MATEMÁTICAS II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma del

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Álvaro Garmendia Antolín

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde guztietan kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una IJnica pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

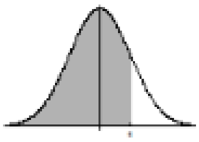
1

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko OHIKOA — *ORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II — ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

2

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2020ko OHIKOA	*ORDINARIA 2020*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el sistema $S(a)$ en función de a, siendo

$$S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = & 2 \\ x - 2y - z = & 1 \\ x + 2y + az = & 3. \end{cases}$$

Resolver en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.

Ejercicio B1

Sea $M(\alpha)$ la matriz dada por $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinar para qué valores de α la matriz no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $\alpha = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 2, 3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{v} = (-1, -2, -3)$ y $\vec{w} = (1, 3, 5)$.

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y $Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Ejercicio B2

Sea π el plano $2x - y + Az = 0$. Sea r la recta dada por $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = & -1 \\ 3x - 2y + z = & -3. \end{cases}$

Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

3

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2020ko OHIKOA	ORDINARIA 2020
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por $(0, 2)$ y tenga un extremo en $(1, -1)$. ¿Tiene f más extremos ?

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P = (0, 0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto P.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Ejercicio B4

Calcular las integrales indefinidas I y J explicando los métodos usados para su resolución.

$$I = \int x\cos(2x)dx\,, \quad J = \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una empresa el 70 por ciento de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 por ciento gana más de 1000 euros. Entre las no satisfechas solo el 20 por ciento gana más de 1000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a)¿ Cuál es la probabilidad de que gane más de 1000 euros?

b) Si gana más de 1000 euros, ¿ cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

c) ¿ Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1000 euros y esté satisfecha con su contrato?

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2020ko OHIKOA

MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS II

Ejercicio B5

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de $0,4$, se pide:

a) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

b) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

c) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2020

PRIMERA PARTE

Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$ *en función del parámetro a. Resolver, en función de a, mediante el método de Cramer, en los casos en que sea posible.*

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada, y determinamos sus rangos. La matriz de los coeficientes es cuadrada, por lo que calculamos su determinante, y es: $-2a^2 + 3a + 9$, que se anula para $a = 3$, y para $a = -3/2$. Por tanto el rango de la matriz de los coeficientes es 3 siempre que a sea distinto de 3 y de –3/2. Y el rango de matriz ampliada no puede ser mayor que 3.

Resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{-2a + 22}{-2a^2 + 3a + 9}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{a^2 + a + 2}{-2a^2 + 3a + 9}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2a^2 + 3a + 9} = \frac{-2a + 10}{-2a^2 + 3a + 9}$$

El sistema es compatible determinado si $a \neq 3$ o $a \neq -3/2$.

Las soluciones son: $x = \frac{-2a+22}{-2a^2+3a+9}$; $y = \frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}$; $z = \frac{-2a+10}{-2a^2+3a+9}$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada para esos dos valores.

Para $a = -3/2$ el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero, vale 22, luego su rango es 3. El sistema es incompatible.

Para $a = 3$ el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero, vale –14, luego su rango es 3. El sistema es incompatible.

Por tanto:

El sistema es incompatible si $a = 3$ o $a = -3/2$.

Observamos que si $a = 3$ o $a = -3/2$, se anulan los denominadores, luego NO hay solución.

Para todo a distinto de 3 o de –3/2, $x = \frac{-2a+22}{-2a^2+3a+9}$; $y = \frac{a^2+a+2}{-2a^2+3a+9}$; $z = \frac{-2a+10}{-2a^2+3a+9}$

Ejercicio B1:

Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de a la matriz tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa para a = 0, y en caso de que no sea posible razonar por qué no lo es.

Solución:

a) Para que una matriz tenga inversa sabemos que su determinante debe ser distinto de cero. Calculamos el determinante de la matriz y se obtiene que vale $1 - a^2$, que vale cero si a vale 1 o vale –1.

Por tanto, la matriz M es invertible si a es distinto de 1 y de –1.

M es invertible $\forall a \in$ R – {1, –1}

b) Cuando a = 0, entonces $M(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de determinante 1. Calculamos su inversa:

$$M^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos multiplicando ambas matrices que no nos hemos equivocado:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es la matriz identidad

SEGUNDA PARTE

Ejercicio A2:

*a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (–1, 2, 3) y es paralelo a los vectores **v** = (–1, –2, –3) y **w** = (1, 3, 5).*

b) Hallar el valor de A para que el plano calculado en el apartado anterior y el plano $Ax - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Solución:

a) Calculamos el vector normal al plano pedido calculando el producto vectorial de los vectores dados:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -i + 2j - k$$

El vector normal es, por tanto, (–1, 2, –1) luego el plano pedido en paralelo a: $-x + 2y - z = d$.

