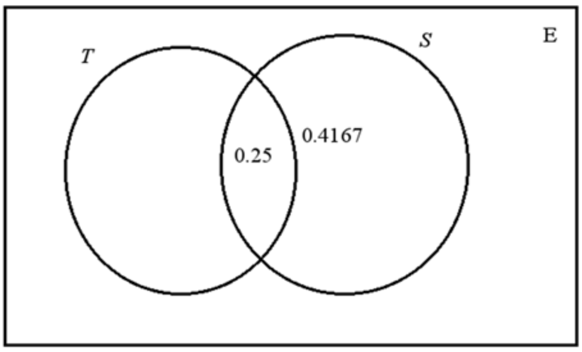
Como sabemos que $P(S)$ = 2/3, y además que $P(T/S)$ = 3/8, deducimos que:

$$P(S \cap T) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Hallamos también:

$$P(S - T) = P(S) - P(S \cap T) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} = 0.4167$$

y los situamos en el diagrama:



Como nos dan el dato $P(T)$ = 0.3 podemos deducir que:

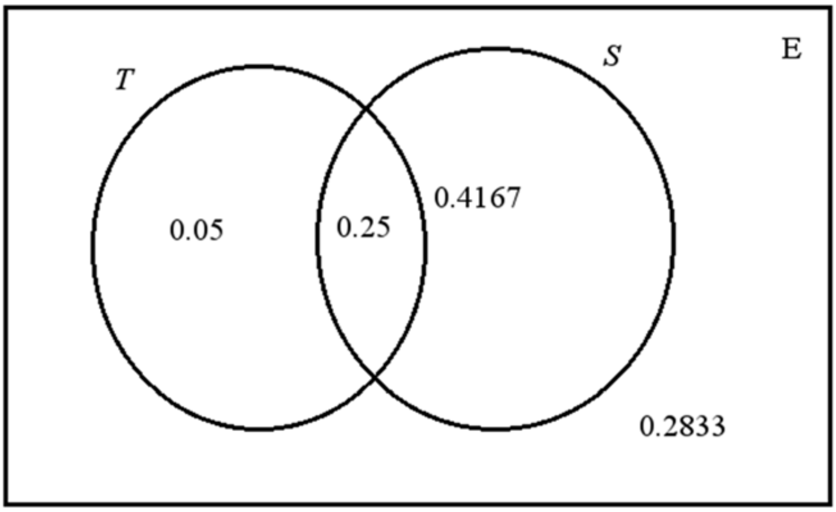
$$P(T - S) = P(T) - P(T \cap S) = 0.3 - 0.25 = 0.05$$

Con esto las probabilidades dentro de los círculos del diagrama son:

0.05 + 0.25 + 0.4167 = 0.7167

Por lo que por fuera tenemos que: 1 – 0.7167 =

0.2833, el diagrama completo queda:



Una vez construido el diagrama la resolución es igual que con tabla de contingencias.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

$$\boldsymbol{P(\overline{S} \cap T) = 0.05 \ \rightarrow 5\ \%}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

$$\boldsymbol{P(S/T) = \frac{P(T \cap S)}{P(T)} = \frac{0.25}{0.3} \cong 0.8333 \rightarrow 83.33\ \%}$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

$$\boldsymbol{P(\overline{S}/\overline{T}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{S})}{P(\overline{T})} = \frac{0.2833}{0.7} \cong 0.4047 \rightarrow 40.47\ \%}$$

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema B.1:

Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$

b) Calcular $(AB^{t} - A^{t}B)$

c) Resolver la ecuación: $B^{t}X+A^{t}B=A^{t}$

Siendo A^{t} y B^{t} las matrices traspuestas de A y B respectivamente.

Solución:

a) Calcular $(AB)^{-1}$

Calculamos primero el producto de las matrices y después haremos su inversa:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

La inversa la podemos hacer por Gauss o determinantes (sólo de una forma):

Por determinantes:

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{|AB|}(Adj\ AB)^{t}$$

$$|AB|=\begin{vmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-4+8=4$$. Tiene inversa

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -8 & -1\end{pmatrix}^{t}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

Si lo hacemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 8 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 8 & 1 & 0\\ 0 & -4 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & -4 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

$F_2 = F_2-F_1$ $\quad$ $F_1 = F_1+2F_2$ $\quad$ $F_1 = F_1/(-1)$ $\quad$ $F_2 = F_2/(-4)$

Hay que comprobar que lo hemos hecho bien (no es obligatorio):

$$\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Como da la identidad está bien calculada

$$(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

b) Calcular $(AB^{t} - A^{t}B)$

Calculamos primero las traspuestas cambiando las filas por las columnas:

$$A^{t}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B^{t}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Realizamos la operación pedida:

$$AB^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Resolver la ecuación $B^t X + A^t B = A^t$

Resolvemos primero con las letras:

$$B^t X + A^t B = A^t$$
$$B^t X = A^t - A^t B$$
$$(B^t)^{-1} B^t X = (B^t)^{-1} (A^t - A^t B)$$
$$X = (B^t)^{-1} (A^t - A^t B)$$

Hacemos las operaciones pedidas (las inversas y el producto A^tB lo tenemos del apartado anterior):

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $A^t B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$A^t - A^t B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de $B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $(B^t)^{-1} = \frac{1}{|B^t|} (Adj\, B^t)^t$

$|B^t| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$

$(B^t)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Si lo hacemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = 2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1/2} (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1 = 2F_1 + F_2$ $\quad$ $F_2 = F_2 - F_1$ $\quad$ $F_1 = F_1/2$ $\quad$ $F_2 = F_2/2$

Hay que comprobar que lo hemos hecho bien (no es obligatorio):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como da la identidad está bien calculada

Ahora sustituimos y calculamos el valor:

$$X = (B^t)^{-1} (A^t - A^t B) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{-17}{2} \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema B.2:

En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde *t* es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de *t* se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de *t* se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Solución:

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

La función que nos dan representa los beneficios, por lo que para tener beneficios basta que esa función tenga signo positivo y para tener pérdidas deberá tener signo negativo.

Como se trata de un polinomio es continuo para saber los intervalos en los que es positivo y negativo vamos a hallar cuando vale cero y estudiaremos el signo de la función antes y después de esos valores.

