Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2020
Comunidad autónoma de
ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará con un máximo de 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3,5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) **[0,5 puntos]** Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro y en color hechas la semana pasada.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

1B. En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

b) **[0,75 puntos]** Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados? ¿a cuánto ascenderían dichos beneficios?

2A. Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar el valor de a que verifica que $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot ln(2)$, donde F denota una primitiva de f.

b) **[2 puntos]** Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = -2$.

2B. A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2+100x-1600)$ millones de euros, mientras que si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1-\frac{120}{x}$ millones de euros.

a) **[1,75 puntos]** Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

b) **[0,75 puntos]** ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

3A. El 20 % de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80 % restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6 % fuma. Además se sabe que del total de los trabajadores, el 12 % fuma.

a) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

b) **[1,25 puntos]** De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

3B. Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60 % de las veces la máquina A y el 40 % restante la B. La máquina A produce un 5 % de tornillos defectuosos y la B un 2,5 %.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

b) **[1,25 puntos]** Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

4A. Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 5,5 euros.*

a) **[1,5 puntos]** Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio en esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1,5 euros y un nivel de confianza del 90 %?

4B. En una determinada comunidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.*

a) **[1,5 puntos]** Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$ y $F(2{,}58) = 0{,}995$.

Bloque 1.A.

En una oficina se hicieron la semana pasada un total de 550 fotocopias entre fotocopias en blanco y negro y fotocopias en color. El coste total de dichas fotocopias fue de 3.5 euros, siendo el coste de cada fotocopia en blanco y negro de m céntimos de euro, y el coste de cada fotocopia en color cuatro veces el coste de una en blanco y negro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de m) donde las incógnitas x e y sean el número de fotocopias en blanco y negro, respectivamente, hechas la semana pasada.

b) ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas fotocopias en blanco y negro se realizaron en la oficina si cada fotocopia en color costó 2 céntimos?

Solución:

a) Sean x las fotocopias en blanco y negro e y las de color. Pasamos los euros a céntimos, 3.5 euros = 350 céntimos.

El sistema es: $\begin{cases} x+y=550 \\ mx+4my=350 \end{cases}$

donde la primera ecuación representa el total de fotocopias y la segunda su precio en céntimos de euro.

b) Resolvemos

$$\begin{cases} x+y=550 \\ mx+4my=350 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=550-y \\ m(550-y)+4my=350 \end{cases}$$

$$3my=350-m\cdot 550$$

$$y=\frac{350-550m}{3m} \rightarrow x=550-\frac{350-550m}{3m}$$

Existe solución única y es única, sí y solo sí, $m\neq 0$. Si $m=0$ el sistema es incompatible.

Veamos ahora el caso particular que nos piden. Si las fotocopias en color cuestan 2 céntimos entonces,

$4m=2 \rightarrow m=0.5 \Longrightarrow y=\frac{350-550\cdot 0.5}{3\cdot 0.5}=50$ fotocopias en color

$x=550-50=500$ fotocopias en blanco y negro

La solución es **500** fotocopias en blanco y negro y **50** fotocopias en color.

Bloque 1.B.

En un local que se destinará a restaurante, se está pensando en poner mesas altas y bajas. Las mesas altas necesitan una superficie de 2 m^2 cada una, mientras que las mesas bajas necesitan una superficie de 4 m^2 cada una. El local dedicará a mesas como mucho una superficie de 120 m^2. El propietario quiere que haya al menos 5 mesas bajas y como mucho el doble de mesas altas que bajas.

$a)$ ¿Cuántas mesas puede haber en el restaurante de cada tipo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrá haber 15 mesas de cada tipo?

$b)$ Por estudios de mercado, se estima que el beneficio que dejan los clientes por mesa alta es de 20 euros, mientras que el beneficio por mesa baja es de 25 euros. ¿Cuántas mesas de cada tipo debe colocar para maximizar los beneficios estimados?, ¿a cuánto ascenderán dichos beneficios?

Solución:

Sea:

$$\begin{cases} x = nº\ mesas\ altas\ (2\,m^2/mesa) \\ y = nº\ mesas\ bajas\ (4\,m^2/mesa) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 4y \le 120 \\ x \ge 0; y \ge 5; x \le 2y \end{cases}$$

$r: x + 2y = 60$

x	y
0	30
60	0

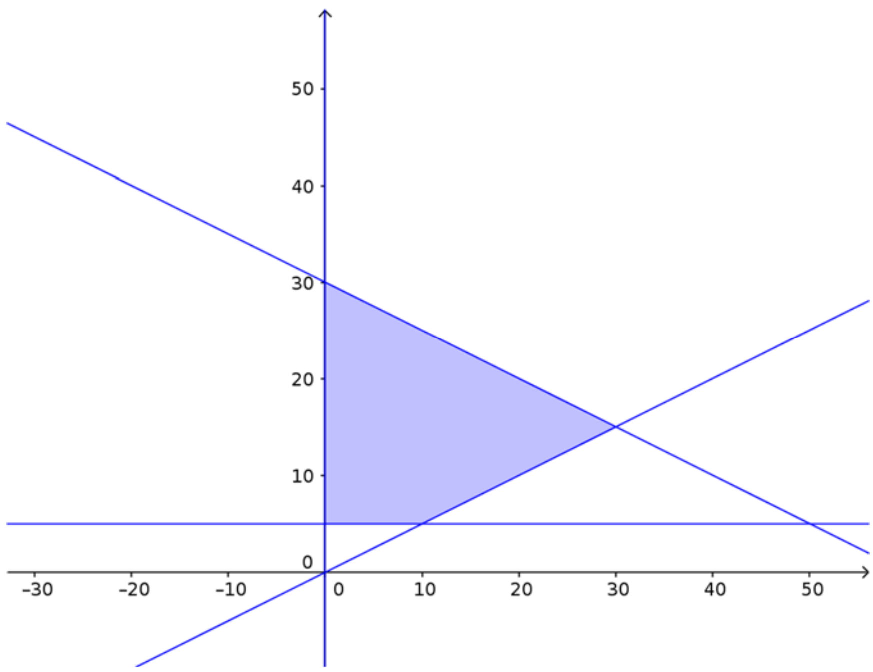
$s: y = 5$

x	y
0	5
30	5

$t: x = 2y$

x	y
0	0
60	30

La región factible es la siguiente



Calculamos los puntos de corte. Uno de ellos debe ser la solución.

