MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JULIO 2020

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escoger solo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota traspuesta de A.

1) [0.5 PUNTOS] Despeja la matriz X en la igualdad dada.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

3) [0.5 PUNTOS] Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

4) [1 PUNTO] Calcula X.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS] Considera la función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

3) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

4) [1 PUNTO] Calcula $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Se emite un rayo láser desde el punto $P = (1, 2, 8)$ en la dirección del vector $\vec{v} = (1, 2, -3)$. El plano $-x - y + 3z = -8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

2) [1 PUNTO] Determina la posición relativa de rayo y lámina.

3) [1 PUNTO] Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 U, en donde U son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 U dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 U dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 U y desviación típica 5 U y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1%.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

1) [1 PUNTO] Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

2) [0.5 PUNTOS] Clasifica el sistema.

3) [1 PUNTO] Resuelve el sistema.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$.

1) [1 PUNTO] Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

2) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$.

3) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 1$, $x = 2$, y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 3, -4)$, $C = (4, 3, 2)$.

1) [0.5 PUNTOS] Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

2) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano que contiene los tres puntos.

3) [1 PUNTO] Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]
En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos son perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 € (si sacamos un 1 ganamos 100 €, si sacamos un 2 ganamos 200 €, etc.) y si en la moneda sale "Cara" sumamos 300 € adicionales.

1) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 €.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la probabilidad de ganar 400 € si sabemos que ha salido "Cara" en la moneda.

3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que haya salido "Cara" sabiendo que hemos ganado 400 €.

Ejercicio 1:

Considera la ecuación $AXA^t = B$ en donde $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, y A^t denota la traspuesta de A.

$a)$ Despeja la matriz X en la igualdad dada.

$b)$ Comprueba que A es invertible y calcula su inversa.

$c)$ Comprueba que $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

$d)$ Calcula X.

Solución:

$a)$ $A \cdot X \cdot A^t = B$; Si la matriz A tiene inversa, entonces:

$\rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A^t \cdot (A^t)^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} \rightarrow I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1}}$.

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1}$$

$b)$ Sabemos que una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

Luego A es invertible

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$c)$ $(A^{-1})^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $|A^t| = |A| = -2$. $(A^t)^t = A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj.de\ (A^t)^t = Adj.de\ A$

$(A^t)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A^t)^t}{|A^t|} = \frac{Adj.de\ A}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \underline{(A^t)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.

$(A^t)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto: $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

$d)$ Sustituimos los valores obtenidos en la ecuación del apartado a)

$$X = A^{-1} \cdot B \cdot (A^t)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$.

$a)$ Calcula la derivada primera.

$b)$ Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

$c)$ Calcula las asíntotas.

$d)$ Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Solución:

$a)$ Derivamos: $f'(x) = \frac{cos\, x \cdot x - sen\, x \cdot 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot cos\, x - sen\, x}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{x \cdot cos\, x - sen\, x}{x^2}$$

$b)$ La pendiente de la tangente a la gráfica de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto, por tanto:

$$m = f'(\pi) = \frac{\pi \cdot cos\, \pi - sen\, \pi}{\pi^2} = \frac{\pi \cdot (-1) - 0}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi} \Rightarrow.$$

$$m = -\frac{1}{\pi}$$

$c)$ Asíntotas horizontales: Calculamos el límite cuando x tiende a más o menos infinito.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{sen\, x}{x} = 0$ ya que el seno está acotado y el denominador tiende a infinito.

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 0}$

Asíntotas verticales: La única asíntota vertical posible es para $x = 0$, pues se anula el denominador, pero resulta $sen\, 0 = 0$, por lo cual, para determinar si $x = 0$ es asíntota se debe resolver el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = \frac{sen\, 0}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{cos\, x}{1} = \frac{1}{1} = 1 \neq \infty.$$

No hay asíntota vertical. Tampoco puede haber asíntota oblicua ya que hay asíntota horizontal.

