MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CASTILLA LA MANCHA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

a) **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

Ejercicio 2:

a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax & -ay & -z & = & a \\ ax & -ay & & = & a \\ ax & +2y & -z & = & 1 \end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Ejercicio 3:

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x < 2 \\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-cos(x^2)}$.

Ejercicio 4:

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 5:

a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

Ejercicio 6:

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + \lambda - \mu \\ y & = & -\lambda + \mu \\ z & = & -2 + 2\lambda \end{array} \right.$.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3, -3, 2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

Ejercicio 7:

Dados el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + \mu \\ y & = & 1 + \lambda + a\mu \\ z & = & 1 + 2\lambda - \mu \end{array} \right.$ y la recta $s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 - b \\ z & = & -3 \end{array} \right.$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) **[1 punto]** Si $a = 0$ y $b = 3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1, -1, -8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

Ejercicio 8:

a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	**k \ p**	**0.01**	**0.05**	**0.10**	**0.15**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.33**	**0.35**	**0.40**	**0.45**	**0.49**	**0.50**
9	**0**	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

$a)$ **[1,25 puntos]** Determina razonadamente los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$b)$ **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente todos los posibles valores x, y, z para que el producto de las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ conmute.

RESPUESTA.

a) Calculamos el determinante de A

$$\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}, F'_4 = -F_3 + F_4, \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$, desarrollando por la 4ª fila,

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} =, desarrollando\ por\ la\ 3ª\ fila, = -a \cdot \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = -a \cdot (a^2 + a - 2)$$

Igualamos a 0 y resolvemos $-a \cdot (a^2 + a - 2) = 0$, $a = 0,\ a = 1,\ a = -2$

Para los valores $a = 0$, $a = 1\ y\ a = -2$ la matriz A no tiene inversa

b) $C \cdot D = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ 3y+z & y-z \end{pmatrix}$

$D \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+y & 3+z \\ x-y & 1-z \end{pmatrix}$, igualando elemento a elemento,

$$\begin{cases} 3x+1 = 3x+y \\ x-1 = 3+z \\ 3y+z = x-y \\ y-z = 1-z \end{cases}$$ agrupando, $$\begin{cases} y = 1 \\ x - z = 4 \\ x - 4y - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$ sustituyendo el valor de y $$\begin{cases} y = 1 \\ x - z = 4 \\ x - z = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

haciendo z = λ, $\begin{cases} x = \lambda + 4 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$ nos queda la matriz $C = \begin{pmatrix} \lambda+4 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Para cualquier valor real de λ las matrices C y D conmutan

Ejercicio 2:

a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} ax & -ay & -z & = & a \\ ax & -ay & & = & a \\ ax & +2y & -z & = & 1 \end{array}\right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

RESPUESTA.

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & -a & -1 & a \\ a & -a & 0 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} a & -a & -1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a,\ -a^2 - 2a = 0$, obtenemos $a = 0\ y\ a = -2$.

Para $\boldsymbol{a = 0}$, sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, r(C) = 2; como $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, r(A)= 2 < 3 = nº incógnitas.

Para $\boldsymbol{a = -2}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

r(C) = 2; y $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, por tanto, r(A)=3.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a \neq 0}$ y $\boldsymbol{a \neq -2}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	**Compatible Determinado (Única solución)**
Si $\boldsymbol{a = -2}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	**Incompatible (No hay solución)**
Si $\boldsymbol{a = 1}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 2}$	**Compatible Indeterminado (Infinitas sol.)**

b) Para $a = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{array}{l} F'_2 = -F_1 + F_2 \\ F'_3 = -F_1 + F_3 \end{array}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tenemos $\left\{\begin{array}{rl} 2x - 2y - z &= 2 \\ z &= 0 \\ 4y \quad &= -1 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{-1}{4} \\ z = 0 \end{array}\right.$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{4},\quad y = -\frac{1}{4},\qquad z = 0}$$

Ejercicio 3:

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-2} & \text{si} \quad x<2\\ \cos(\pi x) & \text{si} \quad 2\le x\le 3\\ \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} & \text{si} \quad x>3\end{cases}$$

a) **[1,5 puntos]** Determina razonadamente los puntos en los que la función es continua, calcula los puntos en los que es discontinua y clasifica el tipo de discontinuidad, si los hubiera.

