Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2020

Comunidad autónoma de

CATALUNYA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JAIME CARRASCOSA OROZCO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 1

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Un venedor d'una llibreria de vell cobra, a més a més d'un sou fix, diferents comissions depenent del tipus de llibre que ven. Cobra 1 € per cada còmic, 1,5 € per cada revista i 2 € per cada novel·la.

Ahir, va vendre el doble de revistes que de novel·les i 5 còmics menys que revistes, i va aconseguir en total una comissió de 30 €.

Quantes publicacions va vendre de cada tipus?

[2,5 punts]

x = nº de còmics venuts

y = nº de revistes venudes

z = nº de novel·les venudes

- Va vendre el doble de revistes que de novel·les $\longrightarrow y = 2z \rightarrow y - 2z = 0$
- 5 comics menys que revistes $\rightarrow x + 5 = y \rightarrow x - y = -5$
- Comissió de 30 € $\longrightarrow 1 \cdot x + 1'5 \cdot y + 2 \cdot z = 30 \rightarrow 2x + 3y + 4z = 60$

El sistema queda: $\begin{cases} x - y = -5 \\ y - 2z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 60 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 2F_1 - F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -70 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ 5F_2 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -70 \end{array}\right) \rightarrow -14z = -70 \rightarrow \boxed{z = 5}$$

- substituint a la 2a fila: $y - 2 \cdot 5 = 0 \rightarrow \boxed{y = 10}$
- substituint a la 1a fila: $x - 10 = -5 \longrightarrow \boxed{x = 5}$

Solució: Va vendre 5 còmics, 10 revistes i 5 novel·les.

2. L'1 de gener de 2019 va sortir al mercat un nou model d'un producte tècnic d'esquí. La funció de tercer grau $f(x) = 10x^3 - 210x^2 + 1.470x$ ens dona el nombre total d'unitats venudes, en què x denota el nombre de mesos transcorreguts, des del llançament del producte, durant el primer any (és a dir, $x \in [0, 12]$).

a) Quantes unitats s'havien venut al cap de 3 mesos? Quantes se'n van vendre al cap d'un any? Determineu la taxa de variació mitjana entre els mesos 3 i 12.
[1,25 punts]

- Al cap de 3 mesos: $f(3) = 10 \cdot 3^3 - 210 \cdot 3^2 + 1470 \cdot 3 = 270 - 1890 + 4.410$
$= \boxed{2.790 \text{ unitats}}$

- Al cap d'un any: $f(12) = 10 \cdot 12^3 - 210 \cdot 12^2 + 1470 \cdot 12 = 17.280 - 30.240 + 17.640$
$= \boxed{4.680 \text{ unitats}}$

- Taxa de variació mitjana: $\dfrac{f(12) - f(3)}{12 - 3} = \dfrac{4680 - 2790}{9} =$
$= \dfrac{1.890}{9} = \boxed{210}$

***b*)** Comproveu que la funció és creixent en l'interval [0, 12] i trobeu en quin instant el creixement ha estat més lent.

[1,25 punts]

- Per comprovar que és creixent, ho farem estudiant el signe de la derivada:

$$f'(x) = 30x^2 - 420x + 1470 = 30(x^2 - 14x + 49) \underset{\text{Id. notables}}{=}$$

$$= 30(x-7)^2$$

$f'(x) \geq 0$ ja que $(x-7)^2 \geq 0$ per estar elevat al quadrat i al multiplicar per 30 no canvia el signe.

Si fem $f'(x) = 0 \to 30 \cdot (x-7)^2 = 0 \to (x-7)^2 = 0 \to x - 7 = 0$
$\to x = 7$

x	0		7		12
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗		↗	

$\to$ $f(x)$ és creixent en $[0,7) \cup (7,12]$
$f(x)$ té un punt d'inflexió en $x = 7$

$\left([0,7) \cup (7,12] = [0,12] \text{ qpp} \right)$

- El creixement ha estat més lent $\boxed{\text{al transcórrer 7 mesos.}}$
(en el punt d'inflexió la funció ni creix ni decreix)
El valor de la derivada és el que ens indica la velocitat amb la que la funció creix (o decreix) i $f'(7) = 0 \to$ en $x = 7$ el creixement és zero.

