MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

Aragón

Autora: Milagros Latasa Asso

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas.
El estudiante debe indicar claramente en la primera página del tríptico, cuáles han sido las preguntas elegidas.
(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

Problema 1:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$

Problema 2:

Dadas las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Calcule, si es posible $(\boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{B}^t)^{-1}$.

b) *(1 punto)* Compruebe que $\boldsymbol{C}^3=\boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad y calcule $\boldsymbol{C}^{16}$

Problema 3:

Resuelva el siguiente sistema matricial $\begin{cases} \boldsymbol{X}-2\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 2\boldsymbol{X}+3\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -1 \\ 14 & 3 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

Problema 4:

Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$

a) *(1, 25 puntos)*Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(0,0,1)$

b) *(0,75 puntos)*Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{u}\times\vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Problema 5:

Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)$

Problema 6:

Se considera la siguiente función $f(x) = \frac{x^2}{1-e^{-x}}$. Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas, cuándo existan.

Problema 7:

Se considera la siguiente función $f(x) = ln(2x+1)$

a) *(1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) *(0,75 puntos)* Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int(\sqrt{x}.\, ln^2 x)dx$.

Problema 9:

Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12%, mientras la de que una mujer lo esté es del 16%. Además, la probabilidad de ser varón es del 64% y la de ser mujer del 36%

a) *(0,75 puntos)* Hemos conectado por redes sociales con una persona, ¿Cuál es la probabilidad de que esté en paro y sea mujer?

b) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar una persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) *(0,5 puntos)* Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizadas con personas en disposición de trabajar.

Problema 10:

De los estudiantes universitarios, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que lo definen pero sin hacer los cálculos finales).

b) *(1 punto)* ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

SOLUCIONES DE LA CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema 1:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + (m+1)z = 2 \\ x + (m-1)y + 2z = 1 \\ 2x + my + z = -1 \end{cases}$$

Discuta el sistema según los valores de $m \in \mathbb{R}$

Solución

Escribamos las matrices de coeficientes y ampliada del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ 1 & m-1 & 2 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix} = m - 1 + 4 + (m^2 + m) - (2m^2 - 2) - 2m - 1 = -m^2 + 4$$

$$Det\ A = -m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \quad m = -2 \quad o \quad m = -2.$$

- Si $m \neq -2, 2$ $\Longrightarrow DetA \neq 0 \Rightarrow rgA = rg\ A{:}B = 3$ ya que $Det\ A$ es un menor de orden 3 (máximo posible) tanto de A como de $A{:}B$ y este rango común coincide con el número de incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible determinado

- Si $m = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad rgA \neq 3 \text{ . El menor de } A : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2$$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ El menor } M_{234} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg\ A{:}B = 3$$

Luego $rgA = 2 \neq rg\ A{:}B = 3$ $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ de\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es incompatible

- Si $m = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad rgA \neq 3 \text{ . El menor de } A : \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rgA = 2$$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-2F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F3''=F3'-5F2'} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz $A{:}B$ solo tiene dos vectores fila linealmente independientes $\Rightarrow rg\ A{:}B = 2$

Luego: $rgA = 2 = rg\ A{:}B <$ nº de incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible indeterminado

Problema 2:

Dadas las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) *(1 punto)* Calcule, si es posible $(\boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{B}^t)^{-1}$.

b) *(1 punto)* Compruebe que $\boldsymbol{C}^3 = \boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad y calcule $\boldsymbol{C}^{16}$

Solución

a) $A \in \mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$ $B^t \in \mathcal{M}_{3x2}(\mathbb{R})$ ⇒es posible calcular $A\,.\,B^t$ y es una matriz cuadrada de orden 2 con elementos reales

$$A\,.\,B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Det(A\,.\,B^t) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Rightarrow \exists (A\,.\,B^t)^{-1} \qquad Adj(A\,.\,B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A\,.\,B^t)^{-1} = \frac{1}{Det\,(A\,.\,B^t)} \left(Adj(A\,.\,B^t)\right)^t = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(A\,.\,B^t)^{-1}} \;\; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}$$

b) $\mathbf{C^2} = C\,.C = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{C^3} = C^2\,.C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\mathbf{C^{16}} = \mathbf{C^{15}}.C = (C^3)^5.C = C^3.C^3.C^3.C^3.C^3.C = I.I.I.I.I.C = C = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C^3} = \boldsymbol{I};\; \mathbf{C^{16}} = \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Resuelva el siguiente sistema matricial $\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{cases}$