$f(t)=t^3-8t^2+15t=0 \rightarrow t^3-8t^2+15t=t\cdot(t^2-8t+15)=0 \rightarrow t=0$ (primera solución)

$t^2-8t+15=0 \rightarrow$

$$t=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot15}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm2}{2}=\begin{cases}\frac{8+2}{2}=5\\ \frac{8-2}{2}=3\end{cases}$$

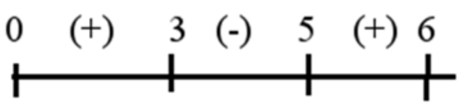
Por lo que tenemos tres valores $t = 0$, $t = 3$ y $t = 5$. Estudiamos el signo de la función en valores intermedios (no tomamos negativos porque se trata de los años transcurridos):

$f(1)=1^3-8\cdot1^2+15\cdot1=8>0$

$f(4)=4^3-8\cdot4^2+15\cdot4=-4<0$

$f(6)=6^3-8\cdot6^2+15\cdot6=18>0$

Con esto podemos elaborar un gráfico como el siguiente:



Y podemos concluir que tuvo beneficios en los periodos]0, 3[U]5, 6[y pérdidas en]3, 5[.

b) ¿En qué valor de *t* se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

Nos preguntan por un máximo absoluto. Como se trata de una función continua (es un polinomio) en un intervalo cerrado podemos afirmar que alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en los máximos y mínimos relativos o en los extremos del intervalo de definición.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Para hallar los extremos relativos derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$f'(t)=3t^2-16t+15=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 3\cdot 15}}{2\cdot 3}=\frac{16\pm\sqrt{76}}{6}=\begin{cases}\frac{16+\sqrt{76}}{6}=4.119\\ \frac{16-\sqrt{76}}{6}=1.214\end{cases}$$

Para saber si son máximos o mínimos relativos calculamos la segunda derivada y sustituimos los valores:

$$f''(t)=6t-16$$

$f''(4.119)=6\cdot 4.119-16\simeq 8.71>0$ al ser positiva es un mínimo relativo.

$f''(1.214)=6\cdot 1.214-16\simeq -8.72<0$ al ser negativa es un máximo relativo.

Hallamos los valores en esos puntos y en los extremos del intervalo de definición:

$$f(0)=0^3-8\cdot 0^2+15\cdot 0=0$$

$$f(1.214)=1.214^3-8\cdot 1.214^2+15\cdot 1.214=8.20880$$

$$f(4.119)=4.119^3-8\cdot 4.119^2+15\cdot 4.119=-4.0607$$

$$f(6)=6^3-8\cdot 6^2+15\cdot 6=18$$

Por lo tanto, la función tiene su máximo absoluto en el valor t = 6 años y fue de 180 000 € (ya que la función viene dada en decenas de miles de €)

El máximo beneficio fue de 180 000 euros y se alcanzó a los 6 años.

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

Por lo visto en el apartado anterior podemos concluir que el mínimo absoluto de la función está en el valor 4.119 años y que fue de 40 607 € de pérdidas (ya que el valor del beneficio es negativo)

La máxima pérdida fue de 40 607 euros a los 4.119 años.

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

Como la función se trata de un polinomio, que es continuo, y observamos que, a partir de t = 6 siempre crece (rama parabólica) podemos concluir que no volvería a tener pérdidas (no puede volver a ser negativo). Podemos observar que la función presenta una rama parabólica que tiende a +∞:

$$\lim_{x\to+\infty}(t^3-8t^2+15t)=+\infty$$

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

Problema B.3:

Sabemos que el 5 % de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5 000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5 000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5 000 euros?

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

H → “Hombre trabajador de la empresa”

M → “Mujer trabajadora de la empresa”

S → “Tener un salario mayor que 5 000 euros”

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como el 5 % de los hombres tienen un salario mensual superior a 5 000 € tenemos que:

$$P(S/H) = 0.05$$

- Como el 2 % de las mujeres tienen un salario mensual superior a 5 000 € tenemos que:

$$P(S/M) = 0.02$$

- Como el 30 % de los trabajadores son mujeres tenemos que: $P(M) = 0.3$

El problema se puede resolver por tabla de contingencias o por árbol. Como no tiene dos fases claramente diferenciadas lo más fácil es resolverlo por tabla de contingencias. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

Por tabla de contingencias:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos H, M y S.

	H	M	Total:
S			
$\bar{S}$			
Total:			1

Hay una probabilidad que podemos poner directamente: $P(M) = 0.3$

	H	M	*Total:*
S			
$\bar{S}$			
Total:		0.3	1

Inmediatamente se deduce que $P(H) = 0.7$

Como el 5 % de los hombres cobra más de 5 000 € calculamos que:

$$P(H \cap S) = P(H) \cdot P(S/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

Como el 2 % de las mujeres cobra más de 5000 € calculamos que:

$$P(M \cap S) = P(M) \cdot P(S/M) = 0.3 \cdot 0.02 = 0.006$$

Ponemos esos valores y completamos la tabla:

	H	M	Total:
S	0.035	0.006	0.041
$\bar{S}$	0.665	0.294	0.959
Total:	0.7	0.3	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

Nos piden $P(S) = 0.041 \to 4.1$ % (directamente de la tabla)

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

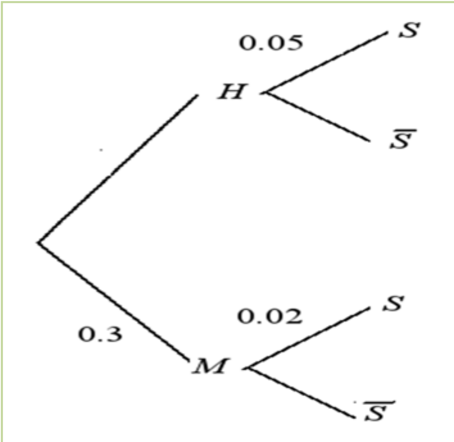
Nos piden $P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0.006}{0.041} \cong 0.1463 \to 14.63\ \%$

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros?

