MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Javier Rodrigo Hitos

Con vídeos con problemas resueltos de Selectividad

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2019-2020** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=a+1 \\ -ax+y-z=2a \\ -y+z=a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) (0.5 puntos) Resolver el sistema para $a=0$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=x^3+3x^2-1$ y $g(x)=6x$, se pide:

a) (0.5 puntos) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1,10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ con pendiente mínima.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$, $\quad s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto) Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

b) (0.5 puntos) Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

c) (1 punto) Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13740 toneladas de doradas y 23440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ (x-1)^3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.
b) (1 punto) Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.
c) (1 punto) Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los puntos $P(-3, 1, 2)$ y $Q(-1, 0, 1)$ y el plano π de ecuación $x + 2y - 3z = 4$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la proyección de Q sobre π.
b) (0.5 puntos) Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.
c) (1 punto) Escribir la ecuación del plano perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.25$ y $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) (0.5 puntos) Sea C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) (0.5 puntos) ¿Son A y B independientes?

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ (donde $\bar{A}$ denota el suceso complementario al suceso A).

d) (0.75 puntos) Calcular $P(\bar{B}|A)$.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

a) Cálculo correcto de los valores a estudiar: 0.5 puntos. Estudio correcto de cada caso: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes.

A.2.

a) Identificar el teorema a utilizar: 0.25 puntos. Escribir y comprobar las hipótesis: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Calcular el valor de los parámetros de la recta tangente: 0.5 puntos. Escribir la ecuación de la recta tangente: 0.25 puntos.
c) Calcular primitiva: 0.75 puntos. Aplicar regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica el concepto de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolucion de problemas. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

A.4.

a) Planteamiento: 0.75 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Por identificar la binomial: 0.5 puntos. Por escribir los parámetros correctos: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

B.1.

0.5 puntos por plantear correctamente cada ecuación, 1 punto por la resolución correcta del sistema.

Estándares de aprendizaje evaluados: Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situacion de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

B.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Estudio de la derivada: 0.5 puntos. Aplicación al análisis del crecimiento: 0.5 puntos.
c) Planteamiento de la continuidad: 0.25 puntos. Cálculos para la continuidad: 0.25 puntos. Planteamiento sobre derivabilidad: 0.25 puntos. Resolución sobre recta tangente: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa a función en torno de puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

B.4.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
En los dos apartados anteriores no se debe considerar correcta una respuesta de Sí o No, si no va acompañada de algún tipo de justificación.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a

$$\left.\begin{array}{l} x+a\,y+z=a+1 \\ -a\,x+y-z=2\,a \\ -y+z=a \end{array}\right\}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resolver el sistema para $a=0$.

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/UvoHnpmFQkI

a) Si llamamos A a la matriz de coeficientes, se cumple que:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+a-1+a^2=a^2+a=a\,(a+1)=0 \Leftrightarrow a=0,\ a=-1$$

Entonces si $a\neq 0,\ -1,\ |A|\neq 0$ y el sistema es compatible determinado. Si $a=0$, como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, tenemos que $rg(A)=2$. Por otro lado, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0$ ($F_3=-F_2$), por lo que $rg\left(A^*\right)=2$ y el sistema es compatible indeterminado.

Si $a=-1$, como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, tenemos que $rg(A)=2$. Por otro lado:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1-2-1\neq 0$, por lo que $rg\left(A^*\right)=3$ y el sistema es incompatible.

b) Para $a=0$, como las dos primeras filas son independientes (apartado a), el sistema queda $\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y-z=0 \end{array}\right\}$. Si $z=\alpha$, tenemos que $\left.\begin{array}{l} x+\alpha=1 \\ y-\alpha=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x=1-\alpha, y=\alpha$, por lo que la solución es: $(1-\alpha,\alpha,\alpha)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

Si $a\neq 0, a\neq -1$, el sistema es compatible determinado. Si $a=-1$, el sistema es incompatible.

Si $a=0$, el sistema es compatible indeterminado, de solución: $(1-\alpha,\alpha,\alpha)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$.

Problema A.2:

Dadas las funciones $f(x) = x^3 + 3\,x^2 - 1$ y $g(x) = 6\,x$, se pide:

a) Justificar, usando el teorema adecuado, que existe algún punto en el intervalo $[1,\ 10]$ en el que ambas funciones toman el mismo valor.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con pendiente mínima.

c) Calcular $\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$

Solución

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/PqoWet9AiGY

a) Si consideramos la función continua (polinomio) $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 3\,x^2 - 6\,x - 1$, tenemos que $h(1) = 1^3 + 3\,1^2 - 6 - 1 = -3 < 0$, $h(10) = 10^3 + 3\,10^2 - 60 - 1 > 0$, por lo que por el teorema de Bolzano, existe un $x_0 \in (1, 10)$ tal que $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$ y en x_0 las dos funciones toman el mismo valor.

b) La pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ es $f'(x) = 3\,x^2 + 6\,x$, luego hay que hallar el mínimo de esta función. Se cumple que $f''(x) = 6\,x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Como la función es una parábola con las ramas hacia arriba, en este punto crítico tiene el mínimo absoluto. Entonces la mínima pendiente es $f'(-1) = 3\,(-1)^2 + 6\,(-1) = -3$ y la recta pedida es:

$y = f(-1) - 3\,(x+1) = (-1)^3 + 3\,(-1)^2 - 1 - 3\,(x+1) = 1 - 3\,x - 3 = -2 - 3\,x$

$$\boldsymbol{y = -2 - 3\,x}$$

c) Se cumple que:

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \int_1^2 \frac{x^3 + 3\,x^2 - 1}{6\,x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} - \frac{1}{6\,x}\right)dx = \frac{1}{6}\int_1^2 x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx - \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 - \frac{1}{6}\left[\ln x\right]_1^2 = \frac{1}{6}\left[\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] - \frac{1}{6}\left[\ln 2 - \ln 1\right] = \frac{7}{18} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\ln 2 = \frac{41}{36} - \frac{1}{6}\ln 2$$

$$\boldsymbol{\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{41}{36} - \frac{1}{6}\,ln\,2}$$

Problema A.3:

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x-y=2 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, se pide:

$a)$ Calcular la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.