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. El cost d'elaboració d'un menú en un restaurant és de 8 €. S'ha realitzat un estudi de mercat i s'ha arribat a la conclusió que si el preu del menú és de 18 € entren a dinar al restaurant 120 clients. També s'ha conclòs que la relació entre el preu del menú i el nombre de clients és lineal, de manera que, per cada euro que augmentem el preu del menú, disminueix en 4 el nombre de clients. I a l'inrevés, per cada euro que disminuïm el preu, augmenta en 4 el nombre de clients.

a) Obteniu la funció que expressa el benefici del restaurant en funció del nombre d'euros en què augmentem o disminuïm el preu inicial del menú.
[1,25 punts]

Benefici = (Benefici de cada menú)·(nº de menús venuts)

$$B(x) = [(18+x)-8]\cdot(120-4x)$$

$$B(x) = (x+10)(x-30)\cdot(-4) = -4(x^2-20x-300)$$

$$\boxed{B(x) = -4(x^2-20x-300)}$$

b) Trobeu en quants euros cal augmentar o disminuir el preu inicial del menú per tal que el restaurant obtingui el màxim benefici. Quin seria el preu final del menú i quin seria el benefici obtingut amb aquest preu?
[1,25 punts]

- Ens estan demanant el màxim de la funció $B(x)$:

<u>1r</u> Derivem $B(x) \longrightarrow B'(x) = -4(2X-20) = -8(X-10)$

<u>2n</u> Igualem la derivada a zero per trobar els punts singulars de $B(x)$:

$-8(X-10) = 0 \longrightarrow X = 10.$

<u>3r</u> Fem la 2a derivada per veure quin tipus de punt singular tenim quan $X=10$:

$B''(X) = -8 \longrightarrow B''(10) = -8 < 0 \longrightarrow$ quan $X = 10$

$B(x)$ té un màxim.

$\boxed{\text{Hem d'augmentar el preu } 10\text{ €}}$

- <u>Preu final del menú</u>: $18+10 = \boxed{28\text{ €}}$

- <u>Benefici</u>: $B(10) = -4\cdot(10^2-20\cdot 10-300) =$

$= -4\cdot(100-200-300) = -4\cdot(-400) = \boxed{1.600\text{ €}}$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Un fabricant de mobles de jardí fabrica cadires i taules de fusta d'exterior. Cada cadira li aporta un benefici de 20 € i cada taula un de 25 €. Sabem que cada mes pot produir com a màxim un total de 120 mobles entre els dos productes. També sabem que, com a màxim, pot fabricar 100 cadires i que ha de fabricar un mínim de 10 taules. D'altra banda, el nombre de cadires fabricades ha de ser igual o superior al triple de taules fabricades.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.

[1,25 punts]

x = Cadires fabricades.

y = taules fabricades

Funció objectiu: $B(x,y) = 20x + 25y$

Restriccions:

Màxim 120 mobles → $x + y \leq 120$

Màxim 100 cadires → $x \leq 100$

Mínim 10 taules → $y \geq 10$

Cadires igual o superior al triple de taules → $x \geq 3y$

(No cal afegir les restriccions $x \geq 0$ i $y \geq 0$ ja que tenim $y \geq 10$ i $x \geq 3y$)