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{-x}}{1+2x-cos(x^2)}$.

RESPUESTA.

a) Comenzamos estudiando la **continuidad** de la función $\boldsymbol{f}$ en todo $\mathbb{R}$.

- Para $x<2$, la función f es continua ya que tenemos una función racional, cuyo denominador no se anula donde está definida.
- Para $2<x<3$, la función f es continua ya que es una trigonométrica, continua en $\mathbb{R}$
- Para $x>3$ la función f es continua ya que es una racional, cuyo denominador no se anula donde está definida y el numerador es una función logarítmica continua para x>2
- Para $x=2$, utilizamos la definición de continuidad en un punto.

  Primero calculamos el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y para ello tenemos que tomar límites laterales, ya que por la izquierda del 2 tenemos una función y por la derecha del 2 tenemos otra función.

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}=-\infty$, por tanto, f es discontinua en x = 2.

- Para x=3 igual que anteriormente

  $$\boldsymbol{\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-} cos(\pi x)=-1}$$

  $\lim\limits_{x\to 3^+} \mathrm{f(x)}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-2)}{3-x}=\frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos la regla de L\`Hôpital

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-2)}{3-x}=\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\frac{1}{x-2}}{-1}=-1$ como los límites laterales son iguales a -1 y, además

f(3)= $cos(3\pi)$=-1, f es continua en x=3.

f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$, en x=2 discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto infinito

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}=\frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos la regla de L\`Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot e^{-x}-x\cdot e^{-x}}{2+2xsen\,(x^2)}=\frac{1}{2}$$

Luego, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot e^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)}=\frac{1}{2}}$

Ejercicio 4:

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

RESPUESTA.

a) Calculamos la derivada de f, $f'^{(x)} = \frac{(2x-2)\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3-2x^2+2x-2-2x^3+4x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$

$= \frac{2x^2-2}{(x^2+1)^2}$, igualamos a 0, por tanto, $2x^2 - 2 = 0$, obtenemos x = 1 y x = -1

Calculamos la segunda derivada $f''(x) = \frac{4x\cdot(x^2+1)^2-2\cdot2x\cdot(x^2+1)\cdot(2x^2-2)}{(x^2+1)^4}$

simplificando $(x^2 + 1)$ en numerador y denominador

$f''(x) = \frac{4x\cdot(x^2+1)-2\cdot2x\cdot(2x^2-2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x^3+12x}{(x^2+1)^3}$ sustituyendo los valores que anulan la derivada

$f''(1) > 0$, luego en x = 1 f tiene un mínimo relativo, (1, 0)

$f''(-1) < 0$, luego en x=-1 f tiene un máximo relativo, (-1, 2)

Máximo relativo (-1, 2), Mínimo relativo (1,0)

b) Ecuación recta tangente: y = f(a) +f'(a)·(x-a), para a=0, f(0)=1, f'(0)=-2, de donde

y = 1 -2·(x-0), $y = 1 - 2x$

Ecuación recta normal: y = f(a) -1/f'(a) · (x-a), de donde

y = 1 +1/2 ·(x-0), $y = 1 + \frac{x}{2}$

Recta tangente: $y = 1 - 2x$ Recta normal: $y = 1 + \frac{x}{2}$

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio 5:

a) [**1,25 puntos**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx$.

b) [**1,25 puntos**] Calcula, justificadamente, el área acotada del recinto limitado por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$ y el eje de abscisas.