$c)$ Encontrar la ecuación del plano π paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/OQDV6pBP99Y

a) *r* se puede expresar como $r \equiv \left.\begin{matrix} y=x-2 \\ z=3\,x+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\lambda,\ y=\lambda-2,\ z=3\,\lambda+1$, por lo que pasa por:

$P_r=(0,\ -2,\ 1)$ y tiene como vector director $v_r=(1,\ 1,\ 3)$.

s pasa por $P_s=(-1,\ -4,\ 0)$ y tiene como vector director $v_s=(2,\ -1,\ 1)$.

Entonces $P_rP_s=(-1,\ -4,\ 0)-(0,\ -2,\ 1)=(-1,\ -2,\ -1)$, por lo que:

$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-12+1+2-3+2=-11\neq 0$ y *r* y *s* se cruzan.

Las rectas se cruzan.

b) Como es perpendicular a *r*, el plano es $x+y+3\,z=C$.

Como pasa por (2, −1, 5), $2-1+3\times 5=16=C$, por lo que el plano pedido es $x+y+3\,z=16$

$$\boldsymbol{x+y+3\,z=16}$$

c) Como el plano es paralelo a *r*, un vector director es $v_r=(1,\ 1,\ 3)$, y como contiene a *s*, el otro vector director es $v_s=(2,\ -1,\ 1)$ y pasa por $P_s=(-1,\ -4,\ 0)$, por lo que el plano pedido es:

$(x,\ y,\ z)=(-1,\ -4,\ 0)+\lambda\ (1,\ 1,\ 3)+\mu\ (2,\ -1,\ 1)=(-1+\lambda+2\,\mu,\ -4+\lambda-\mu,\ 3\,\lambda+\mu)$

$$\boldsymbol{4x+5y-3z+24=0}$$

Problema A.4:

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30 %. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40 %, en el tercero del 50 % y en el cuarto del 60 %. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.

b) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.

c) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan el 85 % de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/YBTkGMOWli8

a) Se cumple que:

$$\begin{aligned}&P(\{\text{acierte antes del cuarto disparo}\}) =\\ &= P(\{\text{acierte en el primer disparo}\}) + P(\{\text{acierte en el segundo disparo}\}) +\\ &+P(\{\text{acierte en el tercer disparo}\}) = P(\{\text{acierte en el primer disparo}\}) +\\ &+P(\{\text{falle el primer disparo}\} \cap \{\text{acierte el segundo disparo}\}) +\\ &+P(\{\text{falle el primer disparo}\} \cap \{\text{falle el segundo disparo}\} \cap \{\text{acierte el tercer disparo}\}) =\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{7}{10}\frac{2}{5} + \frac{7}{10}\frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{79}{100} = 0.79.$$

La probabilidad de que el globo haya explotado es $\mathbf{\frac{79}{100} = 0.79}$

b) Se cumple que: $P(\{\text{no acierte en los cuatro disparos}\}) =$

$$\begin{aligned}&= P(\{\text{falle en el primer disparo}\} \cap \ldots \cap \{\text{falle en el cuarto disparo}\}) =\\ &= P(\{\text{falle en el primer disparo}\})P(\{\text{falle en el segundo disparo}\}/\{\text{ha fallado en el primer disparo}\})\ldots\\ &P(\{\text{falle en el cuarto disparo}\}/\{\text{ha fallado en los tres primeros disparos}\})\\ &= \frac{7}{10}\frac{6}{10}\frac{5}{10}\frac{4}{10} = \frac{7}{10}\frac{3}{5}\frac{1}{2}\frac{2}{5} = \frac{21}{250} = 0.084\end{aligned}$$

La probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo es $\mathbf{\frac{21}{250} = 0.084}$

c) Se cumple que: $P(\{\text{exploten 6 globos}\}) = P(\{\text{6 arqueros acierten y 4 fallen}\}) =$

$$= \binom{10}{6} P(\{\text{el primero acierte}\} \cap \ldots \cap \{\text{el sexto acierte}\} \cap \{\text{el séptimo falle}\} \cap \ldots \cap \{\text{el décimo falle}\})$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}\left(\frac{17}{20}\right)^6\left(\frac{3}{20}\right)^4 = \frac{210 \times 81 \times 17^6}{20^{10}} = 0.0400957.$$

(En la penúltima igualdad hemos utilizado que los sucesos son independientes)

La probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo es

$$\mathbf{\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!}\left(\frac{17}{20}\right)^6\left(\frac{3}{20}\right)^4 = \frac{210 \times 81 \times 17^6}{20^{10}} = 0.0400957}$$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Según informa la Asociación Empresarial de Acuicultura de España, durante el año 2016 se comercializaron en España doradas, lubinas y rodaballos por un total de 275.8 millones de euros. En dicho informe figura que se comercializaron un total de 13 740 toneladas de doradas y 23 440 toneladas de lubinas. En cuanto a los rodaballos, se vendieron 7 400 toneladas por un valor de 63.6 millones de euros. Sabiendo que el kilo de dorada fue 11 céntimos más caro que el kilo de lubina, se pide calcular el precio del kilo de cada uno de los tres tipos de pescado anteriores.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo siguiente: https://youtu.be/QDXJKu6827E

Si llamamos x al precio del kilo de la dorada, y al precio del kilo de la lubina (en euros), tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 13740000x + 23440000y + 63600000 = 275800000 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 1374\,x + 2344\,y + 6360 = 27580 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 687\,x + 1172\,y + 3180 = 13790 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + 0.11 \\ 687\,x + 1172\,y = 10610 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 687\,(y + 0.11) + 1172\,y = 687\,y + 75.57 + 1172\,y =$$

$$= 1859\,y + 75.57 = 10610 \Rightarrow y = \frac{10610 - 75.57}{1859} = \frac{10534.43}{1859} \approx 5.67\ €$$

Entonces $x = y + 0.11 \approx 5.67 + 0.11 = 5.78\ €$

Por otro lado, como se vendieron 7 400 toneladas de rodaballo por un valor de 63.6 millones de euros, el precio por kilo de rodaballo es

$$\frac{63600000}{7400000} = \frac{636}{74} = \frac{318}{37} \approx 8.59\ €$$

El precio de venta del kilo de dorada fue de **5.78** euros, el de kilo de la lubina de **5.67** euros y el kilo de rodaballo fue de **8.59** euros.