$d)$ Ya lo hemos calculado:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

Ejercicio 3:

Se emite un rayo láser desde el punto $P(1,2,8)$ en la dirección del vector $\vec{v}=(1,2,-3)$. El plano $\pi \equiv -x-y+3z=-8$ determina la posición de una lámina de grandes dimensiones.

$a)$ Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser.

$b)$ Determina la posición relativa del rayo y la lámina.

$c)$ Se quiere situar otra lámina que sea ortogonal al rayo y pase por el origen. Calcula la ecuación del plano de esta lámina.

Solución:

$a)$ Es la recta que pasa por el punto $P(1,2,8)$ y tiene de vector de dirección: $\vec{v}=(1,2,-3)$. Su ecuación continua es:

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-8}{-3}$$

$b)$ Hallamos las ecuaciones implícitas de la recta, y resolvemos el sistema determinado por la recta y el plano:

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} 2x-2=y-2 \\ -3x+6=z-8 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 3x+z=14 \end{array}\right. \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ 3x+z=14 \\ x+y-3z=8 \end{array}\right\}..$$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 14 \\ 1 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1-2-9=-12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

El sistema es compatible y determinado, por tanto, la recta y el plano se cortan en un punto:

$$La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes$$

$c)$ El plano pedido debe tener como vector ortogonal el vector de dirección de la recta:

$$x+2y-3z+D=0$$

Imponemos que pase por el origen de coordenadas, luego $D=0$. El plano pedido es:

$$\boldsymbol{x+2y-3z=0}$$

Ejercicio 4:

Un determinado test rápido para anticuerpos de COVID-19 consigue detectar concentraciones iguales o superiores a 10 u, en donde u son unidades de concentración de anticuerpos. De esta forma, concentraciones iguales o superiores a 10 u dan un resultado positivo, mientras que concentraciones inferiores a 10 u dan un resultado negativo en el test. Suponemos que la concentración de anticuerpos sigue una distribución normal con media 20 u y desviación típica 5 u y que todas las personas que han pasado la enfermedad han desarrollado anticuerpos.

$a)$ Calcula la probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test.

$b)$ Calcula qué concentraciones debería detectar el test para que la probabilidad calculada en el apartado anterior fuese del 1 %.

Solución:

$a)$ Sabemos que: $\mu = 20;\ \ \sigma = 5.\ X \to N(\mu;\ \sigma) = N(20, 5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-20}{5}$.

Como el resultado es negativo para concentraciones inferiores a 10, calculamos:

$P = P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-20}{5}\right) = P\left(Z < \frac{-10}{5}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$

La probabilidad de que una persona que ha pasado la enfermedad de negativo en el test es de **0.0228**.

$b)$ Nos piden que: $P = P(X < y) = 1\ \% = 0.01.$

$$P = P\left(Z < \frac{y-20}{5}\right) = 0.01.$$

No es posible buscar en $N(0,1)$.

Se hace lo siguiente:

$$P\left(Z < \frac{y-20}{5}\right) = P\left(Z > -\frac{y-20}{5}\right) = 1 - P\left(Z \leq -\frac{y-20}{5}\right) = 0.01 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq -\frac{y-20}{5}\right) = 1 - 0.01 = 0.99.$$

Buscando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, a 0.00 le corresponde 2.33, aproximadamente:

$$-\frac{y-20}{5} = 2.33;\ -y + 20 = 11.65;\ \ y = 20 - 11.65 = 8.35.$$

La concentración de $\mathbf{8.35\ u}$ tienen una probabilidad del 1 %

Ejercicio 5:

En un juego de mesa se pueden comprar tanques, submarinos y aviones por 1, 3 y 5 diamantes, respectivamente. El rival ha gastado 41 diamantes. Sabemos que tiene el doble de submarinos que de tanques, y que el número de submarinos más el de aviones es 10.

a) Con la información dada, plantea un sistema de ecuaciones para hallar el número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival.

b) Clasifica el sistema.

c) Resuelve el sistema.