Solución

$$\begin{cases} X-2Y=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{cases} \underbrace{\sim}_{Multiplicando\ por-2\ \ Ec1} \begin{cases} -2X+4Y=\begin{pmatrix}0 & -6 & -6\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix} \\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}7 & 6 & -1\\ 14 & 3 & 7\end{pmatrix}\end{cases}$$

Sumando ahora estas dos ecuaciones:

$$7Y=\begin{pmatrix}7 & 0 & -7\\ 14 & 7 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow Y=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7 & 0 & -7\\ 14 & 7 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

De la primera ecuación de partida:

$$X=2Y+\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 4 & 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

La solución es $X=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Problema 4:

Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

a) *(1, 25 puntos)* Calcule la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $(0,0,1)$

b) *(0,75 puntos)* Se considera el paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{u} \times \vec{v}$. Sabiendo que $\vec{u} \times \vec{v} = (-1,1,1)$, calcule el volumen de dicho paralelepípedo.

Solución:

a) r viene dada como intersección de dos planos⇒ cualquier plano que contenga a r pertenecerá al haz que determinan ambos:

$$\mathcal{H} \equiv \begin{cases} \pi_\alpha: x + z - 1 + \alpha(2x + y - 3) = 0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ \pi_2: 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

El plano buscado no es π_2 ya que $(0,0,1) \notin \pi_2$

$$(0,0,1) \in \pi_\alpha \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}/0 + 1 - 1 + \alpha(2.0 + 0 - 3) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

La solución es entonces

$$\boldsymbol{\pi_0: x + z - 1 = 0}$$

b) El volumen del paralelepípedo que determinan $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{u} \times \vec{v}$ es su producto mixto

$[\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u} \times \vec{v}] = [\ \vec{v},\ \vec{u} \times \vec{v},\ \vec{u}\ ] = [\ \vec{u} \times \vec{v},\ \vec{u},\ \vec{v}\ ] = (\vec{u} \times \vec{v}).(\vec{u} \times \vec{v}) = (-1,1,1).(-1,1,1) = 3$

Teniendo en cuenta que el producto mixto de tres vectores no varía si se rotan éstos y que se define como el producto escalar del primero de ellos por el vectorial de los otros dos.

$$Volumen\ del\ paralelepípedo: \mathbf{3\ u^2}$$

Problema 5:

Calcule el siguiente límite $\lim\limits_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)= 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\cdot((1+x-senx)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x-senx}{x^3}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$\underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-cosx}{3x^2}} = e^{\frac{0}{0}} \underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{senx}{6x}} = e^{\frac{0}{0}} \underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{cosx}{6}} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left((1+x-senx)^{1/x^3}\right)= e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\boldsymbol{e}}$$

Problema 6:

Se considera la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - e^{-x}}$$

Estudie la existencia de asíntotas verticales, horizontales y oblicuas y calcúlelas, cuando existan.

Solución

$Dom\, f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / e^{-x} = 1\} = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / -x = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$

Calculemos los límites laterales en 0 para estudiar si $x = 0$ es asíntota vertical (sería la única posible):

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{L'Hôpital} \lim_{x\to 0^-} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{L'Hôpital} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{0}{-1} = 0$$

No hay asíntota vertical. En $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.

Veamos ahora si hay asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{1 - e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} \underbrace{=}_{L'Hôpital} \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{-\infty} \underbrace{=}_{L'Hôpital} \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{y = 0}$ es una asíntota horizontal si $x \to -\infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-e^{-x}} = \frac{\infty}{1} = \infty \Rightarrow$ no hay asíntota horizontal si $x \to \infty$

Puede haber una asíntota oblicua si $\boldsymbol{x} \to \infty$

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{1-e^{-x}} : x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{\infty}{1} = \infty.$

Luego no hay asíntotas oblicuas.