RESPUESTA

a) $\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ doble, luego

$\frac{3x-2}{x^2-2x+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$ de donde, $3x - 2 = A\,(x-1) + B$ dando a x los valores, 1 y 0

Si x=1, 3-2 = B, B = 1; si x = 0, - 2 = -A + B luego, A = 3 sustituyendo,

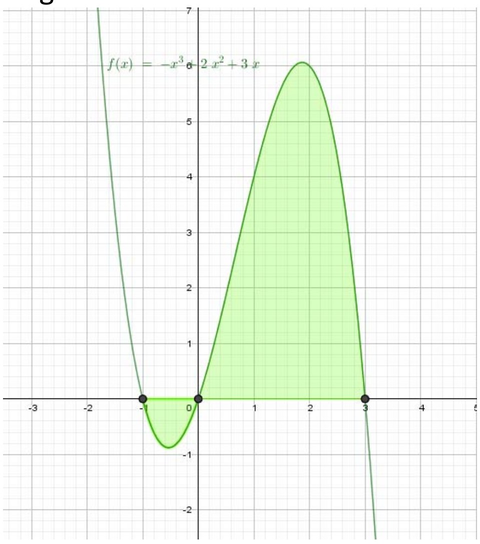
$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx = 3ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx = 3ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

b) Calculamos los cortes con el eje X

$-x^3 + 2x^2 + 3x = 0$ obtenemos, x =0, x= -1, x = 3

La gráfica de la función es



Luego el área pedida será:

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(-x^3 + 2x^2 + 3x)dx\right| + \int_{0}^{3}(-x^3 + 2x^2 + 3x)dx =$$

$$= \left|\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} =$$

$$= \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \text{ u.a.}$$

El área pedida es 71/6 u.a.

Ejercicio 6:

Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x &= -1 + \lambda - \mu \\ y &= -\lambda + \mu \\ z &= -2 + 2\lambda \end{cases}$.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el ángulo que forman los dos planos.

b) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente el volumen del tetraedro formado por el punto $P(3,-3,2)$ y los puntos de corte del plano π_1 con los ejes coordenados.

RESPUESTA

a) Calculamos los vectores normales a los planos: $\overrightarrow{\boldsymbol{n_{\pi_1}}} = (\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{1})$

$$\overrightarrow{\mathrm{n}_{\pi_2}} = (1,-1,2) \wedge (-1,1,0) = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-2,0)$$

$\cos(\pi_1,\pi_2) = \frac{|(2,1,1)\cdot(-2,-2,0)|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+4+0}} = \frac{|-6|}{\sqrt{48}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, luego el ángulo es de 30°, $\frac{\pi}{6}$ radianes.

El ángulo es de 30°, $\frac{\pi}{6}$ radianes

b) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes:

Para x=0, y=0, z=2; x=0, z=0, y=2; y=0, z=0, x=1; luego los puntos son:

A(0, 0, 2), B(0, 2, 0) y C(1, 0, 0) que junto al punto dado P(3, -3, 2),

formamos los vectores:

$$\overrightarrow{AP} = (3,-3,0) \qquad \overrightarrow{BP} = (3,-5,2) \qquad \overrightarrow{CP} = (2,-3,2)$$

Por tanto, el volumen es

$$\mathrm{V} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AP}},\overrightarrow{\mathrm{BP}},\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 3 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-6| = 1\ \mathrm{u}^3.$$

$$\boldsymbol{V = 1u^3}$$

Ejercicio 7:

Dados el plano $\pi \equiv \begin{cases} x &= -1+\mu \\ y &= 1+\lambda+a\mu \\ z &= 1+2\lambda-\mu \end{cases}$ y la recta $s \equiv \begin{cases} x-2y &= 1-b \\ z &= -3 \end{cases}$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el valor de los parámetros a y b para que la recta s esté contenida en el plano π.

b) **[1 punto]** Si $a=0$ y $b=3$, calcula razonadamente la ecuación en forma implícita de la recta r que pasa por el punto $P(1,-1,-8)$ es paralela al plano π y perpendicular a la recta s.

RESPUESTA

a) Para que la recta esté contenida en el plano el sistema formado por la ecuación implícita del plano y las 2 ecuaciones implícitas de la recta ha de ser compatible indeterminado.

