MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano Corbacho

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad
Curso Académico 2019–2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.– (2 puntos)

a) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\operatorname{sen}x\cos x}{1+\operatorname{sen}x\cos x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen}x}}$.

b) Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\operatorname{tg}\left(\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\sqrt{x}-2\right)}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}.$$

2.– (2 puntos) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=x^2+x+a$, sean tangentes en el punto de abcisa $x=-1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x=-1$.

3.– (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las rectas $x=-2$, $x=2$, el eje OX y la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x<0,\\ x, & x\geq 0.\end{cases}$$

4.– (2 puntos) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.

b) Calcular A^5 utilizando la anterior identidad.

5.– (2 puntos) Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ay + (a+1)z = a, \\ ax + z = a, \\ x + az = -a. \end{cases}$$

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a = 2$.

6.– (2 puntos) Sean A y B las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3X - 5Y = A, \\ -X + 2Y = B. \end{cases}$$

b) Calcular si existen las matrices inversas de X e Y.

7.– (2 puntos) Determinar en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} (a-1)x & + & y & - & z & = & a, \\ (a+1)x & + & (2a+1)y & + & z & = & -a, \\ ax & + & ay & + & z & = & -a. \end{cases}$$

8.– (2 puntos) Dados los vectores $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$.

a) Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

b) Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

9.– (2 puntos) En una clase de primero de primaria el 50 % de los niños practica natación, el 20 % practica baloncesto y el 5 % ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique ni natación ni baloncesto.

b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

10.– (2 puntos) Se sabe que dos poblaciones distintas X e Y se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0{,}1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad
Curso Académico 2019–2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES

(1) Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

(2) Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

(3) Si un alumno da una respuesta acertada a un ejercicio escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 10 % de la nota máxima prevista.

(4) La puntuación de cada ejercicio es de dos puntos y está señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si algún ejercicio tiene subapartados, se deberá distribuir razonadamente el número de puntos entre los mismos.

(5) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en los cinco primeros ejercicios contestados.

SOLUCIONES CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

Problema 1:

1º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}}$.

b) Determinar el valor de la constante real a para que se satisfaga la siguiente desigualdad:

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left[\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\cdot\sqrt{x}-2\right]}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32}.$$

Solución:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}}=\left(\frac{1-sen\,0\cdot cos\,0}{1+sen\,0\cdot cos\,0}\right)^{\frac{1}{sen\,0}}=\left(\frac{1-0}{1+0}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}};\ \ LA=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sen\,x}\cdot L\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{L\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)-L\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)}{sen\,x}=\frac{L\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,0\right)-L\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,0\right)}{sen\,x}=\frac{L1-L1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}-\frac{\cos 2x}{1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}}{cos\,x}=\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}}{cos\,x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x-1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x}{\left(1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot sen\,2x\right)}}{cos\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{cos\,x\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot sen^2 2x\right)}=\frac{-2}{cos\,0\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot sen^2 0\right)}=\frac{-2}{1\cdot 1}=-2.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-sen\,x\cdot cos\,x}{1+sen\,x\cdot cos\,x}\right)^{\frac{1}{sen\,x}}=e^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{e^2}}$$

b)

$$\lim_{x\to 4}\frac{tg\left[\left(\frac{\pi}{8}+1\right)\cdot\sqrt{x}-2\right]}{x^2-16+ax}=\frac{1}{32};\ \ \frac{tg\left(\frac{\pi+8}{8}\cdot\sqrt{4}-2\right)}{4^2-16+a\cdot 4}=\frac{1}{32};\ \ \frac{tg\left(\frac{\pi+8}{4}-2\right)}{4a}=\frac{1}{32};\ \ \frac{tg\,\frac{\pi+8-8}{4}}{4a}=\frac{1}{32};$$

$$\frac{tg\,\frac{\pi}{4}}{a}=\frac{1}{8};\ \ \frac{1}{a}=\frac{1}{8}\ \Rightarrow\ \underline{a=8}.$$

$$\boldsymbol{a=8}$$

Problema 2:

2º) Determinar los valores de los parámetros reales a y b para que las funciones $f(x)=ax^2+b$ y $g(x)=x^2+x+a$, sean tangentes en el punto de abscisa $x=-1$. Para los valores obtenidos de a y b, calcular la recta tangente a las curvas en $x=-1$.

Solución:

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto: $f'(-1)=g'(-1)$.

$f'(x)=2ax \Rightarrow f'(-1)=-2a.$

$g'(x)=2x+1 \Rightarrow g'(-1)=-2+1=-1.$

$f'(-1)=g'(-1) \Rightarrow -2a=-1 \Rightarrow \underline{a=\frac{1}{2}}.$

Las funciones resultan $f(x)=\frac{1}{2}x^2+b$ y $g(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$.