Solución:

a) Llamamos x, y, z al número de tanques, submarinos y aviones que tiene el rival, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+3y+5z&=41\\ y&=2x\\ y+z&=10 \end{aligned}\right\}.$$

b) La matriz de coeficientes es: $M=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&-1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. Calculamos su rango:

$$|M|=\begin{vmatrix}1&3&5\\2&-1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=-1+10-6=3\neq 0\Rightarrow$$

Por lo que su rango es 3, igual al de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

Es un sistema compatible y determinado.

c) Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}41&3&5\\0&-1&0\\10&1&1\end{vmatrix}}{3}=\frac{-41+50}{3}=\frac{9}{3}=3.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&41&5\\2&0&0\\0&10&1\end{vmatrix}}{3}=\frac{100-82}{3}=\frac{18}{3}=6.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&3&41\\2&-1&0\\0&1&10\end{vmatrix}}{3}=\frac{-10+82-60}{3}=\frac{12}{3}=4.$$

El rival tiene **3** tanques, **6** submarinos y **4** aviones.

Ejercicio 6:

Considera la función $f(x)=\frac{2}{x^2}$.

$a)$ Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

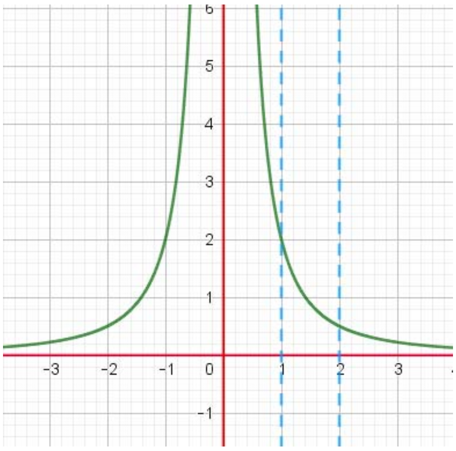
$b)$ Halla una primitiva de $f(x)$.

$c)$ Calcula el área de la región limitada por la función $y=f(x)$, las rectas $x=1$, $x=2$ y el eje de abscisas.

Solución:

Como es una función racional cuyo denominador se anula en $x=0$, el dominio es toda la recta real excepto ese punto.

$$D(f)\Rightarrow R-\{0\}$$



Por tanto, la recta $x=0$, es una asíntota vertical.

Para determinar la asíntota horizontal, si existe, calculamos el límite cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=\frac{2}{\infty}=0.$$

Por tanto, la recta $y=0$, es una asíntota horizontal. No puede haber asíntotas oblicuas.

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x=0}$. Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y=0}$.

Es una función par, de eje de simetría el eje de ordenadas. Es siempre positiva. Creciente desde menos infinito a 0, y decreciente desde 0 a más infinito. No tiene ni máximos ni mínimos relativos.

$b)\ F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int\frac{2}{x^2}\cdot dx=2\cdot\int x^{-2}\cdot dx=2\cdot\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{2}{x}+C$

$$F(x)=-\frac{2}{x}+C$$

$c)\ Área=\int_1^2 f(x)\cdot dx=[F(x)]_1^2=\left[-\frac{2}{x}\right]_1^2=\left[\frac{2}{x}\right]_2^1=\frac{2}{1}-\frac{2}{2}\Rightarrow Área=1\,u^2.$

$$Área=1\,u^2$$

Ejercicio 7:

Considera los puntos $A(1,2,1), B(2,3,-4), C(4,3,2)$.

$a)$ Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$b)$ Halla la ecuación del plano π que contiene los tres puntos.

$c)$ Calcula el área del triángulo que forman los tres puntos.

Solución:

$a)$ Los puntos A y B.determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (1,1,-5)$.

Escribimos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $A(1,2,1)$, y tiene de vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (1,1,-5)$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{cases}$$

$b)$ Calculamos otro vector de orientación del plano: $\overrightarrow{AC} = [C - A] = (3,1,1)$. Y ya tenemos un punto: $A(1,2,1)$, y dos vectores de orientación del plano: $\overrightarrow{AB} = (1,1,-5)$ y $\overrightarrow{AC} = (3,1,1)$.

