

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

BALEARES



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho





Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Model 2

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ús de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donat el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax + z = 0, \\ x + (1 + a)y + az = a + 1, \end{cases}$$

determina el paràmetre a , i resol sempre que es pugui, de manera que el sistema:

- (a) tengui solució única, (4 punts)
 - (b) tengui infinites solucions, (4 punts)
 - (c) no tengui solució. (2 punts)
2. Considera la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donada per

$$y = f(x) = x^3 - 3x.$$

- (a) Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció al punt d'abscissa $x = -1$. (2 punts)
- (b) Fes un esbós de la gràfica de $y = f(x)$ i calcula: els punts de tall amb els eixos, els extrems relatius i el comportament de la funció a l'infinit. (4 punts)
- (c) Calcula l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció donada i la recta $y = 2$. (4 punts)



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Model 2. Opció A. Segueix.

3. Considera el punt $P = (2, -1, 1)$ i la recta r donada per

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{array} \right\} (r)$$

- (a) Calcula l'expressió de l'equació contínua de la recta r . (2 punts)
 - (b) Calcula l'equació del pla, Π , perpendicular a la recta r que passa pel punt P . (2 punts)
 - (c) Calcula el punt, Q , d'intersecció del pla Π amb la recta r . (3 punts)
 - (d) De totes les rectes que passen pel punt $P = (2, -1, 1)$, calcula aquella que talla perpendicularment a la recta r . (3 punts)
4. El nombre d'hores de vida d'un cert bacteri (tipus A) es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores i desviació típica de 0,75 hores. Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un bacteri:
- (a) el seu nombre d'hores de vida sobrepassi les 112,25 hores. (4 punts)
 - (b) el seu nombre d'hores de vida sigui inferior a 109,25 hores. (4 punts)

D'un altre bacteri (tipus B) se sap que el nombre d'hores de vida es distribueix segons una normal de mitjana 110 hores, però es desconeix la seva desviació típica. Experimentalment s'ha comprovat que la probabilitat que un bacteri tipus B visqui més de 125 hores és 0,1587. Calcula la desviació típica de la distribució del nombre d'hores de vida dels bacteris tipus B. (2 punts)



Universitat
de les Illes Balears
Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Model 2

OPCIÓ B

1. Una empresa té tres mines: **A**, **B** i **C**, i en cada una, el mineral extret conté els elements químics: níquel (Ni), coure (Cu) i ferro (Fe), en diferent concentració. Les concentracions són:

- Mina **A**: Ni (1%), Cu (2%), Fe (3%),
- Mina **B**: Ni (2%), Cu (5%), Fe (7%),
- Mina **C**: Ni (1%), Cu (3%), Fe (1%).

Per obtenir 7 tones de níquel, 18 de coure i 16 de ferro en total, quantes tones de mineral s'han d'extreure de cada mina?

- (a) Planteja un sistema d'equacions que interpreti l'enunciat. (4 punts)
 (b) Classifica el sistema. (2 punts)
 (c) Resol el sistema. (4 punts)

2. Considera la funció $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$.

- (a) Calcula el seu domini i els intervals de creixement i decreixement. (3 punts)
 (b) Calcula una primitiva qualsevol de $f(x)$. (4 punts)
 (c) Calcula l'àrea delimitada per la gràfica de la funció $y = f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 2$ i $x = 3$. (3 punts)

3. Donada la recta r i el pla π

$$(r) \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad (\pi) \quad 3x - my + z = 1,$$

es demana si existeix algun valor del paràmetre m per al qual

- (a) el pla i la recta són paral·lels. (4 punts)
 (b) o bé, el pla conté la recta. (3 punts)
 (c) o bé, el pla i la recta es tallen exactament en un punt. (3 punts)

En cada cas, si existeix, calcula'l.

Model 2. Opció B. Segueix.

4. Una empresa de fabricació d'impressores té dos centres de producció, la fàbrica europea (E) i la fàbrica asiàtica (A). L'1 % de les impressores de la fàbrica E i el 3% de les impressores de la fàbrica A es produeixen amb un defecte. El mercat d'un determinat país s'abasteix d'impressores procedents de la fàbrica E en un 80%, mentre que la resta prové de la fàbrica A.

- (a) Quina és la probabilitat que una impressora d'aquest país tingui el defecte? (4 punts)
 (b) Si el país té, aproximadament, dos milions d'impressores fabricades per aquesta empresa, quantes tindran el defecte? (2 punts)
 (c) Si s'escull a l'atzar una impressora d'aquest país i resulta ser una impressora defectuosa, quina és la probabilitat que provingui de la fàbrica E? (4 punts)



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0,1)$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + z = 0 \\ x + (1 + a)y + az = a + 1 \end{cases}$$
, determina el parámetro a , y resuelve siempre que se pueda, de manera que el sistema:

- a) Tenga solución única. b) Tenga infinitas soluciones. c) No tenga solución.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{vmatrix} = 1 - (a+1) - a^2 = 1 - a - 1 - a^2 = 0;$$

$$a^2 + a = 0; \quad a(a+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1.$$

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

Se resuelve para $a \neq 0$ y $a \neq -1$ por el método de Gauss.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - aF_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & 1 & -a \\ 0 & a & a & a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow -\frac{1}{a}F_2 \\ F_3 \rightarrow \frac{1}{a}F_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/a & 1 \\ 0 & 0 & (a+1)/a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{a+1}{a}z = 0 \Rightarrow z = 0; \quad y = 1; \quad x = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Solución: } x = 0; y = 1; z = 0.$$

b)

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_4\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

Se resuelve para $a = 0$ y $a = -1$, en cuyos casos el sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Para } a = 0 \text{ el sistema resulta: } \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{ equivalente a } \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow \text{Solución: } x = \lambda; y = 1 - \lambda; z = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Para } a = -1 \text{ el sistema resulta: } \begin{cases} x + y = 1 \\ -x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}, \text{ equivalente a } \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow \text{Solución: } x = \lambda; y = 1 - \lambda; z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

c)

$$\text{El sistema es compatible } \forall a \in \mathbb{R}.$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = f(x) = x^3 - 3x$:

- Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.
- Hacer un esbozo de la gráfica de $y = f(x)$ y calcula: los puntos de corte con los ejes, los extremos relativos y el comportamiento de la función al infinito.
- Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de $y = f(x)$ y la recta $y = 2$.