Imponemos ahora que pase por el punto *(–1, 2, 3):*

$-(-1) + 2(2) - 3 = 2 = d$.

Por tanto, el plano es:

$$\boldsymbol{-x + 2y - z = 2.}$$

b) Para que dos planos sean perpendiculares sus vectores ortogonales deben ser también perpendiculares. El vector ortogonal al primer plano ya hemos visto que es (–1, 2, –1), y el vector ortogonal al segundo plano es (A, –1, 5). Para que sean perpendiculares imponemos que su producto escalar sea cero.

$$(-1, 2, -1) \cdot (A, -1, 5) = -A - 2 - 5 = -A - 7 = 0, \text{ luego } A = -7.$$

$$\mathbf{A = -7}$$

Ejercicio B2:

Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$. Sea r la recta dada por $\begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Hallar A para que r y π sean paralelos. Además, obtener el plano perpendicular a r y que pase por el origen.

Solución:

Para que la recta y el plano sean paralelos, no deben tener ningún punto en común, y por tanto el sistema formado por sus ecuaciones debe ser incompatible: $\begin{cases} 2x - y + Az = 0 \\ 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$, por lo que el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe ser distinto.

El determinante de la matriz de los coeficientes vale: –6 –8A –12 + 9A + 16 + 4 = A + 2, que vale cero para A = –2. En la matriz ampliada el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero. Luego el rango de la matriz de los coeficientes vale 2 para A = –2, y el rango de la matriz ampliada vale 3, por lo que el sistema es incompatible y la recta es paralela al plano.

Para A = –2 la recta y el plano son paralelos.

Buscamos ahora un plano perpendicular a la recta que pase por el origen. Podemos hacerlo de varias formas, por ejemplo, buscando la ecuación paramétrica de la recta y con ello, su vector director. O buscando un vector que sea ortogonal a los dos vectores perpendiculares a los planos que forman la recta. Para ello calculamos el producto vectorial de los vectores (4, –3, 4) y (3, –2, 1):

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5i + 8j + k$$

Obtenemos que el vector director de la recta es (5, 8, 1), que tomamos como vector ortogonal al plano pedido: *5z + 8y + z = d*. Imponemos ahora que pase por el origen, por lo que d = 0. El plano es:

5z + 8y + z = 0

TERCERA PARTE

Ejercicio A3:

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de a, b y c para que su gráfica pase por el punto $P(0, 2)$ y tenga un extremo relativo en $Q(1, -1)$. ¿Tiene más extremos?

Solución:

Imponemos en primer lugar que pase por el punto $P(0, 2)$, con lo que $f(0) = c = 2$

Imponemos también que pase por Q (1, –1): $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c = a + b + 2 = -1$, luego $a + b = -3$.

Para que haya un extremo relativo en Q (1, –1) se debe anular la derivada en ese punto:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) = 3a + 2b = 0$, por lo que $b = -3a/2$, y $a + b = a - 3a/2 = -a/2 = -3$.

Luego $a = 6$ y $b = -9$.

La función pedida es:

$$f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$$

Para determinar si tiene más extremos, como es una función polinómica definida en toda la recta real, es derivable en toda la recta real, luego los extremos deben estar en punto dónde se anule la derivada.

Derivamos e igualamos a cero:

$f'(x) = 18x^2 - 18x = 18x(x - 1) = 0$, si $x = 0$ y si $x = 1$.

Hay otro extremo para $x = 0$, $y = 2$. En **(0, 2).**

No lo piden, pero vamos a determinar si son máximos o mínimos. Calculamos la derivada segunda:

$f''(x) = 36x - 18$; $f''(1) = 36(1) - 18 = 18 > 0$, que es un mínimo. $f''(0) = 36(0) - 18 = -18 < 0$, que es un máximo.

El punto $Q(1, -1)$ es un mínimo y el punto (0, 2) es un máximo.

Ejercicio B3:

Sea $f(x) = x^2 + 9$ y $O(0, 0)$ un punto exterior a la gráfica. Calcula razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica que pasen por O

Solución:

Las rectas que pasan por el origen tienen de ecuación $y = mx$.