Nos piden: $P(H \cap S) = P(H) \cdot P(S/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035 \to 3.5$ %

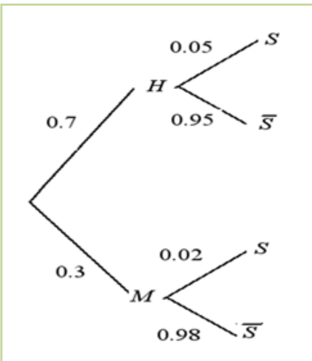
<u>Por diagrama de árbol</u>:

No hay unas fases claras, pero podemos construir el árbol a partir de la probabilidad de ser hombre o mujer y tener o no un salario superior a 5 000 euros. Podemos situar los datos como ves en la figura:



Para completar el árbol hemos de tener en cuenta que la suma de las probabilidades en cada nudo ha de ser 1:

Los situamos en el árbol:



Ahora multiplicando las probabilidades de las ramas tenemos los valores de las intersecciones:

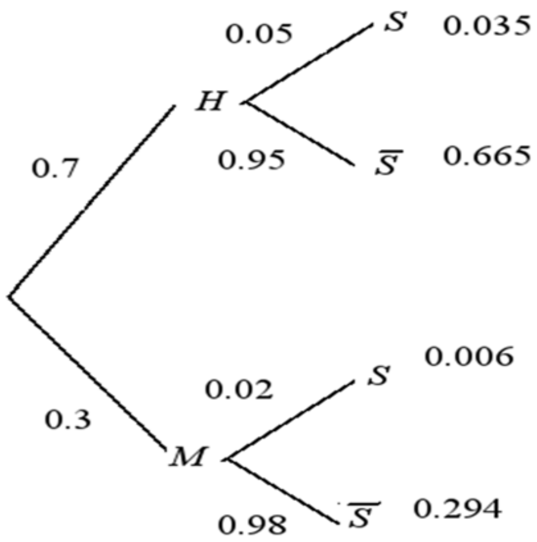
$$P(H \cap S) = P(H) \cdot P(S/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$$

$$P(H \cap s) = P(H) \cdot P(s/H) = 0.7 \cdot 0.95 = 0.665$$

$$P(M \cap S) = P(M) \cdot P(S/M) = 0.3 \cdot 0.02 = 0.006$$

$$P(M \cap s) = P(M) \cdot P(s/M) = 0.3 \cdot 0.98 = 0.294$$

Con lo que el árbol completo es:



Respondemos a las cuestiones:

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5 000 euros.

Nos piden $P(S)$ por el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$P(S) = P(S \cap H) + P(S \cap M) = P(H) \cdot P(S/H) + P(M) \cdot P(S/M) = 0.035 + 0.006 = 0.041$

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

Se trata de probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0.006}{0.041} \cong 0.1463 \rightarrow 14.63\%$$

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5 000 euros?

$P(H \cap S) = 0.035 \rightarrow 3.5\ \%$ directamente del diagrama)

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Problema A.1:

Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos. Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Problema A.2:

Dada la función, $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$ se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Problema A.3:

Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25 % de los coches son de motor híbrido. El 20 % son de tipo Van y el 40% de tipo Urban. El 15 % de los de tipo Van y el 40 % de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2018–2019** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el estudiante deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN B

Problema B.1:

Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A.

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema B.2:

Consideremos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{ax^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

d) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Problema B.3:

Un estudiante acude a la universidad el 70 % de las veces con su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1 % de las veces que acude andando, el 3 % de las que lo hace en transporte público y el 6 % de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo.

Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos. Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros.

¿Cuántas unidades se han de producir cada día de cada producto para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos productos (A y B), un objetivo (obtener el máximo ingreso) y unas restricciones (las horas máximas que podemos destinar a montaje y pintura de los productos).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuántas unidades hay que producir cada día de A y B por lo que las variables de decisión serán:

x – Unidades que debemos producir de A.

y - Unidades que debemos producir de B.

Función objetivo: Queremos obtener ingresos máximos. Como por cada unidad de A obtenemos 40 euros con x unidades ganamos $40x$. Con cada unidad de B obtenemos 35 euros con las y unidades producidas que ganaremos $35y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$I(x, y) = 40x + 35y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible: $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Como tenemos 10 horas para montar piezas y necesitamos 30 minutos para montar cada unidad de A tenemos que harán falta, para x unidades, $30x$ minutos de montaje. Para cada unidad de B hacen falta 40 minutos por lo que necesitamos, para y unidades, $40y$ minutos. Debemos de sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser menor o igual al tiempo disponible. Sin embargo, es necesario expresar el tiempo disponible en minutos para unificar las unidades por lo que escribiremos $60 \cdot 10 = 600$ minutos. (También se pueden pasar los minutos a horas, pero salen decimales que complican la representación):

$$30x + 40y \leq 600$$

Como tenemos 11 horas para pintar productos y necesitamos 40 minutos para pintar cada unidad de A tenemos que harán falta, para x unidades, $40x$ minutos de pintura. Para cada unidad de B hacen falta 30 minutos por lo que necesitamos, para y unidades, $30y$ minutos. Debemos de sumar ambas cantidades e imponer que ha de ser menor o igual al tiempo disponible. Sin embargo, es necesario expresar el tiempo disponible en minutos para unificar las unidades por lo que escribiremos $60 \cdot 11 = 660$ minutos. (También se pueden pasar los minutos a horas, pero salen decimales que complican la representación):

$$40x + 30y \leq 660$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ 30x + 40y \leq 600 \\ 40x + 30y \leq 660 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$y = \frac{600 - 30x}{40} = \frac{60 - 3x}{4}$$