Problema B.2:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & si\ \ x \leq 1 \\ (x-1)^3 & si\ \ x > 1 \end{cases}$:

$a)$ Estudie su continuidad en $[-4, 4]$.

$b)$ Analice su derivabilidad y crecimiento en $[-4, 4]$.

$c)$ Determine si la función $g(x) = f'(x)$ está definida, es continua y es derivable en $x = 1$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/ID6rZo5mr5Q

a) La función $f(x)$ está definida a trozos por dos funciones polinómicas, continuas y derivables en toda la recta real. El único problema está en $x=1$, punto de cambio de rama. Se cumple que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x-1)^2 = (1-1)^2 = 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)^3 = (1-1)^3$, por lo que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0 = f(1)$ y $f(x)$ es continua en 1. Por tanto:

$f(x)$ es continua en $[-4, 4]$

b) El único problema vuelve a estar en $x=1$, punto de cambio de rama. Si $x < 1$, tenemos que $f'(x) = 2\ (x-1)$, por lo que, al ser $f(x)$ continua en $[-4,\ 4]$, tenemos que $f'_-(1) = 2\ (1-1) = 0$. Si $x > 1$, tenemos que $f'(x) = 3\ (x-1)^2$, por lo que, al ser $f(x)$ continua en $[-4,\ 4]$, tenemos que $f'_+(1) = 3\ (1-1)^2 = 0$, por lo que $f'(1) = f'_-(1) = f'_+(1) = 0$ y $f(x)$ es derivable en 1, siendo además $x_0 = 1$ punto crítico de $f(x)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(-4,\ 4)$.

Si $x < 1$, tenemos que $f'(x) = 2\ (x-1) < 0$ y $f(x)$ es estrictamente decreciente, si $x > 1$, tenemos que $f'(x) = 3\ (x-1)^2 > 0$ y $f(x)$ es estrictamente creciente. En $x=1$ hay un mínimo relativo.

$f(x)$ es derivable en $[-4, 4]$, estrictamente decreciente para $x < 1$ y estrictamente creciente para $x > 1$.

c) Se cumple que $g(1) = f'(1) = 0$ (apartado b), por lo que g está definida en 1. Entonces:

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2\ (x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ 3\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

De nuevo es una función definida a trozos por dos funciones polinómicas. El único problema para la continuidad está en $x=1$, punto de cambio de rama. Se cumple que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2\ (x-1) = 2\ (1-1) = 0 = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3\ (x-1)^2 = 3\ (1-1)^2$, por lo que:

$\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0 = g(1)$ y $g(x)$ es continua en 1.

Si $x < 1$, tenemos que $g'(x) = 2$, por lo que, al ser $g(x)$ continua en 1, tenemos que $g'_-(1) = 2$.

Si $x > 1$, tenemos que $g'(x) = 6\ (x-1)$, por lo que, al ser $g(x)$ continua en 1, tenemos que:

$g'_+(1) = 6\ (1-1) = 0$, por lo que $2 = g'_-(1) \neq g'_+(1) = 0$ y $g(x)$ no es derivable en 1.

La función $g(x) = f'(x)$ está definida y es continua, pero no es derivable en 1.

Problema B.3:

Dados los puntos $P(-3,1,2)$ y $Q(-1,0,1)$ y el plano $\pi \equiv x+2y-3z=4$, se pide:

$a)$ Hallar la proyección de Q sobre π.

$b)$ Escribir la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P.

$c)$ Escribir la ecuación del plano β perpendicular a π que contiene a los puntos P y Q.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/GyyXBReLhSI

a) La recta perpendicular a π que pasa por Q tiene como vector director el vector característico de π: $(1,\ 2,\ -3)$, luego es $(x,\ y,\ z)=(-1,\ 0,\ 1)+\lambda\ (1,\ 2,\ -3)=(-1+\lambda,\ 2\ \lambda,\ 1-3\ \lambda)$.

La proyección de Q sobre $\boldsymbol{\pi}$ es la intersección de esta recta con π:

$x+2\ y-3\ z=-1+\lambda+2\ (2\ \lambda)-3(1-3\ \lambda)=14\ \lambda-4=4 \Leftrightarrow \lambda=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$, luego la proyección pedida es:

$$\left(-1+\frac{4}{7},\ \frac{8}{7},\ 1-3\ \frac{4}{7}\right)=\left(-\frac{3}{7},\ \frac{8}{7},\ -\frac{5}{7}\right)$$

b) Al ser paralelo a π, será $x+2\ y-3\ z=C$. Para que pase por P: $-3+2-3\times 2=-7=C$.

Entonces el plano pedido es $x+2\ y-3\ z=-7$

c) El plano será $A\ x+B\ y+C\ z=D$. Como es perpendicular a π, los vectores característicos son perpendiculares y $(A,\ B,\ C)\circ(1,\ 2,\ -3)=A+2\ B-3\ C=0$. Como contiene a P y Q:

$A\ (-3)+B+C\ 2=-3\ A+B+2\ C=D,\ A\ (-1)+C=-A+C=D$, por lo que tenemos el sistema:

$\left.\begin{array}{l} A+2\ B-3\ C=0 \\ -3\ A+B+2\ C=D \\ -A+C=D \end{array}\right\}$. Despejando en la última ecuación:

$$C=A+D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+2\ B-3\ (A+D)=-2\ A+2\ B-3\ D=0 \\ -3\ A+B+2\ (A+D)=-A+B+2\ D=D \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2\ A+2\ B=3\ D \\ -A+B=-D \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -A+B=-D=\frac{3\ D}{2} \Rightarrow D=0,\ B=A,\ C=A+D=A$$

Entonces el plano pedido es $A\ x+A\ y+A\ z=0 \Leftrightarrow x+y+z=0$

Problema B.4:

Se consideran dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$; $P(B) = 0.25$; $P(A \cap B) = 0.125$. Responder de manera razonada o calcular lo que se pide en los siguientes casos:

a) Con C otro suceso, incompatible con A y con B. ¿Son compatibles los sucesos C y $A \cup B$?

b) ¿Son A y B independientes?

c) Calcular la probabilidad $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

d) Calcular $P(\overline{B}/A)$.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/GyLjgzoJnmw

a) Se cumple que:

$P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0 + 0 - 0 = 0$ (ya que C es incompatible con A y con B, luego $P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0$ y:

$A \cap B \cap C \subset A \cap C \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$), por lo que C y $A \cup B$ son incompatibles.