Problema 7:

Se considera la siguiente función $f(x) = ln(2x+1)$

a) *(1,25 puntos)* Estudie su dominio, así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) *(0,75 puntos)* Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$

Solución

a) $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R}/2x+1>0\}$ = $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

f es continua y derivable en su dominio. Estudiamos su crecimiento mediante el signo de f'

$f'(x) = \frac{2}{2x+1}$ $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Longrightarrow$ f es estrictamente creciente en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

No existe más que este intervalo de crecimiento.

f es estrictamente **creciente** en $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

b) Si $x = \frac{1}{2}$: $\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = ln2 \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+1} = 1$

El punto de tangencia es $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, ln2\right)$ y, según la interpretación geométrica de la derivada, la pendiente de la recta tangente en este punto es $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

La recta tangente tiene por ecuación: $y - ln2 = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = x + \frac{2ln2-1}{2} \Leftrightarrow y = x + \frac{ln4-1}{2}$

$$\boldsymbol{y = x + \frac{ln4 - 1}{2}}$$

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int(\sqrt{x}.\ ln^2 x)dx$.

Solución

Utilizamos el método de integración por partes $\int udv = uv - \int vdu$

I	$u = ln^2 x$	$du = \frac{2\ lnx\ dx}{x}$
	$v = \int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$dv = \sqrt{x}dx$

$$I = \int(\sqrt{x}.\ ln^2 x)dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{2}{3}.2\underbrace{\int \sqrt{x^3}\ .\ \frac{lnx}{x} dx}_{I_1} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{4}{3}\underbrace{\int x\sqrt{x}\ .\ \frac{lnx}{x} dx}_{I_1} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{4}{3}\underbrace{\int \sqrt{x}\ .\ lnx\ dx}_{I_1}$$

I_1	$u = lnx$	$du = \frac{dx}{x}$
	$v = \int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$dv = \sqrt{x}dx$

$$I = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{4}{3}\underbrace{\int \sqrt{x}\ .\ lnx\ dx}_{I_1} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{4}{3}\left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} lnx - \frac{2}{3}\int \frac{\sqrt{x^3}dx}{x}\right] =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9} lnx + \frac{8}{9}\int x\sqrt{x}\ .\frac{dx}{x} = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9} lnx + \frac{8}{9}\int \sqrt{x}\ dx =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9} lnx + \frac{8}{9}\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C =$$

$$\boldsymbol{\frac{2\sqrt{x^3}}{3} ln^2 x - \frac{8\sqrt{x^3}}{9} lnx + \frac{16}{27}\sqrt{x^3} + C}$$

Problema 9:

Según estadísticas del Instituto Nacional de Estadística, la probabilidad de que un varón esté en paro es del 12 %, mientras la de que una mujer lo esté es del 16 %. Además, la probabilidad de ser varón es del 64 % y la de ser mujer del 36 %

a) Hemos conectado por redes sociales con una persona, ¿Cuál es la probabilidad de que esté en paro y sea mujer?

b) Si se elige al azar una persona, ¿cuál es la probabilidad de que esté en paro?

c) Hemos conectado por redes sociales con una persona que nos ha confesado estar en paro, ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Nota informativa: las estadísticas anteriores (y los experimentos) están realizadas con personas en disposición de trabajar.

Solución

Sean los sucesos: A_1= "la persona elegida es hombre" A_2= "la persona elegida es mujer"

B= "la persona elegida está en paro"

a) $P(B \cap A_2) = P(A_2) \cdot P(B/A_2) = \frac{36}{100} \cdot \frac{16}{100} = 0.0576$

La probabilidad de que esté en paro y sea mujer es del **0.0576**.

b) $.P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) = \frac{64}{100} \cdot \frac{12}{100} + \frac{36}{100} \cdot \frac{16}{100}$ = 0.0768 + 0.0576 = 0.1344

La probabilidad de que una persona esté en paro es del **0.1344**

c) $P(A_2/B) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(B)} = \frac{P(A_2) \cdot P(B/A_2)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)} = \frac{0.0576}{0.1344} = 0.4286$

Una persona nos ha confesado estar en paro, la probabilidad de que sea mujer es del 0.4286,

Problema 10:

De los estudiantes universitarios, uno de cada 5 abandona sus estudios. Se seleccionan 5 estudiantes universitarios españoles al azar, de modo independiente.

a) *(1 punto)* ¿Cuál es la probabilidad de que uno o ninguno de dichos estudiantes abandonen sus estudios? (No es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando y desarrollando los números y operaciones básicas que lo definen pero sin hacer los cálculos finales).

b) *(1 punto)* ¿Qué es más probable, que todos abandonen sus estudios, o que ninguno lo haga? Razone la respuesta de modo numérico.