Tabla de valores:

x	20	10	0
y	0	7.5	15

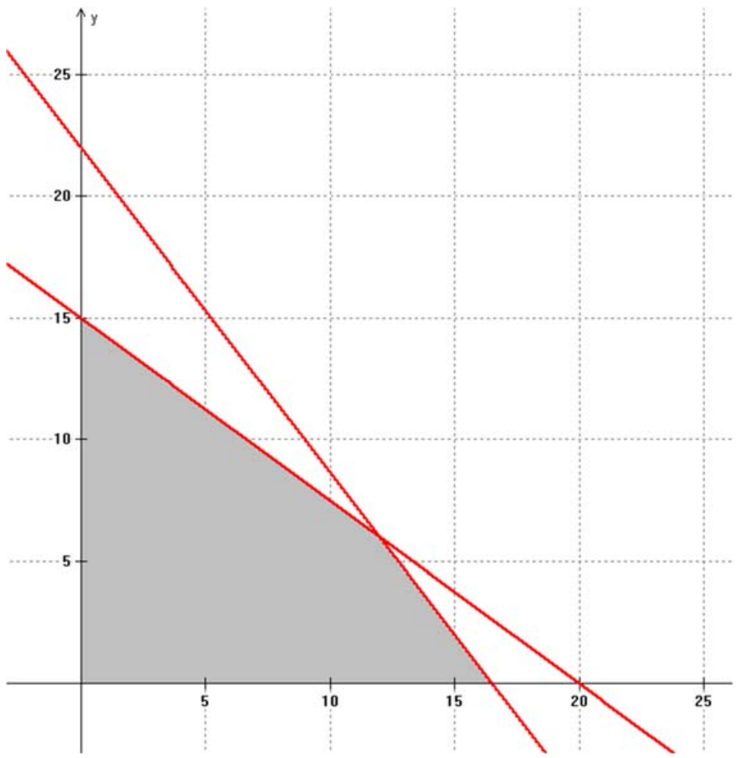
Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "*y*":

$$y = \frac{660 - 40x}{30} = \frac{66 - 4x}{3}$$

Tabla de valores:

x	0	9	16.5
y	22	10	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en la tercera y la cuarta podemos sustituir el (0, 0) y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. Por lo que la representación queda:



La región tiene 4 vértices:

- El primero es el (0, 0) que se ve a simple vista.
- El segundo es el (0, 15) que también podemos ver en la representación.
- El tercero es el corte de $y=\frac{60-3x}{4}$ y $y=\frac{66-4x}{3}$ por lo que igualamos ambas ecuaciones y despejamos la x:

$$\frac{60-3x}{4}=\frac{66-4x}{3}$$

$$3\cdot(60-3x)=4\cdot(66-4x)$$

$$180-9x=264-16x$$

$$7x=84$$

$$x=12$$

  la otra componente la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos:

$$y=\frac{60-3\cdot 12}{4}=6$$

  por lo que el punto será (12, 6)

- El cuarto es el corte de $y=\frac{66-4x}{3}$ y el eje OX pero ese valor lo podemos deducir de la tabla: (16.5, 0)

Los 4 vértices a estudiar son: (0, 0) (0, 15) (12, 6) y (16.5, 0)

La función objetivo era:

$$I(x,y)=40x+35y$$

Sustituimos los vértices hallados:

$I(0,0)=40\cdot 0+35\cdot 0=0$ euros

$I(0,15)=40\cdot 0+35\cdot 15=525$ euros

$I(12,6)=40\cdot 12+35\cdot 6=690$ euros

$I(16.5,0)=40\cdot 16.5+35\cdot 0=660$ euros

Como buscamos el ingreso máximo tenemos que se da produciendo 12 unidades del producto A y 6 unidades de B y el ingreso máximo es de 690 €.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo
LibrosMareaVerde.tk

Problema A.2:

Dada la función, $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$ se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$$x^2+x-2=0 \rightarrow$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=1\\ \frac{-1-3}{2}=-2\end{cases}$$

por lo que no existe en los puntos de abscisa 1 y –2.

El **dominio** es:

$$Dom\, f(x)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$$

Los **puntos de corte con el eje *OX*** son los valores de x cuando $f(x) = 0$, que por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$x^2-2x-3=0 \rightarrow$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=3\\ \frac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Por lo que corta al eje OX en dos puntos: (3, 0) y (–1, 0).

El **punto de corte con el eje *OY*** es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$ →

$$f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0-3}{0^2+0-2}=\frac{3}{2}$$

por lo que corta en el punto (0, 3/2).

Los puntos de corte con los ejes son: (3, 0), (–1, 0) y (0, 3/2)

b) Las asíntotas horizontales y verticales.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}=1$$

(por ser cociente de polinomios del mismo grado) la asíntota horizontal es $y = 1$.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

No lo piden pero para guiarnos en la representación podemos ver si la gráfica tiende a la asíntota por encima o por debajo de ella en –∞ y en +∞. Para ello, sustituimos un valor de la función relativamente grande (no hace falta mucho) positivo y negativo y observamos si el resultado es algo mayor o menor que el valor de la asíntota:

$$f(100) = \frac{100^2 - 2 \cdot 100 - 3}{100^2 + 100 - 2} = \frac{9797}{10098} \simeq 0.9701 < 1$$

luego en +∞ va por debajo.

$$f(-100) = \frac{(-100)^2 + 2 \cdot 100 - 3}{(-100)^2 - 100 - 2} = \frac{10197}{9898} \simeq 1.0302 > 1$$

luego en –∞ va por encima.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = -2$ y $x = 1$, calculamos los límites a esos puntos de la función:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left(\frac{5}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases}$$

por lo que $x = -2$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = \left(\frac{-4}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = -\infty \end{cases}$$

por lo que $x = 1$ es asíntota vertical.

Las asíntotas son: $y = 1$, $x = -2$ y $x = 1$.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x^2+x-2)-(x^2-2x-3)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$3x^2 + 2x + 7 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3 \cdot 7}}{2\cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-80}}{6} = \nexists\, sol.\, \mathbb{R}$$

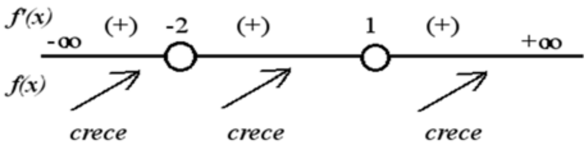
Como no hay soluciones reales eso quiere decir que no hay puntos críticos (no hay posibles máximos o mínimos). Por lo que el estudio de la monotonía hay que hacerlo con los puntos de discontinuidad del dominio $x = -2$ y $x = 1$, y estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados:

Los valores calculados han sido:

$$f'(-3)=\frac{3\cdot(-3)^2+2\cdot(-3)+7}{((-3)^2-3-2)^2}=\frac{28}{16}>0$$

$$f'(0)=\frac{3\cdot(0)^2+2\cdot(0)+7}{(0^2+0-2)^2}=\frac{7}{4}>0$$

$$f'(2)=\frac{3\cdot(2)^2+2\cdot(2)+7}{((2)^2+2-2)^2}=\frac{23}{16}>0$$

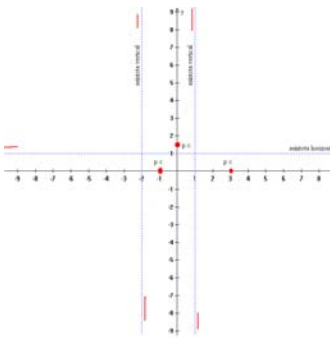


Por lo que tenemos que la función crece en:]–∞, -2[U]–2, 1[U]1, +∞[.