Para que sean tangentes a la función debe ser su pendiente en el punto de tangencia igual a la derivada: $f'(x) = 2x$.

Buscamos los puntos de intersección entre la función y las rectas $y = mx$, imponiendo que sean puntos de corte dobles: $x^2 + 9 = mx$. $x^2 - mx + 9 = 0$. Imponemos que se anule el discriminante:

$$b^2 - 4ac = m^2 - 4 \cdot 9 = m^2 - 36, \text{ luego } m = \pm 6.$$

Las rectas tangentes buscadas son $y = \pm 6x$.

Las rectas tangentes son $y = 6x$ o $y = -6x$.

Observamos que la función es una parábola de eje de simetría el eje de ordenadas, luego tiene sentido esas rectas tangentes.

El problema no lo pide, pero vamos a calcular los puntos de tangencia:

$$\pm 6x = x^2 + 9,\ x = \pm 6/2 = \pm 3;\ y = \pm 18.$$

Los puntos de tangencia son: (3, 18) y (–3, –18).

CUARTA PARTE

Ejercicio A4:

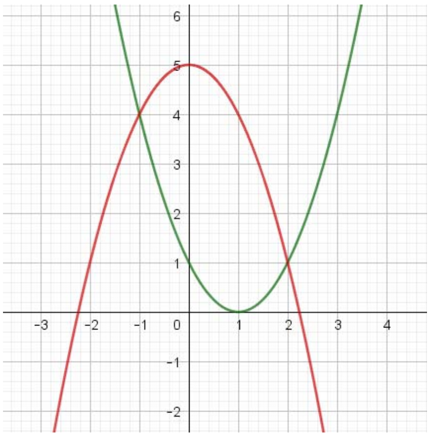
Dibujar la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

Solución:

Las funciones dadas son dos parábolas, una con las ramas hacia arriba (convexa) y la otra con las ramas hacia abajo (cóncava). La primera corta al eje de abscisas en el vértice (1, 0) y al eje de ordenadas en (0, 1). La segunda corta al eje de ordenadas en (0, 5), es simétrica respecto a ese eje, y corta al eje de abscisas en $(\pm\sqrt{5}, 0)$

Buscamos los puntos de intersección de ambas gráficas: $f(x) = g(x)$, $x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5$, $2x^2 - 2x - 4 = 0$, $x^2 - x - 2 = 0$, resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos –1 y 2, luego los puntos de intersección son (–1, 4) y (2, 1).

Dibujamos la gráfica:



El área de la región viene dada por la integral:

$$\int_{-1}^{2} (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 5 - (x^2 - 2x + 1))dx$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{-2\cdot 8}{3} + 4 + 8\right) - \left(\frac{-2\cdot(-1)}{3} + 1 - 4\right) = \frac{-18}{3} + 15 = 9$$

El área de la región encerrada es de **9 u²**.

CUARTA PARTE

Ejercicio B4:

Calcular las integrales indefinidas $I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx$ *y* $J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3}$ *, explicando los métodos usados para su resolución.*

Solución:

La primera integral se resuelve por partes.

El método de integración por partes se basa en la derivada del producto de dos funciones:

$(uv)' = v \cdot u' + u \cdot v' = u \cdot v' + v \cdot u'$, luego integrando término a término:

$\int (uv)'dx = uv = \int ((u \cdot v')dx + (v \cdot u')dx) = \int (u \cdot dv + v \cdot du)$.

La fórmula de la integración por partes queda, por tanto:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Buscamos las funciones u y v teniendo en cuenta que u lo debemos derivar y v, integral.

Llamamos $u = x$, luego $du = dx$; $dv = cos(2x)dx$, luego v = (1/2) $sen(2x)$

$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = x \cdot \frac{1}{2} \cdot sen(2x) - \int \frac{sen(2x)}{2} dx = \frac{x \cdot sen(2x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{4} + C$

$$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = \frac{x \cdot sen(2x)}{2} - \frac{\cos(2x)}{4} + C$$

La segunda integral es una integral racional. Para calcularla hallamos las raíces del denominador resolviendo la ecuación de segundo grado, que son: 1 y -3. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+3)}{(x+3)(x-1)}$$

Igualamos los numeradores:

1 = $A(x-1) + B(x+3)$

De donde

$A + B = 0$, luego $A = -B$

1 = $-A + 3B = B + 3B$ por lo que $B = 1/4$, y $A = -1/4$

$$J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int \left(\frac{-1/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1}\right) dx = \frac{1}{4}(L|x-1| - L|x+3|) + C = \frac{L|x-1|}{4L|x+3|} + C$$

$$J = \int \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{L|x-1|}{4L|x+3|} + C = \frac{L|x-1|}{L|x+3|^4} + C$$

QUINTA PARTE

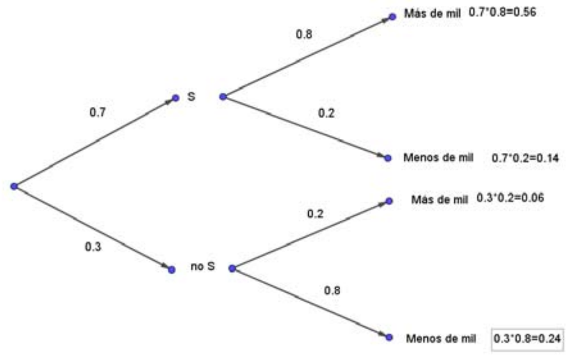
Ejercicio A5:

En una empresa en 70 % de sus trabajadores están satisfechos con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 % gana más de mil euros. Entre las no satisfechas sólo el 20 % gana más de mil euros. Si se elige una trabajadora al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de mil euros?
b. Si gana más de mil euros, ¿cuál es la probabilidad de que esté satisfecha con su contrato?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de mil euros y esté satisfecha con su contrato?

Solución:

Representamos la situación en un diagrama en árbol y en una tabla de contingencia:



	Satisfecha	No satisfecha	
Más de mil	0.56	0.06	**0.62**
Menos de mil	**0.14**	0.24	0.38
	0.7	0.3	1

a) La probabilidad de que gane más de mil euros es **0.62**.

b) Nos piden P(satisfecha/ganar más de mil euros) = P(de la intersección)/P(más de mil) = 0.56/0.62 = 0.9032

Si gana más de mil euros la probabilidad de que esté satisfecha con su contrato es de **0.9032**.

c) Ahora nos piden de nuevo una probabilidad de la intersección que ya tenemos calculada en la tabla:

La probabilidad de que gane menos de mil euros y esté satisfecha con su contrato es de **0.14**.

Ejercicio B5:

En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es del 0.4, se pide:

a. Identificar y describir este modelo de probabilidad.
b. Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.
c. Hallar la probabilidad de que cierto día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

Solución:

a) En una plaza puede haber un automóvil aparcado, o no, luego es una distribución de probabilidad binomial, siendo $p = 0.4$, $q = 0.6$, $n = 30$. Por lo que es la distribución $B(30, 0.4)$.

Distribución binomial $\boldsymbol{B}$**(30, 0.4)**

b) La probabilidad de tener x éxitos es:

$$P(x=8)=\binom{n}{x}p^x q^{n-x}=\binom{30}{8}0.4^8\cdot 0.6^{30-8}=\frac{30!}{8!\cdot 22!}0.4^8\cdot 0.6^{22}=5852925\cdot 0.4^8\cdot 0.6^{22}$$
$$=5852925\cdot 0.00065536\cdot 0.6^{22}=0.0505$$

También se puede aproximar pasando de la binomial a la norma con la corrección de Yatres:

$$P=P(B=8)=P(7.5\le X\le 8.5)=\ P\left(\frac{7.5-12}{2.68}\le Z\le\frac{8.5-12}{2.68}\right)$$

La probabilidad de que haya 8 automóviles aparcados es de **0.0505**.

c) Se observa que los números se complican, así que es preferible transformar la binomial en una normal, de media $np = 30 \cdot 0.4 = 12$, y varianza $npq = 30 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 7.2$, con desviación típica la raíz, 2.68.

$B(30, 0.4) \cong N(12, 2.68)$

$$P=P(10\le B\le 20)$$

Consideramos la corrección de Yates:

$$P=P(10\le B\le 20)=P(9.5\le X\le 20.5)$$

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-12}{2.68}$

$$P=P\left(\frac{9.5-12}{2.68}\le Z\le\frac{20.5-12}{2.68}\right)=P(-0.93\le Z\le 3.17)=P(Z<3.17)-\big(1-P(Z<0.93)\big)$$
$$=0.9992-1+0.8238=0.8230$$

La probabilidad de que haya entre 10 y 20 automóviles es de **0.8230**

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2020ko EZOHIKOA	*EXTRAORDINARIA 2020*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responde a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una IJnica pregunta.