Solución

El experimento aleatorio *"seleccionar un estudiante universitario al azar y observar si abandona sus estudios"* es una prueba de Bernoulli.

Sea "*éxito*" = "*el estudiante elegido al azar abandona sus estudios*" $p = \frac{1}{5}$

Se repite 5 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos"* = *"número de estudiantes universitarios que abandonan sus estudios",* es una variable binomial

$$X = B\left(5,\ \frac{1}{5}\right) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{k} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$$

a) $P(\text{"uno o ningún estudiante abandone sus estudios"}) = P(X = 1) + P(X = 0) =$

$$= \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{4} + \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{5} = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{256}{625} + 1 \cdot\ 1 \cdot \frac{1024}{3125} = \frac{1280 + 1024}{3125} = \frac{2304}{3125}$$

$$P(\text{"uno o ningún estudiante abandone sus estudios"}) = \frac{2304}{3125} = \mathbf{0.7373}$$

b) $P(\text{" ningún estudiante abandone sus estudios"}) = P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{5} = \frac{1\,024}{3\,125} = 0.3277$

$P(\text{"todos los estudiantes abandonen sus estudios"}) = P(X = 5) = \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{0} = \frac{1}{3\,125} = 0.00032$

Es más probable que ningún estudiante abandone sus estudios

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas.
El estudiante debe indicar claramente en la primera página del tríptico, cuáles han sido las preguntas elegidas.
(Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.
TIEMPO: 1 hora y 30 minutos.

Problema 1:

Dados las matrices $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix} = y\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ siendo a un número real cualquiera

a) (1,25 puntos) Discuta el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro a.

b) (0,75 puntos) Resuelva el sistema cuando $a = 1$

Problema 2:

Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las tres mascarillas es de 0,90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Problema 3:

Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 4:

Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano

$$\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$$

Problema 5:

Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} (1+x)^{2/tg(x)}$

Problema 6:

Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base $\boldsymbol{y}$ metros y altura $\boldsymbol{x}$ metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)

Su superficie se desea que sea de $\mathbf{4}+\boldsymbol{\pi}\,m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de modo que se cumpla este requisito.

Problema 7:

Dada la siguiente función $f(x)=\frac{-x^2}{2}+2ln(x+1)$

a) *(0,25 puntos)* Calcule el dominio de f .

b) *(1,75 puntos)* Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int x^3 e^{x^2} dx$

Problema 9:

En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudientes de 2º de bachuller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80% disponía de ordenador, el 15% disponía de móvil y el 10% disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro

a) *(1,25 puntos)* Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos)

b) *(1,75 puntos)* Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusise de ninguno de los dispositivos mencionados.

Problema 10:

Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) *(0,75 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?
b) *(0,75 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?
c) *(0,5 puntos)* El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a la clase?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valore de $P(Z \leq k)$ para una distribución $N(0,1)$. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales, considere la media aritmética de los valores correspondientes.

Problema 1:

Dados las matrices $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ siendo a un número real cualquiera

a) Discuta el sistema $AX = B$ según los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema cuando $a = 1$

Solución

a) Compararemos los rangos de las matrices del sistema

$A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$ de coeficientes y $A{:}B = \begin{pmatrix} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{pmatrix}$ ampliada

$$Det\ A = \begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a-3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -a(-2a+2)$$

$$Det\ A = -a(-2a+2) = 0 \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad o \quad a = 1$$

- Si $a \neq 0,\ 1$ $\Longrightarrow DetA \neq 0 \Rightarrow rgA = rg\ A{:}B = 3$ ya que $Det\ A$ es un menor de orden 3 (máximo posible) tanto de A como de $A{:}B$ y este rango común coincide con el número de incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible determinado

- Si $a = 0$ $rgA \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A{:}B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El menor de A y $A{:}B$: $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \ rgA = 2$ y $rg\ A{:}B \geq 2$

La segunda columna de $A{:}B$ es el vector cero⇒ los menores de $A{:}B$ *(los subíndices denotan las columnas que los definen)* $M_{123} = M_{124} = M_{234} = 0$ y el único de orden 3 que no la contiene es

$$M_{134} = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0+4+4-4-0-6 = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\ A{:}B = 3$$