Solución:

a)

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow P(-1, 2).$$

La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3x^2 - 3. \quad m = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 3 = 3 - 3 = 0.$$

La fórmula de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - 2 = 0 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow \underline{\text{Recta tangente: } t \equiv y - 2 = 0}.$$

b)

Los cortes con los ejes de la función $f(x) = x^3 - 3x$ son los siguientes:

$$\text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow O(0, 0).$$

$$\text{Eje } X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x = 0; \quad x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -\sqrt{3};$$

$$x_3 = \sqrt{3} \Rightarrow O(0, 0), A(-\sqrt{3}, 0) \text{ y } B(\sqrt{3}, 0).$$

Por tratarse de una función polinómica tiende a infinito, positivo o negativo, en los valores extremos de su dominio, que es $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x) = +\infty.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada;

si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 3x^2 - 3. \quad f''(x) = 6x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0; \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

$$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = -1.$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \text{Máximo: } C(-1, 2).$$

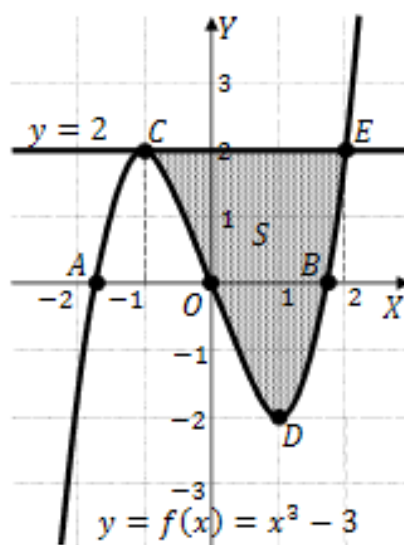
Por simetría con respecto al origen, por ser $f(-x) = -f(x)$: Mínimo: $D(1, -2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la que indica la figura adjunta.

c)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [2 - (x^3 - 3x)] \cdot dx = \\ &= \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \\ &= \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right] = \\ &= -4 + 6 + 4 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 8 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{32+1-6}{4} = \frac{27}{4}. \\ S &= \frac{27}{4} u^2 = 6,75 u^2. \end{aligned}$$



Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 3:

3º) Considera el punto $P(2, -1, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$:

- Calcula la expresión de la ecuación continua de la recta r .
- Calcula la ecuación del plano π , perpendicular a r , y que pasa por el punto P .
- Calcula el punto Q , intersección del plano π y la recta r .
- De todas las rectas que pasan por el punto $P(2, -1, 1)$, calcula aquella que corta perpendicularmente a la recta r .

Solución:

a)

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 4z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow \begin{cases} -3y + 4z = 1 - 2\lambda \\ 2y - 3z = 2 - \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6y + 8z = 2 - 4\lambda \\ 6y - 9z = 6 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow z = -8 + 7\lambda; \quad 2y + 24 - 21\lambda = 2 - \lambda;$$

$$2y = -22 + 20\lambda; \quad y = -11 + 10\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -11 + 10\lambda \\ z = -8 + 7\lambda \end{cases}$$

$$\underline{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+11}{10} = \frac{z+8}{7}.}$$

b)

El haz de planos, β , perpendiculares a la recta r , tienen la siguiente expresión general: $\beta \equiv x + 10y + 7z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β , el plano π pedido, que contiene al punto P es el que satisface su ecuación:

$$\beta \equiv x + 10y + 7z + D = 0 \Big|_{P(2, -1, 1)} \Rightarrow 2 + 10 \cdot (-1) + 7 \cdot 1 + D = 0;$$

$$2 - 10 + 7 + D = 0; \quad D = 1 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0.}$$

c)

$$\beta \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0 \Big|_{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -11 + 10\lambda \\ z = -8 + 7\lambda \end{cases}} \Rightarrow$$

$$\lambda + 10 \cdot (-11 + 10\lambda) + 7 \cdot (-8 + 7\lambda) + 1 = 0;$$

$$\lambda - 110 + 100\lambda - 56 + 49\lambda + 1 = 0; \quad 150\lambda = 165; \quad 10\lambda = 11 \Rightarrow \lambda = \frac{11}{10}.$$

$$Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{11}{10} \\ y = -11 + 10 \cdot \frac{11}{10} = 0 \\ z = -8 + 7 \cdot \frac{11}{10} = \frac{-80+77}{10} = -\frac{3}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Q\left(\frac{11}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right)}.$$

d)

Sea s la recta pedida.

Por ser la recta r perpendicular al plano π , es perpendicular a todas las infinitas rectas contenidas en el plano π , o lo que es lo mismo: el ejercicio tiene infinitas soluciones, que son todas las infinitas rectas contenidas en π que pasan por $P(2, -1, 1)$.

Un punto de $\pi \equiv x + 10y + 7z + 1 = 0$ podía ser, por ejemplo, el punto hallado $Q\left(\frac{11}{10}, 0, -\frac{3}{10}\right)$, pero tomamos otro punto más cómodo: $M(0, 2, -3) \in \pi$.