Calculamos la ecuación implícita del plano, $\begin{vmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & ª \\ z-1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $(-2a-1)x+2y-z=2+2a$

Tenemos el sistema: $\begin{cases} (-2a-1)x+2y-z=2+2a \\ x \qquad -2y \qquad = 1-b \\ \qquad\qquad z=-3 \end{cases}$, el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser 0, ya que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} -2a-1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4a \rightarrow 4a=0 \rightarrow a=0.$

Para que el rango de la matriz ampliada también sea 2, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1-b \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = b \rightarrow b=0$

Los valores son, a = 0 y b = 0

b) Para a = 0 la ecuación del plano π es : $-x+2y-z=2$

Para b = 3 las ecuaciones de la recta son: x – 2y = – 2 , z = – 3

Como la recta r pedida ha de ser paralela al plano π, debe estar contenida en un plano paralelo a éste y que contenga al punto P dado

$\pi' \equiv -x+2y-z=K$, y pasa por P(1, -1, -8), luego, $-1+2(-1)-(-8)=K$ $\rightarrow$ K = 5, de donde $\pi' \equiv -x+2y-z=5$

Como la recta r pedida ha de ser perpendicular a la recta s, debe estar contenida en un plano perpendicular a ésta y que contenga al punto P dado

Calculamos el vector director de la recta s

$(1,-2,0) \wedge (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2i-j \rightarrow \vec{v_s} = (-2,-1,0)$ luego la ecuación de un plano perpendicular a la recta será $\pi'' \equiv -2x-y=K$ como debe pasar por el punto P(1, -1, -8),

$-2 \cdot 1-(-1)=K \rightarrow K=-1$ de donde, $\pi'' \equiv -2x-y=-1$

La recta r pedida viene dada por la intersección de los 2 planos, es decir,

Sus ecuaciones implícitas son: $r \equiv \begin{cases} -x+2y-z=5 \\ -2x-y \quad =-1 \end{cases}$

$\boldsymbol{r \equiv \quad -x+2y-z=5, \quad -2x-y=-1}$

Ejercicio 8:

a) En un servicio de emergencias el 60 % de los avisos que se reciben se clasifican con el código amarillo, el 30 % con el naranja y el 10 % con el rojo. Se sabe que el porcentaje de avisos recibidos que son falsas alarmas es 3 % en el caso de código amarillo, 2 % en el naranja y 1 % en el rojo. Si se recibe un aviso,

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que se trate de una falsa alarma?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el aviso recibido no ha sido falsa alarma, ¿qué probabilidad hay de que haya sido un aviso código rojo o naranja?

b) Si en una centralita se reciben 9 avisos,

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que la centralita reciba 2 o menos avisos naranjas?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que todos los avisos sean amarillos o naranjas?

n	k \ p	0.01	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.33	0.35	0.40	0.45	0.49	0.50
9	0	0.9135	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0272	0.0207	0.0101	0.0046	0.0023	0.0020
	1	0.0830	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1206	0.1004	0.0605	0.0339	0.0202	0.0176
	2	0.0034	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2376	0.2162	0.1612	0.1110	0.0776	0.0703
	3	0.0001	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2731	0.2716	0.2508	0.2119	0.1739	0.1641
	4	0.0000	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2017	0.2194	0.2508	0.2600	0.2506	0.2461
	5	0.0000	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.0994	0.1181	0.1672	0.2128	0.2408	0.2461
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0326	0.0424	0.0743	0.1160	0.1542	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0069	0.0098	0.0212	0.0407	0.0635	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0008	0.0013	0.0035	0.0083	0.0153	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0016	0.0020

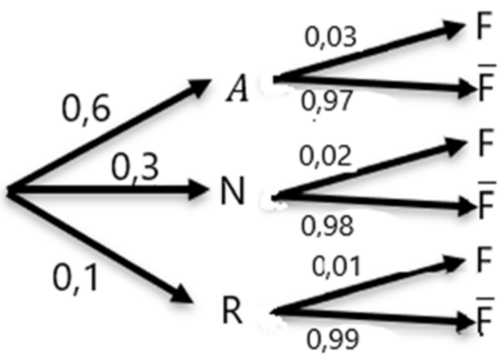
RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

A: código amarillo F: falsa alarma

N: código naranja $\bar{F}$: no falsa alarma

R: código rojo



a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(F) = P(A \cap F) + P(N \cap F) + P(R \cap F) =$$

$$= P(A) \cdot P(F/A) + P(N) \cdot P(F/N) + P(R) \cdot P(F/R) = 0{,}6 \cdot 0{,}03 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}25$$