$$P = s \cap OY \rightarrow P(0,5)\ ;\ Q = r \cap OY \rightarrow Q(0,30)$$

$$R = t \cap r \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x + 2y = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 15 \end{cases} \rightarrow R(30,15)$$

$$S = s \cap t \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow S(10,5)$$

De donde los vértices de la región factible son: S (10, 5); P (0, 5); Q (0, 30); R (30, 15)

El punto x = 15, y = 15 cumple todas las restricciones, por lo que está dentro de la región factible. Por tanto

Sí, podrá haber 15 mesas de cada tipo.

b) La solución es necesariamente uno de los puntos, como ya hemos dicho.

La función objetivo es $f(x,y) = 20x + 25y$. Basta sustituir en cada uno de los puntos y ver en cuál se alcanza el máximo valor.

$f(S) = f(10,5) = 20(10) + 25(5) = 325.$

Análogamente:

$f(P) = f(10,5) = 20(0) + 25(5) = 125.$

$f(Q) = f(0,30) = 20(0) + 25(30) = 150.$

$f(R) = f(30,15) = 20(30) + 25(15) = 975.$

Es claro que en R es máximo el beneficio.

Debe colocar **30** mesas altas y **15** mesas bajas.

Su beneficio estimado será entonces de **975 €.**

Bloque 2.A.

Dada la función $f(x) = \frac{a}{x+1}$, se pide:

$a)$ Encontrar el valor de a que verifica $F(0) = 0$ y $F(1) = 10 \cdot L2$, donde F denota una primitiva de f.

$b)$ Suponiendo que $a = 10$, estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 2$.

Solución:

a) Primitiva de *f*.

$$F(x) = \int \frac{a}{x+1} dx = aln|x+1| + k$$

$$\begin{cases} F(0) = aln(1) + k = a \cdot 0 + k = 0 \Longrightarrow k = 0 \\ F(1) = aln(2) + k = a \cdot ln(2) = 10ln(2) \Longrightarrow a = 10 \end{cases}$$

$$F(x) = 10 \cdot ln|x+1| \rightarrow \boldsymbol{a = 10}$$

b) Para $a = 10$

$$y = \frac{10}{x+1}$$

El único problema es el valor que anula el denominador. El dominio es pues $D = \Re - \{-1\}$

Calculamos los límites en los infinitos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

que nos da una asíntota horizontal $y = 0$ en ambos infinitos

Los límites en la discontinuidad son respectivamente:

$$\lim_{x \to -1^+,} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-,} f(x) = 0$$

por lo que $x = -1$ es asíntota vertical.

La función *f* es continua y derivable en todo su dominio *D*, corta al eje OY en el punto (0, 10) y no corta al eje OX.

- Crecimiento:

$$f'(x) = \frac{-10}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ en } D.$$

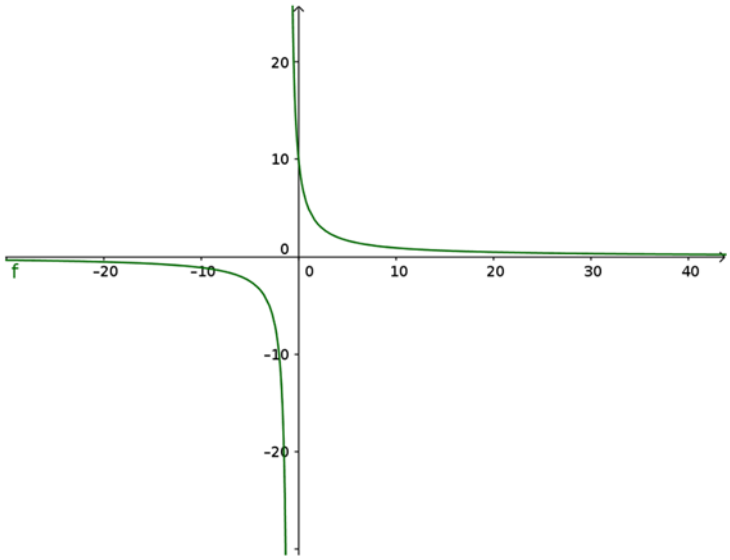
La función *f* es decreciente en todo su dominio.

- Concavidad

$$f''(x) = \frac{0 - (10) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{20}{(x+1)^3}$$

Su segunda derivada y por tanto su curvatura es positiva (ramas hacia arriba) si $x > -1$ y negativa (ramas hacia abajo) si $x < -1$.

Su gráfica es, por tanto:



- Área

$$f(-2) = \frac{10}{-1} = -10$$

$$f(-3) = \frac{10}{-1} = -5$$

$$Área = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)dx\right| = |F(-2) - F(-3)| = \big|10 \cdot ln|-1| - 10 \cdot ln|-2|\big| = 10 \cdot ln(2)$$

El área es: $10 \cdot ln(2)\ u^2 = 6.93\ u^2$.

Bloque 2.B.

A la hora de estudiar la relación entre el beneficio mensual de una empresa y cantidad de producto fabricado, se representa por $f(x)$ el beneficio mensual, en millones de euros, si se han fabricado x toneladas de producto ese mes. Si en un mes se fabrican como mucho 100 toneladas de producto, el beneficio mensual se puede considerar que es $\frac{1}{900}(-x^2+100x-1600)$ millones de euros, mientras que, si se fabrican más de 100 toneladas de producto, el beneficio viene dado por $1-\frac{120}{x}$ millones de euros.

$a)$ Obtén la expresión de la función f. Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $[0,\infty)$.

$b)$ ¿Qué cantidad debe fabricar para maximizar el beneficio? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Qué cantidad hay que fabricar para que el beneficio sea positivo?