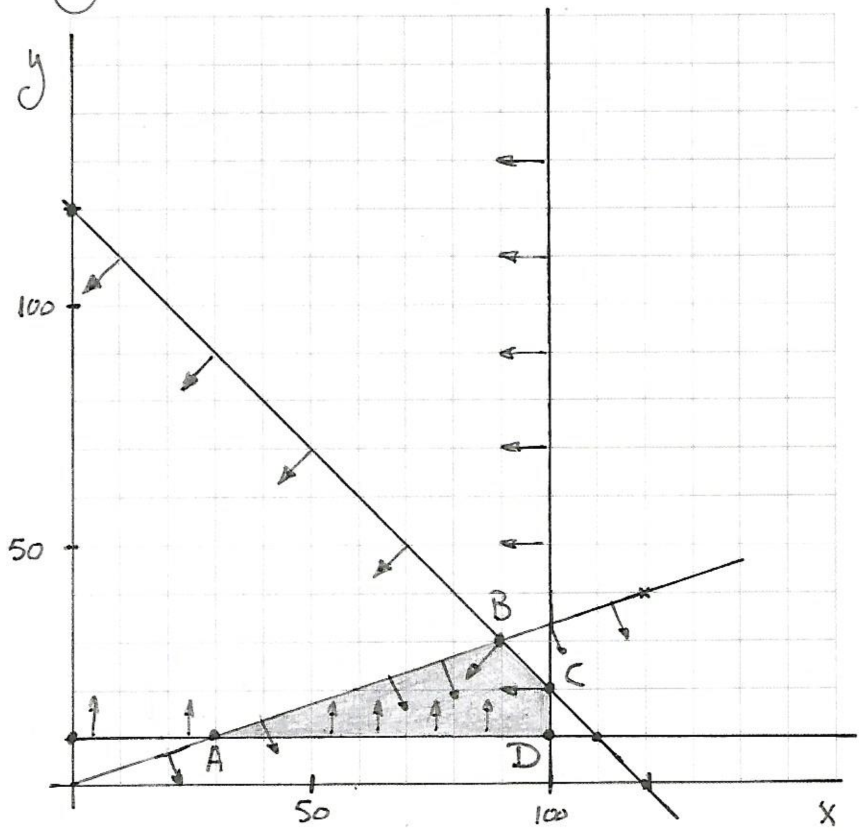
$$\Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 120 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \\ x - 3y \geq 0 \end{cases}$$

$x + y \leq 120 \rightarrow x + y = 120 \rightarrow$

x	y
0	120
120	0

$x - 3y \geq 0 \rightarrow x - 3y = 0 \rightarrow$

x	y
0	0
120	40



b) Quina és la producció mensual que li aporta el màxim benefici un cop venuda? Quin és aquest benefici?
[1,25 punts]

Sabem que el màxim i el mínim d'una funció contínua a una regió tancada, s'assoleixen als vèrtex de la regió.

1r| Calculem els vèrtex:

A: $\begin{cases} x-3y=0 \\ y=10 \end{cases} \rightarrow x-30=0 \rightarrow x=30$ $\underline{A=(30,10)}$

B: $\begin{cases} x+y=120 \\ x-3y=0 \end{cases}$ $\begin{array}{r} x+y=120 \\ -\ x-3y=0 \\ \hline 4y=120 \end{array} \rightarrow y=30$ $x+30=120 \rightarrow x=90$ $\underline{B=(90,30)}$

C: $\begin{cases} x+y=120 \\ x=100 \end{cases} \rightarrow 100+y=120 \rightarrow y=20$ $\underline{C=(100,20)}$

D: $\begin{cases} x=100 \\ y=10 \end{cases} \rightarrow \underline{D=(100,10)}$

2n| trobem el valor de la funció objectiu als vèrtex:

$B(A) = 20\cdot30+25\cdot10 = 850$ €

$B(B) = 20\cdot90+25\cdot30 = \boxed{2.550 €}$ valor màxim

$B(C) = 20\cdot100+25\cdot20 = 2.500$ €

$B(D) = 20\cdot100+25\cdot10 = 2.250$ €

Solució: Assoleix el benefici màxim si fabrica 90 cadires i 30 taules. Aquest benefici és de 2.550 €

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que es compleix que $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^2$.
[1,25 punts]

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podem comprovar que $A^{-1} = A^2$ de dues formes:

1a) Comprovant que $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = Id.$

$$\bullet\ A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\bullet\ A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\rightarrow A^2 = A^{-1}$ ✓.

2a) Calculant A^{-1} i veient que coincideix amb A^2

$$\bullet\ |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$$

$$\bullet\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1} \quad (= A^2) \checkmark.$$

b) Resoleu l'equació matricial $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad AX + B = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad AX = I - B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad AX = I - B$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{Id.}} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{Id} X = A^{-1}(I - B)$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \qquad X = A^{-1} \cdot (I - B)$$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. El benefici d'una empresa, expressat en milions d'euros, és donat per la funció següent, en què x indica el nombre d'anys que han passat des del moment que va començar a funcionar:

$$B(x)=\frac{5x+20}{x^2+9}-\frac{20}{9}.$$

***a*)** Quin és el benefici en el moment en què l'empresa comença a funcionar? En quin moment l'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues?
[1,25 punts]