$rgA = 2 \neq rg\ A{:}B = 3$ $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ de\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es incompatible

Si $a = 1$

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $rgA \neq 3$. El menor de A : $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \ rgA = 2$

$$A{:}B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F1\leftrightarrow F3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2+F1 \\ F3'=F3-2F1}}$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2+F1\\F3'=F3-2F1}}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F3''=F3'+2F2'}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Tanto A como $A{:}B$ tienen solo dos vectores fila linealmente independientes, luego:

$rgA = rg\ A{:}B = 2 <$nº incógnitas $\underbrace{\Rightarrow}_{T.\ de\ Rouché-Fröbenius}$ El sistema es compatible indeterminado

Si $a \neq 0,\ 1$ → El sistema es compatible determinado. Si $a = 0$ → El sistema es incompatible. Si $a = 1$ → El sistema es compatible indeterminado

b) Si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Por la forma de estudiar el rango de la matriz $A{:}B$, tenemos en el último paso del apartado anterior, los coeficientes y términos independientes de un sistema triangular equivalente a $AX = B$:

$$\begin{cases}-x + y + 2z = 1\\ \quad y = 0\end{cases}$$

Las infinitas soluciones las obtenemos fijando el valor de $z = \alpha$:

$$\begin{cases}x = -1 + 2\alpha\\ y = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R}\\ z = \alpha\end{cases}$$

Problema 2:

Una farmacia vende 3 tipos de mascarillas: quirúrgicas desechables, higiénicas y quirúrgicas reutilizables. El precio medio de las tres mascarillas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables, 20 mascarillas higiénicas y 10 quirúrgicas reutilizables, debiendo abonar por todas ellas 56 €. Otro cliente compra 20 unidades de mascarillas quirúrgicas desechables y 25 unidades de mascarillas reutilizables y paga 31 €. Calcule el precio de cada tipo de mascarilla.

Solución:

Sean: x = "precio de una mascarilla quirúrgica desechable" y = ""precio de una mascarilla higiénica"
z = "precio de una mascarilla quirúrgica reutilizable"

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 0{,}90 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x \qquad + \quad 25z = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 0.90 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x \qquad + \quad 25z = 31 \end{cases} \underbrace{\sim}_{E1'=30E1} \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 27 \\ 30x + 20y + 10z = 56 \\ 20x \qquad + \quad 25z = 31 \end{cases}$$

Utilizamos la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 30 & 20 & 10 \\ 20 & 0 & 25 \end{vmatrix} = 10.10.5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 500(10 + 4 + 0 - 8 - 0 - 15) = -4500 \neq 0$$

Utilizamos la regla de Cramer para encontrar la solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 27 & 10 & 10 \\ 56 & 20 & 10 \\ 31 & 0 & 25 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{-3600}{-4500} = 0.80 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 27 & 10 \\ 30 & 56 & 10 \\ 20 & 31 & 25 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{-5850}{-4500} = 1.3 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 & 27 \\ 30 & 20 & 56 \\ 20 & 0 & 31 \end{vmatrix}}{Det\ A} = \frac{-2700}{-4500} = 0.60$$

Cada mascarilla quirúrgica desechable tiene un precio de **0.80 €,** cada mascarilla higiénica **1.30 €** y cada mascarilla quirúrgica reutilizable **0.60 €**.

Problema 3:

Resuelva la ecuación matricial $XA + XA^t = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución

$$XA + XA^t = B \Leftrightarrow X(A + A^t) = B \underbrace{\Longrightarrow}_{Si\,\exists(A+A^t)^{-1}} X(A + A^t)(A + A^t)^{-1} = B(A + A^t)^{-1} \underbrace{\Longrightarrow}_{Si\,\exists(A+A^t)^{-1}}$$

$$\underbrace{\Longrightarrow}_{Si\,\exists(A+A^t)^{-1}} X.I = B(A + A^t)^{-1} \underbrace{\Longrightarrow}_{Si\,\exists(A+A^t)^{-1}} \boxed{X = B(A + A^t)^{-1}}$$

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A + A^t| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Longrightarrow \exists(A + A^t)^{-1}$$

$$Adj\ (A + A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A + A^t)^{-1} = \frac{1}{Det(A+A^t)}\,(Adj\ (A + A^t))^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = B(A + A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 4:

Halle la ecuación general del plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 3x + y - 4z + 1 = 0 \\ 2x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano

$$\pi: 2x - y + 3z - 1 = 0$$

Solución

Sea π_1 el plano buscado. Cualquier punto de r es también un punto del mismo:

Para $z = 0$:

$\begin{cases} 3x + y + 1 \quad = 0 \\ -2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x - 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow P\ (1, -4, 0)$ es un punto de $r \cap \pi_1$

El vector $\vec{n} = (2, -1, 3)$ asociado al plano π es una dirección de π_1 así como el vector director de la recta r : $\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3, -5, 1)$

π_1 está determinado por el punto P y estas dos direcciones:

$$\pi_1: \begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_1: 14(x-1) + 7(y+4) - 7z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1: 2(x-1) + (y+4) - z = 0 \Rightarrow \pi_1: 2x + y - z + 2 = 0$$

π_1: $\mathbf{2x + y - z + 2 = 0}$ es la ecuación general del plano buscado

Problema 5:

Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \to 0}(1+x)^{2/tg(x)}$

Solución

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{2/tg(x)} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{2}{tgx}\cdot((1+x)-1)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{2x}{tgx}} = e^{\frac{0}{0}} \underbrace{=}_{L'Hôpital} e^{\lim_{x \to 0} \frac{2}{1+tg^2x}} = e^2$$

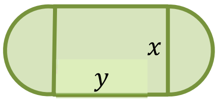
$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{2/tg(x)} = \boldsymbol{e^2}$$

Problema 6:

Un campo de juego quiere diseñarse de modo que la parte central sea rectangular de base $\boldsymbol{y}$ metros y altura $\boldsymbol{x}$ metros, y las partes laterales sean semicircunferencias (véase dibujo)

Su superficie se desea que sea de $\mathbf{4}+\boldsymbol{\pi}\, m^2$. Se debe pintar el perímetro y las rayas interiores de modo que la cantidad de pintura que se gaste sea mínima (es decir, su longitud total sea mínima). Halle $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de modo que se cumpla este requisito.

Solución



La función que debe ser mínima es $L(x) = 2x + 2y + 2\pi\frac{x}{2} = (2+\pi)x + 2y$

El área del recinto = $xy + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4 + \pi$

Podemos obtener y en función de x: $y = \frac{1}{x}\left(4 + \pi - \frac{\pi x^2}{4}\right) = \frac{16+4\pi-\pi x^2}{4x}$

Sustituyendo

$$L(x) = (2+\pi)x + 2\frac{16+4\pi-\pi x^2}{4x} = \frac{2x(2+\pi)x+16+4\pi-\pi x^2}{2x} = \frac{(\pi+4)x^2+4(\pi+4)}{2x} = (\pi+4)\frac{x^2+4}{2x}$$

Calculemos las derivadas primera y segunda de L(existen en $\mathbb{R}-\{0\}$)

$$L'(x) = (\pi+4)\frac{4x^2-2(x^2+4)}{4x^2} = (\pi+4)\frac{2x^2-8}{4x^2} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

$$L''(x) = (\pi+4)\frac{16x^3-(2x^2-8)8x}{16x^4} = (\pi+4)\frac{64x}{16x^4} = (\pi+4)\frac{64}{16x^3} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}-\{0\}$$

Determinemos los posibles valores críticos:

$$L'(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2 \qquad L''(2) = (\pi+4)\frac{32}{16 . 2^3} > 0$$

Luego, si $x = 2$ la función L es mínima y en este caso $y = \frac{16+4\pi-\pi 2^2}{4.2} = 2$

Tanto x como y deben medir 2 m

El gasto de pintura es mínimo si tanto x como y miden $\mathbf{2}\ \boldsymbol{m}$

Problema 7:

Dada la siguiente función $f(x) = \frac{-x^2}{2} + 2ln(x+1)$

a) Calcule el dominio de f .