Escribimos la ecuación general del plano π que contiene los puntos A, B y C:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6(x-1) - 16(y-2) - 2(z-1) = 0;$$

$3(x-1) - 8(y-2) - (z-1) = 0 = 3x - 3 - 8y + 16 - z + 1.$

$$\boldsymbol{\pi \equiv 3x - 8y - z + 14 = 0}$$

$c)$ El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan. Ya tenemos determinados los vectores:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |i - 15j + k - 3k + 5i - j| =$$

$= \frac{1}{2} \cdot |6i - 16j - 2k| = |3i - 8j - k| = \sqrt{3^2 + (-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 64 + 1} = \sqrt{74}.$

$$S_{ABC} = \sqrt{74}\, u^2 \cong 8.6\, u^2$$

Ejercicio 8:

En un concurso de televisión el premio consiste en lanzar de forma independiente un dado cúbico y una moneda (suponemos que ambos perfectos). Por cada punto obtenido con el dado sumamos 100 euros (si sacamos un 1 ganamos 100 euros, si sacamos un 2 ganamos 200 euros, etc.) y si en la moneda sale cara sumamos 300 euros adicionales.

$a)$ Calcula la probabilidad de ganar exactamente 400 euros.

$b)$ Calcula la probabilidad de ganar 400 euros si sabemos que ha salido cara en la moneda.

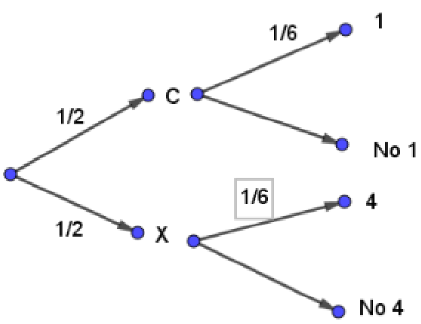
$c)$ Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que hemos ganado 400 euros.

Solución:

$a)$ Para ganar exactamente 400 euros, podemos sacar cara y un 1, o sacar cruz y un 4. Por lo que la probabilidad de ganar es:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

La probabilidad de ganar exactamente 400 euros es $\mathbf{\frac{1}{6}}$



$b)$ Nos piden ahora una probabilidad condicionada: $P(ganar\ 400/C)$

$$P(ganar400/C)=\frac{P(ganar\ 400\cap C)}{P(C)}=\frac{1/12}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

La probabilidad de ganar 400 euros si sabemos que ha salido cara en la moneda es $\mathbf{\frac{1}{6}}$

$c)$ Nos piden ahora otra probabilidad condicionada: $P(C/ganar\ 400)$

$$P(C/ganar\ 400)=\frac{P(ganar\ 400\cap C)}{P(ganar400)}=\frac{1/12}{1/6}=\frac{1}{2}$$

La probabilidad de que haya salido cara sabiendo que hemos ganado 400 euros es $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

UC
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – SEPTIEMBRE 2020

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escoger solo cuatro ejercicios elegidos entre los ocho de que consta el examen.
2. Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
3. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
4. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
5. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+(1-t)y &= t \\ (1+t)x-3y &= -t \end{cases}$ dependiente del parámetro t.

1) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.

2) [1 PUNTO] Determina para qué valores de t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

3) [0.5 PUNTOS] Determina para qué valores de t el sistema no tiene solución.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considera la función $f(x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x}$.

1) [0.5 PUNTOS] Calcula la derivada primera

2) [0.5 PUNTOS] Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=\pi$.

3) [1 PUNTO] Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

4) [0.5 PUNTOS] Calcula las asíntotas.

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considera los puntos $A=(2,1,5)$, $B=(3,4,1)$ y la recta $r=\begin{cases} x &= 3-\lambda \\ y &= 4-3\lambda \\ z &= 1-4\lambda \end{cases}$

1) [0.5 PUNTOS] Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.