En el punto de corte tiene que cumplirse que $f(-1)=g(-1)$:

$f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+b=\frac{1}{2}+b.$

$g(-1)=(-1)^2-1+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$

$f(-1)=g(-1) \Rightarrow \frac{1}{2}+b=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{b=0}.$

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2};\ \ b=0}$$

El punto de tangencia es $P\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ y la pendiente $m=g'(-1)=-1$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$:

$y-\frac{1}{2}=-1\cdot(x+1)=-x-1;\ \ 2y-1=-2x-2.$

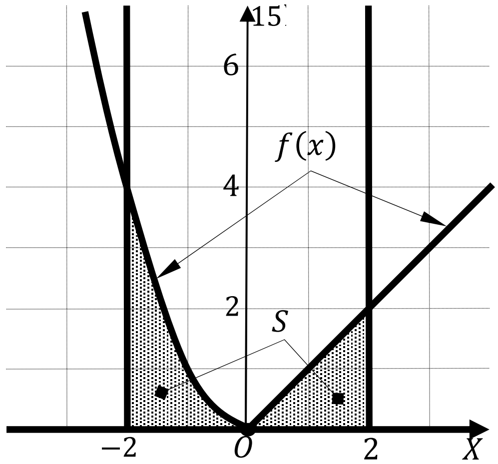
$$Recta\ tangente: \boldsymbol{t\equiv 2x+2y+1=0}$$

Problema 3:

3º) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$, las rectas $x = -2, x = 2$ y el eje OX.

Solución:

La representación gráfica de la función, aproximada, se expresa en la figurea adjunta.



La superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_{-2}^{0} x^2 \cdot dx + \int_{0}^{2} x \cdot dx =$

$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = 0 - \left[\frac{(-2)^3}{3}\right] + \frac{2^2}{2} - 0 =$

$= \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$

$$S = \frac{14}{3}\ u^2 \cong 4.67\ u^2$$

Autor: Antonio Menguiano Corbacho
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

4º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix}, m \in R \setminus \{0\}$.

$a)$ Hallar α y β de tal forma que $A^2 = \alpha A + \beta I$, siendo I la matriz identidad.

$b)$ Calcula A^5 utilizando la igualdad anterior.

Solución:

$a)$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ ma & 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2a+\beta & 0 \\ ma & 0 & 2a+\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a = 4}. \quad 4 = 8 + \beta; \ \underline{\beta = -4}.$$

$$\boldsymbol{a = 4;\ \beta = -4.}$$

$b)$

$$A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4m & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 32m & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}}.$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 80m & 0 & 32 \end{pmatrix}$$

Problema 5:

5º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ay+(a+1)z=a \\ ax+z=a \\ x+az=-a \end{array}\right\}$:

a) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a.

b) Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para $a=2$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & -a \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix}=a-a^3=0;\ \ a(1-a^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=-1 \\ a_3=1 \end{cases}.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a\neq 0 \\ a\neq -1 \\ a\neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-F_3\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{c} a=0 \\ a=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I}$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve el sistema para los diferentes casos compatibles.

$Para\ a\neq 0, a\neq -1, a\neq 1$ se resuelve por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ a & 0 & 1 & a \\ 0 & a & a+1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - aF_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & a+a^2 \\ 0 & a & a+1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow (1-a^2)z = a + a^2;$$

$$z = \frac{a+a^2}{1-a^2} = \frac{a(1+a)}{(1+a)(1-a)} = \frac{a}{1-a}.$$

$$ay + (a+1)z = a; \;\; ay = a - (1+a)\cdot\frac{a}{1-a} = \frac{a-a^2-a-a^2}{1-a} = \frac{-2a^2}{1-a} \Rightarrow y = \frac{-2a}{1-a}.$$

$$x + az = -a; \;\; x = -a - az = -a - \frac{a^2}{1-a} = \frac{-a+a^2-a^2}{1-a} = \frac{-a}{1-a}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{-a}{1-a}, y = \frac{-2a}{1-a}, z = \frac{a}{1-a}, \forall a \in R - \{-1, 0, 1\}.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Solución: x = 0, y = \lambda, z = 0, \forall \lambda \in R.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -y = -1; \;\; y = 1.$$

$$x - z = 1 \Rightarrow z = \lambda; \;\; x = 1 + \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

$\forall a \in R - \{-1, 0, 1\}, Sistema\ compatible\ determinado: x = \frac{-a}{1-a}, y = \frac{-2a}{1-a}, z = \frac{a}{1-a}. Para\ a = 0,$ sistema compatible indeterminado: $x = 1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R. Para\ a = -1,$ sistema compatible indeterminado: $x = 1 + \lambda, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R. Para\ a = 1,$ sistema incompatible.