Los puntos M y P determinan el vector $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v_s} = (2, -3, 4)$.

$$\underline{s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}}.$$

Modelo 2. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) El número de horas de vida de una bacteria (tipo A) se distribuye según una normal de media 110 horas y desviación típica 0,75 horas. Calcula la probabilidad que, escogida al azar una bacteria:

a) El número de horas de vida sobrepase las 112,25 horas.

b) Su número de horas de vida sea inferior a 109,25 horas.

c) De otra bacteria se sabe que el número de horas de vida se distribuye según una normal de media 110 horas, pero se desconoce la desviación típica. Experimentalmente se ha comprobado que la probabilidad que una bacteria tipo B viva más de 125 horas es 0,1587. Calcula la desviación típica de la distribución del número de horas de vida de las bacterias tipo B.

Solución:

a)

Datos: $\mu = 110$; $\sigma = 0,75$.

$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(110; 0,75)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-110}{0,75}$.

$$P = P(X > 112,25) = P\left(Z > \frac{112,25-110}{0,75}\right) = P\left(Z > \frac{2,25}{0,75}\right) = P(Z > 3) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 3) = 1 - 0,9987 = \underline{0,0013}.$$

b)

$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(110; 0,75)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-110}{0,75}$.

$$P = P(X < 109,25) = P\left(Z > \frac{109,25-110}{0,75}\right) = P\left(Z > \frac{-0,75}{0,75}\right) = P(Z < -1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = \underline{0,1587}.$$

c)

Datos: $\mu = 110$; σ ?; $P(X > 125) = 0,1587$.

$$P = P(X > 125) = P\left(Z > \frac{125-110}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{15}{\sigma}\right) = 0,1587;$$

$$1 - P\left(Z \leq \frac{15}{\sigma}\right) = 0,1587; \quad P\left(Z \leq \frac{15}{\sigma}\right) = 1 - 0,1587 = 0,8413.$$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, a 0,8413 le corresponde 1,00 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{15}{\sigma} = 1 \Rightarrow \underline{\sigma = 15}.$$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Una empresa tiene tres minas: A, B y C, y en cada una, el mineral extraídos contiene los minerales:

Mina A: níquel, 1 %, cobre, 2 %, Hierro, 3 %.

Mina B: níquel, 2 %, cobre, 5 %, Hierro, 7 %.

Mina C: níquel, 1 %, cobre, 3 %, Hierro, 1 %.

Para obtener 7 Tm de níquel, 18 Tm de cobre y 16 Tm de hierro en total, ¿cuántas Tm de mineral se han de extraer de cada mina?

a) Plantea un sistema de ecuaciones que interprete el enunciado.

b) Clasifica el sistema.

c) Resuelve el sistema.

Solución:

a)

Sean x, y, z las toneladas de mineral que se extraen de las minas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} 0,01x + 0,02y + 0,01z = 7 \\ 0,02x + 0,05y + 0,03z = 18 \\ 0,03x + 0,07y + 0,01z = 16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2y + z = 700 \\ 2x + 5y + 3z = 1.800 \\ 3x + 7y + z = 1.600 \end{array}$$

b)

La matriz de coeficientes es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 14 + 18 - 15 - 21 - 4 = 37 - 40 = -3 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Rang } M = 3.$$

El rango de la matriz ampliada es como máximo 3 (por tener tres filas) y como la matriz de coeficientes es una submatriz de la matriz ampliada, el rango de la matriz ampliada es 3.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^{\text{a}} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}}$$

c)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} 700 & 2 & 1 \\ 1.800 & 5 & 3 \\ 1.600 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{100 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 18 & 5 & 3 \\ 16 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{100 \cdot (35 + 126 + 96 - 80 - 147 - 36)}{-3} = \\
 &= \frac{100 \cdot (257 - 263)}{-3} = \frac{100 \cdot (-6)}{-3} = 200. \\
 y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 700 & 1 \\ 2 & 1.800 & 3 \\ 3 & 1.600 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 18 & 3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{100 \cdot (18 + 32 + 63 - 54 - 48 - 14)}{-3} = \\
 &= \frac{100 \cdot (113 - 116)}{-3} = \frac{100 \cdot (-3)}{-3} = 100. \\
 z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 700 \\ 2 & 5 & 1.800 \\ 3 & 7 & 1.600 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{100 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 18 \\ 3 & 7 & 16 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{100 \cdot (80 + 98 + 108 - 105 - 126 - 64)}{-3} = \\
 &= \frac{100 \cdot (286 - 295)}{-3} = \frac{100 \cdot (-9)}{-3} = 300.
 \end{aligned}$$

Se extraen 200 toneladas de la mina A, 100 de la B y 300 de la C.

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) Considera la función $f(x) = \frac{3}{x^2-x}$.

a) Calcula el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula una primitiva de $f(x)$.

c) Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Solución:

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales que anulan el denominador.

$$x^2 - x = 0; \quad x(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{0, 1\}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{0-3 \cdot (2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{3-6x}{(x^2-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3-6x}{(x^2-x)^2} = 0 \Rightarrow 3 - 6x = 0; \quad 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

La raíz de la primera derivada divide al dominio de la función en dos intervalos en los cuales la derivada primera es positiva o negativa:

$$x < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0; \quad x > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < 0.$$

Teniendo en cuenta que $(x^2 - x)^2 > 0, \forall x \in D(f)$ y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)}.$$

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)}.$$

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{3}{x^2-x} \cdot dx.$$

$$\frac{3}{x^2-x} = \frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-A}{x^2-x} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=3 \end{cases}.$$

$$F(x) = \int \frac{3}{x^2-x} \cdot dx = \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{3}{x-1} \right) \cdot dx = -3L|x| + 3L|x-1| + C.$$

$$\underline{F(x) = \int \frac{3}{x^2-x} \cdot dx = 3 \cdot L \left| 1 - \frac{1}{x} \right| + C.}$$

c)