2) [1 PUNTO] Calcula la ecuación de una recta que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.

3) [1 PUNTO] Calcula la ecuación del plano que contiene al rayo y a la recta r.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Un tenista juega el 20% de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90% de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40% de los partidos.

1) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.

2) [1.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]
Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

1) [1 PUNTO] Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

2) [0.5 PUNTOS] Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

3) [1 PUNTO] Calcula X para $a = 1$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]
Considera la función $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x \leq \pi/2 \\ \dfrac{2}{x} + a & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

1) [0.5 PUNTOS] Halla a para que $f(x)$ sea continua.

2) [0.5 PUNTOS] Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

3) [0.5 PUNTOS] Halla una primitiva de $f(x)$ para $x \leq \pi/2$.

4) [1 PUNTO] Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = \pi/2$, y el eje OX de abscisas.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]
Considera los puntos $A = (1, 3, 1)$, $B = (4, 1, -2)$, $C = (3, 5, 2)$, $D = (1, 1, 3)$.

1) [1 PUNTO] Halla la ecuación del plano, Π, que contiene los puntos A, B, C.

2) [0.5 PUNTOS] Comprueba si el punto D está contenido en el plano Π.

3) [1 PUNTO] Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]
En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm.

Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

1) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

2) [0.25 PUNTOS] Calcula la probabilidad de que sea holandés.

3) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

4) [1 PUNTO] Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Ejercicio 1:

Considera el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+(1-t)y=t \\ (1+t)x-3y=-t \end{cases}$ dependiente del parámetro t.

a) Determina para qué valores del parámetro t el sistema tiene solución única y resuélvelo en ese caso, expresando la solución en función del parámetro t si es necesario.

b) Determina para qué valores del parámetro t el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvelo en ese caso.

c) Determina para qué valores del parámetro t el sistema no tiene solución.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1-t & 1 \\ 1+t & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene solución única cuando los rangos de las matrices de coeficientes son iguales e igual al número de incógnitas. En el caso que nos ocupa, este rango tiene que ser dos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}=-3-(1+t)(1-t)=0=3+1-t^2=4-t^2 \rightarrow\ t^2=4 \Rightarrow t_1=-2, t_2=2.$$

El sistema es compatible y determinado, tiene solución única, $\forall t \in R-\{-2,2\}$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1-t \\ 1+t & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-3+1-t}{4-t^2}=\frac{-2-t}{(2+t)(2-t)}=\frac{-(2+t)}{(2+t)(2-t)}=\frac{-1}{2-t}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1+t & -1 \end{vmatrix}}{(2+t)(2-t)}=\frac{-1-1-t}{(2+t)(2-t)}=\frac{-2-t}{(2+t)(2-t)}=\frac{-(2+t)}{(2+t)(2-t)}=\frac{-1}{2-t}.$$

$$x=y=\frac{1}{t-2}, \forall t \in R-\{-2,2\}$$

b) Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado) cuando los rangos de las matrices de coeficientes son iguales y menores que el número de incógnitas. En el caso que nos ocupa, este rango tiene que ser menor que dos.

Para $t=-2 \rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y su rango es 1, igual al rango de M, luego el sistema es compatible e indeterminado.

El sistema es: $\left.\begin{matrix} x+3y=-2 \\ -x-3y=2 \end{matrix}\right\}$, equivalente a $x+3y=-2 \rightarrow x=-2-3\lambda$.

$$x=-2-3\lambda, y=\lambda, \forall\lambda \in R$$

c) Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema no tiene soluciones (incompatible) cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son distintos. En el caso que nos ocupa tiene que ser que el rango de la matriz de los coeficientes $M=1$ y el rango de la matriz ampliada sea igual a 2.

Para $t=2$, $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$; $M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ de rango 1 y 2 respectivamente, luego el sistema es incompatible.

Ejercicio 2:

Considera la función $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$.

$a)$ Calcula la derivada primera.

$b)$ Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

$c)$ Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$.

$d)$ Calcula las asíntotas.