$b)$

Para $a = 2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$ $\quad |M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 = -6.$

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\ de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}}{-6} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

6º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$:

$a)$ Hallar X e Y, matrices soluciones del sistema de ecuaciones: $\left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{matrix}\right\}$.

$b)$ Calcular, si existen, las matrices inversas de X e Y.

Solución:

$a)$

$$\left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 6X - 10Y = 2A \\ -5X + 10Y = 5B \end{matrix}\right\} \Rightarrow X = 2A + 5B.$$

$$X = 2 \cdot \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 & 10 \\ 20 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -20 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -X + 2Y = B \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ -3X + 6Y = 3B \end{matrix}\right\} \Rightarrow Y = A + 3B.$$

$$Y = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & -6 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\ Y = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$b)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|X| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{X\ no\ es\ invertible.}$$

$$|Y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{Y\ no\ es\ invertible.}$$

No existen. No son invertibles.

Problema 7:

7º) Determinar, en función del parámetro real a, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv (a-1)x + y - z = a \\ \pi_2 \equiv (a+1)x + (2a+1)y + z = -a. \\ \pi_3 \equiv ax + ay + z = -a \end{cases}$$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema que determinan los tres planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 & a \\ a+1 & 2a+1 & 1 & -a \\ a & a & 1 & -a \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.$

2º. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ son\ secantes\ dos\ a\ dos.$

3º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.$

4º. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ son\ paralelos.$

5º. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow Los\ planos\ son\ coincidentes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a+1 & 2a+1 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} =$$

$= (a-1)(2a+1) - a(a+1) + a + a(2a+1) - a(a-1) - (a+1) =$

$= 2a^2 + a - 2a - 1 - a^2 - a + a + 2a^2 + a - a^2 + a - a - 1 = 2a^2 - 2 = 0;$

$2(a^2-1) = 0;\ \ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$

$$\underline{Si\ \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ un\ punto.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = -C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Si\ \begin{Bmatrix} a = -1 \\ a = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}$$

Por diferenciar los casos, las rectas que determinan son las siguientes:

$$a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}}.$$

$$a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}}.$$

Problema 8:

8º) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)\ y\ \vec{v} = (0, 1, 1)$.

$a)$ Hallar un vector $\vec{w}$ de módulo uno, que sea perpendicular a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

$b)$ Calcular el área del paralelogramo determinado por $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

Solución:

$a)$

Un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + k - 3i - j = -i - j + k = (-1, -1, 1).$$

Para obtener un vector unitario linealmente dependiente de $\overrightarrow{w'}$ basta con dividir sus componentes por su módulo:

$$|\overrightarrow{w'}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

$$\underline{\overrightarrow{w_1} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ y\ \overrightarrow{w_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)}.$$

$b)$

El área del paralelogramo determinado por dos vectores es el módulo de su producto vectorial:

$$\underline{Area = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{3}\, u^2}.$$

Problema 9:

9º) En una clase de primero de primaria el 50 % de los niños practica natación, el 20 % practica baloncesto y el 5 % ambos deportes.

a) Calcular la probabilidad de que un niño elegido al azar no practique natación ni baloncesto.

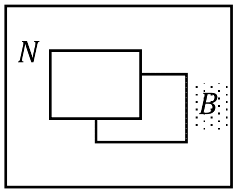
b) Calcular la probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto.

Solución:

$$Datos: P(N) = 0.50;\ \ P(B) = 0.20;\ \ P(N \cap B) = 0.05.$$

a)

$$P = P(\overline{N} \cap \overline{B}) = 1 - P(N \cup B) =$$



$\overline{N} \cap \overline{B} = 1 - (N \cup B)$

$$= 1 - [P(N) + P(B) - P(N \cap B)] = 1 - (0.5 + 0.2 - 0.05) =$$

$$= 1 - (0.70 - 0.5) = 1 - 0.65 = \underline{0.35}.$$

La probabilidad de que un niño elegido al azar no practique natación ni baloncesto es **0.35**.

b)

$$P(N|B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} = \frac{0,05}{0,20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = \underline{0.25}.$$

La probabilidad de que un niño practique natación si juega al baloncesto es **0.25**.

Problema 10:

10º) Se sabe que dos poblaciones distintas, X e Y, se distribuyen según una Normal de media 25. Además $P(X \geq 27) = P(Y \geq 30) = 0.1587$. Calcular sus respectivas varianzas.