También podemos decir que la función crece en todo su dominio.

d) Los máximos y mínimos locales.

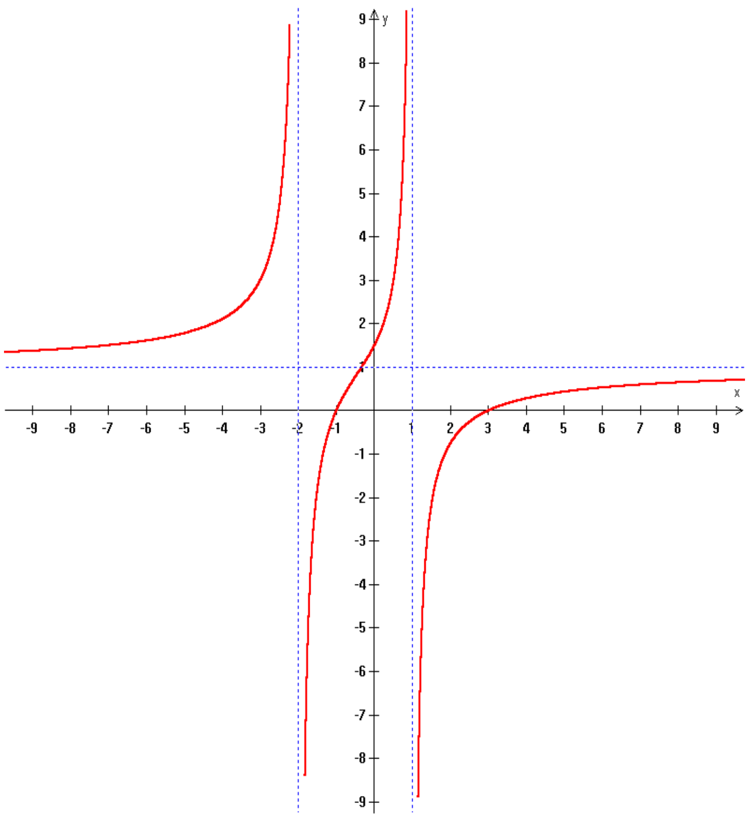
Por lo visto en el apartado anterior la función NO presenta ningún mínimo ni máximo local puesto que no tiene puntos críticos que hagan cero la primera derivada.



e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte (3, 0), (–1, 0) y (0, 3/2), las asíntotas verticales en x = –2 y x = 1 (con sus tendencias a infinito) y la asíntota horizontal en y = 1 con sus tendencias y obtenemos:

La gráfica queda así:



Problema A.3:

Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25 % de los coches son de motor híbrido. El 20 % son de tipo Van y el 40 % de tipo Urban. El 15 % de los de tipo Van y el 40 % de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

$V \rightarrow$ "Coche modelo de tipo Van"

$U \rightarrow$ "Coche modelo de tipo Urban"

$S \rightarrow$ "Coche modelo de tipo Suv"

$H \rightarrow$ "Coche con motor híbrido"

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como el 25 % de los coches son de motor híbrido tenemos que: $P(H) = 0.25$
- Como el 20 % son de tipo Van: $P(V) = 0.2$
- Como el 40 % son de tipo Urban: $P(U) = 0.4$
- Como el 15 % de los de tipo Van son híbridos tenemos que: $P(H/V) = 0.15$
- Como el 40 % de los de tipo Urban son híbridos tenemos que: $P(H/U) = 0.4$

  Además tenemos unas cuantas probabilidades que se deducen casi inmediatamente:
- Como el 25 % son híbridos el 75 % no lo son: $P(\overline{H}) = 0.75$
- Si el 20 % son Van y el 40 % son Urban los de tipo Suv son: 1 - 0.2 - 0.4 = 0.4 por lo que: $P(S) = 0.4$

El problema se puede resolver fácilmente por tabla de contingencias o por árbol. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

Por tabla de contingencias:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos V, U,S y H y su contrario:

	V	U	S	Total:
H				
$\overline{H}$				
Total:				1

Todas las probabilidades totales las ponemos directamente:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

	V	U	S	Total:
H				0.25
$\overline{H}$				0.75
Total:	0.2	0.4	0.4	1

Recordemos que las probabilidades de las casillas centrales son intersecciones y que los datos que tenemos son de probabilidades condicionadas por lo que tenemos que aplicar que:

$$P(V \cap H) = P(V) \cdot P(H/V) = 0.2 \cdot 0.15 = 0.03$$

$$P(U \cap H) = P(U) \cdot P(H/U) = 0.4 \cdot 0.4 = 0.16$$

Si completamos esas dos casillas podemos completar la tabla calculando las diferencias correspondientes:

	V	U	S	Total:
H	0.03	0.16		0.25
$\overline{H}$				0.75
Total:	0.2	0.4	0.4	1

Tenemos que:

$P(H \cap S) = 0.25 – 0.16 – 0.03 = 0.06$

$P(V \cap \overline{H}) = 0.2 – 0.03 = 0.17$

$P(U \cap \overline{H}) = 0.4 – 0.16 = 0.24$

$P(S \cap \overline{H}) = 0.75 – 0.17 – 0.24 = 0.34$

Ponemos esos valores y completamos la tabla:

	V	U	S	Total:
H	0.03	0.16	0.06	0.25
$\overline{H}$	0.17	0.24	0.34	0.75
Total:	0.2	0.4	0.4	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas:

a) La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.