Solución:

a) La función *f* viene dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-x^2+100x-1600}{900}, x\le 100\\ 1-\frac{120}{x}, x>100\end{cases}.$$

Se entiende, naturalmente, que solo tiene sentido económico para x nulo o positivo, pero sentido matemático tiene también para cualquier valor negativo.

Dibujamos pues la función.

Si $x\le 100$ es una parábola de eje vertical ramas hacia abajo.

El vértice está localizado en (50, 1), ya que $f'(x)=0, f'(x)=\frac{1}{900}(-2x+100)=0$, pues da, $x=50$ que es un máximo. La función crece entre 0 y 50 y decrece entre 50 y 100.

Los cortes de los ejes son $\left(0,-\frac{16}{9}\right)$; $(20,0)$; $(80,0)$. El primero es con OY, que se obtiene dando a x el valor 0. Los otros dos salen de igualar $f(x)$ a 0 y resolver la ecuación de segundo grado resultante:

$$-x^2+100x-1600=0 \Longrightarrow x=20, x=80$$

Tiene un máximo relativo en $P(50,1)$

Tiene un punto de discontinuidad para x = 100. $f(100)=-0.2$

- Si $x>100$ es continua en $x>100$, ya que x = 0, no está en ese intervalo

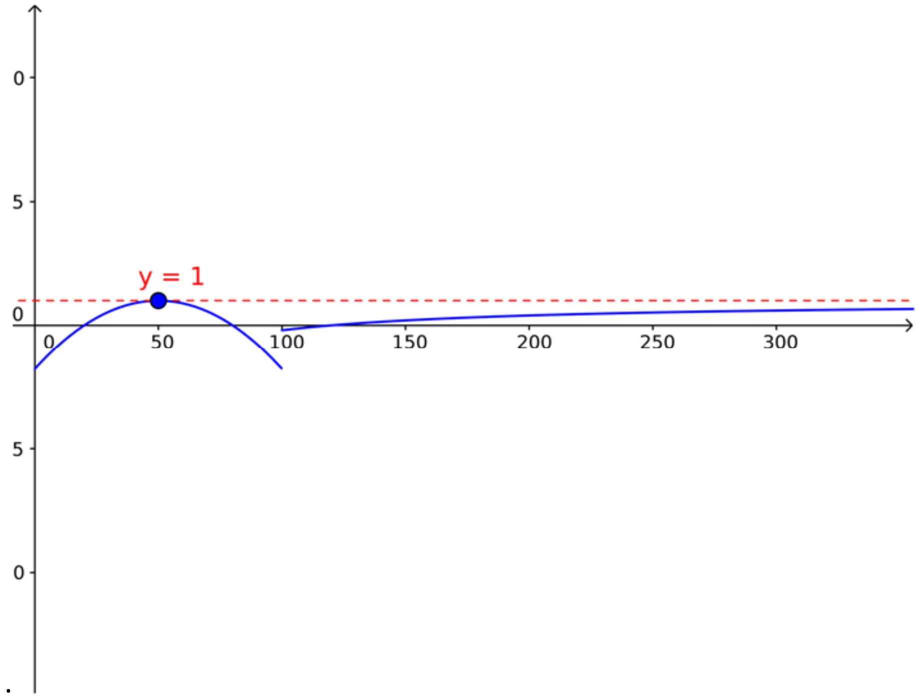
$$f'(x)=0-\frac{0\cdot x^2-2x\cdot 100}{x^2}=\frac{240}{x}$$

Entonces $f'(x)>0$ si $x>100$. Es siempre creciente.

No se puede cortar con OY pues x > 100. Para calcular el corte con OX resolvemos $f(x)=0$. Se tiene pues $1-\frac{120}{x}=0$ que da x = 120. El punto de corte es (120, 0). Por otro lado, tiene una asíntota horizontal en infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

$\lim_{x\to 100} 1 - \frac{120}{x} = 1 - \frac{120}{100} = -1.2 \neq f(100) = 0.2$ por lo que NO es continua en $x = 100$



b) En la gráfica se ve claramente que el máximo se alcanza en el intervalo [0, 100]. Tampoco es difícil notarlo analíticamente pues si x > 100 la función es creciente y tiende a 1 en el infinito, luego está siempre por debajo de 1 estrictamente.

Ya hemos visto que el máximo en [0, 100] se alcanza para x = 50 y es el punto $P(50, 1)$.

Luego debe fabricar **50** toneladas de producto.

Obtendrá un beneficio de **1 millón de euros**.

Para ver cuándo que el beneficio es positivo observamos la gráfica y tenemos en cuenta los cortes con los ejes.

El beneficio es positivo entre 20 y 80 unidades (nulo en 20 y 80 exactamente) y a partir de 120 unidades (nulo en 120 exactamente).

Bloque 3.A.

El 20 % de los trabajadores de una empresa tiene estudios superiores y el 80 % restante no los tiene. De los que tienen estudios superiores, el 6 % fuma. Además, se sabe que, del total de los trabajadores, el 12 % fuma.

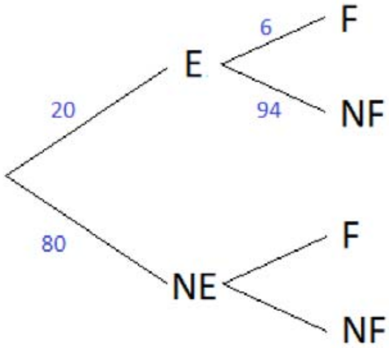
$a)$ De los trabajadores que fuman, ¿qué porcentaje tiene estudios superiores?

$b)$ De los trabajadores que no tienen estudios superiores, ¿qué porcentaje fuma?