Solución:

$Datos\colon\ \mu = 25;\ \ \sigma.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(25, \sigma).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-25}{\sigma}.$

Para $P(X \geq 27) = 0.1587.$

$P = P(X \geq 27) = 0.1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{27-25}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{2}{\sigma}\right) = 0.1587;$

$1 - P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 1 - 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{2}{\sigma}\right) = 08413.$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, a 0.8413 le corresponde 1, por lo cual:

$\frac{2}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 2 \Rightarrow \underline{\sigma^2 = 4}.$

Para $P(Y \geq 30) = 0.1587.$

$P = P(Y \geq 30) = 0.1587 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{30-25}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.1587;$

$1 - P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 1 - 0.1587;\ \ P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0.8413.$

$\frac{5}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 5 \Rightarrow \underline{\sigma^2 = 25}.$

$$\boldsymbol{\sigma_X^2 = 4\colon\ \sigma_Y^2 = 25}$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad
Curso Académico 2019–2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.

En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.

Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.– (2 puntos) Calcular los valores de los parámetros reales a y b para que la función: $f(x) = \begin{cases} a(x^2-9) + \dfrac{bx}{3} - b, & x < 3, \\ \ln(b(x-2)), & x \geq 3, \end{cases}$ sea derivable.

2.– (2 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x+3}{(x+2)^2}.$$

Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

3.– (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por las funciones f y g, siendo éstas:

$$f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2, \qquad g(x) = (x-2)^2 - 1,$$

y las rectas $x = 3$, $x = 5$.

4.– (2 puntos) Discutir y resolver según el valor del parámetro real a, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (a-1)x + y + 3az = 1, \\ ax + ay - z = a, \\ (a-1)x + y + (a-1)z = -2a+1. \end{cases}$$

5.– (2 puntos) Calcular el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}.$$

6.– (2 puntos) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

Hallar A^{-1} y A^{10}.

7– (2 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y - 4z + 9 &= 0, \\ -x - 2y + z + 1 &= 0, \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + 3y + z + 1 = 0$.

8.– (2 puntos) Dadas las rectas r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z &= 1, \\ 4x - 2y + 2z &= 10, \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3},$$

y el plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$. Hallar la posición relativa entre

a) las rectas r y s,

b) el plano π y la recta s.

9.– (2 puntos) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

10.– (2 puntos) En una clase de 35 alumnos, asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban todas las asignaturas el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 10 % de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

a) Calcular el procentaje de alumnos que aprueba la asignatura.

b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que un alumno haya asistido a clase.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para Acceso a la Universidad
Curso Académico 2019–2020
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES

(1) Como norma general se deben valorar positivamente la exposición lógica, ordenada y coherente de las respuestas.

(2) Si en el desarrollo de un problema se detecta un error numérico, que no sea manifiestamente inconsistente con la cuestión, y el desarrollo posterior es coherente con dicho error, no se debe dar especial relevancia al error, siempre y cuando el problema no haya quedado reducido a uno trivial o el resultado sea manifiestamente inconsistente con el problema a resolver.

(3) Si un alumno da una respuesta acertada a un ejercicio escribiendo sólo los resultados, sin el desarrollo lógico de cómo los ha obtenido, la puntuación en este apartado no podrá ser superior al 10 % de la nota máxima prevista.

(4) La puntuación de cada ejercicio es de dos puntos y está señalada en la copia del examen que se entrega al alumno. Si algún ejercicio tiene subapartados, se deberá distribuir razonadamente el número de puntos entre los mismos.

(5) La calificación será la suma de las puntuaciones obtenidas en los cinco primeros ejercicios contestados.

SOLUCIONES CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE 2020

Problema 1:

1º) Calcular los valores de los parámetros $a\ y\ b$ para que la función $f(x)$ sea derivable, siendo

$$f(x)=\begin{cases} a(x^2-9)+\frac{bx}{3}-b. & x<3 \\ L[b(x-2)], & x\geq 3 \end{cases}.$$

Solución:

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left[a(x^2-9)+\frac{bx}{3}-b\right]=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} L[b(x-2)]=Lb=f(3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \Rightarrow 0=Lb \Rightarrow \underline{b=1}.$$

La función resulta: $f(x)=\begin{cases} a(x^2-9)+\frac{x}{3}-1. & x<3 \\ L(x-2), & x\geq 3 \end{cases}.$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=3$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de a.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+\frac{1}{3} & si\ x<3 \\ \frac{1}{x-2} & si\ x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow x=3 \Rightarrow f'(3)=\begin{cases} 6a+\frac{1}{3} & si\ x<3 \\ 1 & si\ x\geq 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(3^-)=f'(3^+) \Rightarrow 6a+\frac{1}{3}=1;\ \ 18a+1=3;\ \ 18a=2;\ \ 9a=1 \Rightarrow \underline{a=\frac{1}{9}}.$$

La función es derivable para $\boldsymbol{a=\frac{1}{9}}$ y $\boldsymbol{b=1}$.