Nos piden $P(U/H)$ aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(U/H) = \frac{P(U \cap H)}{P(H)} = \frac{0.16}{0.25} = 0.64 \to 64\ \%$$

b) La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.

Nos piden $P(V/\overline{H})$ aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(V/\bar{H}) = \frac{P(V\cap\bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{0.17}{0.75} \cong 0.2267 \to 22.67\ \%$$

c) La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.

Nos piden $P(H/S)$ aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(H/S) = \frac{P(H\cap S)}{P(S)} = \frac{0.06}{0.4} = 0.15 \to 15\ \%$$

d) La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco híbrido.

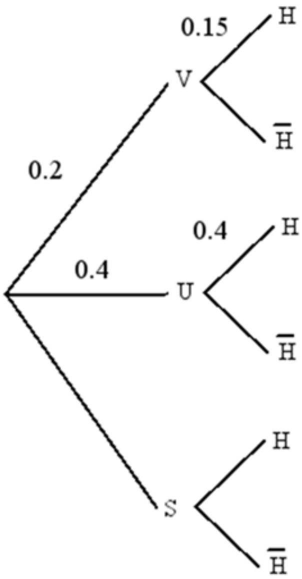
Nos piden $P(\bar{V}\cap\bar{H})$ que es un dato que no podemos leer directamente de la tabla pero que si tenemos en cuenta que el suceso $\bar{V} = U\cap S$ (es decir, si no es Van es porque es Urban o Suv) tenemos que:

$P(\bar{V}\cap\bar{H}) = P((U\cap S)\cap\bar{H}) = P(U\cap\bar{H}) + P(S\cap\bar{H}) = 0.24 + 0.34 = 0.58 \to 58\ \%$

$$P(\bar{V}\cap\bar{H}) = 0.58 \to 58\ \%$$

<u>Por diagrama de árbol</u>:

No hay unas fases claras pero podemos construir el árbol a partir de la probabilidad de ser un modelo u otro y, después que tenga o no motor híbrido. Podemos situar los datos como ves en la figura:



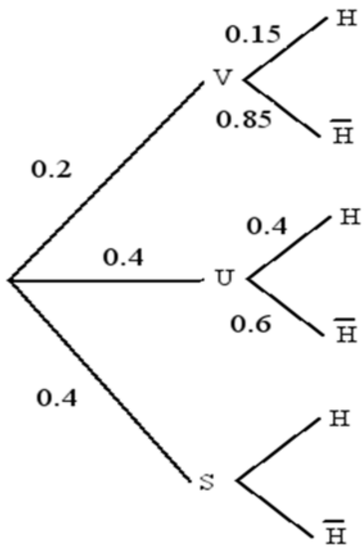
Para completar el árbol procedemos de la siguiente manera:

$P(S) = 1 - P(V) - P(U) = 1 - 0.2 - 0.4 = 0.4$

$P(\bar{H}/V) = 1 - 0.15 = 0.85$

$P(\bar{H}/U) = 1 - 0.4 = 0.6$

Las situamos en el árbol:

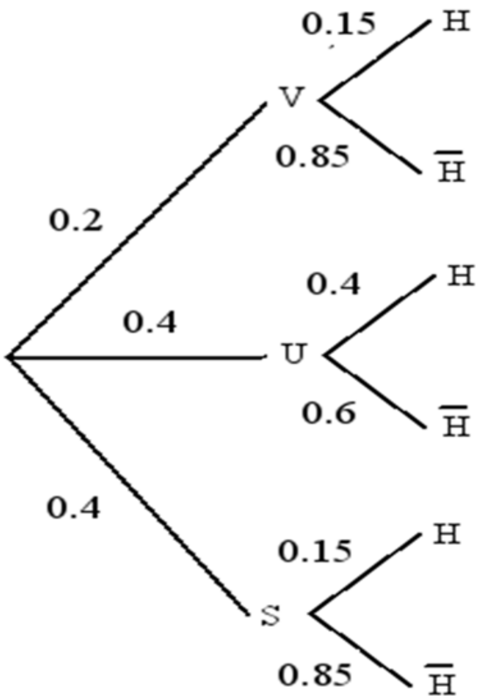


Ahora aplicamos el teorema de la probabilidad total para hallar las probabilidades que desconocemos:

$P(H) = P(H\cap V) + P(H\cap U) + P(H\cap S) \to$

$0.25 = 0.2 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot P(H/S) \to$

$P(H/S) = (0.25 - 0.03 - 0.16)/0.4 = 0.15$



Por lo que: $P(\overline{H}/S)$ = 1 – 0.15 = 0.85

Con lo que el árbol completo es:

Una vez construido el árbol la resolución es igual que con tabla de contingencias.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo

SOLUCIONES OPCIÓN B CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema B.1:

Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A.

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Calcula el determinante de A.

El cálculo del determinante lo podemos hacer directamente (por la regla de Sarrus) o bien simplificar el cálculo aplicando propiedades de matrices y determinantes SOLO HAY QUE HACERLO DE UNA FORMA ya que el resultado es el mismo.

<u>Directamente por Sarrus</u>:

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{8}{27}+\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{27}{27}=1$$

Con lo cual:

Solución a) $|A|=1$.

Aplicamos que se puede sacar un **factor común de una matriz** si es común a todos los elementos por lo que tenemos que:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicamos que $|\alpha A|=\alpha^n|A|$ donde n es la dimensión de la matriz:

$$|A|=\left(\frac{1}{3}\right)^3\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot(1\cdot2\cdot2+1\cdot(-2)\cdot(-2)+2\cdot2\cdot1-2\cdot2\cdot(-2)-2\cdot2\cdot(-2)-1\cdot1\cdot1)=1$$

El resultado es el mismo lógicamente pero no se manejan tantas fracciones.

También se puede aplicar que se puede sacar **factor común a una línea de un determinante** por lo que:

$$|A|=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{27}\cdot27=1$$

(los factores salen de la 1ª, 2ª y 3ª fila)

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

Para comprobarlo hay que verificar dos cosas:

- Que tiene inversa.
- Que la inversa coincide con su traspuesta.