Solución:

Sean los sucesos:

E: tiene estudios superiores. NE: no tiene estudios superiores. F: fuma. NF: no fuma



$$P(E)=\frac{20}{100}, P(NE)=\frac{80}{100}, P(F|E)=\frac{6}{100}, P(F)=\frac{12}{100}$$

a) De los fumadores el porcentaje de trabajadores que tienen estudios superiores es:

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{P(F|E)\cdot P(E)}{P(F)}=\frac{\frac{6}{100}\cdot\frac{20}{100}}{\frac{12}{100}}=\frac{10}{100}=10\ \%$$

La solución es que el **10 %** de los fumadores tiene estudios superiores.

b) Nos piden una condicionada $P(F|NE)=\frac{P(F\cap NE)}{P(NE)}$. Necesitamos pues los fumadores sin estudios superiones. Pero ya tenemos los que sí tienen estudios superiores calculada de antes.

$$P(E\cap F)=P(F|E)\cdot P(E)=\frac{6}{100}\cdot\frac{20}{100}=\frac{12}{1000}=1.2\%$$

Pero es que, además, tenemos el total de fumadores, el 12 %. Restando tenemos los fumadores sin estudios superiores:

$$P(F\cap NE)=P(F)-P(F\cap NE)=\frac{12}{100}-\frac{12}{1000}=\frac{108}{1000}=10.8\ \%$$

Basta pues dividir. Lo tenemos todo:

$$P(F|NE)=\frac{P(F\cap NE)}{P(NE)}=\frac{\frac{108}{1000}}{\frac{80}{100}}=\frac{108}{800}=\frac{27}{200}=13.5\ \%$$

La solución es que el **13.5 %** de los trabajadores sin estudios superiores fuma.

Bloque 3.B.

Una fábrica de tornillos utiliza en su fabricación el 60 % de las veces la máquina A y el 40 % restante la B. La máquina A produce un 5 % de tornillos defectuosos y la B un 2.5 %.

a) Calcula la probabilidad de que un tornillo, elegido al azar, sea defectuoso.

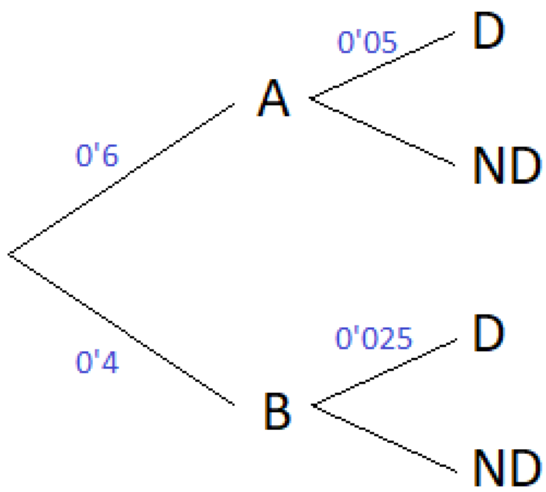
b) Si un tornillo elegido al azar resulta defectuoso, calcula la probabilidad de que lo haya producido la máquina B.

Solución:

Sean los sucesos:

A: *produce con la máquina A*. B: *produce con la máquina B*

D: *es defectuoso*. ND: *no es defectuoso*



a) La probabilidad de un tornillo defectuoso elegido al azar se calcula como:

$$P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) = 0.05 \cdot 0.6 + 0 - 025 \cdot 0.4 = 0.03 \cdot 0.01 = 0.04 = \frac{4}{100}$$

La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es del **0.04**.

b) La probabilidad de que el tornillo defectuoso haya sido producido por la máquina *B* es:

$$P(B|D) = \frac{P(D \cap B) \cdot P(B)}{P(D)} = \frac{\frac{2'5}{100} \cdot \frac{40}{100}}{\frac{4}{100}} = \frac{25}{100} = 0.25 = 25\ \%$$

La probabilidad de que el tornillo defectuoso lo haya fabricado *B* es del **0.25**.

Bloque 4.A.

Para estudiar la evolución del precio medio de un producto en determinada ciudad, se consideró una muestra aleatoria de 40 comercios de dicha ciudad y se obtuvo que el precio medio de dicho producto en la muestra era de 36 euros. Se supone que el precio de dicho producto se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 5.5 euros.

a) Construye un intervalo de confianza para el precio medio de dicho producto en esa ciudad, al 90 % de confianza.

b) Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio con esa ciudad a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 1.5 euros y un nivel de confianza del 90 %.

Solución:

a) La variable es $X = N(\mu, 5.5)$. La media muestral con 40 valores es por tanto:

$\overline{X} = N\left(\mu, \frac{5.5}{\sqrt{40}}\right) = N(\mu, 0.87)$ de donde $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{0.87} = N(0, 1)$

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0, 1)$ y despejamos

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0.90 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0.90 = 0.10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.05} = 1.645.\ (1 - 0.05 = 0.950 \ \rightarrow z = 1.64).$

$P(-M < Z < M) = 0.9 \rightarrow F(M) - F(-M) = 0.9 \rightarrow F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$

y finalmente $F(M) = 0.9 + 12 = 0.95$ que nos da $M = 1.64$

Por tanto, el intervalo es $-1.64 < \frac{\overline{X} - \mu}{0.87} < -1.64$ que resulta:

$$(36 - 0.87 \cdot 1.64, 36 + 0.87 \cdot 1.64) = (34.57, 37.53)$$

El intervalo de confianza es **(34.57, 37.53)**

b) Nos sirven la mayoría de los cálculos.

El intervalo será $\left(36 - \frac{5.5}{\sqrt{n}} \cdot 1.64,\ 36 + \frac{5.5}{\sqrt{n}} \cdot 1.64\right)$ por lo que debe cumplirse:

$\frac{5.5}{\sqrt{n}} 1.64 = 1.5$ de donde $\sqrt{n} = \frac{5.5 \cdot 1.64}{1.5} = 6.01$. Así pues $n = 36.16$

Debe ser un número entero, por lo que tomamos el siguiente.

El tamaño muestral mínimo es **37**.

Bloque 4.B.

En una determinada continuidad autónoma se ha seleccionado una muestra aleatoria de 500 personas, de las que 190 leen el periódico habitualmente.

a) Halla, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo para estimar la proporción de personas que leen el periódico habitualmente en esa comunidad autónoma.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño muestral?