- Quan va començar a funcionar $x=0$

$$B(0)=\frac{5\cdot 0+20}{0^2+9}-\frac{20}{9}=\frac{20}{9}-\frac{20}{9}=0 \text{ milions d'euros}$$

- Estudiem el signe de la funció.

$$B(x)=\frac{5x+20}{x^2+9}-\frac{20}{9}=\frac{45x+180-20x^2-180}{9(x^2+9)}=$$

$$=\frac{5x(9-4x)}{9(x^2+9)}$$ el signe de $B(x)$ només depèn de

$5x(9-4x)$ ja que $9(x^2+9)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$$5x(9-4x)=0 \begin{cases} 5x=0 \longrightarrow x=0 \\ 9-4x=0 \longrightarrow x=\frac{9}{4} \end{cases} = 2 \text{ anys i } 3 \text{ mesos.}$$

0 1 2 $\frac{9}{4}$ ...

\+ −

- $x=1 \rightarrow 5\cdot 1(9-4\cdot 1)=25>0$
- $x=3 \rightarrow 5\cdot 3(9-4\cdot 3)=-45<0$

L'empresa passa de tenir beneficis a tenir pèrdues al cap de 2 anys i 3 mesos.

b) En quin moment aconsegueix l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici màxim?
[1,25 punts]

Ens demanen que trobem el màxim de la funció B(x)

1r| Derivem B(x):

$$B'(x) = \frac{5(x^2+9) - (5x+20)\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{5x^2+45-10x^2-40x}{(x^2+9)^2}$$

$$= \frac{-5x^2-40x+45}{(x^2+9)^2} = -5\cdot\frac{x^2+8x-9}{(x^2+9)^2}$$

2n| Igualem la derivada a zero per trobar els punts singulars de B(x):

$$-5\cdot\frac{x^2+8x-9}{(x^2+9)^2} = 0 \longrightarrow x^2+8x-9=0 \longrightarrow (x+9)(x-1)=0 \begin{cases} x=-9 \\ x=1 \end{cases}$$

Com que el domini de B(x) és $[0,+\infty)$ no hem de tenir en compte $x=-9$.

3r| Comprovem que $x=1$ és el màxim que busquem, fent servir el criteri del signe de la la derivada:

x	0		1		...
B'(x)		+	0	−	
B(x)		↗	màx	↘	

B(x) té un màxim quan $x=1$

Com que $(x^2+9)^2>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ el signe de $B'(x)$ només depèn de $-5(x^2+8x-9)$

- $x=\frac{1}{2} \longrightarrow -5\left(\frac{1}{4}+4-9\right)=\frac{95}{4}>0$
- $x=2 \longrightarrow -5(4+16-9)=-105<0$

4t| Calculem el valor del màxim:

$$B(1) = \frac{5\cdot 1+20}{1^2+9} - \frac{20}{9} = \frac{5}{18}$$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	a	
	b	
	Total	

[Pàgina per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió.]

Solució: L'empresa aconsegueix el benefici màxim al cap d'un any. Aquest benefici és de $\frac{5}{18}$ milions d'euros.

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 3

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. La taula següent reflecteix el preu unitari, expressat en euros, de tres productes P_1, P_2 i P_3, subministrats a un restaurant per dues empreses diferents E_1 i E_2:

	E_1	E_2
P_1	6	5
P_2	5	8
P_3	9	7

El restaurant haurà de fer dues comandes: una aquesta setmana i una altra la setmana que ve. Aquesta setmana necessita 8 unitats del producte P_1, 5 unitats del producte P_2 i 12 unitats del producte P_3; mentre que per a la setmana vinent necessitarà 10 unitats del producte P_1, 15 unitats del producte P_2 i 7 unitats del producte P_3.

a) Escriviu en forma matricial la informació que relaciona el preu unitari dels productes i les empreses subministradores, i també la informació de les quantitats de productes demanats en cada una de les dues comandes que ha de fer el restaurant.
[1,25 punts]

• La matriu que relaciona el preu unitari dels productes i les empreses és:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