Solución:

a) Derivamos: $f'(x) = \frac{sen\, x \cdot x - (1-\cos x)\cdot 1}{x^2} = \frac{x \cdot sen\, x - 1 + cox}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{x \cdot sen\, x - 1 + cox}{x^2}$$

$b)$ La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto es igual al valor de su primera derivada en ese punto.

$$m = f'(\pi) = \frac{\pi \cdot sen\, \pi - 1 + \cos \pi}{\pi^2} = \frac{\pi \cdot 0 - 1 + (-1)}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}$$

$$\boldsymbol{m = -\frac{2}{\pi^2}}$$

$c)$ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ Indeterminado. Usamos la regla de L'Höpital

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{0 + sen\, x}{1} = \frac{0}{1} = 0.$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$$

$d)$ Podría parecer que hay una asíntota vertical para $x = 0$. Pero no, pues al calcular el límite vemos que en ese punto la función no tiene a infinito, sino a cero.

Calculamos la asíntota horizontal, calculando el límite cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

El numerador está acotado, y el denominador tiene a infinito, luego la función tiende a cero.

Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y = 0}$.

No hay asíntota oblicua.

Ejercicio 3:

Considera los puntos $A(2,1,5), B(3,4,1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = 4-3\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{cases}$.

$a)$ Se emite un rayo láser desde el punto A. Calcula la ecuación de la recta que contiene al rayo láser para que impacte en el punto B.

$b)$ Calcula la ecuación de una recta t que pase por B y sea perpendicular al rayo y a la recta r.

$c)$ Calcula la ecuación del plano π que contiene al rayo y a la recta r.

Solución:

$a)$ Queremos obtener la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos. Tomamos como punto en B, y como vector de dirección el:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,4,1)-(2,1,5)] = (1,3,-4) \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1,3,-4)$.

Su ecuación continua es:

$$rayo: \frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{-4}$$

$b)$ Buscamos el vector director de la recta t que es es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto escalar de los vectores directores de las rectas $r\ y\ rayo$, que son los siguientes: $\overrightarrow{v_r} = (1,3,4)\ y\ \overrightarrow{v_{rayo}} = (1,3,-4)$.

$$\overrightarrow{v_t'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -12i + 4j + 3k - 3k - 12i + 4j = -24i + 8j \to \overrightarrow{v_t} = (3,-1,0).$$

La recta t pedida que pasa por $B(3,4,1)$ y de vector $\overrightarrow{v_t} = (3,-1,0)$es:

$$t \equiv \begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = 4-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

$c)$ Si plano β que contiene al rayo y a la recta r tiene como vectores de oreintación a los vectores $\overrightarrow{v_r} = (1,3,4)\ y\ \overrightarrow{v_{rayo}} = (1,3,-4)$ y contiene al punto $B(3,4,1) \in r$:

$$\beta(B;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 = -24(x-3) + 4(y-4) \to 3x - y - 5 = 0;$$

$$\mathbf{3x - y - 5 = 0}$$

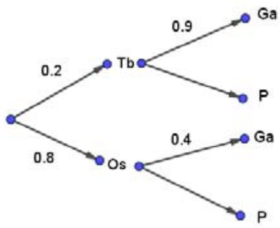
Ejercicio 4:

Un tenista juega el 20 % de sus partidos en tierra batida y el resto en otras superficies. Jugando en tierra batida gana el 90 % de sus partidos, pero en otras superficies, solo consigue ganar el 40 % de los partidos.

a) Calcula la probabilidad de que gane un partido concreto, sin que sepamos en qué superficie juega.

b) Calcula la probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido.

Solución:



a) Llamamos al suceso tierra batida: Tb; Al suceso otras superficies: Os; Al suceso Gana: Ga, y al suceso pierde: P.