P(F) = 0,25

a.2) El suceso que sea código naranja o rojo es el contrario del suceso el código es amarillo

Luego P(N∪R/$\bar{F}$) = 1 – P(A/$\bar{F}$) aplicando el Teorema de Bayes = $1-\frac{P(A)\cdot P(\bar{F}/A)}{P(\bar{F})}$

P($\bar{F}$) = 1 – P(F) = 1 – 0,25 = 0, 975, $1-\frac{P(A)\cdot P(\bar{F}/A)}{P(\bar{F})}=1-\frac{0{,}6\cdot 0{,}97}{0{,}975}=1-0{,}597=0{,}403$

P(N∪R/$\bar{F}$) = 0,403

b) P(N) = 0,3 y 9 avisos. Se trata de una distribución Binomial donde n=9 y p=0,3 B(9, 0,3)

b.1) P(x ≤ 2) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2), mirando la tabla k=0 k=1 k=2 y p=0,3,

P(x ≤ 2) = 0,4040 + 0,1556 + 0,2668 = 0,4628

P(x ≤ 2) = 0,4628

b.2) Si todos los avisos son amarillos o naranjas es porque ninguno es rojo.

Consideramos P(R)=0,1 p=0,1 y tenemos una Binomial B(9, 0,1)

Queremos calcular ninguno rojo, es decir, P(x = 0) = 0,3874, mirando en la tabla k=0 y p=0,1

Probabilidad **de todos amarillos o naranjas = 0,3874**

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE **SEPTIEMBRE**

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** ejercicios, si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Ejercicio 1:

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + I_3 = BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

Ejercicio 2:

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{array} \right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Ejercicio 3:

3. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right)$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2^{(x-1)} & \text{si} & x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} & x \geq 2 \end{array} \right. ,$$

donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

Ejercicio 4:

4. *a*) [**1,5 puntos**] Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Ejercicio 5:

5. *a*) [**1,25 punto**] Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{-dx}{1+e^x}$.
   (Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

   b) [**1,25 puntos**] Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

Ejercicio 6:

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y - 2 & = & 0 \\ y - z - 2 & = & 0 \end{array} \right.$.

   a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

   b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

Ejercicio 7:

7. Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1, 0, 2)$.

   a) [**1,25 puntos**] Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

   b) [**1,25 puntos**] Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

Ejercicio 8:

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

   b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

RESPUESTAS

Ejercicio 1:

1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}$$

a) [**1 punto**] Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) [**1,5 puntos**] Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+I_3=BC$, donde I_3 es la matriz identidad.

RESPUESTA

a) $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$, $|A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-2\\0&-1&0\end{vmatrix}=-1$, luego existe la inversa,

$A^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&-2&0\end{pmatrix}$, $\quad Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\0&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$, de donde

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\0&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

b) $A\cdot X+I_3=B\cdot C \;\rightarrow\; A\cdot X=B\cdot C-I_3 \;\rightarrow\; X=A^{-1}(B\cdot C-I_3)$

$$X=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}5&1&-3\\-2&0&2\\-1&1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&-1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&-1&2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}4&3&0\\1&-1&-2\\3&2&-1\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2:

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x & +2y & +az & = & a \\ x & +ay & +2z & = & a \\ -x & +y & +z & = & 1 \end{cases}.$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

RESPUESTA

a) Escribimos la matriz de coeficientes C y la ampliada A

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & a \\ 1 & a & 2 & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculamos el determinante de C,

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 8 \rightarrow a^2 + 2a - 8 = 0$, obtenemos $a = 2$ y $a = -4$.

Para $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$ sustituimos, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

La 1ª y 2ª filas son iguales luego, r(C) = 2= r(A)= 2 < 3 = nº incógnitas.

Para $\boldsymbol{a} = -\mathbf{4}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$ → r(C) = 2; y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$, por tanto, r(A)=3.