En caso de responder a mĜs preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirĜn en orden hasta llegar al nIJmero necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

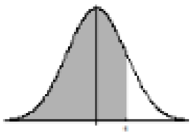
- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko EZOHIKOA | *EXTRAORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko EZOHIKOA | *EXTRAORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir, en función de A, el sistema que sigue y resolver cuando sea posible:

$$S = \begin{cases} x+y+z = & 2A, \\ 2x+3y+4z = & 2, \\ 4x+4y+Az = & 4A. \end{cases}$$

Ejercicio B1

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, cacular razonadamente M^{2020}.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Dada la recta

$$r = \begin{cases} 3x+y-z = & 2 \\ 2x+y+4z = & 1, \end{cases} \quad \text{y el plano} \quad \pi = 3x+(\alpha+1)(y+1)+\alpha z = 1,$$

a) hallar α para que la recta y el plano sean paralelos,

b) determinar si el punto $P = (1,1,2)$ pertenece al plano hallado en a).

Ejercicio B2

Hallar el punto Q, simétrico de $P = (1,2,3)$ respecto al plano de ecuación: $x + y + z = 0$, explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2020ko EZOHIKOA	*EXTRAORDINARIA 2020*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f la función definida como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3x, & x\le 2,\\ x^2-bx-4, & x>2.\end{cases}$$

Calcular a y b razonadamente, sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=x^2e^{2x}$. Encontrar sus extremos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $y=3-x^2$ y por la recta $y=2x$. Calcular su área.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo para calcular la integral

$$\int x\cos(3x)dx.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal $N(10;0,1)$. Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre $9,8$ y $10,1$. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.

b) Si se han fabricado 1500 recipientes, ¿cuántos se esperan defectuosos?

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko EZOHIKOA | *EXTRAORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

Ejercicio B5

En un instituto el 40 por ciento de sus alumnos tiene el cabello castaño, el 35 por ciento tiene los ojos azules y el 15 por ciento tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cúal es la probabilidad de que tenga los ojos azules?

b) Si tiene los ojos azules, ¿cúal es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?

c) ¿Cúal es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño ni los ojos azules?

d) ¿Cúal es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

SOLUCIONES OPCIÓN A CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2020

PRIMERA PARTE

Ejercicio A1

Discutir en función de A el sistema que sigue y resolver cuando sea posible $\begin{cases} x+y+z=2A \\ 2x+3y+4z=2 \\ 4x+4y+Az=4A \end{cases}$.

Solución:

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada. El determinante de la matriz de los coeficientes, que es cuadrada, vale: A – 4, luego si A es distinto de 4, el rango vale 3, así como el rango de la matriz ampliada, luego en ese caso el sistema es compatible y determinado.

Para A = 4 estudiamos el rango de la matriz ampliada y encontramos que el determinante formado por las columnas primera, segunda y cuarta es distinto de cero, por lo que su rango vale 3, y el sistema es incompatible.

Si $A \neq 4$ el sistema es compatible y determinado. Si A = 4, el sistema es incompatible.

Podemos resolver el sistema por Gauss o por Cramer. Po el método de Gauss llegamos al sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2A \\ 0x+\ y+2z=2-4A \\ 0x+0y+(A-4)z=-4A \end{cases}$$

En ambos casos se obtiene que:

Si $A \neq 4$, $x=\frac{6A^2-38A+4A}{A-4}; y=\frac{-4A^2+30A-8}{A-4}; z=\frac{-4A}{A-4}$.

Ejercicio B1

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*, calcular razonadamente* M^{2020}.

Solución:

Calculamos M^2 y las potencias sucesivas:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M \cdot M \cdot M = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Se observa que todos los términos permanecen invariantes: 1, 0, 1, salvo el que se obtiene de sumar la primera fila, por lo que podemos afirmar que:

$$M^{2020} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2020 & 1 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE

Ejercicio A2

Sea la recta $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$ *y el plano* $\pi: 3x + (a+1)(y+1) + az = 1$

a) Hallar a para que la recta y el plano sean paralelos
b) Determinar si el punto P (1, 1, 2) pertenece al plano del apartado anterior

Solución:

a) Para que la recta y el plano sean paralelos debe verificarse que el vector de dirección de la recta y el vector ortogonal al plano sean perpendiculares.