Solución:

Se trata de una distribución binomial, $B(n, p)$ donde queremos calcular un intervalo de confianza para p con n = 500

Sabemos que, si calculamos la media muestral, puede aproximarse por una normal:
$\overline{X} = N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, de donde $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} = N(0,1)$

El intervalo es del 95 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.95$

$F(M) - F(-M) = 0.95$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.95$ y finalmente $F(M) = \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ que nos da $M = 1.96$.

Por tanto, el intervalo es $-1.96 < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} < 1.96$. Como son 190 valores, para el denominador tomamos $p = \frac{190}{500} = 0.38$ de donde $\sqrt{\frac{0.38\,(1-0.38)}{500}} = 0.021$

El intervalo es pues $(0.38 - 0.021 \cdot 1.96, 0.38 + 0.021 \cdot 1.96) = (0.34, 0.42)$

El intervalo para la proporción es **(0.34, 0.42)** es decir (34%, 42%)

b) El error de estimación es la diferencia entre la proporción estimada y uno cualquiera de los extremos, en este caso 0.42 – 0.38 = 0.04

El error de estimación es **0.04**

Otra manera de calcularlo es notar que la cantidad que sumamos y restamos es $\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}1.96$. Si la proporción p permanece constante y lo único que varía es n, al estar en el denominador, un aumento de n reduce el error. Y al revés, que es lo que nos preguntan. Si n disminuye el error aumenta. Es además bastante intuitivo, a menos datos, más error. En resumen:

Una disminución del tamaño muestral, manteniendo constante lo demás (nivel de confianza y proporción), AUMENTA el error.

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará con un máximo de 2,5 puntos.

El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

1A. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$.

a) **[1 punto]** Si $(A+B)\cdot C = B\cdot D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=2$.

1B. Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere al doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y de 40 de tipo B.

a) **[1,75 puntos]** ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?

b) **[0,75 puntos]** Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿a cuánto asciende dicho beneficio máximo?

2A. Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los 2 primeros gigabytes en gratis, pero a partir de 2 gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes restantes a 10 céntimos de euro por gigabyte.

a) **[0,75 puntos]** Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para cualquier valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

b) **[1,75 puntos]** Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0,\infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2,25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Universidad de Oviedo
Universidá d'Uviéu
University of Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2019-2020

2B. Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide: Se pide:

a) **[0,5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 2$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$, Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

3A. Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?

b) **[1,25 puntos]** Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

3B. En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

a) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.

4A. Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.*

a) **[1,5 puntos]** Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado **en total** 10400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0,5 euros y un nivel de confianza del 95 %?

4B. En una ciudad se ha encuestado a 1250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.*

a) **[1,5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño de la muestra?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1{,}28) = 0{,}90$; $F(1{,}64) = 0{,}95$; $F(1{,}96) = 0{,}975$; $F(2{,}33) = 0{,}99$ y $F(2{,}58) = 0{,}995$.

OPCIÓN A

Bloque 1.A.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix}$.

$a)$ Si $(A+B)\cdot C = B\cdot D$, plantea un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

$b)$ ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = 2$.

Solución:

a) *Sea* $(A+B)\cdot C = B\cdot D$.

$$A+B = \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ -2 & m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$$

$$(A+B)\cdot C = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx-y \\ -x+my \end{pmatrix}$$

$$B\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-2m \\ -2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2m+2m \\ 1-2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$$

$$(A+B)\cdot C = B\cdot D \to \begin{pmatrix} mx-y \\ -x+my \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$$

El sistema es $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1-2m \end{cases}$

b) Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes:

$$M = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

- Si $m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$ y $m \neq -1$

El $rango(M)$ es 2, igual al rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible determinado, tiene solución y es única.

- o Si $m = 1$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1 \end{cases} \to \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Es un sistema compatible indeterminado de 2 ecuaciones iguales. El $rango(M)$ es 1, igual al rango de la matriz ampliada, menor al número de incógnitas. Tiene solución, pero no es única

- o Si $m = -1$

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ -x - y = 3 \end{cases} \to \begin{cases} -x - y = 1 \\ 0x + 0y = 2 \end{cases}$$

Es un sistema incompatible.

En resumen:

El sistema tiene solución siempre que m sea distinto de -1.

En caso de que m sea 1, tiene solución, pero no es única (hay infinitas).

Para cualquier valor de m que no sea 1 o -1, hay solución única.

- Si $m = 2$, el sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x - 1 \\ -x + 2(2x - 1) = -3 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x = -1 \end{cases} \to \begin{cases} y = \dfrac{-5}{3} \\ x = \dfrac{-1}{3} \end{cases}$$

La solución en el caso $m = 2$ es $\boldsymbol{x}$ **=** $\mathbf{-1/3}$ e $\boldsymbol{y}$ **=**$\mathbf{-5/3}$

Bloque 1.B.

Una empresa puede contratar trabajadores de tipo A y trabajadores de tipo B en una nueva factoría. Por convenio, es necesario que haya mayor o igual número de trabajadores de tipo A que de tipo B y que el número de trabajadores de tipo A no supere el doble del número de trabajadores de tipo B. En total la empresa puede contratar un máximo de 30 trabajadores de tipo A y 40 de tipo B.

a) ¿Cuántos trabajadores de cada tipo se pueden contratar en la empresa, de forma que se satisfagan todos los requisitos anteriores? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podría contratarse a 20 trabajadores de tipo A y 15 de tipo B?