Para probar que tiene inversa hay que comprobar que su determinante no es cero: $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0$

Pero en el apartado anterior hemos visto que $|A|=1\neq0$ por lo que $\exists A^{-1}$

Para ver si coincide con la traspuesta aplicamos la definición de inversa: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Si al multiplicar la matriz A por su traspuesta sale la identidad tendremos que es ortogonal.

Calculamos la traspuesta:

$$A^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Para hacer los productos es mejor sacar factor común en ambas la fracción y después multiplicar:

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+4+4 & 2-4+2 & -2-2+4\\ 2-4+2 & 4+4+1 & -4+2+2\\ -2-2+4 & -4+2+2 & 4+1+4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Si hacemos el producto conmutando las matrices sale lo mismo:

$$A^{tA}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1+4+4 & -2+4-2 & 2+2-4\\ -2+4-2 & 4+4+1 & -4+2+2\\ 2+2-4 & -4+2+2 & 4+1+4\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por lo que $A^t=A^{-1}$ y la matriz A es ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

Se puede resolver fácilmente aplicando álgebra matricial:

$$A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

Como la matriz es ortogonal tenemos que su inversa coincide con su transpuesta.

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\\ \frac{-2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

Luego la solución es: x = 1/3, y = 1/3, z = 5/3.

Problema B.2:

Consideremos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{ax^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

d) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Solución:

a) Calcula el valor de a para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{ax^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$ sea continua en todo su dominio.

La función es una función definida a trozos por lo que, para ser continua, lo han de ser cada uno de los trozos en su dominio de definición y además tiene que ser continua en el punto de cambio de uno a otro trozo.

- El primer trozo es continuo en su dominio de definición puesto que se trata de un polinomio que es continuo para todo número real.
- El segundo trozo es una función racional polinómica que no es continua cuando se anula el denominador de la fracción, pero $x^2+1\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ por lo que es continuo también.

Queda por comprobar el punto de cambio: $x = 1$.

Para que una función sea continua en un punto x_0 se tienen que cumplir tres condiciones:

- Existe la función en el punto $\exists f(x_0)$
- Existen y coinciden los límites laterales de la función al punto $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$
- Los dos valores anteriores coinciden.

Calculamos $f(1)=1^2-3\cdot 1+3=1$

Calculamos $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}\dfrac{ax^2}{x^2+1}=\dfrac{a\cdot 1^2}{1^2+1}=\dfrac{a}{2}$ y $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-3x+3)=1^2-3\cdot 1+3=1$

Para que coincidan los dos valores y así exista el límite tenemos que: $\dfrac{a}{2}=1\Rightarrow a=2$

Si sucede esto, tenemos que si $a = 2$, y que $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ es continua en ese punto y, como ya lo era en el resto, podemos concluir que es continua en todo su dominio, $\Re$.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Como sabemos que $a = 2$ la función la escribimos como: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{2x^2}{x^2+1} & si \quad x>1 \end{cases}$

Para calcular los intervalos hallamos la derivada:

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & si\ \ x\le 1\\ \dfrac{4x\cdot(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} & si\ \ x>1\end{cases}=\begin{cases}2x-3 & si\ \ x\le 1\\ \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} & si\ \ x>1\end{cases}$$

Igualamos a cero la derivada: $2x-3=0$. Luego $x=3/2>1$, pero como el trozo está definido para $x\le 1$ no lo vamos a considerar.

En ese trozo el valor de la derivada será siempre negativo (decreciente): $f'(0)=-3<0$

Para el otro trozo sucede algo parecido. Vale cero en $x=0<1$ luego tampoco hay que considerarlo.

En ese trozo el valor de la derivada será $f'(2)=\dfrac{8}{25}>0$ siempre positivo (creciente)

Por lo que los intervalos quedan decreciente en $]-\infty, 1[$ y creciente en $]1, +\infty[$

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Como sabemos que $a=2$ la función la escribimos como: $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3 & si\ \ x\le 1\\ \dfrac{2x^2}{x^2+1} & si\ \ x>1\end{cases}$

No tiene asíntotas verticales pues x^2+1 nunca se anula.

Las asíntotas horizontales se encuentran en el valor del límite cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$

Hacemos primero el límite cuando x tiende a $+\infty$. Tenemos que tomar el segundo trozo: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=2$

(por ser cociente de polinomios del mismo grado) por lo que tiene una asíntota horizontal en $y=2$ en $+\infty$

Hacemos el límite cuando x tiende a $-\infty$. Tenemos que tomar el primer trozo:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=+\infty$$

por lo que no tiene una asíntota horizontal en $-\infty$

d) Calcula $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Como el intervalo de integración es $[-2, 1]$ tenemos que calcular la integral del primer trozo.

Hacemos primero la integral indefinida: $\int (x^2-3x+3)\,dx=\dfrac{x^3}{3}-3\cdot\dfrac{x^2}{2}+3x+C$

Ahora calculamos la definida:

$$\int_{-2}^{1}(x^2-3x+3)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-2}^{1}=\left(\frac{1^3}{3}-3\cdot\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-3\cdot\frac{(-2)^2}{2}+3\cdot(-2)\right)=\frac{11}{6}-\left(\frac{-44}{3}\right)=$$

16.5 u

La integral vale 16.5 u.

Problema B.3:

Un estudiante acude a la universidad el 70 % de las veces con su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1 % de las veces que acude andando, el 3 % de las que lo hace en transporte público y el 6 % de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

V → “Usa su propio vehículo”

T → “Usa transporte público”

A → “Acude andando”

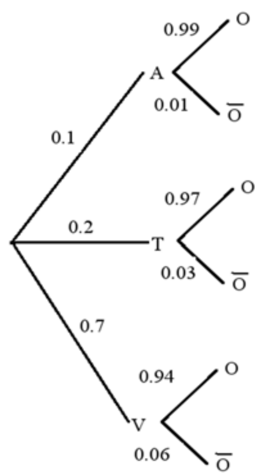
O → “Llega puntual (o’clock)”; $\bar{O}$ → “Llega tarde”. $\bar{O}$ →

En el enunciado nos dan las siguientes probabilidades:

- Como acude el 70 % de las veces en su vehículo tenemos que: $P(V)$ = 0.7
- Como llega tarde el 1 % de las veces que va andando: $P(\bar{O}/A)$ = 0.01 $\bar{O}$
- Como llega tarde el 3 % de las veces que va en transporte público: $P(\bar{O}/T)$ = 0.03
- Como llega tarde el 6 % de las veces que va en su vehículo: $P(\bar{O}/V)$ = 0.06