Problema 2:

2º) Determinar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$. Calcular la recta tangente en su punto de inflexión.

Solución:

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x+2)^2=0 \Rightarrow x+2=0;\ \ x=-2\ \Rightarrow\ \underline{D(f)\Rightarrow R-\{-2\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{(x+2)^2}=0\Rightarrow \underline{La\ recta\ y=0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$(x+2)^2=0;\ \ x=-2\Rightarrow \underline{La\ recta\ x=-2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

Asíntota vertical: $\boldsymbol{x=-2}$. Asíntota horizontal: $\boldsymbol{y=0}$

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+2)^2-(x+3)\cdot[2\cdot(x+2)\cdot 1]}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)-2\cdot(x+3)}{(x+2)^3}=\frac{x+2-2x-6}{(x+2)^3}=\frac{-x-4}{(x+2)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{(-1)\cdot(x+2)^3-(-x-4)\cdot[3\cdot(x+2)^2\cdot 1]}{(x+2)^6}=\frac{-(x+2)-3\cdot(-x-4)}{(x+2)^4}=\frac{-x-2+3x+12}{(x+2)^4}=\frac{2x+10}{(x+2)^4}=\frac{2\cdot(x+5)}{(x+2)^4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{2\cdot(x+5)}{(x+2)^4}=0;\ \ 2\cdot(x+5)=0;\ \ x+5=0\Rightarrow x=-5.$$

$$f(-5)=\frac{-5+3}{(-5+2)^2}=\frac{-2}{(-3)^2}=-\frac{2}{9}\Rightarrow \text{Punto de tangencia: } P\left(-5,-\frac{2}{9}\right).$$

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$m=f'(-5)=\frac{-(-5)-4}{(-5+2)^3}=\frac{5-4}{(-3)^3}=-\frac{1}{27}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P\left(-5,-\frac{2}{9}\right)$ con $m=-\frac{1}{27}$ es:

$$y+\frac{2}{9}=-\frac{1}{27}\cdot(x+5);\ \ 27y+6=-x-5$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t\equiv \boldsymbol{x+27y+11=0}}.$$

Problema 3:

3º) Calcular el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2$ y $g(x) = (x-2)^2 - 1$ y las rectas $x = 3, x = 5$.

Solución:

Los puntos de corte de las dos funciones (parábolas) tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2 = (x-2)^2 - 1;\;\; x^2 + 3x - 18 = 9(x-2)^2 - 9;$

$x^2 + 3x - 9 = 9 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 9x^2 - 36x + 36;\;\; 8x^2 - 39x + 45 = 0;$

$x = \frac{39 \pm \sqrt{1.521 - 1.440}}{16} = \frac{39 \pm \sqrt{81}}{16} = \frac{39 \pm 9}{16} \Rightarrow x_1 = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}, x_2 = \frac{48}{16} = 3.$

$g\left(\frac{15}{8}\right) = \left(\frac{15}{8} - 2\right)^2 - 1 = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 - 1 = \frac{1}{64} - 1 = -\frac{63}{64} \Rightarrow A\left(\frac{15}{8}, -\frac{63}{64}\right).$

(Este punto no se marca en el gráfico por estar muy próximo a V_2)

$g(3) = (3-2)^2 - 1 = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow B(3, 0).$

Las dos funciones son parábolas convexas (∪) por ser positivos sus correspondientes coeficientes de x^2 cuyos vértices (mínimos) son los siguientes:

$f'(x) = \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}.$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{9}x + \frac{1}{3} = 0;\;\; 2x + 3 = 0;\;\; x = -\frac{3}{2}.$

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{9} + \frac{-\frac{3}{2}}{3} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-2-8}{4} = -\frac{9}{4} \Rightarrow V_1\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right).$

$g'(x) = 2 \cdot (x-2).\;\; g'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x-2) = 0;\;\; x - 2 = 0;\;\; x = 2.$

$g(2) = (2-2)^2 - 1 = -1 \Rightarrow V_2(2, -1).$

$f(3) = g(x) = 0 \Rightarrow B(3, 0).$

$f(5) = \frac{5^2}{9} + \frac{5}{3} - 2 = \frac{25+15-18}{9} = \frac{22}{9} \Rightarrow C\left(5,\; \frac{22}{9}\right) \approx C(5,\; 2.44).$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola $f(x)$ son los siguientes:

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} - 2 = 0;\;\; x^2 + 3x - 18 = 0;\; x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} =$

$= \frac{-3 \pm 9}{2} \Rightarrow\Rightarrow x_1 = -6;\;\; P(-6, 0), x_2 = 3 \Rightarrow B(3, 0).$

Los puntos de corte con el eje X de la parábola $g(x)$ son los siguientes:

$g(x) = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 1 = x^2 - 4x + 3.$

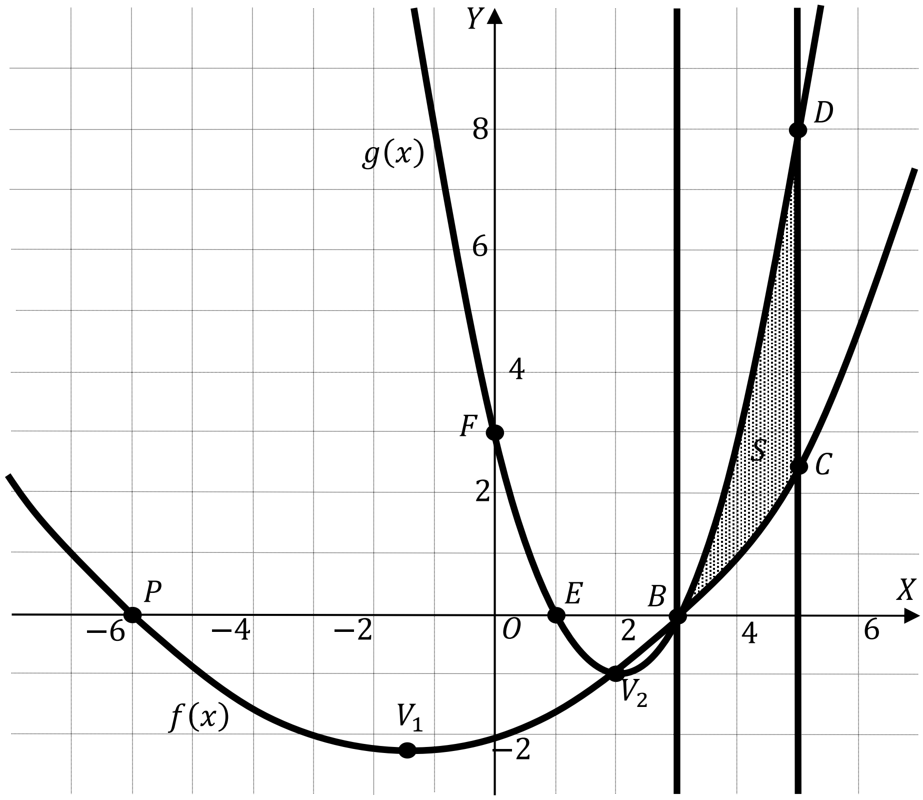
$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 1;\;\; E(1, 0), x_2 = 3 \Rightarrow B(3, 0).$

El punto de corte con el eje Y de la parábola $g(x)$ es el siguiente:

$g(0) = (0-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow F(0, 3).$

$g(5) = (5-2)^2 - 1 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow D(5, 8).$

La representación gráfica de la situación, con los datos obtenidos, es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_3^5[g(x)-f(x)]\cdot dx=\int_3^5\left[(x^2-4x+3)-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}-2\right)\right]\cdot dx=$$

$$=\int_3^5\left(\frac{8}{9}x^2-\frac{13}{3}x+5\right)\cdot dx=\left[\frac{8x^3}{27}-\frac{13x^2}{6}+5x\right]_3^5=$$

$$=\left(\frac{8\cdot 5^3}{27}-\frac{13\cdot 5^2}{6}+5\cdot 5\right)-\left(\frac{8\cdot 3^3}{27}-\frac{13\cdot 3^2}{6}+5\cdot 3\right)=\frac{1\,000}{27}-\frac{325}{6}+25-8+\frac{39}{2}-15=$$

$$=2+\frac{1\,000}{27}-\frac{325}{6}+\frac{39}{2}=\frac{108+2\,000-2\,925+1\,053}{54}=\frac{236}{54}=\underline{\frac{118}{27}\,u^2\cong 4.37\,u^2=S.}$$

$$\boldsymbol{Área=\frac{118}{27}\,u^2\cong 4.37\,u^2}$$

Problema 4:

4º) Discutir y resolver el sistema $\begin{cases}(a-1)x+y+3az=1\\ ax+ay-z=a\\ (a-1)x+y+(a-1)z=-2a+1\end{cases}$ según el valor del parámetro a.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 3a\\ a & a & -1\\ a-1 & 1 & a-1\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}a-1 & 1 & 3a & 1\\ a & a & -1 & a\\ a-1 & 1 & a-1 & -2a+1\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}a-1 & 1 & 3a\\ a & a & -1\\ a-1 & 1 & a-1\end{vmatrix}=$$