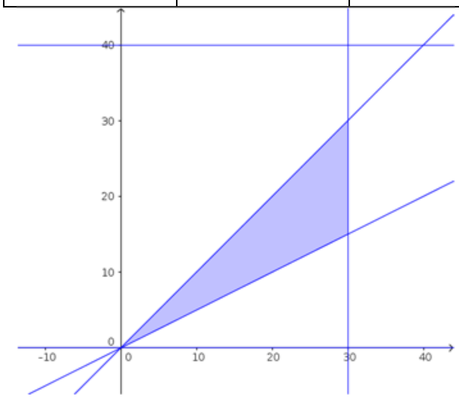
b) Si el beneficio diario esperado para la empresa por cada trabajador de tipo A es de 240 euros y por cada trabajador de tipo B es de 200 euros, ¿cuántos trabajadores de cada tipo se deben contratar para maximizar el beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución:

Sea: $\begin{cases} x = nº\ trabajadores\ de\ tipo\ A \\ y = nº\ trabajadores\ de\ tipo\ B \end{cases}$. Las ecuaciones son

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \leq 30 \\ y \leq 40 \end{cases}$$

$r: x = y$		$s: x = 2y$		$t: x = 30$		$v: y = 40$	
x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	0	30	0	0	40
30	30	20	40	30	30	20	40



De donde A (10, 5); B (0, 5); C(0, 30); D (30, 15)

El punto x = 20, y = 15 cumple todas las restricciones. Por tanto:

Sí, podrían contratarse 20 de tipo A y 15 de tipo B.

Los puntos de corte de las rectas son P = (0, 0), Q = (30, 15) y R = (30, 30). Puede hacerse intersecando dos a dos o directamente en la gráfica.

La solución es necesariamente uno de los puntos, como ya hemos dicho. La función objetivo es $f(x, y) = 240x + 200y$. Basta sustituir en cada uno de los puntos y ver en cuál se alcanza el máximo valor.

$f(P) = f(0,0) = 240(0) + 200(0) = 0$. Análogamente $f(Q)$ = 7200 + 3000 = 10200 y finalmente $f(R)$ = 7200 + 6000 = 13200. Es claro que en $R(30, 30)$ es máximo el beneficio.

Debe contratar a **30** trabajadores de cada tipo. Su beneficio será de **13 200 €**

Bloque 2.A.

Según una compañía telefónica, el coste de la transferencia de datos se descompone en dos conceptos: un coste fijo de 25 céntimos de euro por transferencia realizada más un coste variable en función de los gigabytes transferidos. El coste variable asociado a los dos primeros gigabytes es gratis, pero a partir de dos gigabytes, pasa a tarifar los gigabytes a 10 céntimos de euros por gigabyte.

$a)$ Si $f(x)$ representa el coste total en céntimos de euro de una transferencia en función de la cantidad de gigabytes transferidos en la misma (x), obtén la expresión de dicha función f para conseguir valor positivo x. ¿Es el coste una función continua de la cantidad transferida?

$b)$ Estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo $(0, \infty)$. Si el coste total de una transferencia ha sido de 2.25 euros, ¿cuántos gigabytes se han transferido? ¿Cuál es el coste mínimo de una transferencia cualquiera? ¿Y el coste máximo?

Solución:

a) Sea x el número de gigabytes transferidos.

La función es $f(x) = \begin{cases} 25, x \leq 2 \\ 25 + 10(x-2), x > 2 \end{cases}$

Para ver si es continua, calculamos los límites laterales en $x = 2$, que es el único punto conflictivo. El límite lateral izquierdo es 25 y el derecho es $25 + 10(2-2) = 25$.

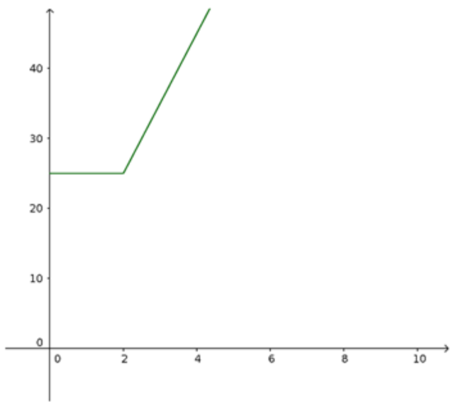
$$f(2) = 25$$

El coste es función continua de la cantidad transferida

b) Si $x \leq 2$ se trata de una función constante. Para $x > 2$ es una recta y por tanto basta dar dos valores. Por ejemplo $f(3) = 35$ y $f(4) = 45$.
La gráfica es la del margen:
2.25 € son 225 céntimos. Es más de 25, así que estamos en la zona $x > 2$.
Igualamos

$$25 + 10(x-2) = 225$$

que es $25 + 10x - 20 = 225$ y resulta en $x = 22$.



Si el coste han sido **2.25** euros se han transferido **22** gigabytes

De la gráfica vemos que $f(x)$ es siempre creciente en sentido amplio (puede verse también haciendo la derivada en los dos intervalos y comprobando $f'(x) \geq 0$ en todos los valores donde esté definida) por tanto el coste mínimo es 25 céntimos.

Además $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ por lo que no hay coste máximo.

El coste mínimo son **25** céntimos. No hay coste máximo, puede costar cualquier valor mayor de 25 céntimos por grande que sea. Si el número de gigabytes se hace arbitrariamente grande, también lo es su coste

Bloque 2.B.

Dada la función $f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$, se pide:

$a)$ Encontrar la primitiva $F\ de\ f$ se verificando que $F(0) = 2$.

$b)$ Estudiar y representar gráficamente la función f en el intervalo $[0, \infty)$. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 0\ y\ x = 3$.

Solución:

a) Calculamos la primitiva genérica con la integral indefinida:

$$\int f(x)dx = \int \frac{6}{x+1} - 2\,dx = \int \frac{6}{x+1}dx - \int 2\,dx = 6ln|x+1| - 2x + K$$

donde K es la constante de integración.

$F(0) = 2$ por lo que, sustituyendo $6ln|0+1| - 2(0) + K = 2$ es decir K = 2.

La primitiva es $F(x) = \boldsymbol{6ln|x+1| - 2x + 2}$

b) La función solo tiene una discontinuidad cuando se anula el denominador, esto es, si $x = -1$ que no nos afecta pues está fuenra del intervalo [0, 3].

Calculamos los cortes con los ejes.

Si $x = 0$, queda $f(x) = \frac{6}{0+1} - 2 = 4$. Un corte es el punto (0, 4).

Para calcular el corte con el eje OX, igualamos a 0.

$0 = f(x) = \frac{6}{x+1} - 2$ de donde $6 = 2(x+1)$.