• Les matrius files de les dues comandes són:

$$B = (8 \quad 5 \quad 12) \quad i \quad C = (10 \quad 15 \quad 7)$$

b) Calculeu a quina de les dues empreses ha d'encarregar el restaurant cada una de les comandes perquè li surti més econòmica i a quin preu li sortirà cadascuna.
[1,25 punts]

Per calcular el preu de les comandes a cada empresa calculem:

$$\bullet\ B \cdot A = (8\ 5\ 12)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (181\ \ 164)$$

Per tant la 1a comanda surt més econòmica a la E_2 i costarà 164 €

$$\bullet\ C \cdot A = (10\ 15\ 7)\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} = (198\ \ 219)$$

Per tant la 2a comanda surt més econòmica a la E_1 i costarà 198 €

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	*a*	
	b	
	Total	

2. Una empresa vol fabricar un producte nou. Encomana un estudi de mercat que determina que l'evolució de les vendes al llarg dels propers sis anys seguirà la funció $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$, en què $f(t)$ representa la quantitat de milers d'unitats venudes en funció del temps $t \in [0, 6]$ expressat en anys.

a) Quantes unitats vendrà el primer any? Tret de l'instant inicial ($t = 0$), es preveu que hi haurà algun altre any en què no es produirà cap venda?

[1,25 punts]

- El 1r any $t=1$: $f(1) = 1 - 12 + 36 = 25$
- Per saber si algun any no es produirà cap venda resolem l'equació $f(t) = 0 \rightarrow t^3 - 12t^2 + 36t = 0$

$\rightarrow t(t^2 - 12t + 36) = 0 \rightarrow t(t-6)^2 = 0$ $\nearrow t = 0$, $\searrow (t-6)^2 = 0 \rightarrow t = 6$

Solució: Al cap d'un any es vendran 25.000 unitats.
El 6è any no es produiran vendes.

b) En quin any es produirà el màxim nombre de vendes i quants productes s'hauran venut aquell any?
[1,25 punts]

Volem trobar el màxim de la funció $f(x)$.

1r| Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t^2 - 8t + 12)$$

2n| Resolem l'equació $f'(x) = 0$ per trobar els punts singulars de $f(x)$.

$$3(t^2 - 8t + 12) = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \rightarrow (x-6)(x-2) = 0$$

$$\nearrow x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$$
$$\searrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

3r| Per saber si a $x=6$ i a $x=2$ tenim màxims, mínims o punts d'inflexió, fem servir el criteri de la 2a derivada:

- $f''(x) = 3\cdot(2t-8) = 6(t-4)$
- $f''(2) = 6\cdot(2-4) = -12 < 0 \rightarrow f(x)$ té un màxim quan $x=2$
- $f''(6) = 6\cdot(6-4) = 12 > 0 \rightarrow f(x)$ té un mínim quan $x=6$

4t| Calculem $f(2) = 8 - 48 + 72 = 32$

Solució: El màxim de vendes es produeix el segon any; el nombre de productes venuts és de 32.000 unitats

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	*a*	
	b	
	Total	

3. Una fàbrica especialitzada en roba d'esport té problemes amb el subministrament de les fibres. Per a satisfer una comanda de samarretes i malles només disposa de 90 km de fibra de polipropilè, 3,2 km de fibra de poliamida i 6,8 km de fibra d'elastà. Ha de fabricar, com a mínim, 80 samarretes i 50 malles.

Per a fabricar cada peça de roba, tant si és una samarreta com si són unes malles, calen en total 200 metres de fibra, dels quals el 90 % són de polipropilè en ambdós casos. En la composició de les samarretes hi ha, a més a més, un 6 % de poliamida i un 4 % d'elastà, i en la composició de les malles hi ha un 2 % de poliamida i un 8 % d'elastà.

El benefici que el fabricant obté per cada samarreta que fabrica és de 5 € i per cadascuna de les malles obté un benefici de 3 €.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió de les possibles opcions que té el fabricant per a satisfer la comanda amb les fibres disponibles.
[1,25 punts]

x = nº Samarretes

y = nº Malles

Funció objectiu: $B(x,y) = 5x + 3y$

• 90% de 200 = 180, 6% de 200 = 12, 4% de 200 = 8, 2% de 200 = 4

8% de 200 = 16.