$$=a(a-1)^2+3a^2-(a-1)-3a^2(a-1)+(a-1)-a(a-1)=$$

$$=a(a^2-2a+1)+3a^2-3a^3+3a^2-a^2+a=$$

$$=a^3-2a^2+a-3a^3+5a^2+a=-2a^3+3a^2+2a=-a(2a^2-3a-2)=0;$$

$$a_1=0;\ \ 2a^2-3a-2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4}\Rightarrow a_2=-\frac{1}{2},a_3=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 0\\ a\neq -\frac{1}{2}\\ a\neq 2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_2=C_4\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$Para\ a=-\frac{1}{2}\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$ A efectos de rango, la matriz M' equivale a la matriz $M''=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -3 & 2\\ -1 & -1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M''\Rightarrow\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-3 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 4\end{vmatrix}=12-4+6-6-6+8=10\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 6 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_2,C_3,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 6 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=6+2+12+1-2+36=55\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$Para \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -\frac{1}{2} \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado.$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow\ Sistema\ Competible\ Indeterminado.\ Para \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow\ Sistema\ incompatible$$

Se resuelve en primer lugar para $a \neq 0, a \neq -\frac{1}{2}\ y\ a \neq 2$:

$$\left.\begin{aligned} (a-1)x + y + 3az = 1 \\ ax + ay - z = a \\ (a-1)x + y + (a-1)z = -2a + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{a}F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} (a-1)x + y + 3az = 1 \\ x + y - \tfrac{1}{a}z = 1 \\ -(2a+1)z = -2a \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = \frac{2a}{2a+1}.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} (a-1)x + y = 1 - 3az \\ x + y = 1 + \tfrac{1}{a}z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (a-2)x = -3az - \tfrac{1}{a}z \\ x + y = 1 + \tfrac{1}{a}z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a(a-2)x = -3a^2z - z = -(3a^2+1)z \Rightarrow x = \frac{-(3a^2+1)}{a(a-2)} \cdot \frac{2a}{2a+1} = \frac{-2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)}.$$

$$y = 1 + \frac{1}{a}z - x = 1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{2a}{2a+1} + \frac{2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)} = \frac{a(a-2)(2a+1) + 2a(a-2) + 2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)} =$$

$$= \frac{a(2a^2+a-4a-2) + 2a^2 - 4a + 6a^2 + 2}{a(a-2)(2a+1)} = \frac{a(2a^2-3a-2) + 8a^2 - 4a + 2}{a(a-2)(2a+1)} = \frac{2a^3 - 3a^2 - 2a + 8a^2 - 4a + 2}{a(a-2)(2a+1)} =$$

$$= \frac{2a^3 + 5a^2 - 6a + 2}{a(a-2)(2a+1)} = y.$$

$$Solución: x = \frac{-2(3a^2+1)}{a(a-2)(2a+1)};\ \ y = \frac{2a^3+5a^2-6a+2}{a(a-2)(2a+1)};\ \ z = \frac{2a}{2a+1}, \forall a \in R - \left\{0, -\frac{1}{2}, 2\right\}.$$

Resolvemos ahora para $a = 0$; el sistema resulta $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente a $\left.\begin{aligned} x + y = 1 \\ z = 0 \end{aligned}\right\}$. Haciendo $y = \lambda$:

$$Solución: Para\ a = 0\ \to x = 1 - \lambda;\ \ y = \lambda;\ \ z = 0,\ \forall \lambda \in R.$$

Problema 5:

5º) Calcular el siguiente determinante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix}$.

Solución:

Restando a cada fila la anterior multiplicada por x:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x & t-x \\ 0 & y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ 0 & y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y^2-xy & z^2-xz & t^2-xt \\ y^3-xy^2 & z^3-xz^2 & t^3-xt^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x & t-x \\ y(y-x) & z(z-x) & t(t-x) \\ y^2(y-x) & z^2(z-x) & t^2(t-x) \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(t-x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & t \\ y^2 & z^2 & t^2 \end{vmatrix} = D. \qquad (*)$$

Restando en el determinante a cada fila la anterior multiplicada por y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & z-y & t-y \\ 0 & z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z^2-yz & t^2-yt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-y & t-y \\ z(z-y) & t(t-y) \end{vmatrix} =$$

$$= (z-y)(t-y) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z & t \end{vmatrix} = (z-y)(t-y)(t-z).$$

Sustituyendo el valor hallado en la expresión (*):

$$\underline{\boldsymbol{D = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z).}}$$

Problema 6:

6º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in R$. Hallar A^{-1} y A^{10}.

Solución:

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - mF_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -m & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3m & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

....

$$\underline{A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10m & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema 7:

7º) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+3y+z+1=0$.

Solución:

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \left.\begin{matrix} x+3y-4z+9=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3y=-9+4\lambda \\ -x-2y=-1-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=-10+3\lambda;$$

$$x=-2y+1+\lambda=20-6\lambda-1+\lambda=21-5\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=21-5\lambda \\ y=-10+3\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de r son $P(21,-10,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-5,3,1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n}=(1,3,1)$.