En el intervalo $(2, 3)$ todas las ordenadas de la función $f(x)$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 \frac{3}{x^2-x} \cdot dx = \left[3 \cdot L \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]_2^3 = 3 \cdot \left[L \left| 1 - \frac{1}{x} \right| \right]_2^3 = \\ &= 3 \cdot \left[L \left(1 - \frac{1}{3} \right) - L \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] = 3 \cdot \left(L \frac{2}{3} - L \frac{1}{2} \right) = 3 \cdot (L2 - L3 - L1 + L2) = \\ &= 3 \cdot (2L2 - L3 - 0) = 3 \cdot (L4 - L3). \end{aligned}$$

$$\underline{S = 3 \cdot (L4 - L3) u^2 \cong 0,863 u^2.}$$

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 3x - my + z = 1$, se pide, si existe, algún valor del parámetro m para el cual:

- a) El plano y la recta son paralelos. b) El plano contiene a la recta.
c) El plano y la recta se cortan en un punto.

En cada caso, si existen, calcularlos.

Solución:

a)

El plano y la recta son paralelos cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares, es decir: su producto escalar es cero.

Un vector director de la recta es $\vec{v}_r = (2, 3, -1)$ y un vector normal del plano es $\vec{n} = (3, -m, 1)$.

$$(2, 3, -1) \cdot (3, -m, 1) = 0; \quad 6 - 3m - 1 = 0; \quad 3m = 5 \Rightarrow m = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}.$$

$$\text{El plano resulta: } \pi \equiv 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 9x - 5y + 3z - 3 = 0.}}$$

b), c)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 2y + 2 \\ -x + 1 = 2z + 4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2z = -3 \end{cases}$$

$$\text{La recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ determinan el sistema } \begin{cases} 3x - my + z = 1 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + 2z = -3 \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -m & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -m & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1 $\rightarrow$ $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2 $\rightarrow$ $\text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3 $\rightarrow$ $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ La recta y el plano son secantes.

$$\text{Rang } M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -m & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 2 + 6m = 0; \quad 6m = 10 \Rightarrow m = \frac{5}{3}.$$

Para $m \neq \frac{5}{3} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ La recta y el plano son secantes.

El punto de corte es la solución del sistema que forman:
$$\begin{cases} 3x - my + z = 1 \\ 3x - 2y = 5 \\ x + 2z = -3 \end{cases}$$

Se resuelve por el método de Gauss.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 & -m & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & -m & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & 14 \\ 0 & -m & -5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & -m & -5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + mF_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3m-5 & 10-7m \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3m-5)z = 10-7m \Rightarrow z = \frac{10-7m}{3m-5}. \end{aligned}$$

$$x + 2z = -3; \quad x = -3 - 2z = -3 + \frac{-20+14m}{3m-5} = \frac{-9m+15-20+14m}{3m-5} = \frac{5m-5}{3m-5}.$$

$$y + 3z = -7; \quad y = -7 - 3z = -7 + \frac{-30+21m}{3m-5} = \frac{-21m+35-30+21m}{3m-5} = \frac{5}{3m-5}.$$

$$\text{Solución: } x = \frac{5m-5}{3m-5}; \quad y = \frac{5}{3m-5}; \quad z = \frac{10-7m}{3m-5}. \quad \left(m \neq \frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Para } m = \frac{5}{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -5/3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

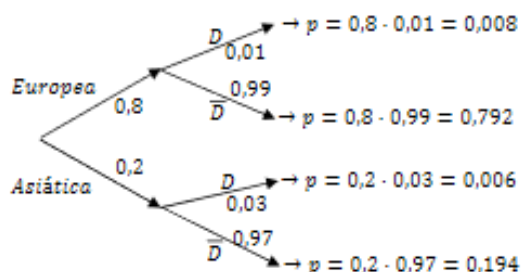
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5/3 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 18 - \frac{25}{3} - 15 = 3 - \frac{25}{3} = -\frac{16}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $m = \frac{5}{3} \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ La recta y el plano son paralelos

Modelo 2. OPCIÓN B. Problema 4:

4º) Una empresa de fabricación de impresoras tiene dos centros de producción, la fábrica europea E y la fábrica asiática A. El 1 % de las impresoras de la fábrica E y el 3 % de las impresoras de la fábrica A se producen defectos. El mercado de un determinado país se abastece de impresoras procedentes de la fábrica E en un 80 %, mientras que el resto procede de la fábrica A.

- a) ¿Cuál es la probabilidad que una impresora de ese país tenga defectos?
- b) Si el país tiene, aproximadamente, dos millones de impresoras fabricadas por esta empresa, ¿cuántas tendrán defectos?
- c) Si se escoge al azar una impresora de este país y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la fábrica E?

Solución:

a)

$$P = P(D) = P(E \cap D) + P(A \cap D) = P(E) \cdot P(D/E) + P(A) \cdot P(D/A) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,01 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,008 + 0,006 = \underline{0,014}.$$

b)

$$n = N \cdot p = 2.000.000 \cdot 0,014 = 28.000.$$

Se espera que haya 28.000 impresoras con defectos en ese país.

c)

$$P = P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{P(E) \cdot P(D/E)}{P(D)} = \frac{0,8 \cdot 0,01}{0,014} = \frac{0,008}{0,014} = \underline{0,5714}.$$



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Model 3

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les dues opcions, A i B, proposades.

Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemàtic o no matemàtic, segons correspongui. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritza l'ús de les que puguin emmagatzemar o transmetre informació.