Los sucesos C y $A \cup B$ son incompatibles

b) Se cumple que $P(A \cap B) = 0.125 = P(A)\ P(B) = 0.5 \times 0.25$, luego los sucesos son independientes.

Los sucesos A y B son independientes

c) Se cumple que:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left((A \cup B)^c\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (0.5 + 0.25 - 0.125) = 0.375$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.375$$

d) Se cumple que:

$$P(\overline{B} / A) = \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{0.5} = \frac{0.5 - 0.125}{0.5} = \frac{0.375}{0.5} = \frac{375}{500} = \frac{75}{100} = 0.75$$

$$P(\bar{B}/A) = 0.75$$

MATEMÁTICAS II–SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)

A.1.

a) $|A| = a^2 + a \Rightarrow a = 0$ y $a = -1$
Si a no es ni 0 ni $-1 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado
Si $a = -1 \Rightarrow$ Sistema incompatible
Si $a = 0 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado

b) $x + z = 1$, $y - z = 0 \Rightarrow$ Solución: $(1-t, t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$

A.2.

a) Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Dado que $h(x)$ es polinómica es continua y como $h(1)\,h(10) < 0$, aplicando el $\boxed{\text{teorema de Bolzano}}$, tenemos que $\exists c \in (1, 10)$ tal que $h(c) = 0$, luego $f(c) = g(c)$.
b) La pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = c$ es $m = 3c^2 + 6c$, que tomará un valor extremo cuando $m'(c) = 6c + 6 = 0$. En $c = -1$ la pendiente toma valor mínimo de -3. Luego la ecuacion de la recta tangente es $\boxed{y = -3(x+1)+1}$.
c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)}\,dx = \frac{1}{6}\left[\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - \ln x\right]_1^2 = \boxed{\frac{41}{36} - \frac{\ln 2}{6} \approx 1.023364}$.

A.3.

a) El vector director de la recta r es $\overrightarrow{d_r}(1,1,3)$ y un punto de la misma $P_r(2,0,7)$. El vector director de la recta s es $\overrightarrow{d_s}(2,-1,1)$ y un punto de la misma $P_s(-1,-4,0)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{P_rP_s} = (-3,-4,-7)$. Puesto que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$, deducimos que r y s se cruzan.
b) $\vec{n} = (1,1,3) \Rightarrow \pi : x + y + 3z + k = 0$. $P \in \pi \Rightarrow 2 - 1 + 15 + k = 0 \Rightarrow k = -16$. Por lo tanto, la ecuación del plano buscado es $\pi : x + y + 3z = 16$.
c) El vector normal al plano π que se busca es $\vec{n} = \overrightarrow{d_r} \times \overrightarrow{d_s} = (4,5,-3)$. Además $P_s(-1,-4,0) \in \pi \Rightarrow$ el plano buscado es $\pi : 4x + 5y - 3z + 24 = 0$.

A.4.

a) Denotamos por A_j la probabilidad de acertar en el lanzamiento j, y por F_j la probabilidad de fallar en ese lanzamiento.

$$P(A_1) + P(F_1 \cap A_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap A_3) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79.$$

b) $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.084$.
c) Tenemos 10 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 0.85$ de manera que

$$P(\text{6 aciertos}) = \binom{10}{6} 0.85^6 \cdot 0.15^4 \approx 0.0400957.$$

B.1.

Si llamamos x, y, z a los precios del kilo de cada uno de los pescados anteriores en 2016, con los datos del enunciado se plantea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 13740000x + 23440000y + 7400000z &= 275800000 \\ x &= y + 0.11 \\ 7400000z &= 63600000 \end{cases}$$

La solución de este sistema, redondeando a dos decimales es $x = 5.78$ euros/kilo de dorada, $y = 5.67$ euros/kilo de lubina y $z = 8.59$ euros/kilo de rodaballo.

B.2.

a) La función es continua si $x \neq 1$ por coincidir en valores con polinomios. Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 = f(0)$, es continua en $[-4,4]$.
b) La derivada viene dada por $2(x-1)$ o por $3(x-1)^2$ respectivamente a izquierda y derecha de 1, por lo que al ser $\lim_{x\to 1^-} 2(x-1) = \lim_{x\to 1^-} 3(x-1)^2$ resulta existir $f'(x)$ en $[-4,4]$, ser nula en 1, negativa a su izquierda y positiva a su derecha. Por tanto, f es decreciente en $[-4,1)$ y creciente en $(1,4]$.
c) Hemos visto que las derivadas laterales de f en $x=1$ coinciden, por lo que $g(x) = f'(x)$ es continua en 1. Puesto que $g(x) = 2(x-1)$ para $x<1$, y $g(x) = 3(x-1)^2$ si $x>1$, la derivada de g es es 2 si $x<1$ y $6(x-1)$ si $x>1$. Por lo tanto $g'(1)$ no existe al ser $g'(1^-) \neq g'(1^+)$.

B.3.

a) El vector normal al plano π es $\vec{u} = (1,2,-3)$. La proyección de Q sobre π es $\{Q+\lambda\vec{u}\}\cap\pi$, de modo que λ se obtiene como solución de $(\lambda-1)+2(2\lambda)-3(1-3\lambda) = 4$, es decir, $\lambda = \frac{4}{7}$ y la proyección es el punto $\left(\frac{-3}{7}, \frac{8}{7}, \frac{-5}{7}\right)$
b) El plano buscado tiene ecuación $x+2y-3z+D=0$. Puesto que contiene a P, $-3+2-6+D=0$, por lo que $D=7$ y la solución es $x+2y-3z+7=0$
c) El vector normal al plano buscado es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\overrightarrow{PQ}$. Por tanto, es paralelo a $\vec{u}\times\overrightarrow{PQ} = (1,2,-3)\times(2,-1,-1) = (-5,-5,-5)$, de modo que la ecuación del plano buscado es de la forma $x+y+z+D'=0$. La condición de que el plano contenga al punto Q implica que $-1+1+D'=0$, por lo que la solución es $x+y+z=0$.