El punto de corte con OX es el (2, 0).

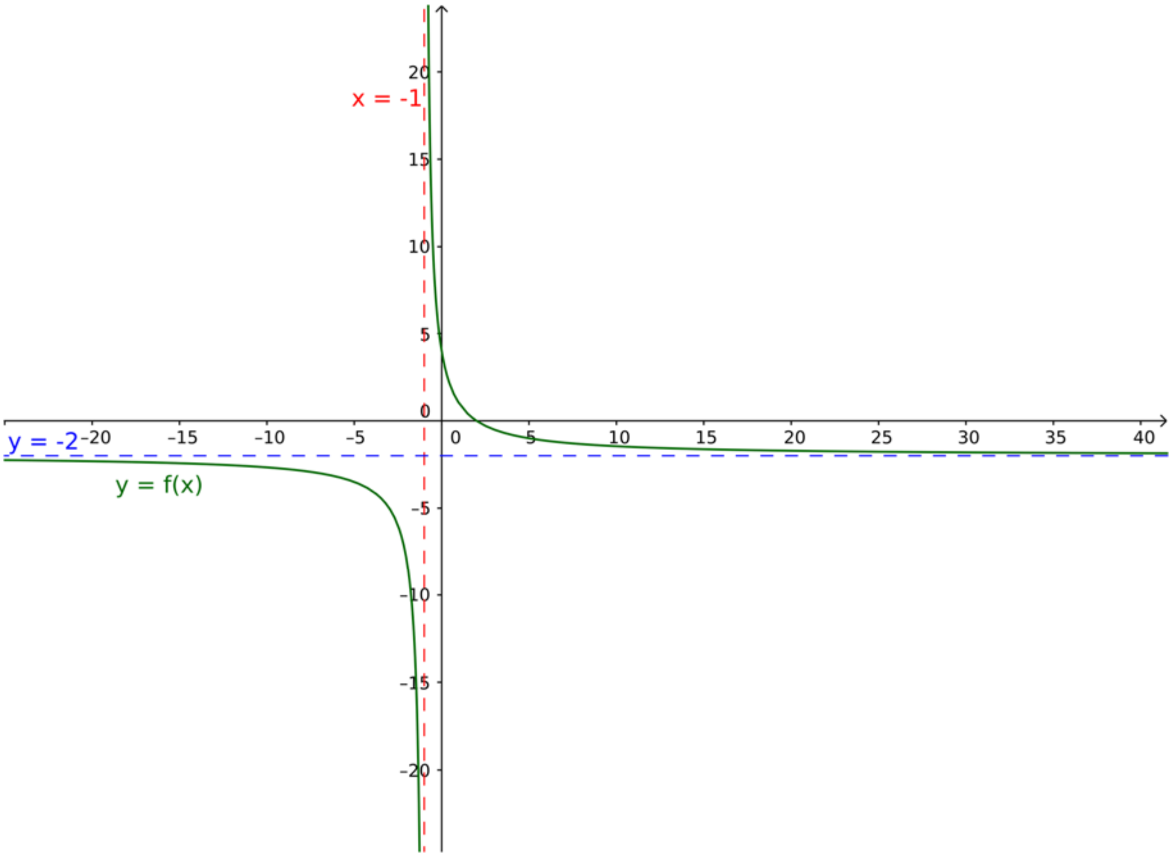
Derivando $f'(x) = \frac{-6}{(x+1)^2}$ que es siempre negativa, luego es siempre decreciente.

A su vez, $f''(x) = \frac{12}{(x+1)^3}$ que es positiva para $x > -1$ y, en particular para el intervalo que nos piden. Luego tiene curvatura positiva y por tanto ramas hacia arriba.

El límite en infinito es -2, por lo que tiene a $y = -2$ como asíntota horizontal en el infinito.

En menos infinito no nos interesa pues nos piden solo de 0 en adelante.

La gráfica de la función, junto con sus asíntotas, es la siguiente.



En cuanto al área, es positiva para $x < 2$ y negativa para $x > 2$. Hay que hacer los dos tramos:

$$\int |f(x)|\, dx = \int f\,(x)dx - \int f\,(x)dx$$

No es preciso hacer la integral, ya tenemos una primitiva. Es más cómodo tomar la de K = 0, pero valdría cualquiera, por ejemplo la *F* anterior. Sea pues $G(x) = 6ln|x+1| - 2x$

$$\int |f(x)|\, dx = G(2) - G(0) - [G(3) - G(2)] = 6ln(3) - 4 - 0 - [6ln(4) - 6 - (6ln(3) - 4)]$$

Operamos los valores.

El área es $12ln(3) - 6\ln(4) - 2$.

Bloque 3.A.

Se sortea un viaje a Japón entre los 240 mejores clientes de una agencia de viajes. De ellos, 144 son mujeres, 168 son personas con hijos y 90 son hombres con hijos.

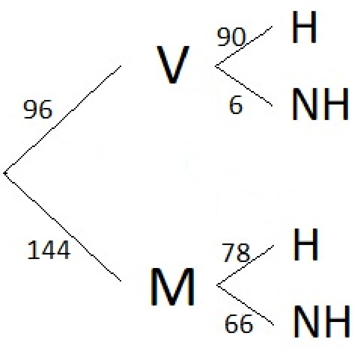
a) ¿Cuál es la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos?

b) Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:

Sean los sucesos:

- *M: ser mujer*
- *V: ser varón*
- *H: tener hijos*
- *NH: no tener hijos*



a) *La probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos es* $P(V \cap NH)$

$$P(V \cap NH) = P(NH|V) \cdot P(V) = \frac{9}{96} \cdot \frac{96}{240} = \frac{1}{40} = 0.025$$

La probabilidad de que le toque el viaje a un hombre sin hijos es 1/40 = **0.025**, el 2.5 %.

b) *Si la persona a la que le toca el viaje tiene hijos, la probabilidad de que sea una mujer es* $P(M|H)$

$$P(M|H) = \frac{P(M \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{144}{240} \cdot \frac{78}{144}}{\frac{144}{240} \cdot \frac{78}{144} + \frac{96}{240} \cdot \frac{90}{96}} = \frac{13}{28}$$

Si el viaje le ha tocado a alguien con hijos, la probabilidad de que sea una mujer es **13/28**

Bloque 3.B.