$P(Ga) = P(Tb \cap Ga) + P(Os \cap Ga) = P(Tb) \cdot P(Ga/Tb) + P(Os) \cdot P(Ga/Os) = 0.2 \cdot 0.9 + 0.8 \cdot 0.4 = 0.18 + 0.32 = 0.5$

La probabilidad de que gane un partido concreto es **0.5**.

b) Nos piden una probabilidad condicionada: $P(Tb/Ga)$

$$P(Tb/Ga) = \frac{P(Tb \cap Ga)}{P(Ga)} = \frac{P(Tb) \cdot P(Ga/Tb)}{P(Ga)} = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.5} = \frac{0.18}{0.5} = 0.36.$$

La probabilidad de que haya jugado un partido concreto en tierra batida sabiendo que ha ganado dicho partido es **0.36**.

Ejercicio 5:

Considera la ecuación matricial $AX - X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, en donde a es un parámetro real.

$a)$ Despeja la matriz X de la ecuación anterior.

$b)$ Halla los valores de a para los que no es posible calcular X.

$c)$ Calcula X para $a = 1$.

Solución:

$a)$ Nos dan la ecuación: $AX - X = B = AX - I \cdot X = (A - I) \cdot X$;

Si existe la matriz inversa de $(A - I)$ multiplicamos por ella:

$(A - I)^{-1} \cdot (A - I) \cdot X = (A - I)^{-1} \cdot B \to X = (A - I)^{-1} \cdot B$.

$$\boldsymbol{X = (A - I)^{-1} \cdot B}$$

$b)$ Ya hemos comentado que no se puede, si no existe la matriz inversa de $(A - I)$. Para que exista debe ser su determinante distinto de cero.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix} \to |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a - 1 + 1 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

No es posible despejar $\boldsymbol{X}$ cuando $\boldsymbol{a = 0}$.

$c)$ Para $a = 1$ es $A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A - I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A-I)^t}{|A-I|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A - I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 6:

Considera la función $f(x) = \begin{cases} sen\,x \;\; si \;\; x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{x} + a \;\; si \;\; x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$, siendo a un parámetro real.

$a)$ Halla a para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$c)$ Calcula el área de la región limitada por la función $y = f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ y el eje OX de abscisas.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua para $x < \frac{\pi}{2}$ pues es la función seno, continua en toda la recta real. Y es continua para $x > \frac{\pi}{2}$, pues la función racional $g(x) = \frac{2}{x} + a$ sólo no es continua para $x = 0 < \frac{\pi}{2}$. Como es una función definida a trozos cabe la duda de si es continua en el punto de unión: $x = \frac{\pi}{2}$.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

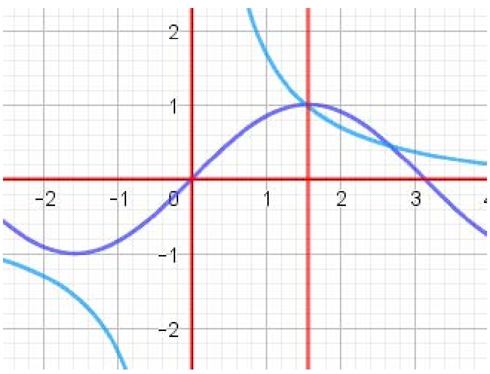
$$Para\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(sen\ \frac{\pi}{2}\right) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{x} + a\right) = \frac{4}{\pi} + a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = 1 = \lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \frac{4}{\pi} + a = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{4}{\pi} + a;\ \ a = 1 - \frac{4}{\pi} \Rightarrow$$

Si $\boldsymbol{a = \frac{\pi - 4}{\pi}}$, la función es continua en toda la recta real.

$b)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2}{x} + a\right) = 0 + a \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \boldsymbol{a}$$



$c)$ En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función es $f(x) = sen\ x$.

$$Área = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x \cdot dx = [-cos\ x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= cos\ 0 - cos\ \frac{\pi}{2} = 1$$

$$Área = \mathbf{1}\ u^2$$

Ejercicio 7:

Considera los puntos $A(1,3,1), B(4,1,-2), C(3,5,2)\ y\ D(1,1,3)$.