	Polipropilè	Poliamida	Elastà
x	180	12	8
y	180	4	16
	≤ 90.000 m	≤ 3.200 m	≤ 6800 m

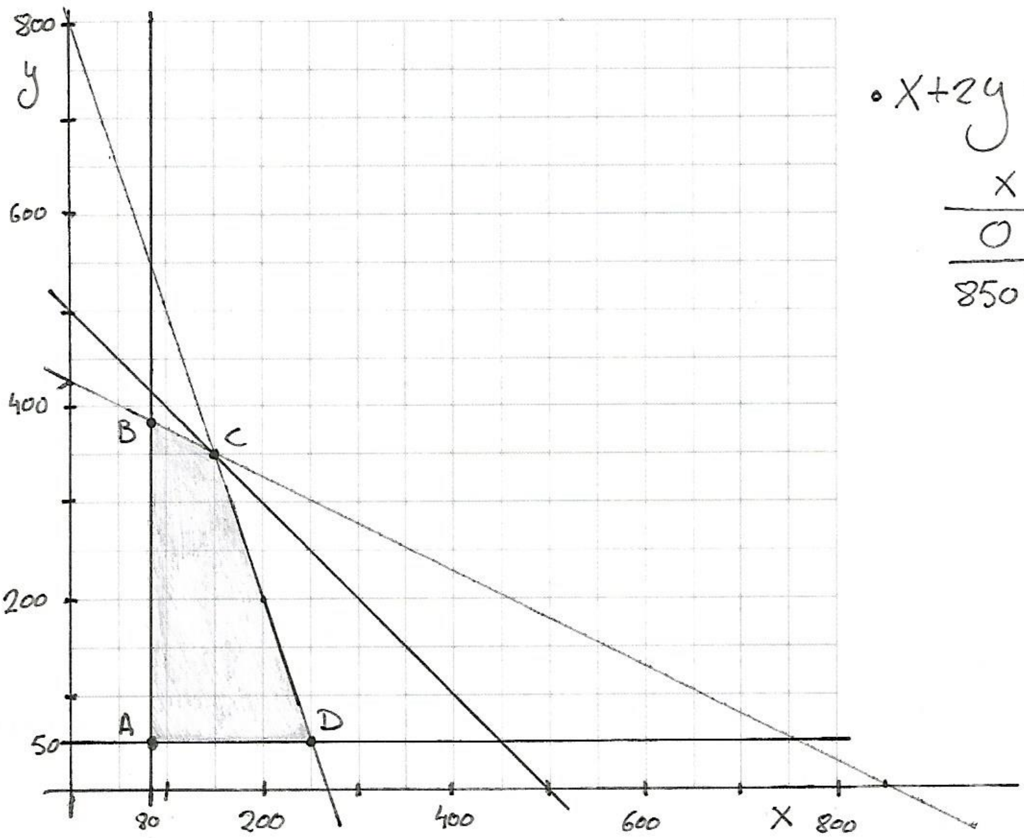
$$\rightarrow \begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ 180x + 180y \leq 90.000 \\ 12x + 4y \leq 3200 \\ 8x + 16y \leq 6800 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 80 \\ y \geq 50 \\ x + y \leq 500 \\ 3x + y \leq 800 \\ x + 2y \leq 850 \end{cases}$$

• $x + y = 500$

x	y
0	500
500	0

• $3x + y = 800$

x	y
0	800
200	200



• $x + 2y = 850$

x	y
0	425
850	0

b) Calculeu quantes samarretes i quantes malles s'han de fabricar perquè el benefici sigui màxim. Quin és aquest benefici?
[1,25 punts]

Com que el màxim i mínim d'una funció contínua a una regió tancada s'assoleixen als vèrtex, calculem els vèrtex de la nostra regió objectiu:

- A: $\begin{cases} x = 80 \\ y = 50 \end{cases} \longrightarrow \underline{A = (80, 50)}$

- B: $\begin{cases} x = 80 \\ x + 2y = 850 \end{cases} \longrightarrow 80 + 2y = 850 \longrightarrow y = \dfrac{850-80}{2} = 385$ $\quad \underline{B = (80, 385)}$