En un proceso de fabricación se sabe que el 2 % de las piezas producidas son defectuosas. Se utiliza un dispositivo para detectarlas que califica como defectuosas al 90 % de las piezas defectuosas, pero también califica como defectuosas a un 5 % que no lo son.

$a)$ Calcula la probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa.

$b)$ Calcula la probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa.

Solución:

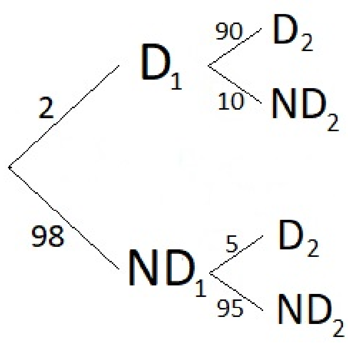
Sean los sucesos:

b) *D_1: la pieza es defectuosa*

c) *ND_1: la pieza no es defectuosa*

d) *D_2: la pieza se califica como defectuosa*

e) *ND_2: la pieza se califica como no defectuosa*



a) La probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa es $P(D_2)$

$$P(D_2) = P(D_2|D_1) \cdot P(D_1) + P(D_2|ND_1) \cdot P(ND_1)$$

$$P(D_2) = \frac{90}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{180 + 490}{100 \cdot 100} = \frac{670}{10000} = \frac{67}{1000}$$

La probabilidad de que el dispositivo califique una pieza cualquiera como defectuosa es $\frac{67}{1000}$, el 6.7 %

b) La probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificada como defectuosa es $P(ND_1|D_2)$

$$P(ND_1|D_2) = \frac{P(ND_1 \cap D_2)}{P(D_2)} = \frac{P(D_2|ND_1) \cdot P(ND_1)}{P(D_2)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{98}{100}}{\frac{67}{1000}} = \frac{5 \cdot 98}{67 \cdot 10} = \frac{49}{67}$$

La probabilidad de que no sea defectuosa una pieza que el dispositivo ha calificado como defectuosa es $\mathbf{\frac{49}{67}}$.

Bloque 4.A.

Se supone que el precio de un determinado producto sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 5 euros.

a) Para estimar el precio medio, se considera una muestra aleatoria de 100 de estos productos, los cuales han costado en total 10 400 euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el precio medio de ese producto, al 95 % de confianza.

b) Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero precio medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 euros y un nivel de confianza del 95 %.

Solución:

a) La variable es $X = N(\mu, 5)$. Nos dan el precio total y necesitamos el medio. Pero como también nos dan el total de elementos, basta dividir: 10400/100 = 104

La media muestral con 100 valores es por tanto $\overline{X} = N\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(\mu, 0.5)$ de donde tipificando:

$Z = \frac{\overline{X}-\mu}{0.5} = N(0,1)$

El intervalo es del 95 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$ y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.95$

$F(M) - F(-M) = 0.95$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.95$ y finalmente $F(M) = \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ que nos da $M = 1.96$

Por tanto, el intervalo es $-1.96 < \frac{\overline{X}-\mu}{0.5} < 1.96$ que resulta $(104 - 0.5 \cdot 1.96,\ 104 + 0.5 \cdot 1.96) = (103.02,\ 104.98)$

El intervalo de confianza es **(103.02, 104.98)**

b) Nos sirven la mayoría de los cálculos. El intervalo será $\left(104 - \frac{5}{\sqrt{n}} \cdot 1.96,\ 104 + \frac{5}{\sqrt{n}} \cdot 1.96\right)$ por lo que debe cumplirse $\frac{5}{\sqrt{n}} 1.96 = 0.5$ de donde $\sqrt{n} = \frac{5 \cdot 1.96}{0.5} = 19.60$. Así pues $n = 384.15$

Debe ser un número entero, por lo que tomamos el siguiente.

El tamaño muestral mínimo es **385**

Bloque 4.B.

En una ciudad se han encuestado a 1 250 vecinos, de los cuales 525 han manifestado estar a favor de la gestión económica del ayuntamiento.

a) Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción de vecinos de esa ciudad que están a favor de la gestión económica del ayuntamiento, al 99 % de confianza.

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese aumentado el tamaño muestral?

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial, $B(n, p)$ donde queremos calcular un intervalo de confianza para p con n = 1250.

Sabemos que, si calculamos la media muestral, puede aproximarse por una normal:

$\overline{X} = N\left(p, \sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\right)$, de donde $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} = N(0,1)$

El intervalo es del 99 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.99$

$F(M) - F(-M) = 0.99$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.99$ y finalmente $F(M) = \frac{0.99+1}{2} = 0.995$ que nos da $M = 2.58$

Por tanto, el intervalo es $-2.58 < \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} < 2.58$. Como son 190 valores, para el denominador tomamos $p = \frac{525}{1250} = 0.42$ de donde $\sqrt{\frac{0.42\,(1-0.42)}{1250}} = 0.014$

El intervalo es pues $(0.42 - 0.014 \cdot 2.58,\ 0.42 + 0.014 \cdot 2.58) = (0.4,\ 0.44)$

El intervalo para la proporción es (0.40, 0.44) es decir (40 %, 44 %)

b) El error de estimación es la diferencia entre la proporción estimada y uno cualquiera de los extremos, en este caso 0.44 – 0.42 = 0.04

El error de estimación es **0.04**

Otra manera de calcularlo es notar que la cantidad que sumamos y restamos es $\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}2.58$. Si la proporción p permanece constante y lo único que varía es n, al estar en el denominador, un aumento de n reduce el error. Es además bastante intuitivo, a más datos, menos error. En resumen

Si aumenta el tamaño muestral (sin cambiar el nivel de confianza ni la proporción) el error de estimación disminuye