B.4.

a) Son incompatibles.

$$C\cap(A\cup B) = (C\cap A)\cup(C\cap B) = \phi\cap\phi = \phi.$$

b) Son independientes porque

$$0.125 = P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0.5\cdot 0.25.$$

c)

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B)) = 1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) = 0.375.$$

d)

$$P(\bar{B}|A) = \frac{P(A\cap\bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)} = 0.75.$$

UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2019-2020**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1, 1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3, 4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición pedida, **justificándolo apropiadamente**:

a) (0.5 puntos) La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
b) (0.5 puntos) Las tres filas de A son linealmente independientes.
c) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
d) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
e) (0.5 puntos) A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x < 1, x \neq -1 \\ \dfrac{x^2+1}{4x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.
b) (1.25 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.
c) (0.75 puntos) Estudiar sus asíntotas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(3, 3, 0)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{0}$, se pide:
a) (0.75 puntos) Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.
b) (1 punto) Calcular el punto simétrico de P respecto de r.
c) (0.75 puntos) Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas rojas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas de cada color y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ella dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra.
c) (0.5 puntos) Sabiendo que la primera bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1 puntos) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.

b) (0.5 puntos) Calcular la matriz $C = A^2 - 2\,I$.

c) (1 punto) Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25\,t\,e^{-t^2/4}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

a) (0.5 puntos) Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

b) (0.75 puntos) Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

c) (1.25 puntos) La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$, se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices consecutivos $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ y $C(4, 3, -2)$. Se pide:

a) (1 punto) Calcular una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC.

b) (1 punto) Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

c) (0.5 puntos) Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.

b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.

c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN Y ESTÁNDARES EVALUADOS EN CADA PREGUNTA

En cada pregunta, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en el documento soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

Los estándares de aprendizaje del bloque 1 se evaluarán transversalmente en todos los ejercicios, penalizando en la calificación de cada respuesta la falta de justificación razonada o de precisión y valorando las estrategias, razonamientos y toma adecuada de decisiones.

A.1.

En cada apartado, por dar el ejemplo 0.25 puntos; por la justificación de que cada ejemplo cumple el enunciado, 0.25 puntos.

Estándares evaluables: Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

A.2.

a) Por cada valor obtenido: 0.25 puntos.
b) Por el estudio de la continuidad: 0.5 puntos. Por el estudio de la derivabilidad: 0.5 puntos. Por caracterizar el extremo: 0.25 puntos.
c) Por cada asíntota: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolución de problemas.

A.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Encontrar una solución correcta: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

A.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes.

B.1.

!**a** Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente.

B.2.

a) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo de límite: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Cálculo del instante: 0.25 puntos. Cálculo del máximo: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Cálculo de la primitiva: 0.5 puntos. Aplicación de la regla de Barrow: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como teoremas relacionados, a la resolucion de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

B.3.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Si se determina el vértice D: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25). Si se determina el área: 0.5 puntos (repartidos entre planteamiento: 0.25 y resultado: 0.25).
c) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas.

B.4.

a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) 0.5 puntos por identificar la binomial; 0.5 puntos por el resultado.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades a partir de los sucesos que constituyen una partición del espacio muestral. Identifica fenómenos que pueden modelizarse mediante la distribución binomial, obtiene sus parámetros y calcula su media y desviación típica. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

RESPUESTAS OPCIÓN A

Problema A.1:

Sea A una matriz de tamaño 3×4 tal que sus dos primeras filas son $(1,1,1,1)$ y $(1,2,3,4)$, y sin ningún cero en la tercera fila. En cada uno de los apartados siguientes, se pide poner un ejemplo de matriz A que verifique la condición, justificándolo apropiadamente:

$a)$ La tercera fila de A es combinación lineal de las dos primeras.
$b)$ Las tres filas de A son linealmente independientes.
$c)$ A es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.
$d)$ A es la matriz ampliada de un sistema compatible indeterminado.
$e)$ A es la matriz ampliada de un sistema incompatible.

Solución: Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/OkSjXFjUihU

a) Podemos tomar *A* de manera que la tercera fila sea la suma de las dos primeras: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}$

b) Variamos ligeramente la matriz *A* del apartado anterior cambiando el 4 de la tercera fila por un 5: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&5&5\end{pmatrix}$. Vemos que hay un menor de orden 3 no nulo en *A*, por lo que las 3 filas son l. i.:

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&5\end{vmatrix}=10+6+3-4-9-5=19-18=1\neq 0$$

c) La matriz del apartado anterior corresponde a un sistema cuya matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, luego es la matriz ampliada de un sistema compatible determinado.

d) La matriz del apartado a) tiene la tercera fila combinación lineal de las 2 primeras, luego $rg(A)\le 2$

Tenemos que $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$, por lo que $rg(A)=2$. Como el menor está dentro de la matriz de coeficientes del sistema asociado a *A* el rango de dicha matriz de coeficientes es 2, menor que el número de incógnitas (3), luego la matriz del apartado a) corresponde a un sistema compatible indeterminado.

e) Variamos ligeramente la matriz *A* del apartado a) cambiando el 5 por un 6: $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\2&3&4&6\end{pmatrix}$.

Vemos que hay un menor de orden 3 no nulo en *A*, por lo que $rg(A)=3$:

$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&6\end{vmatrix}=12+6+3-4-9-6=15-13=2\neq 0$. La matriz de coeficientes del sistema asociado a *A* es la misma del apartado anterior, luego tiene rango 2, y entonces el sistema asociado a *A* es incompatible.

Problema A.2:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & si \ \ x < 1, x \neq -1 \\ \frac{x^2+1}{4x} & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$, se pide:

$a)$ Calcular $f(0)$ y $(f \circ f)(0)$.

$b)$ Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y determinar si en dicho punto existe un extremo relativo.

