MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Ismael Montero Penido

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos
d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados

Problema 1:

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x \neq 1, -1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1.25 puntos)**

Problema 2:

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$. **(2.5 puntos)**

Problema 3:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$. **(1 punto)**

Problema 4:

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{a} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Problema 5:

Sea $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{sen\, x}{2 - \cos x}$

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**
b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

Problema 6:

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)\, dx$. **(2 puntos)**
b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3, 5)$. **(0.5 puntos)**

Problema 7:

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

Problema 8:

Se considera el punto $A(1, -2, 0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. **(1.25 puntos)**
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. **(1.25 puntos)**

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema 1:

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ para $x \neq 1, -1$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1.25 puntos)**
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) Como $x \neq 1, -1$, se deduce que el dominio de la función es: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
Empezamos el estudio de las asíntotas:

Asíntota vertical *(Son rectas $x = a$ tal que $a \notin Dom(f)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$)*

$\boxed{x = 1}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{-4}{0} = \infty$

Luego $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 1$

Estudiamos el signo del infinito a la derecha y la izquierda de 1:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$\boxed{x = -1}$

$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{0}{0} = IND.$

Aplico la regla de L'Hôpital

$\lim_{x \to -1} \frac{2x-2}{2x} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow f(x)$ **no tiene** asíntota vertical en $x = -1$

Asíntota horizontal (Son rectas $y = b$ tal que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$)

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} = IND.$

Como el grado del polinomio del numerador es el mismo que el grado del polinomio del denominador *(grado 2)*, se deduce que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = 1$.

Luego $y = 1$ es asíntota horizontal

Asíntota oblicua

No hay asíntota oblicua porque la función ya tiene asíntota horizontal por ambos lados.

b) Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, primero derivo la función:

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Estudio el signo de $f'(x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+4x+2}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Este resultado no nos sirve pues $x = -1 \notin Dom(f)$

Por tanto:

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$+$	$+$
	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece	$\nearrow$ Crece

Luego $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$

Problema 2:

Calcula $a > 0$ sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = xe^{3x}$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ vale $\frac{1}{9}$. **(2.5 puntos)**

Solución:

En el intervalo $(0, a)$ la función es positiva luego, el área determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = a$ es:

$$A = \int_0^a xe^{3x}\ dx$$

Resolvemos usando el método por partes:

$$A = \int_0^a xe^{3x}\ dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{3x}dx & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_0^a - \int_0^a \frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right]_0^a =$$
$$= \left(\frac{1}{3}ae^{3a} - \frac{1}{9}e^{3a}\right) - \left(-\frac{1}{9}\right) = e^{3a}\cdot\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9}$$

Como el área tiene que valer $\frac{1}{9}$, igualamos el resultado a dicho valor:

$$e^{3a}\cdot\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow e^{3a}\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{9}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Por tanto, $\boldsymbol{a = \frac{1}{3}}$ para que el área valga $\frac{1}{9}\ u^2$

Problema 3:

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+2 \\ 0 & 1 & m+1 \\ m & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a) Estudia el rango de A según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = 2$, calcula la inversa de $2020A$. **(1 punto)**

Solución:

a) Calculamos el determinante de la matriz e igualamos a 0 para ver qué valores de la m anula el determinante:
$|A| = 5 - m^2 - m - m^2 - 2m = -2m^2 - 3m + 5$

$-2m^2 - 3m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = -\frac{5}{2}$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -\frac{5}{2} \Rightarrow |A| \neq 0$. Por tanto, $rg(A) = 3$
- Si $m = 1$ o $m = -\frac{5}{2} \Rightarrow |A| = 0$. Por tanto, $rg(A) < 3$
  Como en ambos casos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, se deduce que $rg(A) = 2$

En resumen

$\boldsymbol{Si\ m \neq 1\ y\ m \neq -\frac{5}{2}}$	$\boldsymbol{rg(A) = 3}$
$\boldsymbol{Si\ m = 1\ o\ m = -\frac{5}{2}}$	$\boldsymbol{rg(A) = 2}$

b) Para $m = 2$, se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

La inversa de $2020A$ es:

$$(2020A)^{-1} = 2020^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2020}A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

Recordemos que A^{-1} existe si $|A| \neq 0$ y además, para su cálculo, utilizaremos la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}Adj(A^t)$$

Por el apartado a) sabemos que como $m \neq 1$ y $m \neq -\frac{5}{2}$ entonces $|A| \neq 0$, por tanto A^{-1}existe.