El vector normal al plano es: (3, a + 1, a).

Para determinar el vector director de la recta podemos escribir la ecuación paramétrica de la misma resolviendo el sistema y dejando la solución en función de un parámetro, u obtenerlo directamente calculando el producto vectorial de los dos vectores ortogonales a los planos que la forman:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 5i - 14j + k$$

El vector director de la recta es: (5, –14, 1).

Imponemos que ambos vectores sean perpendiculares anulando su producto escalar:

(3, a + 1, a) · (5, –14, 1) = 15 –14(a + 1) + a = –13a + 1 = 0, luego a = 1/13.

Si a = 1/13, la recta y el plano son paralelos.

b) Para ese valor del parámetro el plano resulta:

$$\pi: 3x + \left(\frac{1}{13} + 1\right)(y+1) + \frac{1}{13}z = 1 \;\rightarrow 3x + \frac{14}{13}y + \frac{1}{13}z + \frac{1}{13} = 0 \rightarrow 39x + 14y + z + 1 = 0$$

Para que el punto pertenezca al plano, debe verificar su ecuación:

P (1, 1, 2); 39(1) + 14(1) + 1(2) + 1 = 39 + 14 + 2 + 1 ≠ 0.

El punto P **no** pertenece al plano.

Ejercicio B2

Hallar el punto Q simétrico de P(1, 2, 3) respecto del plano $\pi: x + y + z = 0$ explicando los pasos seguidos para su cálculo.

Solución:

En primer lugar, buscamos la recta que pase por Q y sea perpendicular al plano. Su vector director es el vector normal del plano (1, 1, 1):

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Buscamos el punto de intersección de la recta r con el plano:

$$x + y + z = 1 + t + 2 + t + 3 + t = 0 = 6 + 3t \to t = -2 \to M(-1, 0, 1).$$

El punto Q simétrico de P verifica que los vectores $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}$, luego

$$\overrightarrow{PM} = (M - P) = (-1, 0, 1) - (1, 2,3) = (-2, -2, -2),$$

$$\overrightarrow{MQ} = (x, y, z) - (-1, 0, 1) = (x + 1, y, z - 1)$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} \to (-2, -2, -2) = (x + 1, y, z - 1) \to \begin{cases} x + 1 = -2 \to x = -3 \\ y = -2 \\ z - 1 = -2 \to z = -1 \end{cases}$$

El punto simétrico pedido Q es igual a **(–3, –2, –1)**

TERCERA PARTE

Ejercicio A3

Sea f la función definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si\ x \leq 2 \\ x^2 - bx - 4 & si\ x > 2 \end{cases}$, calcular a y b razonadamente sabiendo que f es derivable en toda la recta real.

Solución:

Para que una función sea derivable debe ser continua. La función f está definida mediante dos funciones polinómicas luego es continua en toda la recta real, salvo en el punto de unión de las dos ramas. Imponemos que sea continua en el punto de abscisa $x = 2$.

$$ax^2 + 3x = a(2^2) + 3(2) = 4a + 6$$

$$x^2 - bx - 4 = (2^2) - b(2) - 4 = -2b$$

Para que la función sea continua en toda la recta real se debe verificar que $4a + 2b = -6$.

De nuevo, como la función está formada por dos funciones polinómicas es derivable en toda la recta real salvo en el punto de unión de dichas ramas, dónde imponemos que lo sea:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & si\ x < 2 \\ 2x - b & si\ x > 2 \end{cases},$$

$$2ax + 3 = 2a(2) + 3 = 2x - b = 2(2) - b \to 4a + 3 = 4 - b \to 4a + b = 1$$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 4a + 2b = -6 \\ 4a + b = 1 \end{cases}$, restando se obtiene $b = -7$, y sustituyendo $a = 2$.

La función f es derivable en toda la recta real si $a = 2$ y $b = -7$.

Ejercicio B3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^2e^{2x}$. Encontrar esos extremos.

Solución:

La función dada es continua y derivable en toda la recta real por estar formada por el producto de una función polinómica y una función exponencial. Por tanto, los extremos de la función deben estar en los puntos en los que se anule la derivada.

$$f(x) = x^2e^{2x} \to f'(x) = 2xe^{2x} + x^2e^{2x}2 = e^{2x}(2x + 2x^2) = e^{2x}2x(1 + x)$$

La función exponencial no se anula nunca. La primera derivada se anula para $x = 0; x = -1$.