$c)$ Estudiar sus asíntotas.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/eEPwmBTpgwY

a) Se cumple que $f(0) = \frac{0-1}{0^2-1} = 1$, por lo que $(f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = \frac{1^2+1}{4} = \frac{1}{2}$

b) Tenemos que:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)\ (x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{4\,x} = \frac{1^2+1}{4} = \frac{1}{2}$, por lo que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2} = f(1) = \frac{1^2+1}{4} = \frac{1}{2}$ y $f(x)$ es continua en 1.

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{x-1}{x^2-1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2\,x-2-x^2+1}{2\,(x-1)^2\,(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+2\,x-1}{2\,(x-1)^2\,(x+1)} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)^2}{2\,(x-1)^2\,(x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{2\,(x+1)} = -\frac{1}{4}$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{x^2+1}{4\,x} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1-2x}{4\,x\,(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^2}{4\,x\,(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{4\,x} = \frac{1-1}{4} = 0$$

Como $f'_-(1) = -\frac{1}{4} \neq f'_+(1) = 0$, $f(x)$ no es derivable en 1.

Si $x<1$, $f'(x) = \frac{x^2-1-(x-1)\,2\,x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-2\,x-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2} < 0$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente.

Si $x>1$, $f'(x) = \frac{2\,x\,4\,x-(x^2+1)\,4}{16\,x^2} = \frac{4\,x^2-4}{16\,x^2} = \frac{(x-1)\,(x+1)}{4\,x^2} > 0$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente.

Como además $f(x)$ es continua en 1, $f(x)$ **tiene un mínimo relativo en 1**

c) Tenemos que:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$, luego $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ en $-\infty$ y $f(x)$ no tiene asíntota oblicua en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{4x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty} x=\infty$, luego $f(x)$ no tiene asíntota horizontal en ∞

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{4x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{4x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^2}=\frac{1}{4}$,

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{1}{4}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{4x}-\frac{1}{4}x\right)=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, luego $y=\frac{1}{4}x$ es una asíntota oblicua de $f(x)$ en ∞

Tenemos que:

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-0}=-\infty$, por lo que $x=-1$ es una asíntota vertical de $f(x)$

Asíntotas: $y=\frac{1}{4}x$ es una asíntota oblicua**.** $x=-1$ es una asíntota vertical**.**

Problema A.3:

Dado el punto $P(3,3,0)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{0}$, se pide:

$a)$ Escribir la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r.

$b)$ Calcular el punto simétrico de P con respecto a r.

$c)$ Hallar dos puntos A y B de r tales que el triángulo ABP sea rectángulo, tenga área $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y el ángulo recto en A.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be//tfld94oli44

a) Como contiene a $\boldsymbol{r}$, contiene al punto de $\boldsymbol{r}$: $Q=(2,\ 0,\ -1)$ (lo que acompaña a $x,\ y,\ z$) y a su vector director: $\overline{v}_1=(-1,\ 1,\ 0)$, siendo su otro vector director

$\overline{v}_2 = PQ = (2,\ 0,\ -1)-(3,\ 3,\ 0)=(-1,\ -3,\ -1)$ Por tanto, la ecuación del plano es:

$$(x,\ y,\ z) = P+\lambda\ \overline{v}_1+\mu\ \overline{v}_2 = (3,\ 3,\ 0)+\lambda\ (-1,\ 1,\ 0)+\mu\ (-1,\ -3,\ -1) = (3-\lambda-\mu,\ 3+\lambda-3\ \mu,\ \mu)$$

$$\boldsymbol{(x,y,z) = (3,3,0) + \lambda\,(-1,1,0) + \mu\,(-1,-3,-1)}$$

b) Un plano perpendicular a *r* que pasa por $\boldsymbol{P}$ tendrá como vector característico $\overline{v}_1=(-1,\ 1,\ 0)$ (vector director de *r*), luego será $-x+y=C$ y para que pase por P ha de ser $-x+y=0 \Rightarrow y=x$, luego su intersección con *r* cumplirá que $y=x=2-x \Rightarrow x=y=1,\ z+1=0 \Rightarrow z=-1$, por lo que será $(1,\ 1,\ -1)$

Entonces el simétrico $(x,\ y,\ z)$ de $\boldsymbol{P}$ con respecto a $\boldsymbol{r}$ ha de cumplir que:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\left((x,y,z)+(3,3,0)\right) = \left(\frac{x+3}{2},\frac{y+3}{2},\frac{z}{2}\right) = (1,1,-1) \Rightarrow \frac{x+3}{2} = 1, \frac{y+3}{2} = 1, \frac{z}{2} = -1 \Rightarrow x = y = -1, z = -2}$$

Por tanto, el punto simétrico es: $\boldsymbol{(-1,-1,-2)}$

c) Si tomamos como *A* la proyección ortogonal de *P* sobre r hallada en el apartado anterior, sabemos que *AP* es perpendicular a *r*, por lo que el triángulo *ABP* será rectángulo y con ángulo recto en *A* para cualquier punto *B* de *r*.

Elegimos entonces un punto genérico de *r*: $B=(2,\ 0,\ -1)+\lambda(-1,\ 1,\ 0)=(2-\lambda,\ \lambda,\ -1)$, por lo que:

$AP=(3,\ 3,\ 0)-(1,\ 1,\ -1)=(2,\ 2,\ 1)$, $AB=(2-\lambda,\ \lambda,\ -1)-(1,\ 1,\ -1)=(1-\lambda,\ \lambda-1,\ 0)$ y:

$$\acute{a}rea = \frac{1}{2}\,\|AB\|\,\|AP\| = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+1}\sqrt{(1-\lambda)^2+(\lambda-1)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,|\lambda-1| = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |\lambda-1| = 1$$
$$\Leftrightarrow \lambda - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow \lambda = 2, o\ \lambda = 0$$

$A = \boldsymbol{(1,1,-1)}$. Esto proporciona dos valores para B:

$$B = (2-2,2,-1) = \boldsymbol{(0,2,-1)},\ B = (2-0,0,-1) = \boldsymbol{(2,0,-1)}.$$

Problema A.4:

Se tienen tres urnas A, B y C. La urna A contiene 4 bolas blancas y 2 negras, la urna B contiene 3 bolas blancas y 3 negras y la urna C contiene 6 bolas negras. Se elige una urna al azar y se extraen de ellas dos bolas de manera consecutiva y sin reemplazamiento. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja

b) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra

c) Sabiendo que la primera bola es roja, calcular la probabilidad de que la segunda sea negra