$|A| = -2(2)^2 - 3 \cdot 2 + 5 = -8 - 6 + 5 = -9$

Calculamos la traspuesta: $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Calculamos los menores adjuntos:

$A_{11}^t = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A_{12}^t = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5$

$A_{13}^t = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$A_{21}^t = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 6$

$A_{22}^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

$A_{23}^t = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -3$

$A_{31}^t = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A_{32}^t = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$$A_{33}^t = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Luego $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Así que $A^{-1} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto $(2020A)^{-1} = \frac{1}{2020} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{\frac{1}{18180} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -7 \\ 6 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$

Problema 4:

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{a} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-a}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de a. **(1.25 puntos)**
b) Para $a=2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de r y s y es perpendicular a ambas. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) De la recta r obtenemos el punto $A(1,2,1)$ y el vector director $\overrightarrow{d_r}=(1,1,a)$
De la recta s obtenemos el punto $B(3,3,-1)$ y el vector director $\overrightarrow{d_s}=(-a,-1,2)$

Construyo el vector $\overrightarrow{AB}=(2,1,-2)$

Construyo las siguientes matrices:

$$M=\begin{pmatrix}\overrightarrow{d_r}\\ \overrightarrow{d_s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -a & -1 & 2\end{pmatrix}$$
$$M^*=\begin{pmatrix}\overrightarrow{d_r}\\ \overrightarrow{d_s}\\ \overrightarrow{AB}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -a & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Para ver la posición relativa de ambas rectas debemos de estudiar el rango de la matriz en función del parámetro a.

Calculo del determinante de M^*
$|M^*|=-a^2+4=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$
Por tanto:

- Si $a \neq \pm 2$, se tiene que $rg(M^*)=3$ pues $|M^*| \neq 0$.
  Como $rg(M) \leq 2$, se deduce que $rg(M) \neq rg(M^*) \Rightarrow r\ y\ s\ se\ cruzan$.
- $Si\ a=2$, se tiene que $rg(M^*)<3$. Luego:
  $$M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
  Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1 \neq 0$, se deduce que $rg(M)=rg(M^*)=2$
  Por tanto, $r\ y\ s\ son\ secantes\ en\ un\ punto$.
- $Si\ a=-2$, se tiene que $rg(M^*)<3$. Luego:
  $$M^*=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
  Como el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3 \neq 0$, se deduce que $rg(M)=rg(M^*)=2$
  Por tanto, $r\ y\ s\ son\ secantes\ en\ un\ punto$.

Resumiendo

$\boldsymbol{Si\ a \neq -2\ y\ a \neq 2}$	$\boldsymbol{r\ y\ s\ se\ cruzan.}$
$\boldsymbol{Si\ a = -2\ o\ a = 2}$	$\boldsymbol{r\ y\ s\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$

b) Para $a = 2$ las paramétricas de las rectas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\beta \\ y = 3 - \beta \\ z = -1 + 2\beta \end{cases}$$

Para construir una recta t que pasa por el punto de corte y sea perpendicular a r y s, en primer lugar, hallaremos dicho punto de corte. Para ello, igualo las ecuaciones paramétricas y resuelvo el sistema para sacar los valores de $\lambda\ y\ \beta$

$$\begin{cases} 1 + \lambda & = & 3 - 2\beta \\ 2 + \lambda & = & 3 - \beta \\ 1 + 2\lambda & = & -1 + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\beta & = & 2 \\ \lambda + \beta & = & 1 \\ 2\lambda - 2\beta & = & -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0; \beta = 1$$

Por tanto, sustituyendo $\lambda = 0$ en r (o $\beta = 1$ en s), obtendremos las coordenadas del punto de corte: $P(1, 2, 1)$

Como la recta que queremos construir debe de ser perpendicular a las rectas r y s, el vector director de t, $\overrightarrow{d_t}$, debe de ser perpendicular a $\overrightarrow{d_r}$ y $\overrightarrow{d_s}$. Para hallarlo, calculamos el producto vectorial de ambos vectores.

$$\overrightarrow{d_t} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k} = (4, -6, 1)$$

Por tanto, la recta que me piden, escrita en paramétrica, es:

$$\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\mu \\ y = 2 - 6\mu \\ z = 1 + \mu \end{cases}}$$

Problema 5:

Sea $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{sen\, x}{2-\cos x}$

a) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan). **(2 puntos)**
b) Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Para ver los extremos absolutos de la función vamos a derivar $f(x)$ después estudiaremos el signo de la primera derivada.