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos: $(-\infty, -1); (-1, 0); (0, +\infty)$. La función exponencial es siempre positiva. $2x < 0 \ \ si\ x < 0; 1 + x < 0 \ \ si\ x < -1$. Por tanto en:

$(-\infty, -1) \to f'(x) > 0$. La función es creciente

$(-1, 0) \to f'(x) < 0$. La función es decreciente.

$(0, +\infty) \to f'(x) > 0$. La función es creciente

En el punto de abscisa $x = -1$ la función pasa de creciente a decreciente, luego es un máximo, que se alcanza en $f(-1) = (-1)^2e^{2(-1)} = e^{-2}$. Tenemos un máximo relativo en $(-1, e^{-2}) = (-1, \frac{1}{e^2})$.

En el punto de abscisa $x = 0$ la función pasa de decreciente a creciente, luego es un mínimo, que se alcanza en $f(0) = (0)^2e^{2(0)} = 0$.Tenemos un mínimo en (0, 0).

La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. La función es decreciente en $(-1, 0)$.

Alcanza un máximo relativo en $(-1, e^{-2}) = \left(-1, \frac{1}{e^2}\right)$ y un mínimo relativo en (0, 0).

Para determinar si son máximos o mínimos relativos también se podría haber utilizado el signo de la deriva segunda:

$$f'(x) = e^{2x}(2x + 2x^2) \to f''(x) = e^{2x}2(2x + 2x^2) + e^{2x}(2 + 4x) = e^{2x}(4x + 4x^2 + 2 + 4x) = e^{2x}(4x^2 + 8x + 2) \to$$

$f''(-1) = e^{2(-1)}(4(-1)^2 + 8(-1) + 2) = e^{2(-1)}(4 - 8 + 2) = e^{-2}(-2) < 0 \to$ Máximo relativo

$f''(0) = e^{2(0)}(4(0)^2 + 8(0) + 2) = e^{2(0)}(2) > 0 \to$ Mínimo relativo

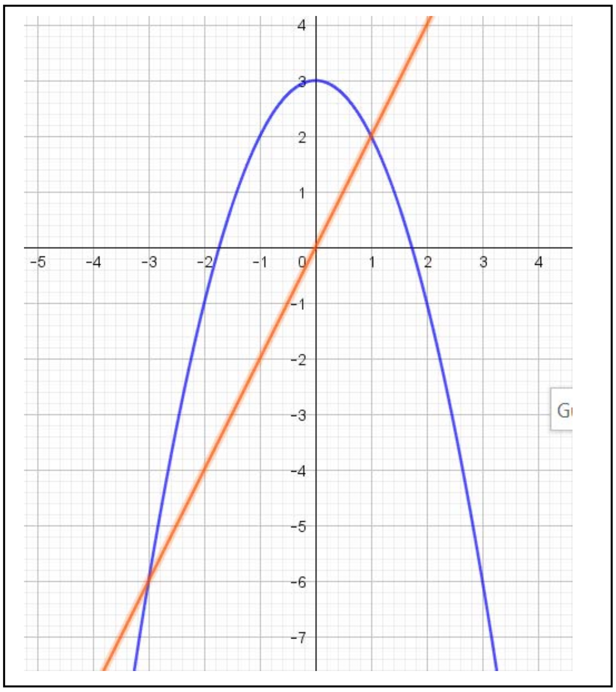
CUARTA PARTE

Ejercicio A4

Representar la región finita del plano limitada por la curva $f(x) = 3 - x^2$, y por la recta $g(x) = 2x$. Calcular su área.

Solución:

La curva $f(x) = 3 - x^2$ es una parábola de vértice (0, 3), con las ramas hacia abajo (cóncava).



La recta y la parábola se cortan en:

$$3 - x^2 = 2x \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \rightarrow x = 1; x = -3 \rightarrow (1,2), (-3,-6)$$

La parábola está siempre por encima de la recta entre -3 < x < 1.

El área pedida es:

$$\text{Área} = \int_{-3}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_{-3}^{1} \left(3 - x^2 - 2x)dx = \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)dx\right) =$$

$$\left[\frac{-x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^{1} = \left(\frac{-1}{3} - 1 + 3\right) - \left(\frac{-(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3)\right) = \frac{-1}{3} + 2 - 9 + 18 = \frac{32}{3}$$

El área vale $\frac{32}{3}\ u^2 \cong 10.67\ u^2$.