  Además, tenemos unas cuantas probabilidades que se deducen casi inmediatamente:
- Como llega tarde el 1 % de las veces que va andando el 99 % llega puntual: $P(O/A)$ = 0.99
- Como llega tarde el 3 % de las veces que va en transporte público, el 97 % llega puntual: $P(O/T)$ = 0.97
- Como llega tarde el 6 % de las veces que va en su vehículo, el 94 % llega puntual: $P(O/V)$ = 0.94

Además, tenemos el dato de que acude el doble de veces en transporte público que andando. Como va el 70 % en su propio vehículo tenemos que, para esas dos formas de acudir, hay un 30 % de posibilidades. Al ser el doble el transporte público parece bastante evidente que serán un 10 % y un 20 % → $P(T)$ = 0.2 y $P(A)$ = 0.1



El problema se puede resolver fácilmente por árbol o por tabla de contingencias. Sólo hace falta resolverlo de una forma y los resultados han de ser iguales.

<u>**Por diagrama de árbol**</u>**:**

Podemos establecer dos fases: primero elige el medio de locomoción y luego llega o no tarde. Podemos situar los datos como ves en la figura:

Contestamos ahora a las cuestiones:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.
Nos preguntan por $P(O)$ aplicando el teorema de la probabilidad total:

$P(O)=P(A\cap O)+P(T\cap O)+P(V\cap O)=P(A)\cdot P(O/A)+P(T)\cdot P(O/T)+P(V)\cdot P(O/V)=$

$= 0.1 \cdot 0.99 + 0.2 \cdot 0.97 + 0.7 \cdot 0.94 = 0.951 \rightarrow 95.1\ \%$

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

Nos preguntan por $P(T/\bar{O})$ aplicando la fórmula de Bayes: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T\cap\bar{O})}{P(\bar{O})}$

Del diagrama tenemos que: $P(T\cap\bar{O})=P(T)\cdot P(\bar{O}/T)= 0.2 \cdot 0.03 = 0.006$

Por otro lado, tenemos que: $P(\bar{O})=1-P(O)= 1 - 0.951 = 0.049$

Con lo cual: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T\cap\bar{O})}{P(\bar{O})} = 0.006/0.049 \cong 0.1224 \rightarrow 12.24\ \%$

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

Nos piden $P(\bar{A}/O)$

Aplicamos la fórmula de Bayes: $P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A}\cap O)}{P(O)}$

Si no ha acudido andando ha tenido que hacerlo de alguno de los otros dos modos por lo que tenemos que sumar las probabilidades:

$$P(\bar{A}\cap O) = P(T\cap O) + P(V\cap O) = P(T)\cdot P(O/T) + P(V)\cdot P(O/V) = 0.2\cdot 0.97 + 0.7\cdot 0.94 = 0.852$$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A}\cap O)}{P(O)} = 0.852/0.951 \cong 0.8959 \rightarrow 89.59\ \%$

Por tabla de contingencias:

Elaboramos una tabla de doble entrada con los sucesos A, T, V y O y su contrario:

	A	T	V	Total:
O				
$\bar{O}$				
Total:				1

Con los razonamientos que hemos hecho al principio situamos las probabilidades siguientes:

	A	T	V	Total:
O				
$\bar{O}$				
Total:	0.1	0.2	0.7	1

Recordemos que las probabilidades de las casillas centrales son intersecciones y que los datos que tenemos son de condicionadas por lo que tenemos que aplicar que:

$P(A\cap O)=P(A)P(O/A)= 0.1 \cdot 0.99 = 0.099$

$P(T\cap O)=P(T)P(O/T)= 0.2 \cdot 0.97 = 0.194$

$P(V \cap O) = P(V)P(O/V) =$ 0.7 · 0.94 = 0.658

Si completamos esas tres casillas podemos completar la tabla calculando las diferencias correspondientes y las sumas:

	A	*T*	*V*	Total:
O	*0.099*	*0.194*	*0.658*	
$\bar{O}$				
Total:	0.1	0.2	0.7	1

Tenemos que:

$P(O) = 0.099 + 0.194 + 0.658 = 0.951$

$P(V \cap \bar{H}) = 0.2 - 0.03 = 0.17$

$P(T \cap \bar{O}) =$ 0.2 – 0.194 = 0.006

$P(V \cap \bar{O}) =$ 0.7 – 0.658 = 0.042

Ponemos esos valores y completamos la tabla:

	A	*T*	*V*	Total:
O	*0.099*	*0.194*	*0.658*	0.951
$\bar{O}$	*0.001*	*0.006*	*0.042*	0.049
Total:	0.1	0.2	0.7	1

Contestamos ahora a las cuestiones planteadas de forma similar al árbol:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

Nos preguntan por $P(O)$ que directamente de la tabla vemos que es $P(O)$ = 0.951 → 95.1 %

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

Nos preguntan por $P(T/\bar{O})$ aplicando la fórmula de Bayes: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T \cap \bar{O})}{P(\bar{O})}$

De la tabla tenemos que: $P(T \cap \bar{O}) =$ 0.006

Por otro lado, tenemos que: $P(\bar{O}) =$ 0.049

Con lo cual: $P(T/\bar{O}) = \frac{P(T \cap \bar{O})}{P(\bar{O})}$ = 0.006/0.049 ≅ 0.1224 → 12.24 %

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.

Nos piden $P(\bar{A}/O)$

Aplicamos la fórmula de Bayes: $P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A} \cap O)}{P(O)}$

Si no ha acudido andando ha tenido que hacerlo de alguno de los otros dos modos por lo que tenemos que sumar las probabilidades: $P(\bar{A} \cap O) = P(T \cap O) + P(V \cap O) =$ 0.194 + 0.658 = 0.852.

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(\bar{A}/O) = \frac{P(\bar{A} \cap O)}{P(O)} = 0.852/0.951 \cong 0.8959 \rightarrow 89.59\ \%$$

Autor: Pedro Podadera Sánchez
Revisor: Luis Carlos Vidal Del Campo