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2-\cos x)^2}$$

Estudio el signo de $f'(x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2cosx - 1}{(2-\cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2cosx - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$
$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$$

Intervalos	$(\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}})$	$\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)$	$\left(\frac{\mathbf{5}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}\right)$
Signo de $f'(x)$	+	−	+
	↗ Crece	↘ Decrece	↗ Crece

Como la función crece en $(0, \frac{\pi}{3})$ y en $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ y decrece en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, los posibles máximos son $x = \frac{\pi}{3}$ y $x = 2\pi$. Veamos cuál de estos puntos es más alto:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(2\pi) = \frac{sen\,(2\pi)}{2-\cos(2\pi)} = 0$

Como $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f(2\pi)$, el **máximo absoluto** se da en el punto $\boldsymbol{P_1}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}, \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}\right)$

Los posibles mínimos son $x = 0$ y $x = \frac{5\pi}{3}$. Veamos cuál de ellos es el más bajo:

$f(0) = \frac{sen\,0}{2-\cos 0} = 0$

$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{2-\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Como $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) < f(0)$, el **mínimo absoluto** se da en el punto $\boldsymbol{P_2\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = \frac{\pi}{3}$ sigue la siguiente expresión:

$$y - f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

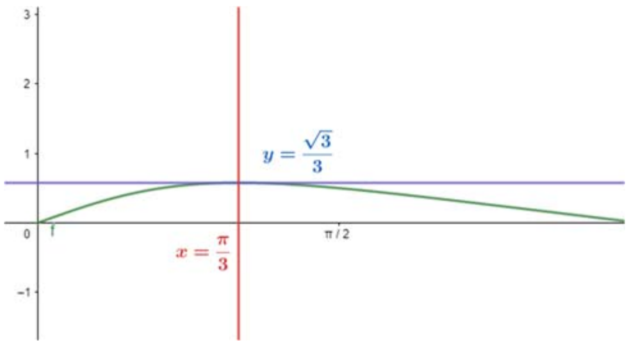
$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$

Sustituyendo: $y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

La ecuación de la recta **tangente** a la gráfica en $x = \frac{\pi}{3}$ es $\boldsymbol{y = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

Como la ecuación de la recta normal a la gráfica en $x = \frac{\pi}{3}$ es una recta perpendicular a la recta tangente en dicho punto y esta tangente es la recta horizontal $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$, la recta normal será una recta vertical de ecuación $x = \frac{\pi}{3}$



La ecuación de la recta **normal** a la gráfica es $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3}}$

Problema 6:

Sea f la función dada por $f(x) = \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x \neq 2$.

a) Calcula $\int f(x)\,dx$. **(2 puntos)**
b) Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(3,5)$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) $I = \int \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{3x^2+4}{x^2-4x+4}dx$

Al tratarse de una división de polinomios del mismo grado, vamos a dividir y a separar dicha función racional como "$cociente + \frac{resto}{divisor}$"

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 0x \quad + 4 & x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2} -3x^2 + 12x - 12 & 3 \\ \cline{1-1} 12x \ - 8 & \end{array}$$

Por tanto, $I = \int 3\,dx + \int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx = 3x + \underbrace{\int \frac{12x-8}{x^2-4x+4}\,dx}_{I_1}$

Resolvemos I_1 expresando la función racional en suma de fracciones simples:

$\frac{12x-8}{x^2-4x+4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} \Longrightarrow 12x - 8 = (x-2)\cdot A + B$

Hallo A y B:

$Si\ x = 2 \longrightarrow \boxed{16 = B}$

$Si\ x = 0 \longrightarrow -8 = -2 \cdot A + 16 \Rightarrow \boxed{A = 12}$

Luego $I_1 = \int \frac{12}{x-2}dx + \int \frac{16}{(x-2)^2}dx = 12 \cdot \ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C,\ C \in \mathbb{R}$

Sustituyendo en I, tengo que:

$$\int \frac{3x^2+4}{(x-2)^2}dx = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{\mathbf{16}}{\boldsymbol{x-2}} + \boldsymbol{C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

b) Sea $F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{16}{x-2} + C$. Aplicando la condición, se deduce que $F(3) = 5$.