Ejercicio B4

Explicar en qué consiste el método de integración por partes y aplicarlo a calcular la integral:

$$I = \int x \cdot \cos(3x)\, dx$$

Solución:

El método de integración por partes se basa en la derivada del producto de dos funciones:

$(uv)' = v \cdot u' + u \cdot v' = u \cdot v' + v \cdot u'$, luego integrando término a término:

$\int (uv)' dx = uv = \int((u \cdot v')dx + (v \cdot u')dx) = \int(u \cdot dv + v \cdot du).$

La fórmula de la integración por partes queda, por tanto:

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

Buscamos las funciones u y v teniendo en cuenta que u lo debemos derivar y v, integral.

Llamamos $u = x$, luego $du = dx$; $dv = cos(3x)dx$, luego v = (1/3) $sen(3x)$

$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = x \cdot \frac{1}{3} \cdot sen(3x) - \int \frac{sen(3x)}{3} dx = \frac{x \cdot sen(3x)}{3} - \frac{\cos(3x)}{3 \cdot 3} + C$

$$I = \int x \cdot \cos(2x)\, dx = \frac{x \cdot sen(3x)}{3} - \frac{\cos(3x)}{9} + C$$

QUINTA PARTE

Ejercicio A5

Una máquina produce recipientes cuyas capacidades se distribuyen según una distribución normal N(10, 0.1). Un fabricante considera que un recipiente es defectuoso si su capacidad no está entre 9.8 y 10.1. Calcular:

a) La probabilidad de que un recipiente sea considerado defectuoso.
b) Si se han fabricado 1 500 recipientes, ¿cuántos de esperan defectuosos?

Solución:

Sabemos que es una distribución normal de media 10, y desviación típica 0.1.

Tipificamos la variable normal: Z: $\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-10}{0.1}$

$$P=P\left(\frac{9.8-10}{0.1}\leq Z\leq\frac{10.1-10}{0.1}\right)=P(-2\leq Z\leq 1)=P(Z<1)-\big(1-P(Z<2)\big)$$
$$=0.8413-1+0.9772=0.8185.$$

La probabilidad de que NO esté entre 9.8 y 10.1 es el suceso contrario:

Probabilidad de defectuoso $=1-0.8185=0.1815$, aproximadamente un 18 %.

La probabilidad de que la capacidad no esté entre 9.8 y 10.1 es de 0.1815

Si se han fabricado 1 500 recipientes se esperan que sean defectuosos:

$$np=1500\cdot 0.1815=272$$

El número esperado de defectuosos es de 272.

Ejercicio B5

En un instituto el 40 % de sus alumnos tienen el cabello castaño, el 35 % tiene ojos azules, y el 15 % tiene el cabello castaño y los ojos azules. Se escoge una persona al azar:

a) Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga los ojos azules?
b) Si tiene los ojos azules, ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga el cabello castaño?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga ni el cabello castaño ni los ojos azules?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules?

Solución:

Llamamos C a tener el cabello castaño, y A a tener los ojos azules. Los datos que tenemos son:

$P(C) = 0.4$; $P(A) = 0.35$; $P(C\ y\ A) = 0.15$.

Llevamos estos datos a una tabla de contingencia, y completamos la tabla:

	C	noC	
A	0.15		0.35
noA			
	0.4		1

	C	noC	
A	0.15	0.2	0.35
noA	0.25	0.4	0.65
	0.4	0.6	1

a) Nos piden $P(A/C) = P(A\ y\ C)/P(C) = 0.15/0.4 = 0.375$

Si tiene los cabellos castaños, la probabilidad de que tenga los ojos azules es 0.375.

b) Nos piden $P(noC/A) = P(noC\ y\ A)/P(A) = 0.2/0.35 = 0.5714$.

Si tiene los ojos azules, la probabilidad de que no tenga el cabello castaño es 0.5714.

c) Nos piden $P(noC\ y\ noA) = 0.4$ según aparece en la tabla

La probabilidad de que no tenga ni el cabello castaño ni los ojos azules es de 0.4.

d) Nos piden la probabilidad de la unión, que sabemos que es igual a la suma de la probabilidad menos la probabilidad de la intersección:

$$P(A\ o\ C) = P(A) + P(C) - P(A\ y\ C) = 0.35 + 0.40 - 0.15 = 0.6.$$

La probabilidad de que tenga el cabello castaño o los ojos azules es de 0.6.