- C: $\begin{cases} x + y = 500 \\ 3x + y = 800 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{r} -\;x + y = 500 \\ 3x + y = 800 \\ \hline -2x \quad = -300 \end{array} \longrightarrow x = 150 \longrightarrow 150 + y = 500 \longrightarrow y = 350$ $\quad \underline{C = (150, 350)}$

- D: $\begin{cases} 3x + y = 800 \\ y = 50 \end{cases} \longrightarrow 3x + 50 = 800 \longrightarrow x = \dfrac{800-50}{3} = 250$ $\quad \underline{D = (250, 50)}$

Substituïm els vèrtex a la funció objectiu per trobar el màxim:

- $B(A) = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 50 = 550$ €
- $B(B) = 5 \cdot 80 + 3 \cdot 385 = 1.555$ €
- $B(C) = 5 \cdot 150 + 3 \cdot 350 = \boxed{1.800 \text{ €}}$
- $B(D) = 5 \cdot 250 + 3 \cdot 50 = 1.400$ €

Solució
El benefici màxim és de 1800 € i s'obté fent 150 samarretes i 350 malles

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	*a*	
	b	
	Total	

4. Considereu la funció $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

a) Trobeu els valors dels paràmetres a, b i c sabent que la funció té un màxim en el punt (2, 1) i un mínim en el punt (0, −1).

[1,25 punts]

• Té un màxim en (2,1) → Passa per (2,1) → $f(2) = 1$ ①

→ En $x=2$ té un màxim → $f'(2) = 0$ ②

• Té un mínim en (0,−1) → Passa per (0,−1) → $f(0) = -1$ ③

→ En $x=0$ té un mínim → $f'(0) = 0$ ④

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

① $a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c = 1 \longrightarrow 16a + 4b + c = 1 \longrightarrow 8a + 2b = 1$

② $4a \cdot 2^3 + 2b \cdot 2 = 0 \longrightarrow 32a + 4b = 0 \longrightarrow -\ 8a + b = 0$

③ $a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c = -1 \longrightarrow \boxed{c = -1}$ $\qquad 0 \ \boxed{+b = 1}$

④ $4a \cdot 0^3 + 2b \cdot 0 = 0 \longrightarrow 0 = 0$

$8a + 1 = 0$

$\boxed{a = -\frac{1}{8}}$

$$\boxed{f(x) = -\frac{x^4}{8} + x^2 - 1}$$

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció per als valors dels paràmetres a, b i c trobats a l'apartat anterior.
[1,25 punts]

Els intervals de creixement i decreixement venen donats pel signe de la derivada

- Calculem $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{4x^3}{8} + 2x = -\frac{x^3}{2} + 2x$$

- Estudiem el signe de $f'(x)$

1r) Mirem quan $f'(x) = 0$:

$$-\frac{x^3}{2} + 2x = 0 \rightarrow x\left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ -\frac{x^2}{2} + 2 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Hem de mirar el signe de $f'(x)$ als intervals

$(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, +\infty)$

x	...	-2		0		2	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	màx	$\searrow$	mín	$\nearrow$	màx	$\searrow$

- $f'(-3) = -\frac{-27}{2} - 6 = \frac{15}{2} > 0$
- $f'(-1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$
- $f'(1) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} > 0$
- $f'(3) = -\frac{27}{2} + 6 = -\frac{15}{2} < 0$

Solució:
$f(x)$ és creixent quan $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$
$f(x)$ és decreixent quan $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	*a*	
	b	
	Total	

5. En una empresa de tecnologia hi ha un total de 100 empleats dividits en tres seccions: administració, recerca i publicitat. Tots els empleats de cada secció cobren el mateix sou mensual: 2.000 euros els d'administració, 2.400 euros els de recerca i 2.800 euros els de publicitat, i la despesa total mensual en salaris de l'empresa és de 228.000 euros.

a) Plantegeu i estudieu el sistema d'equacions associat. Justifiqueu si es pot determinar el nombre d'empleats de cada secció.