La expresión general del plano β pedido es la siguiente:

$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_r},\vec{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-21 & y+10 & z \\ -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$3(x-21)+(y+10)-15z-3z-3(x-21)+5(y+10)=0;$$

$$6(y+10)-18z=0;\ \ (y+10)-3z=0.$$

$$\underline{\boldsymbol{\beta \equiv y-3z+10=0.}}$$

Problema 8:

8º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ 4x-2y+2z=10 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y el plano de ecuación:

$\pi \equiv x+y-z+6=0$. Hallar la posición relativa entre:

$a)$ Las rectas r y s.

$b)$ El plano π y la recta s.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1+\lambda \\ 2x-y=5-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=6;\ \ x=2;$$

$$y=1+\lambda-x=1+\lambda-2=-1+\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(3,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-3,-2,1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,2,3)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B-A] = [(-3,-1,1)-(3,-2,0)] = (-6,1,1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-18+12-1 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

$b)$ La expresión de la recta $s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ por unas ecuaciones continuas es las siguiente: $\left.\begin{array}{r} 2x+6=y+2 \\ 3x+9=z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ 3x-z=-10 \end{array}\right\}$.

La recta s y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ 3x-z=-10 \\ x+y-z=-6 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & -10 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$.

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & -10 \\ 1 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$$

$$La\ recta\ s\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi$$

Problema 9:

9º) La estancia vacacional de una familia en un hotel sigue una distribución Normal, de media 15 días y desviación típica 4 días.

a) Calcular la probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días.

b) Calcular la probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días.

Solución:

$Datos\colon\ \mu = 15;\ \ \sigma = 4.$

a)

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(15, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-15}{4}$.

$P = P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-15}{4}\right) = P\left(Z < \frac{-5}{4}\right) = P(Z < -1.25) =$

$= 1 - P(Z \leq 1.25) = 1 - 0.8944 = \underline{0.1056}.$

La probabilidad de que la estancia de una familia sea inferior a 10 días es $\mathbf{0.1056}$

b)

$P = P(11 \leq X \leq 19) = P\left(\frac{11-15}{4} \leq Z \leq \frac{19-15}{4}\right) = P\left(\frac{-4}{4} \leq Z \leq \frac{4}{4}\right) =$

$= P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] = P(Z < 1) - 1 + P(Z < 1) =$

$= 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 1.6826 - 1 = \underline{0.6826}.$

La probabilidad de que la estancia esté comprendida entre 11 y 19 días es $\mathbf{0.6826}$

Problema 10:

10º). En una clase de 35 alumnos asisten 30 de ellos. Se sabe que aprueban una determinada asignatura el 80 % de los alumnos que asisten a clase y el 10 % de los que no asisten. Se elige un alumno al azar.

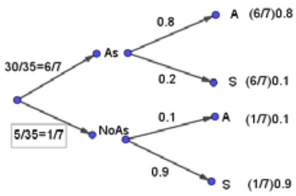
a) Calcular el porcentaje de alumnos que aprueban dicha asignatura.
b) Sabiendo que el alumno ha suspendido, calcular la probabilidad de que haya asistido a clase.

Solución:

Llamamos As al suceso asistir a clase, $NoAs$ al suceso, no asistir. Llamamos Ap al suceso aprobar la asignatura, y S al suceso haber suspendido.

Nos dan los siguientes datos: $P(As)$ = 30/35; $P(A/As)$ = 80/100; $P(A/NoAs)$ = 10/100.

Los llevamos a un diagrama de árbol:



a) Para calcular los alumnos que aprueban debemos recorrer dos ramas del árbol, y tenemos:

$$P(A) = P(As) \cdot P(A/As) + P(NoAs) \cdot P(A/NoAs) = \left(\frac{6}{7}\right) \cdot (0.8) + \left(\frac{1}{7}\right) \cdot (0.1) = \frac{4.8 + 0.1}{7} = \frac{4.9}{7}$$
$$= 0.7$$

Aprueban esa asignatura el **70 %** del alumnado.

b) Nos piden ahora $P(As/S)$. Sabemos que:

$$P\left(\frac{As}{S}\right) = \frac{P(As \cap S)}{P(S)} = \frac{\left(\frac{1}{7}\right) \cdot 0.2}{\left(\frac{6}{7}\right) \cdot 0.2 + \left(\frac{1}{7}\right) \cdot 0.9} = \frac{\frac{0.2}{7}}{\frac{1.2+0.9}{7}} = \frac{0.2}{2.1} = 0.5714.$$

Sabiendo que el alumno ha suspendido, la probabilidad de que haya asistido a clase es de **0.57**.