OPCIÓ A

1. Donada l'equació matricial

$$M \cdot X + N = P,$$

on X és la matriu incògnita i

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Per a quins valors del paràmetre a existeix la matriu inversa de M ? (1 punt)
- (b) Calcula la matriu inversa de M . (3 punts)
- (c) Per a $a = 2$, resol l'equació matricial, si és possible. (3 punts)
- (d) Per als valors de a per als quals existeix la matriu inversa de M , resol l'equació matricial. (3 punts)

2. Considera la funció

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}.$$

- (a) Determina: el domini, els intervals de creixement i decreixement, les coordenades dels màxims i mínims i el $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. (2 punts)
- (b) Fes un esbós de la gràfica. (1 punt)
- (c) Obté els valors de A i B per als quals (3 punts)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}.$$

- (d) Calcula l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció, l'eix OX i les rectes d'equacions $x = -2$ i $x = 2$. (4 punts)



Universitat
de les Illes Balears
Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Model 3. Opció A. Segueix.

3. Donades les rectes

$$(I) \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17, \\ 8x - y - 5z = 23, \end{cases} \quad (II) \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5, \\ 24x - 2y - 13z = 67. \end{cases}$$

- Calcula un vector posició i un vector director de cada una. (4 punts)
 - Calcula l'equació vectorial de cada una. (2 punts)
 - Calcula el rang de la matriu formada pels dos vectors directors i el vector diferència, o vector resta, dels dos vectors posició obtinguts. (2 punts)
 - De l'anterior rang, dedueix la posició relativa d'ambdues rectes. (2 punts)
4. Tenim tres urnes, la primera conté 2 bolles blaves; la segona, 1 bolla blava i 1 de vermella; la tercera, 2 bolles vermelles. Fem l'experiment aleatori

"Triam una urna a l'atzar i extraiem una bolla"

Suposa que totes les urnes tenen la mateixa probabilitat de ser escollides.

- Calcula la probabilitat del succés $R = \text{"bolla extreta vermella"}$ (5 punts).
- Si la bolla extreta resulta que és vermella, quina és la probabilitat que l'urna escollida hagi estat la tercera? (5 punts).



Universitat
de les Illes Balears

Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

Model 3

OPCIÓ B

1. Donades les matrius A i B ,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

- calcula $A \cdot B$ i $(A \cdot B)^t$, on la "t" indica matriu transposada. (4 punts)
 - és possible calcular B^2 ? Si ho és, calcula-la. (1 punt)
 - per als diferents valors de x , calcula el rang de la matriu A . (5 punts)
2. En un aquari, l'estudi de l'evolució de la població de peixos s'ha modelat segons la funció $t \rightarrow P(t)$,

$$P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t},$$

on la variable t , que és un nombre real major o igual que zero, mesura el nombre d'anys transcorreguts des de l'1 de gener de l'any 2000 i $P(t)$ indica nombre d'individus, en milers, en l'instant de temps t . Segons el model, calcula:

- La població que hi havia l'1 de gener de l'any 2000 i la població que hi haurà a la fi de l'any 2020. (1 punt)
 - La mida de la població (en nombre d'individus) a llarg termini. (3 punts)
 - L'any en el qual s'arriba a la població mínima i quants individus hi haurà. (4 punts)
 - Fes un esbós de la gràfica de l'evolució poblacional $t \rightarrow P(t)$. (2 punts)
3. Donats els plans
- (I) $3x - ay + 2z - (a - 1) = 0$, (II) $2x - 5y + 3z - 1 = 0$, (III) $x + 3y - (a - 1)z = 0$,
- Demostra que, per a qualsevol valor del paràmetre a , no n'hi ha cap parell que siguin paral·lels. (4 punts)
 - Estudia la seva posició relativa, segons els diferents valors del paràmetre a . (6 punts)
4. El pes d'un grup de persones segueix una distribució normal de mitjana 54,3 kg i desviació típica de 6,5 kg.
- Quin és el percentatge de persones amb pes superior a 57 kg? (3 punts)
 - Quin percentatge de persones pesen entre 50 i 57 kg? (4 punts)
 - Si s'escull una persona a l'atzar que està dins del 70% de les persones que menys pesen, com a màxim, quants quilos hauria de pesar? (3 punts)



Universitat
de les Illes Balears
Proves d'accés
a la Universitat

Matemàtiques II

2020

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $N(0, 1)$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 1:

1º) Dada la ecuación matricial $M \cdot X + N = P$, siendo las matrices $M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

- ¿Para que valores del parámetro a existe la matriz inversa de M ?
- Calcula la matriz inversa de M .
- Para $a = 2$, resuelve la ecuación matricial, si es posible.
- Para los valores de a para los que existe la matriz inversa de M , resuelve la ecuación matricial.

Solución:

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & a \end{vmatrix} = -a - a^2 = 0; \quad -a(1 + a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1.$$

La matriz M es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

b)

$$M^t = M = \begin{pmatrix} -1 & a \\ a & a \end{pmatrix}. \quad \text{Adj. de } M^t = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{\text{Adj. de } M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & -1 \end{pmatrix}}{-a - a^2} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{a + a^2} \cdot \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix}, \forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}.$$

c)

$$\text{Para } a = 2 \text{ es } M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M \cdot X + N = P; \quad M \cdot X = P - N; \quad M^{-1} \cdot M \cdot X = M^{-1} \cdot (P - N);$$

$$I \cdot X = M^{-1} \cdot (P - N) \Rightarrow \underline{X = M^{-1} \cdot (P - N)}.$$

$$P - N = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = M^{-1} \cdot (P - N) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

d)

$$X = M^{-1} \cdot (P - N) = \frac{1}{a+a^2} \cdot \begin{pmatrix} -a & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+a^2} \cdot \begin{pmatrix} -2a & -2a \\ 2a & 2a \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{2}{1+a} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 2:

2º) Considera la función $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)}$:

a) Determina: el dominio, los periodos de crecimiento y decrecimiento, las coordenadas de los máximos y mínimos y $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

b) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x)$.

c) Obtén los valores de A y B para los cuales $f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$.

d) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función, por el eje OX y por las rectas de ecuaciones $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

a)

El dominio de una función racional es $\mathbb{R}$, excepto los valores que anulan el denominador.

$$(x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3 \Rightarrow \underline{D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x^2-9}, \quad f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-9)^2}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0)}.$$

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 3) \cup (3, +\infty)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-9)^2} = 0; -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

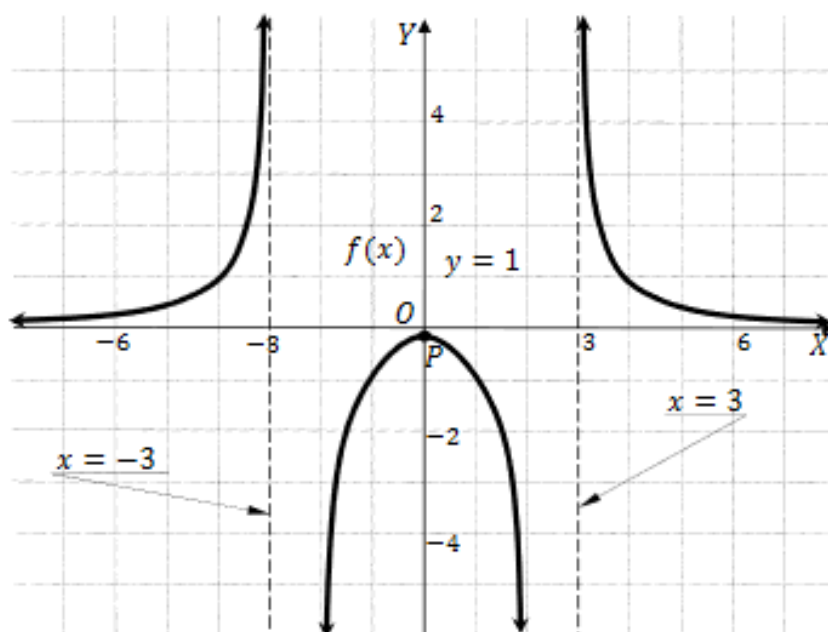
Teniendo en cuenta los periodos de crecimiento y decrecimiento, la función tiene un máximo relativo para $x = 0$.

$$f(0) = \frac{1}{(0-3)(0+3)} = \frac{1}{-9} \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo: } P\left(0, -\frac{1}{9}\right)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2-9} = 0.$$

b)

Con los datos obtenidos en el apartado anterior puede hacerse una representación aproximada de la función que es la que aparece en la figura siguiente.



c)

$$f(x) = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-3B}{(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A-3B)}{(x-3)(x+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A+3B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Rightarrow 6A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{6}; \frac{1}{6}+B=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{6}$$

$$\text{La función resulta } f(x) = \frac{-\frac{1}{6}}{x-3} + \frac{\frac{1}{6}}{x+3} = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right)$$

d)

Teniendo en cuenta los apartados anteriores, por ejemplo, que en el intervalo $(-2, 2)$ todas las ordenadas de la función son negativas y también que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$, el área pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^2 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) \cdot dx = \\ &= \frac{1}{3} [L|x-3| - L|x+3|]_0^2 = \frac{1}{3} \{ [L|0-3| - L|0+3|] - [L|2-3| - L|2+3|] \} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot (L3 - L3 - L1 + L5) \Rightarrow S = \frac{1}{3} \cdot L5 u^2 \cong 0,54 u^2. \end{aligned}$$

Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 3:

$$3^{\circ}) \text{ Dadas las rectas } r \equiv \begin{cases} 15x + 12y - 14z = -17 \\ 8x - y - 5z = 23 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases}$$

- a) Calcula un vector de posición y un vector director de cada una de las rectas.
- b) Calcula la ecuación vectorial de cada una de las rectas.
- c) Calcula el rango de la matriz formada por los dos vectores directores de las rectas y el vector diferencia, o vector resta, de los dos vectores de posición obtenidos.
- d) Del rango obtenido en el apartado anterior, deduce la posición relativa de las rectas.

Solución:

a)

Un vector director de una recta dada por dos ecuaciones implícitas es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 15 & 12 & -14 \\ 8 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -60i - 112j - 5k - 96k - 14i + 75j = \\ &= -74i - 37j - 101k = -37 \cdot (2i + j + 3k) \Rightarrow \underline{\vec{v}_r = (2, 1, 3)}. \end{aligned}$$

Un punto de r lo obtenemos fijando un valor a una de las variables, por ejemplo:

$$\begin{aligned} z = 1 &\Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -17 + 14 \\ 8x - y = 23 + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 8x - y = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 12y = -3 \\ 96x - 12y = 276 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 111x = 273; \quad 37x = 91 \Rightarrow x = 3. \quad 8 \cdot 3 - y = 28; \quad y = 24 - 28 = -4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{P(3, -4, 1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_s &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 9 & 5 & -2 \\ 24 & -2 & -13 \end{vmatrix} = -65i - 48j - 18k - 120k - 4i + 117j = \\ &= -69i + 69j - 138k = -69 \cdot (i - j + 2k) \Rightarrow \underline{\vec{v}_s = (1, -1, 2)}. \end{aligned}$$

Un punto de s lo obtenemos fijando un valor a una de las variables, por ejemplo:

$$\begin{aligned} z = 1 &\Rightarrow \begin{cases} 9x + 5y - 2z = 5 \\ 24x - 2y - 13z = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 5y = 7 \\ 24x - 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 5y = 7 \\ 12x - y = 40 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 9x + 5y = 7 \\ 60x - 5y = 200 \end{cases} \Rightarrow 69x = 207; \quad x = 3; \quad 27 + 5y = 7; \quad 5y = -20; \quad y = -4 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{Q(1, -4, 3)}.$$

b)