En resumen,

Si $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{2}$ y $\boldsymbol{a} \neq -\mathbf{4}$	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 3}$	Compatible Determinado (Única solución)
Si $\boldsymbol{a} = -\mathbf{4}$	$\boldsymbol{rg(C) = 2 \neq rg(A) = 3}$	Incompatible (No hay solución)
Si $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$,	$\boldsymbol{rg(C) = rg(A) = 2}$	Compatible Indeterminado (Infinitas sol.)

b) Para a=2 el sistema que nos queda, suprimiendo la 1ª ecuación es:

$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + 2z = 2} \\ \boldsymbol{-x + y + z = 1} \end{cases}$ haciendo $\boldsymbol{z = \mu}$ $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 2 - 2\mu} \\ \boldsymbol{-x + y = 1 - \mu} \end{cases}$ sumando las ecuaciones

$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 2 - 2\mu} \\ \boldsymbol{3y = 3 - 3\mu} \end{cases}$ de donde, $\boldsymbol{y = 1 - \mu}$, sustituyendo, $\boldsymbol{x = 0}$

$$\mathbf{x = 0, \quad y = 1 - \mu, \quad z = \mu}$$

Ejercicio 3:

3. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)}\right)$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x\le 1 \\ x-2 & \text{si} \quad 1<x<2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases},$$

donde ln es el logaritmo neperiano, estudia la continuidad de la función $f(x)$ en $x=1$ y en $x=2$, y clasifica el tipo de discontinuidad si las hubiera.

RESPUESTA

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(2x)}\right)=\infty-\infty$, indeterminación, operamos,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{sen(2x)-x}{x\cdot sen(2x)}\right)=\frac{0}{0}$, indeterminación, aplicamos regla de L'Hôpital,

derivamos numerador y denominador,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2cos(2x)-1}{1\cdot sen(2x)+x\cdot 2cos\,(2x)}\right)=\frac{2-1}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen}(2x)}\right)=\infty$$

b) En **x = 1**, f(1) = 2^{1-1} = 1

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2^{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1\end{cases}$ como los límites laterales son distintos $\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)$,

en x = 1 f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito.

En **x = 2** , f(2) = 2-2 = 0

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0\\ \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-1)=0\end{cases}\rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=0$$

Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0=f(2)$ f es continua en x = 2.

En x = 1 f presenta una discontinuidad inevitable de 1ª especie de salto finito y en x = 2 es continua

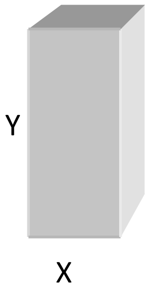
Ejercicio 4:

4. *a*) **[1,5 puntos]** Calcula las dimensiones de una caja de base cuadrada (prisma cuadrangular) sin tapa superior y con un volumen de 108 dm^3 para que la superficie total de la caja (formada por las caras laterales y la base) sea mínima.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$.

RESPUESTA

a)



$V = x^2 \cdot y$, $x^2 \cdot y = 108$, despejando y, $y = \frac{108}{x^2}$

$S = x^2 + 4xy$, sustituyendo, $S = x^2 + 4x\frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$

Llamando $f(x) = x^2 + \frac{432}{x}$ deseamos calcular el mínimo, si existe.

Calculamos la derivada $f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$ igualamos a 0

$$2x - \frac{432}{x^2} = 0, \quad 2x = \frac{432}{x^2}, \quad 2x^3 = 432, \quad x^3 = 216, \quad x = 6.$$

Calculamos la segunda derivada $f''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}$ de donde

$f''(6) > 0$, por tanto, es un mínimo, $y = \frac{108}{6^2} = 3$

Las dimensiones han de ser 6 dm de lado de la base y 3 dm de alto

b) Ecuación recta tangente: y = f(a) +f'(a)·(x-a),

$$f(x) = x^2 + x - 1 , \qquad f'(x) = 2x + 1$$

para a=1, f(1)=1, f'(1)=3, de donde

y = 1 + 3·(x–1) , y = 1 + 3x – 3 , y = 3x – 2

Recta tangente: $y = 3x - 2$

Ejercicio 5:

5. a) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-dx}{1+e^x}$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$.)

b) **[1,25 puntos]** Determina justificadamente el área acotada que encierran las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = x + 2$.