[1,25 punts]

x = Empleats administració
y = Empleats recerca
z = Empleats publicitat

Total empleats 100 $\longrightarrow$ $x + y + z = 100$

Admin: 2.000
Rec: 2400
Pub: 2800

$\left.\begin{array}{l}\text{Admin: } 2.000\\ \text{Rec: } 2400\\ \text{Pub: } 2800\end{array}\right]$ total 228.000 $\longrightarrow$ $2000x + 2400y + 2800z = 228.000$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 2000x + 2400y + 2800z = 228.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \end{cases}$$

Aplicant Gauss: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 5F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array}\right)$

Veiem que el rang de la matriu del sistema és 2 i el rang de la matriu ampliada també és 2 i que tenim 3 incògnites $\xrightarrow{\text{T}^{\text{a}}\text{ Rouché}}$ S.C.I amb 1 grau de llibertat

$\longrightarrow$ No es pot determinar la solució.

b) Una reestructuració recent ha obligat a acomiadar $\frac{1}{10}$ part dels empleats d'administració, $\frac{1}{6}$ part dels de recerca i $\frac{1}{5}$ part dels de publicitat. Aquest fet ha significat un estalvi mensual en salaris de 33.200 euros. Determineu quants empleats tenia cada secció de l'empresa abans de la reestructuració.
[1,25 punts]

Hem d'afegir al sistema anterior l'equació:

$2000 \cdot \frac{x}{10} + 2400 \cdot \frac{y}{6} + 2800 \cdot \frac{z}{5} = 33.200$ al simplificar:

$5x + 10y + 14z = 830.$

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 6y + 7z = 570 \\ 5x + 10y + 14z = 830 \end{cases} \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 5 & 6 & 7 & 570 \\ 5 & 10 & 14 & 830 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - 5F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 5 & 9 & 330 \end{array}\right) \xrightarrow[5F_2 - F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right) \rightarrow \boxed{z = 20}$$

- Substituint z a la 2a fila: $y + 40 = 70 \rightarrow \boxed{y = 30}$
- Substituint y i z a la 1a fila: $x + 30 + 20 = 100 \rightarrow \boxed{x = 50}$

Solució: 50 empleats d'administració, 30 de recerca i 20 de publicitat.

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	*a*	
	b	
	Total	

6. Un centre de formació organitza un curs subvencionat que té un cost fix de 9.000 €, al qual cal sumar una quantitat que varia segons el nombre d'alumnes del curs i que és donada per la funció $0{,}02x^3 - 24x$, en què x representa el nombre d'alumnes matriculats. El Consell Comarcal ha atorgat al centre una subvenció de 5.000 € per a l'organització del curs i l'Ajuntament paga al centre 30 € per cada alumne matriculat.

La despesa que ha d'assumir el centre és la diferència entre el cost total del curs i les dues subvencions rebudes.

Quants alumnes s'han de matricular al curs perquè la despesa sigui mínima per al centre i quina seria aquesta despesa?

[2,5 punts]

• Hem d'aconseguir escriure la despesa en funció dels alumnes matriculats. Anomenem x als alumnes matriculats.

Despesa = Cost − Subvencions

$$D(x) = (9000 + 0'02x^3 - 24x) - (5000 + 30x)$$

$$D(x) = 0'02x^3 - 54x + 4.000 \qquad x \geq 0$$

• Per trobar el mínim 1r calculem la derivada per trobar els punts singulars:

$$D'(x) = 0'06x^2 - 54$$

Trobem els punts singulars resolent l'equació $D'(x) = 0$

$$0'06x^2 - 54 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{54}{0'06} \rightarrow x^2 = 900 \rightarrow x = \pm\sqrt{900} \begin{cases} 30 \\ -30 \end{cases}$$

Com que −30 no pertany al domini de D(x) el descartem i comprovem que x = +30 és el mínim que busquem. Ho fem amb el criteri de la 2a derivada:

$$D''(x) = 0'12x \qquad D''(30) = 3'6 > 0 \rightarrow D(x) \text{ té un mínim}$$

quan $x = 30$

• Calculem el valor de la despesa per a $x=30$

$$D(30) = 0'02 \cdot 30^3 - 54 \cdot 30 + 4000 = 2.920 \text{ €}$$

$\boxed{\text{Solució: La despesa serà mínima si hi ha 30 alumnes matriculats i és de 2.920 €}}$

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	Total	