La ecuación vectorial de una recta es $r \equiv (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot \vec{v}_r$.

$$\underline{r \equiv (x, y, z) = (3, -4, 1) + \lambda \cdot (2, 1, 3)}.$$

$$\underline{s \equiv (x, y, z) = (1, -4, 3) + \mu \cdot (1, -1, 2)}.$$

c)

$$\vec{w} = \vec{v}_r - \vec{v}_s = (2, 1, 3) - (1, -1, 2) = (1, 2, 1).$$

$$\text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 6 + 2 + 3 - 8 - 1 = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} = 2}.$$

d)

Por ser $\text{Rang} \{\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{w}\} = 2$ las rectas r y s están contenidas en un mismo plano, lo que significa que se cortan o son paralelas. Como quiera que los vectores $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ son linealmente independientes, por no ser proporcionales sus componentes, por lo cual:

Las rectas r y s se cortan en un punto.

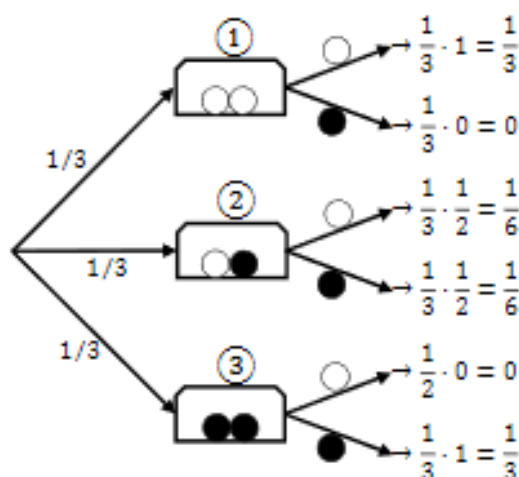
Modelo 3. OPCIÓN A. Problema 4:

4º) Se tienen tres urnas, la primera con dos bolas blancas; la segunda con una bola blanca y otra negra; la tercera con 2 bolas negras. Hacemos el experimento aleatorio: “se elige una urna al azar y se extrae una bola”; se supone que las tres urnas tienen la misma probabilidad de ser elegidas.

a) Calcule la probabilidad del suceso “extraer bola negra”.

b) Si la bola extraída resulta que es negra, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la tercera?

Solución:



a)

$$P = P(N) = P(U1) \cdot P(N/U1) + P(U2) \cdot P(N/U2) + P(U3) \cdot P(N/U3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

b)

$$P = P(U3/N) = \frac{P(U3 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(U3) \cdot P(N/U3)}{P(N)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = 0,6667.$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula $A \cdot B$ y $(A \cdot B)^t$, donde la "t" indica la matriz traspuesta.

b) ¿Es posible calcular B^2 ? Si lo es, calcúlala.

c) Para los diferentes valores de x , calcula el rango de la matriz A .

Solución:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+x & 7 \\ 12 & 14 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 2+x & 12 & 18 \\ 7 & 14 & 21 \end{pmatrix}.$$

b)

Para que el producto de matrices sea posible es necesario que el número de columnas de la matriz multiplicando sea igual al número de filas de la matriz multiplicador siendo las dimensiones de la matriz producto el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda: $X_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

Siendo las dimensiones de las matrices a multiplicar $B_{(3,2)} \cdot B_{(3,2)}$ no es posible.

De otra forma: para que una matriz pueda multiplicarse por sí misma es necesario que sea cuadrada.

No es posible obtener B^2 .

c)

Se calcula el rango de la matriz A por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 3F_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 8-2x \\ 0 & 0 & 12-3x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \rightarrow \frac{1}{3}F_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 4-x \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & x \\ 0 & 0 & 4-x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x = 4 \rightarrow \text{Rang } A = 1 \\ \text{Para } x \neq 4 \rightarrow \text{Rang } A = 2 \end{cases}$$

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 2:

2º) En un acuario, el estudio de la evolución de la población de peces se ha modelado según la función $t \rightarrow P(t)$, siendo $P(t) = \sqrt{t+1} - \sqrt{t}$, con la variable t , que es un número real mayor o igual que cero, muestra el número de años transcurridos desde el primero de enero del año 2.000 y $P(t)$ indica el número de individuos, en miles, en el instante de tiempo t . Según el modelo, calcula:

- La población que había el primero de enero del año 2.000 y la población que habrá al final del año 2.020.
- La media de la población (en número de individuos) a largo plazo.
- El año que se llega a la población mínima y cuántos individuos habrá.
- Haz un esbozo de la gráfica de la evolución poblacional $t \rightarrow P(t)$.

Solución:

a)

$$\text{Año 2.000} \Rightarrow t = 0 \rightarrow P(0) = \sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Año 2.020} \Rightarrow t = 20 \rightarrow P(20) &= \sqrt{20+1} - \sqrt{20} = \sqrt{21} - \sqrt{20} \cong \\ &= 4,5826 - 4,4721 = 0,1105. \end{aligned}$$

Al principio de 2.000 había 1.000 personas y al final de 2.020 habrá 110.

b)

$$\begin{aligned} N &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t+1} - \sqrt{t}) = \infty - \infty \Rightarrow \text{Indeterminado} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t+1} - \sqrt{t})(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t+1} - \sqrt{t})^2 - (\sqrt{t})^2}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1-t}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \\ &= \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Con el paso del tiempo tienden a desaparecer los peces del acuario.

c)

Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$P'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{\sqrt{t^2+t}}. \quad P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t+1}}{\sqrt{t^2+t}} = 0;$$