RESPUESTA

a) Hacemos $e^x = t$, $e^x dx = dt$, $dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$, sustituyendo,

$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{1+t} = \int \frac{dt}{t\cdot(1+t)}$, es una integral de una función racional con grado del numerador menor que el grado del denominador, descomponemos en fracciones simples,

$\frac{1}{t\cdot(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}$, de donde, 1 = A·(1+t) + B·t, sustituyendo t por las raíces

t = 0 → 1 = A; t = -1 → 1 = -B → B = -1 , luego,

$\int \frac{dt}{t\cdot(1+t)} = \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{-1}{1+t} dt = ln|t| - ln|1+t| + C$ deshaciendo el cambio,

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = ln|e^x| - ln|1+e^x| + C = ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + C$$

b) Calculamos donde se cortan las gráficas, $-x^2 + 2x + 4 = x + 2 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Obtenemos x = -1 y x = 2, por tanto, el área será

$$\int_{-1}^{2} \left((-x^2 + 2x + 4) - (x + 2)\right) dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right) = \frac{9}{2} = 4,5\ u.a.$$

El área pedida es 4,5 u.a.

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo
www.apuntesmareaverde.org.es

Ejercicio 6:

6. Sean el plano $\pi \equiv x + 2y - z - 4 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y - 2 &= 0 \\ y - z - 2 &= 0 \end{cases}$.

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la distancia del punto $P(1, 2, -1)$ al plano π.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente el área del triángulo que forman el punto intersección de la recta r con el plano π, y los puntos $B(1, -1, 2)$ y $C(0, 1, 1)$.

RESPUESTA

a) Dado un punto P(x_0 , y_0 , z_0) y un plano $\boldsymbol{\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0}$ la distancia es

$$d(P,\pi) = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) - 4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}u.$$

$$\mathbf{d(P,\pi) = \frac{\sqrt{6}}{3}u.}$$

b) Calculamos el punto intersección de la recta y el plano resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones implícitas $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ y - z &= 2 \\ x + 2y - z &= 4 \end{cases}$, hacemos F’3 = −F1 + F3 $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ y - z &= 2 \\ 4y - z &= 2 \end{cases}$,

hacemos F’’3 = −F2 + F’3 $\begin{cases} x - 2y &= 2 \\ y - z &= 2 \\ 3y &= 0 \end{cases}$, resolviendo, y = 0 , z = -2 , x = 2, tenemos A(2, 0, -2)

El área del triángulo definido por los 3 puntos es: $\acute{a}\boldsymbol{rea} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\|(-1,\ -1,\ 4)\wedge(-2,\ 1,\ 3)\|}{2}$

$$(-1,-1,\ 4)\wedge(-2,\ 1,\ 3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -7i + 5j - 3k \to (-7, 5, -3)$$

$$\acute{a}rea = \frac{\|(-7,\ 5,\ -3)\|}{2} = \frac{\sqrt{(-7)^2+5^2+(-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{83}}{2}\ u.a.$$

$$\mathbf{\acute{a}rea = \frac{\sqrt{83}}{2}\ u.a}$$

Ejercicio 7:

7. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - 2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{cases}$, $\quad s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$ y el punto $P(-1,0,2)$.

a) [**1,25 puntos**] Determina razonadamente la posición relativa de las rectas r y s.

b) [**1,25 puntos**] Halla razonadamente la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo a las rectas r y s.

RESPUESTA

a) Tomamos un punto de r, damos valores a x = 0 y z = 0, de donde, y = -2, A(0, -2, 0)

y otro punto de s, B(0, -2, 1), hacemos el vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, calculamos el vector director de r,

$\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{2}, \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \mathbf{2} & -\mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -\mathbf{2}\boldsymbol{i} - \mathbf{2}\boldsymbol{j} = (-\mathbf{2}, -\mathbf{2}, \mathbf{0}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$,

Calculamos el determinante formado por los vectores, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}}$ y $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{s}}$ para ver su dependencia o independencia $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = -\mathbf{5} \neq \mathbf{0}$, los 3 vectores son independientes, por tanto, las rectas se cruzan.