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento

Solución

a) $Dom\ f = \{x \in \mathbb{R} / x + 1 > 0\} = (-1, \infty)$

$$Dom\ f = (-1, \infty)$$

b) La función es derivable en su dominio y además

$$f'(x) = \frac{-2x}{2} + \frac{2}{x+1} = -x + \frac{2}{x+1} = \frac{-x^2 - x + 2}{x+1}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{matrix} \nearrow & -2 \notin Domf \\ \searrow & 1 \end{matrix}$$

	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$Signo\ f'$	+	0	-
$Monotonía\ de\ f$	*Creciente*	*Máximo relativo*	*Decreciente*

La función f es **creciente** en $(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$ y **decreciente** en $(\mathbf{1}, \infty)$

El punto $\left(\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \ln 4\right)$ es un **máximo** relativo.

Autora: Milagros Latasa Asso

Problema 8:

Calcule la siguiente integral $\int x^3 e^{x^2} dx$

Solución

Utilizamos el método de integración por partes $\int u dv = uv - \int v du$

I	$u = x^2$	$du = 2x dx$
	$v = \int x e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2} = *$	$dv = x e^{x^2} dx$

$$I = x^2 \frac{e^{x^2}}{2} - \int 2x \frac{e^{x^2}}{2} dx = x^2 \frac{e^{x^2}}{2} - \int x\, e^{x^2} dx \underbrace{=}_{*} x^2 \frac{e^{x^2}}{2} - \frac{e^{x^2}}{2} + C$$

$$\int x^3 e^{x^2} dx = \frac{e^{x^2}}{2}(x^2 - 1) + C$$

Problema 9:

En el mes de abril de 2020 se realizó una encuesta a los estudiantes de 2º de bachiller de un centro acerca de los dispositivos con los que seguían las clases online. El 80 % disponía de ordenador, el 15 % disponía de móvil y el 10 % disponía de ambos dispositivos. Nos hemos encontrado por casualidad en la calle con un estudiante de este centro

a) Halle la probabilidad de que el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos (o ambos)

b) Halle la probabilidad de que el estudiante no dispusise de ninguno de los dispositivos mencionados.

Solución

a) Sean los sucesos: A = "el alumno dispone de ordenador"

B = "el alumno dispone de móvil"

$P(\text{"}\textit{el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos}\text{"}) = P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{80}{100} + \frac{15}{100} - \frac{10}{100} = \frac{85}{100} = 0.85$$

$P(\text{"el estudiante dispusiese de alguno de los dos dispositivos"}) = 0.85.$

b) $P(\text{"}\textit{el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos}\text{"}) = P(A^c \cap B^c)$

Por las leyes de Morgan y las propiedades de la probabilidad:

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.85 = 0.15$$

$P(\text{"el estudiante no dispusiese de ninguno de los dispositivos"}) = 0.15.$

Problema 10:

Un estudiante universitario de matemáticas ha comprobado que el tiempo que le cuesta llegar desde su casa a la universidad sigue una distribución normal de media 30 minutos y desviación típica 5 minutos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde entre 20 y 40 minutos?

c) El estudiante, un día al salir de su casa, comprueba que faltan exactamente 40 minutos para que empiece la clase. ¿Cuál es la probabilidad de que llegue tarde a la clase?

Solución

Sea X la variable que representa el tiempo empleado por el estudiante en llegar desde su casa a la universidad. $X = N(30, 5)$

a) P (“*tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad*”) = $P(X < 40)$

Para poder calcular esta probabilidad, normalizamos X:

$$P(X < 40) = P\left(\frac{X-30}{5} < \frac{40-30}{5}\right) = P(Z < 2) = 0.9772$$

P (“tarde menos de 40 minutos en llegar a la universidad”) = **0.9772**

b) P (“*tarde de que tarde entre 20 y 40 minutos*”) = $P(20 \le X \le 40)$

$$P(20 \le X \le 40) = P\left(\frac{20-30}{5} \le \frac{X-30}{5} \le \frac{40-30}{5}\right) = P(-2 \le Z \le 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - \big(1 - P(Z < 2)\big) = 2P(Z \le 2) - 1$$

$$P(20 \le X \le 40) = 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9544$$

P (“tarde de que tarde entre 20 y 40 minutos”) = **0.9544**.

c) P (“*llegue tarde a clase*”) = $P(X > 40)$

$$P(X > 40) = 1 - P(X \le 40) \underbrace{=}_{P(X=40)=0} 1 - P(X < 40) \underbrace{=}_{a)} 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$P(X > 40) = 0.0228$$

P (“llegue tarde a clase”) = **0.0228**.