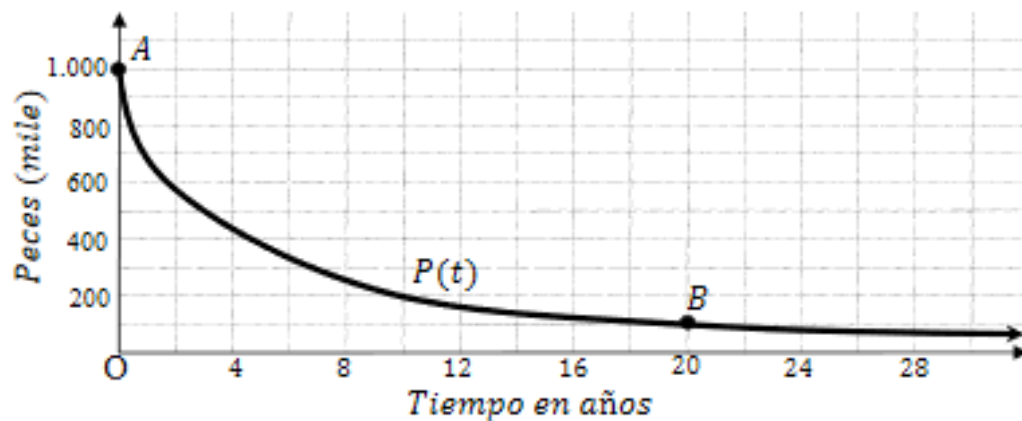
$$\sqrt{t} - \sqrt{t+1} = 0; \quad \sqrt{t} = \sqrt{t+1} \Rightarrow t = t+1 \Rightarrow t \notin \mathbb{R}.$$

La función $f(x)$ no tiene máximos ni mínimos relativos.

La expresión $\sqrt{t} - \sqrt{t+1} < 0, \forall t \geq 0$, por lo cual la función es monótona decreciente en su dominio, que es $[0, +\infty)$.

d)

De los apartados anteriores se deduce la gráfica de la función, que es, aproximadamente, la que indica la figura siguiente.



Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 3:

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x - ay + 2z - (a - 1) = 0$; $\pi_2 \equiv 2x - 5y + 3z = 1$ y $\pi_3 \equiv x + 3y - (a - 1)z = 0$:

a) Demuestra que, para cualquier valor del parámetro a , no existen planos paralelos.

b) Estudia su posición relativa, según los diferentes valores del parámetro a .

Solución:

a) b)

Los tres planos determinan las siguientes matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1-a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -a & 2 & a-1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ Los planos se cortan en un punto.

2º. -- $\text{Rang } M = 2$; $\text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes dos a dos.

3º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

4º. -- $\text{Rang } M = 1$; $\text{Rang } M' = 2 \Rightarrow$ Los planos son paralelos.

5º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 1 \Rightarrow$ Los planos son coincidentes.

$$\text{Rang } M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -a & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1-a \end{vmatrix} = -15(1-a) + 12 - 3a + 10 - 27 + 2a(1-a) =$$

$$= -15 + 15a - 5 - 3a + 2a - 2a^2 = -2a^2 + 14a - 20 = 0; \quad a^2 - 7a + 10 = 0;$$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5.$$

Para $\begin{cases} a \neq 2 \\ a \neq 5 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow$ Los planos se cortan en un punto.

$$\text{Para } a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 5 - 9 = 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para $a = 2 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Los planos se cortan en una recta.}$

$$\text{Para } a = 5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 5 + 20 - 9 = 30 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $a = 5 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Planos secantes dos a dos.}$

Queda demostrado que $\forall a \in \mathbb{R}$ no existen planos paralelos.

Modelo 3. OPCIÓN B. Problema 4:

4º) El peso de un grupo de personas sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica de 6,5 kg.

a) ¿Cuál es el porcentaje de personas con un peso superior a 57 kg?

b) ¿Qué porcentaje de personas pesan entre 50 y 57 kg?

c) Si se escoge al azar una persona de ese grupo que está dentro del 70 % de las personas de menor peso, como máximo, ¿cuántos kg puede pesar?

Solución:

Datos: $\mu = 54,3$; $\sigma = 6,5$.

$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(54,3; 6,5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-54,3}{6,5}$.

a)

$$\begin{aligned} P &= P(X > 57) = P\left(Z > \frac{57-54,3}{6,5}\right) = P\left(Z > \frac{2,7}{6,5}\right) = P(Z > 0,415) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0,415) = 1 - \frac{0,6628+0,6591}{2} = 1 - \frac{1,3219}{2} = 1 - 0,6610 = \underline{0,3390}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P &= P(50 < X < 57) = P\left(\frac{50-54,3}{6,5} \leq Z \leq \frac{57-54,3}{6,5}\right) = P\left(\frac{-4,3}{6,5} \leq Z \leq \frac{2,7}{6,5}\right) = \\ &= P(-0,662 \leq Z \leq 0,415) = P(Z \leq 0,415) - [1 - P(Z \leq 0,662)] = \\ &= P(Z \leq 0,415) - 1 + P(Z \leq 0,662) = 0,6610 - 1 + 0,7456 = 1,4066 - 1 = \\ &= \underline{0,4066}. \end{aligned}$$

c)

$$P(\bar{X} - a) = 0,7 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{X-54,3}{6,5}\right) = 0,7.$$

Buscando en la tabla $N(0,1)$ a la inversa, a 0,7000 le corresponde de forma aproximada 0,523:

$$\frac{a-54,3}{6,5} = 0,523; \quad a - 54,3 \cong 3,40 \Rightarrow a = 3,40 + 54,3 = 57,70.$$

Puede pesar, como máximo, 57,70 kilogramos.