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://www.youtube.com/watch?v=UNaAmHB5BJc

a) $P(\{\text{extraer roja en la primera}\}) = P(\{\text{elegir urna A}\} \cap \{\text{extraer roja}\}) + P(\{\text{elegir urna B}\} \cap \{\text{extraer roja}\}) =$

$= P(\{\text{elegir urna A}\})P(\{\text{extraer roja}\}/\{\text{elegir urna A}\}) + P(\{\text{elegir urna B}\})P(\{\text{extraer roja}\}/\{\text{elegir urna B}\})$

$$= \frac{1}{3}\frac{4}{6} + \frac{1}{3}\frac{3}{6} = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

La probabilidad de que la primera bola extraída sea roja es $\mathbf{\frac{7}{18}}$

b) $P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\}) =$
$= P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\} \cap \{\text{elegir urna A}\}) +$
$P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\} \cap \{\text{elegir urna B}\}) =$
$= P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\}/\{\text{elegir urna A}\})P(\{\text{elegir urna A}\}) +$
$P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\}/\{\text{elegir urna B}\})P(\{\text{elegir urna B}\}) =$
$= \frac{4}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{3} + \frac{3}{6}\frac{3}{5}\frac{1}{3} = \frac{4}{45} + \frac{1}{10} = \frac{17}{90}$

(ya que en la urna A quedarían 5 bolas de las que 2 son negras y en la urna B quedarían 5 bolas de las que 3 son negras)

La probabilidad de que la primera bola extraída sea roja y la segunda sea negra es $\mathbf{\frac{17}{90}}$

c) Utilizando la información de los apartados anteriores, tenemos que:

$P(\{\text{extraer negra en la segunda}\}/\{\text{extraer roja en la primera}\}) =$

$$= \frac{P(\{\text{extraer roja en la primera}\} \cap \{\text{extraer negra en la segunda}\})}{P(\{\text{extraer roja en la primera}\})} = \frac{\frac{17}{90}}{\frac{7}{18}} = \frac{17}{35}$$

Sabiendo que la primera bola es roja, la probabilidad de que la segunda sea negra es $\mathbf{\frac{17}{35}}$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular, si es posible, la inversa de la matriz A.
$b)$ Calcular la matriz $C = A^2 - 2I$.
$c)$ Calcular el determinante de la matriz $D = ABB^t$ (donde B^t denota la matriz traspuesta de B).

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo: https://youtu.be/uByp3Ut7b0s

a) Ya que $|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 2 = 1 \neq 0$, entonces *A* tiene inversa. Tenemos que:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\ \boldsymbol{A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1},\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$, por lo que:

$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj(A)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b) Se cumple que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, por lo que:

$C = A^2 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Se cumple que $|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{B^t}| = |\boldsymbol{A}|\ |\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{B^t}| = |\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{B^t}|$, ya que $|A| = 1$ (apartado a). Tenemos que:

$\boldsymbol{B\ B^t} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$, por lo que $|B\ B^t| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 - 4 = 0$

$$\boldsymbol{|D| = 0}$$

Problema B.2:

La potencia generada por una pila viene dada por la expresión $P(t) = 25te^{-\frac{t^2}{4}}$, donde $t > 0$ es el tiempo de funcionamiento.

$a)$ Calcular hacia qué valor tiende la potencia generada por la pila si se deja en funcionamiento indefinidamente.

$b)$ Determinar la potencia máxima que genera la pila y el instante en el que se alcanza.

$c)$ La energía total generada por la pila hasta el instante t, $E(t)$ se relaciona con la potencia mediante $E'(t) = P(t)$, con $E(0) = 0$. Calcular la energía producida por la pila entre el instante $t = 0$ y el instante $t = 2$.

Solución: Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo https://youtu.be/Pb2F9NAuVKI

a) Hay que hallar $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} 25\,t\,e^{-\frac{t^2}{4}} = 25 \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\frac{t^2}{4}}} = 25 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{2\,t}{4} e^{\frac{t^2}{4}}} = 25\,\frac{1}{\infty} = 0$, luego la potencia tiende a 0 (en la tercera igualdad hemos aplicado *L'Hôpital* puesto que es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$)

La potencia generada tiende a cero

b) Se cumple que:

$$P'(t) = 25\,e^{-\frac{t^2}{4}} + 25\,t\,e^{-\frac{t^2}{4}}\left(-\frac{2\,t}{4}\right) = 25\,e^{-\frac{t^2}{4}}\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = \frac{25}{2}\,e^{-\frac{t^2}{4}}\left(2 - t^2\right) = 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$$

(Ya que $t > 0$), con $P'(t) = \frac{25}{2}\,e^{-\frac{t^2}{4}}\left(2 - t^2\right) > 0 \Leftrightarrow 2 - t^2 > 0 \Leftrightarrow t^2 < 2 \Leftrightarrow 0 < t < \sqrt{2}$, por lo que $P(t)$ es estrictamente creciente si $0 < t < \sqrt{2}$, $P(t)$ es estrictamente decreciente si $t > \sqrt{2}$ y $P(t)$ tiene el máximo absoluto en $t = \sqrt{2}$, siendo dicha potencia máxima:

$$P\left(\sqrt{2}\right) = 25\,\sqrt{2}\,e^{-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}} = 25\,\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{2}} = 25\sqrt{\frac{2}{e}}$$

Para $t = \sqrt{2}$ se alcanza la potencia máxima, que es de $P\left(\sqrt{2}\right) = 25\sqrt{\frac{2}{e}}$ = 21.444

c) Como $\boldsymbol{E'(t) = P(t)}$, con $\boldsymbol{E(0) = 0}$, se cumple que $E(t) = \int_0^t P(t)\,dt$, por lo que hay que hallar:

$$\boldsymbol{E(2) = \int_0^2 P(t)\,dt = \int_0^2 25\,t\,e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt = 25\int_0^2 t\,e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt = -50\int_0^2 -\frac{t}{2}\,e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt = -50\left[e^{-\frac{t^2}{4}}\right]_0^2}$$

$$\boldsymbol{= -50\left[e^{-\frac{2^2}{4}} - e^{-\frac{0^2}{4}}\right] = 50\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 50\,\frac{e-1}{e} = 31.606}$$

La energía producida por la pila es $50\,\frac{e-1}{e} = 31.606$

Problema B.3:

Del paralelogramo $ABCD$, se conocen los vértices $A(1,0,-1)$, $B(2,1,0)$ y $C(4,3,-2)$, se pide:

$a)$ Calcular una ecuación de la recta r que pasa por el punto medio del segmento AC y es perpendicular a los segmentos AC y BC

$b)$ Hallar las coordenadas del vértice D y el área del paralelogramo resultante.