$a)$ Halla la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$b)$ Comprueba si el punto D está contenido en el plano π.

$c)$ Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

Solución:

$a)$ Tres puntos determinan un plano. Buscamos dos vectores de orientación de dicho plano:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(4,1,-2)-(1,3,1)] = (3,-2,-3).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(3,5,2)-(1,3,1)] = (2,2,1).$$

Sustituimos esos vectores en la ecuación general del plano π y usamos uno de los puntos, el A:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-1 \\ 3 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to 4(x-1) - 9(y-3) + 10(z-1) \to$$

$$4x - 4 - 9y + 27 + 10z - 10 = 0 \to\ 4x - 9y + 10z + 13 = 0;$$

$$\pi \equiv 4x - 9y + 10z + 13 = 0$$

$b)$ Para que el punto $D(1,1,3)$ esté contenido en el plano, debe verificar su ecuación:

$$4 \cdot 1 - 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 13 = 47 - 9\ \neq 0$$

No la verifica, luego:

El punto $D(1,1,3)$ NO está contenido en el plano

$c)$ Hallamos el producto escalar de dichos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(3,\ \ -2,\ \ -3) \cdot (2,\ 2,\ 1)}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{2^2+2^2+1^2}}$$

$$= \frac{6\ -\ 4\ -\ 3}{\sqrt{9+4+9} \cdot \sqrt{4+4+1}} = \frac{-1}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{9}} = \frac{-1}{\sqrt{198}} = -0.0711 \Rightarrow \alpha = arc\ cos\,(-0.0711) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\alpha = 94^\circ\ 04'\ 31''}$$

Ejercicio 8:

En la Unión Europea hay aproximadamente 250 millones de hombres adultos, de los cuales 12 millones miden más de 190 cm. En Holanda hay aproximadamente 7 millones de hombres adultos, cuya altura sigue una distribución normal con media 184 cm y desviación típica 7 cm. Supongamos que elegimos un hombre adulto al azar de toda la Unión Europea.

$a)$ Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm.

$b)$ Calcula la probabilidad de que sea holandés.

$c)$ Calcula la probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés.

$d)$ Calcula la probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm.

Solución:

$a)$ En toda la Unión Europea hay 250 millones de hombres adultos de los que 12 millones miden más de 190 cm, por lo que: $P = \frac{12}{250} = 0.048$.

La probabilidad de que mida más de 190 cm es de **0.048**.

$b)$ En la Unión Europea hay 7 millones de holandeses, luego $P = \frac{7}{250} = 0.028$.

La probabilidad de que sea holandés es de **0.028**.

$c)$ En Holanda la altura sigue una distribución normal de: $\mu = 184$; $\sigma = 7$.

$X \to N(\mu, \sigma) = N(184, 7)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-184}{7}$.

Calculamos la probabilidad de que mida más de 190 cm:

$$P = P(X > 190) = P\left(Z > \frac{190-184}{7}\right) = P\left(Z > \frac{6}{7}\right) = P(Z > 0.857) = 1 - P(Z \leq 0.857)$$
$$\cong 1 - 0.8043 = 0.1957.$$

La probabilidad de que mida más de 190 cm sabiendo que es holandés es de **0.1957**.

$d)$ Nos piden ahora una probabilidad condicionada, de la que ya conocemos todo lo que debemos usar:

$P(> 190|Ho) = 0.1957$ por el apartado c)

La probabilidad de que sea holandés, $P(Ho) = 0.028$ por el apartado b)

La probabilidad de que mida más de 190, $P(> 190) = 0.048$ por el apartado a). Por tanto:

$$P = P(Ho| > 190) = \frac{P(>190 \cap Ho)}{P(>190)} = \frac{P(Ho) \cdot P(> 190|Ho)}{P(>190)} = \frac{0.028 \cdot 0.1957}{0.048} = \frac{0.0055}{0.048} = 0.1146.$$

La probabilidad de que sea holandés sabiendo que mide más de 190 cm es de **0.1146**.