$F(3) = 9 + 12 \cdot \ln 1 - 16 + C = 5 \ \Longrightarrow C = 12$

Luego,

$$F(x) = 3x + 12\ln|x-2| - \frac{\mathbf{16}}{\boldsymbol{x-2}} + \mathbf{12}$$

Problema 7:

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Discute el sistema dado por $AX = B$, según los valores de a. **(1.25 puntos)**

b) Para $a = 0$, resuelve el sistema dado por $AX = B$. Calcula, si es posible, una solución en la que $y + z = 4$. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) Escribimos el sistema equivalente a la ecuación matricial $AX = B$:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + z = 2a \\ 4x + y + 4z = 3a \end{cases}$$

Por tanto, la matriz ampliada del sistema es:

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & 2a \\ 4 & 1 & 4 & 3a \end{array}\right)$$

(donde A es la matriz de los coeficientes y B la matriz de los términos independientes)

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes para calcular el rango de A:

$|A| = 1 + 4 - 1 - 4 = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \boxed{rg(A) = 2}$

Calculamos el rango de A^* en función del parámetro a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2a \\ 4 & 1 & 3a \end{vmatrix} = a + 8a - 2a - 3a = 4a = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \Rightarrow \boxed{rg(A^*) = 3}$
- Si $a = 0 \Rightarrow \boxed{rg(A^*) = 2}$

Por el teorema de Rouché – Fröbenius:

- $Si\ a \neq 0 \Longrightarrow rg(A) \neq rg(A^*) \Longrightarrow Sistema\ incompatible$
- $Si\ a = 0 \Longrightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2 < n \Longrightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado$
  (n es el número de incógnitas del sistema)

b) Si $a = 0$ sabemos que el sistema es compatible indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 4F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Expreso el sistema de forma analítica:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Tomando como parámetro $z=t$ y sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos:
$x=-t$
Solución del sistema: $(-t,0,t), \forall t \in \mathbb{R}$

Una solución para que $y+z=4$, sustituyendo adecuadamente cada variable, obtenemos que $t=4$

Por tanto, una solución para que $y+z=4$ es: $\mathbf{(-4,0,4)}$

Problema 8:

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r. **(1.25 puntos)**
b) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y contiene a r. **(1.25 puntos)**

Solución:

Antes de comenzar, vamos a pasar la recta r a paramétricas resolviendo el sistema.

Sea $z = t \xRightarrow[\text{en la 2º ecuación}]{\text{sustituyendo}} y = -2+3t$

De la primera ecuación obtenemos que $x = 2-3t$

Luego $r \equiv \begin{cases} x = 2-3t \\ y = -2+3t \\ z = t \end{cases}$ donde se deduce que un punto de r es $P(2,-2,0)$ y su vector director es $\overrightarrow{d_r} = (-3,3,1)$

a) Para construir el plano vamos a tomar el punto $A(1,-2,0)$ por el que pasa y al ser perpendicular a la recta r, el vector normal del plano, $\vec{n}$, coincide con el vector director de la recta $\overrightarrow{d_r}$

Luego $-3x+3y+z+D=0$

Sustituyo por el punto A para obtener D:

$-3-6+D=0 \Longrightarrow D=9$

Por tanto, el plano es:

$$\boldsymbol{\pi \equiv -3x+3y+z+9=0}$$

b) El plano que queremos construir estará definido por el punto $A(1,-2,0)$ y al contener a la recta, sus vectores directores serán $\overrightarrow{d_r} = (-3,3,1)$ y $\overrightarrow{AP} = (1,0,0)$
Calculamos la ecuación del plano:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -y+3z-2=0$$

$$\boldsymbol{\pi \equiv -y+3z-2=0}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
b) **Este examen consta de 8 ejercicios.**
c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos
d) Se realizarán únicamente **cuatro** ejercicios de los **ocho** ejercicios propuestos. Si se realizan más de cuatro ejercicios, solo se evaluarán los primeros cuatro ejercicios que aparezcan físicamente en el papel de examen.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados

Problema 1:

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica. **(2.5 puntos)**

Problema 2:

Calcula $\int_0^{\pi} x \cdot sen^2(x)\, dx$. **(2.5 puntos)**

Problema 3:

Considero el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución son $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Problema 4:

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r. **(1.5 puntos)**
b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1 punto)**

Problema 5:

Sea la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x<1 \\ 1-x\cdot\ln x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b. **(1.75 puntos)**
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$. **(0.75 puntos)**

Problema 6:

Considera las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=|x|$ y $g(x)=x^2-2$

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

Problema 7:

Considera $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

a) Halla los valores de λ tales que $|A-\lambda I|=0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**
b) Para $\lambda=1$, resuelve el sistema dado por $(A-\lambda I)X=\theta$. ¿Existe alguna solución tal que $z=1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

Problema 8:

Considera el plano $\pi\equiv x-y+z=2$ y la recta $r\equiv\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$

a) Calcula la distancia entre r y π. **(1 punto)**
b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. **(1.5 puntos)**

Problema 1:

Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 6)$. Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f y los puntos de inflexión de su gráfica. **(2.5 puntos)**

Solución:

Para estudiar la curvatura de la gráfica de f, calculamos la segunda derivada:

$f'(x) = e^x(x^2 - 5x + 6) + e^x(2x - 5) = e^x(x^2 - 3x + 1)$

$f''(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3) = e^x(x^2 - x - 2)$

Estudiamos el signo de $f''(x)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 2$

Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f''(x)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$ convexa	$\cap$ cóncava	$\cup$ convexa

$f(x)$ es convexa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$

$f(x)$ es cóncava en los intervalos $(-1, 2)$

Los puntos de inflexión se dan en $x = -1$ y $x = 2$. Veamos el valor de la función en ambos puntos.

$f(-1) = \frac{12}{e}$

$f(2) = 0$

Por tanto, los puntos de inflexión de $f(x)$ son $\boldsymbol{P_1\left(-1, \frac{12}{e}\right)}$ y $\boldsymbol{P_2(2, 0)}$

Problema 2:

Calcula $\int_0^\pi x \cdot sen^2(x)\, dx$. **(2.5 puntos)**

Solución:

Sabemos por trigonometría que $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, por tanto:

$$\int_0^\pi x \cdot sen^2 x\, dx = \int_0^\pi x \cdot \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi x \cdot \cos(2x)\, dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\pi x \cdot \cos(2x)\, dx}_{I}$$

Resolvemos I usando el método por partes:

$$I = \int_0^\pi x \cdot \cos(2x)\, dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos(2x) & v = \frac{1}{2} sen(2x) \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{2} xsen\,(2x)\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi sen(2x)\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} xsen\,(2x)\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi = \left[\frac{1}{2} x \cdot sen(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi$$

Luego, sustituyendo en la integral principal obtenemos:

$$\int_0^\pi x \cdot sen^2(2x)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} x \cdot sen\,(2x) - \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^\pi =$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} sen\,(2\pi) - \frac{1}{4}\cos(2\pi)\right) - \left(-\frac{1}{4}\cos(0)\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

Por tanto,

$$\int_0^\pi x \cdot sen^2(2x)\, dx = \boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}}$$

Problema 3:

Considero el sistema de ecuaciones dado por $AX = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ m & 4 & -2 \\ 0 & m+2 & -3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ \ y\ \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2m \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1.5 puntos)**
b) Para $m = -2$, ¿existe alguna solución son $z = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

Solución:

a) Expresamos el sistema en forma analítica

$$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ mx + 4y - 2z = 2m \\ (m+2)y - 3z = 1 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$A^* = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ m & 4 & -2 & 2m \\ 0 & m+2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Donde A es la matriz de los coeficientes y B es la matriz de los términos independientes.

Calculo el determinante de A e igualo 0

$|A| = -12 + m^2 + 2m + 2m + 4 - 6m = m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ y $m = -2$

Usando el teorema de Rouché – Fröbenius:

- Si $m \neq 4; -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow rg(A) = 3 = rg(A^*) = n \Longrightarrow$ S. compatible determinado (n es el número de incógnitas)
- Si $m = 4\ \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

  - Calculamos el rango de A:
    Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 8 = 12 \neq 0 \Longrightarrow rg\ (A) = 2$

  - Calculamos el rango de A^*
    Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 48 - 48 + 8 = 12 \neq 0 \Longrightarrow rg\ (A^*) = 3$

  Como $rg(A) \neq rg(A^*) \Longrightarrow$ S. incompatible.