Las rectas r y s se cruzan

b) Para que el plano sea paralelo a las 2 rectas, tomamos sus vectores directores, que junto al punto P va a quedar determinado,

P(-1, 0, 2), $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{r}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$, $\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{s}} = (\mathbf{0}\ \mathbf{0}\ , \mathbf{1})$, de donde,

$$\boldsymbol{\pi} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}+\mathbf{1} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}-\mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x} + \mathbf{1} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} + \mathbf{4} - \mathbf{3}\boldsymbol{z} + \mathbf{6} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} - \mathbf{5}\boldsymbol{z} + \mathbf{11} = \mathbf{0}$$

La ecuación del plano es x – y – 5z +11 = 0

Ejercicio 8:

8. *a*) El 70 % de los usuarios de instagram tiene menos de 34 años, el 25 % entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 5 % más de 54 años. Se sabe que acceden a diario a dicha red: el 98 % de los menores de 34 años, el 40 % de los usuarios entre 34 y 54 años (ambos incluídos) y el 10 % de los mayores de 54 años. Si se selecciona un usuario al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿qué probabilidad hay de que no acceda a diario a dicha red social?

a.2) **[0,75 puntos]** Si el usuario seleccionado al azar confiesa que accede diariamente, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al grupo que tiene entre 34 y 54 años (ambos incluídos)?

b) El tiempo que un usuario de la red instagram pasa conectado a diario a dicha red social sigue una ley normal de media 53 minutos y desviación típica 10 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que un usuario seleccionado al azar se conecte más de 30 minutos al día?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Qué porcentaje de usuarios (tanto por ciento) se conectan entre 40 y 67 minutos al día?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

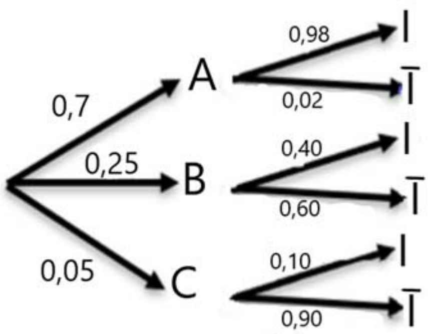
RESPUESTA

a) Para resolver los dos apartados, vamos a realizar un diagrama de árbol, pero antes tenemos que escribir una leyenda:

A: menos de 34 años   I: acceden

B: entre 34 y 54 años $\bar{I}$: no acceden

C: más de 54 años



a.1) $P(\bar{I}) = P(A) \cdot P(\bar{I}/A) + P(B) \cdot P(\bar{I}/B) + P(C) \cdot P(\bar{I}/C) =$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}6 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}79$

La probabilidad de no acceder a diario es $\boldsymbol{P(\bar{I}) = 0,79}$

a.2) $\mathrm{P(B/I)} = \frac{\mathrm{P(B) \cdot P(I/B)}}{\mathrm{P(I)}}$, como P(I) = $1 - \mathrm{P}(\bar{\mathrm{I}}) = 1 - 0{,}79 = 0{,}21$ entonces

$$\mathrm{P(B/I)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}40}{0{,}21} = 0{,}13$$

La probabilidad de pertenecer al grupo de entre 34 y 54 cuando accede es $\mathbf{P(B/I) = 0,13}$

b) El tiempo que un usuario pasa conectado a la red es una variable aleatoria, X, que sigue una distribución normal, $X \to N(53, 10)$

b.1) P(X > 30) = , tipificando,

$$= P\left(Z > \frac{30-53}{10}\right) = P(Z > -2{,}3) = P(Z < 2{,}3) =$$, mirando en la tabla, $= 0{,}9893$

La probabilidad de que se conecte más de 30 minutos es 0,9893

b.2) $P(40 < X < 67) = tipificando = P\left(\frac{40-53}{10} < Z < \frac{67-53}{10}\right) = P(-1{,}3 < Z < 1{,}4) =$

$$= P(Z < 1{,}4) - P(Z < -1{,}3) = P(Z < 1{,}4) - [1 - P(Z < 1{,}3)] =$$

Mirando en la tabla $= 09192 - 1 + 0{,}9032 = 0{,}8224$

El 82,24% de usuarios se conecta entre 40 y 67 minutos