$c)$ Calcular el coseno del ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución: Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo https://youtu.be/ahwHNlcQUBw

a) El punto medio del segmento AC es:

$$\frac{1}{2}\,(A+C)=\frac{1}{2}\,\big((1,\ 0,\ -1)+(4,\ 3,\ -2)\big)=\frac{1}{2}\,(5,\ 3,\ -3)=\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right).$$

Como es perpendicular al vector $AC=C-A=(4,\ 3,\ -2)-(1,\ 0,\ -1)=(3,\ 3,\ -1)$ y a:

$BC=C-B=(4,\ 3,\ -2)-(2,\ 1,\ 0)=(2,\ 2,\ -2)$, su vector director $(a,\ b,\ c)$ cumple:

$$\left.\begin{array}{l}(a,\ b,\ c)\circ(3,\ 3,\ -1)=3\,a+3\,b-c=0\\(a,\ b,\ c)\circ(2,\ 2,\ -2)=2\,a+2\,b-2\,c=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}(a,\ b,\ c)\circ(3,\ 3,\ -1)=3\,a+3\,b-c=0\\(a,\ b,\ c)\circ(2,\ 2,\ -2)=a+b-c=0\end{array}\right\}.$$

Dando el valor $a=1$, tenemos $\left.\begin{array}{l}3+3\,b-c=0\\1+b-c=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\,b-c=-3\\b-c=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 2\,b=-2\Rightarrow b=-1$, por lo que:

$c=b+1=-1+1=0$ y un vector director es $(1,\ -1,\ 0)$, siendo la recta pedida:

$$\textbf{Recta } \boldsymbol{r}:\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)+\boldsymbol{\lambda}\,(\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathbf{0})$$

b) El vector que une *B*, *C* es $C-B=(4,\ 3,\ -2)-(2,\ 1,\ 0)=(2,\ 2,\ -2)$.

Al ser paralelogramo, es el mismo que une *A* y *D*, luego:

$D=A+(C-B)=(1,\ 0,\ -1)+(2,\ 2,\ -2)=(3,\ 2,\ -3)$

El vector que une *B*, *A* es $A-B=(1,\ 0,\ -1)-(2,\ 1,\ 0)=(-1,\ -1,\ -1)$, por lo que:

$$\boldsymbol{Área}=\|(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})\times(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\|=\|(\mathbf{2},\mathbf{2},-\mathbf{2})\times(-\mathbf{1},-\mathbf{1},-\mathbf{1})\|=\left\|\begin{vmatrix}\bar{\imath}&\bar{\jmath}&\bar{k}\\ \mathbf{2}&\mathbf{2}&-\mathbf{2}\\-\mathbf{1}&-\mathbf{1}&-\mathbf{1}\end{vmatrix}\right\|=\|-\mathbf{4}\,\boldsymbol{i}+\mathbf{4}\,\boldsymbol{j}\|$$

$$=\sqrt{\mathbf{16}+\mathbf{16}}=\mathbf{4}\,\sqrt{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{D}=(\mathbf{3},\mathbf{2},-\mathbf{3});\ \boldsymbol{Área}=\mathbf{4}\,\sqrt{\mathbf{2}}$$

c) Se cumple que $\cos\alpha=\dfrac{AB\circ AC}{\|AB\|\ \|AC\|}=\dfrac{(1,\ 1,\ 1)\circ(3,\ 3,\ -1)}{\|(1,\ 1,\ 1)\|\ \|(3,\ 3,\ 1)\|}=\dfrac{3+3-1}{\sqrt{3}\ \sqrt{3^2+3^2+1^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}\ \sqrt{19}}$

$$\boldsymbol{\cos\alpha}=\frac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{3}}\,\sqrt{\mathbf{19}}}$$

Problema B.4:

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0{,}4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0{,}08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

$a)$ Calcular $P(Y)$.

$b)$ Calcular $P(X \cup Y)$.

$c)$ Si *X* es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede *X*, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Solución:

Para ver el vídeo, haga clic en el vínculo https://youtu.be/KY16wgel438

a) B(n, p) = B(8, 0.6)

Se cumple que:

$$0.4 = P(X) = P(X \cap Y) + P(X \cap \overline{Y}) = P(X \cap Y) + 0.08 \Rightarrow P(X \cap Y) = 0.4 - 0.08 = 0.32\,.$$

Como *X*, *Y* son independientes, $0.32 = P(X \cap Y) = P(X)\;P(Y) = 0.4\;P(Y) \Rightarrow P(Y) = \dfrac{0.32}{0.4} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

$$\boldsymbol{P(Y) = \frac{4}{5} = 0.8}$$

b) Se cumple que:

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = 0.4 + 0.8 - 0.32 = 0.88\,.$$

$$\boldsymbol{P(X \cup Y) = 0.88}$$

c) Como $P(\{\text{éxito}\}) = P(\overline{X}) = 0.6$, $P(\{\text{fracaso}\}) = P(X) = 0.4$, será:

$$1 - P(\{\text{tener éxito 0 veces ó 1 vez}\}) = 1 - \left(P(\{\text{tener éxito 0 veces}\}) + P(\{\text{tener éxito 1 vez}\})\right) =$$

$$= 1 - \left(P(\{\text{tener éxito 0 veces}\}) + P(\{\text{tener éxito sólo en la repetición 1}\}) + \ldots + P(\{\text{tener éxito sólo en la 8}\})\right) =$$

$$= 1 - (0.4)^8 - 8\;(0.4)^7\;\;0.6$$

La probabilidad de haber obtenido éxito dos veces es: **0.9915**