- Si $m = -2\ \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow rg(A) < 3$

Autor: Ismael Montero Penido
www.apuntesmareaverde.org.es

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

- Calculamos el rango de A
  Como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow rg\ (A) = 2$

- Calculamos el rango de A^*
  Como el menor $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, pues las dos primeras filas son proporcionales, luego $rg(A^*) = 2$

Como $rg(A) = rg(A^*) < n \Longrightarrow$ S. compatible indeterminado.
(n es el número de incógnitas)

Resumiendo

$Si\ a \neq -2\ y\ a \neq 4$	*Sistema compatible determinado*
$Si\ a = 4$	*Sistema incompatible*
$Si\ a = -2$	*Sistema compatible indeterminado*

b) Para $m = -2$ la forma analítica del sistema es:
$\begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ \quad -3z = 1 \end{cases} \Longrightarrow z = -\frac{1}{3}$

Tomamos $y = \lambda$
De la 1ª ecuación: $x - 2y - \frac{1}{3} = 2 \Longrightarrow x = \frac{7}{3} + 2\lambda$

Luego, la solución del sistema es: $\left(\frac{7}{3} + 2\lambda, \lambda, -\frac{1}{3}\right), \forall\lambda \in \mathbb{R}$

No hay solución para $z = 0$, pues z es una constante fija que vale siempre $-\frac{1}{3}$

Problema 4:

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Halla a sabiendo que π es paralelo a r. **(1.5 puntos)**
b) Determina el plano perpendicular a r que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que π y r sean paralelos, el vector director de r y el vector normal de π tienen que ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe de ser 0.

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -1, a)$

El vector director de la recta r viene definido por el producto vectorial de los dos vectores normales de los dos planos que la definen:

$$\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + \vec{k} = (5, 8, 1)$$

Luego $r \parallel \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{d_r} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n} = 0$
$\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n} = (5, 8, 1) \cdot (1, -1, a) = 5 - 8 + a = 0 \Leftrightarrow a = 3$

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 3}$$

b) Como el plano, π', que queremos construir es perpendicular a r, el vector normal de este coincide con el vector director de r. Luego $\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{d_r}$
Por tanto,

$5x + 8y + z + D = 0$

Sustituyo el punto $P(1, 2, 3)$ en la ecuación para obtener D

$5 + 16 + 3 + D = 0 \Leftrightarrow D = -24$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi' \equiv 5x + 8y + z - 24 = 0}$

Problema 5:

Sea la función derivable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{2ax-4b} & si \quad x < 1 \\ 1 - x \cdot \ln x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano)

a) Determina los valores de a y b. **(1.75 puntos)**
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$. **(0.75 puntos)**

Solución:

a) Como f es derivable en $\mathbb{R} \Longrightarrow f$ es continua en $\mathbb{R}$

- Calculamos la continuidad en el punto de ruptura $x = 1$

  $f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1$

  $\lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x ln\, x) = 1$

  $\lim\limits_{x \to 1^-} e^{2ax-4b} = e^{2a-4b}$

  Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ debe de cumplirse que $e^{2a-4b} = 1$

  $e^{2a-4b} = 1 \Leftrightarrow 2a - 4b = 0 \Leftrightarrow 2a = 4b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}a$

- Derivamos la función: $f'^{(x)} = \begin{cases} 2a \cdot e^{2ax-4b} & si \quad x < 1 \\ -\ln x - 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

  Calculamos la derivabilidad en el punto de ruptura $x = 1$

  $f'(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-\ln x - 1) = -1$

  $f'(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2a \cdot e^{2ax-4b} = 2a \cdot e^{2a-4b}$

  Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ debe de cumplirse que $2a \cdot e^{2a-4b} = -1$

  $2a \cdot e^{2a-4b} = -1 \overset{e^{2a-4b}=1}{\Longleftrightarrow} 2a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

  Como $b = \frac{1}{2}a \Longrightarrow b = -\frac{1}{4}$

Para que $f(x)$ sea derivable $\boldsymbol{a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}}$

b) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 2$ es:

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$$

Calculamos $f(2)$ y $f'(2)$:

$f(2) = 1 - 2 \ln 2$

$f'(2) = -\ln 2 - 1$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$y = (-\ln 2 - 1)(x - 2) + 1 - 2\ln 2 \Leftrightarrow y = (-\ln 2 - 1)x + 2\ln 2 + 2 + 1 - 2\ln 2$

Luego la ecuación de la recta tangente es: $\boldsymbol{y = (-\ln 2 - 1)x + 3}$

Problema 6:

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ y $g(x) = x^2 - 2$

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza el recinto que determinan. **(1 punto)**
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

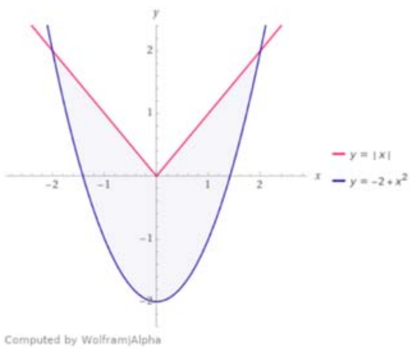
Solución:

a) La función f la puedo expresar como: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$
Calculo los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$

- Para $x < 0$
  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ y $x = 1$
  (descartamos $x = 1$ por no pertenecer al conjunto de todas las $x < 0$)
  Luego el punto de corte de $f(x)$ con $g(x)$ para $x < 0$ es $P_1(-2, 2)$
- Para $x \geq 0$
  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ y $x = 2$
  (descartamos $x = -1$ por no pertenecer al conjunto de todas las $x \geq 0$)
  Luego el punto de corte de $f(x)$ con $g(x)$ para $x \geq 0$ es $P_2(2, 2)$

Por tanto, los puntos de corte de las gráficas f y g son: $\boldsymbol{P_1(-2, 2)}$ y $\boldsymbol{P_2(2, 2)}$

Para dibujar el recinto limitado por ambas funciones, sabemos que f son dos rectas que son la bisectriz del I cuadrante y II cuadrante; y además, pasa por los puntos $P_1(-2, 2)$ y $P_2(2, 2)$
De la gráfica de $g(x)$ se sabe que tiene su vértice en $V(0, 2)$ y corta al eje OX en los puntos $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$
Por tanto, el recinto que determinan se puede observar en la siguiente representación gráfica:



b) El área del recinto es: $A = \int_{-2}^{2} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$
Pero simetría del dibujo, el área se puede expresar como:
$A = 2 \cdot \int_0^2 [x - (x^2 - 2)]\, dx = 2 \cdot \int_0^2 -x^2 + x + 2\, dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 =$
$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) - (0)\right] = \frac{20}{3} u^2$

Por tanto, $\boldsymbol{A = \frac{20}{3} u^2}$

Problema 7:

Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Halla los valores de λ tales que $|A - \lambda I| = 0$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(1.25 puntos)**

b) Para $\lambda = 1$, resuelve el sistema dado por $(A - \lambda I)X = \theta$. ¿Existe alguna solución tal que $z = 1$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1.25 puntos)**

Solución:

a) Calculamos $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = -\lambda \cdot (1-\lambda)^2 - 2(1-\lambda) = (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 2) \Leftrightarrow \lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2$$

Luego $|A - \lambda I| = 0$ si $\boldsymbol{\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = 2}$

b) Para $\lambda = 1$ se obtiene que $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Por tanto, el sistema dado por $(A - \lambda I) \cdot X = 0$ se puede expresar como: $\begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ -y + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

De donde obtenemos que $y = z = 0$ y $x = t$

Luego la solución del sistema viene dada por $(\boldsymbol{t}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

No hay solución para $z = 1$, pues z es una constante fija que vale siempre 0

Problema 8:

Considera el plano $\pi \equiv x - y + z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula la distancia entre r y π. **(1 punto)**
b) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a r. **(1.5 puntos)**

Solución:

a) Para hallar la distancia entre r y π voy a tomar un punto de la recta r y calcular la distancia de ese punto al plano.
Sea $A(0,-1,-2) \in r$, se tiene que $d(r,\pi) = d(A,\pi)$

$$d(A,\pi) = \frac{|0-(-1)+(-2)-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,u$$

Por tanto, $\boldsymbol{d(r,\pi) = \sqrt{3}\,u}$

b) Sea π'el plano que nos piden construir se deduce lo siguiente:

Como π' es perpendicular a π, el vector normal de π es el vector director de π'
Por tanto, $\overrightarrow{d_1} = (1,-1,1)$

Como π' contiene a r, tendrá al punto $A(0,-1,-2)$ y como vector director el mismo que el de la recta r, es decir, $\overrightarrow{d_2} = (2,1,-1)$

La ecuación general del plano π' es:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3y + 3z + 9 = 0 \overset{:3}{\Leftrightarrow} y + z + 3 = 0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi' \equiv y + z + 3 = 0}$