MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Problema 1:

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 & si\ \ x\leq 0 \\ \frac{L(x+1)}{ax} & si\ \ x>0 \end{cases}$, $a,b\in R;\ \ a,b\neq 0$.

$a)$ Determine los valores de $a,b\in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R.

$b)$ Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

Problema 2:

Calcule el valor de $a\in R\ (a\neq 0)$ para que se verifique $\lim_{x\to 0}(1-sen^2x)^{\frac{\alpha}{x^2}}=2$.

Problema 1:

Calcule: $I=\int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}\cdot dx$.

Problema 4:

Para la función $f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$:

$a)$ Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

Problema 5:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A-kI$ según los valores de $k\in R$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcule la inversa de $A-kI$ para $k=0$.

BY NC SA

Problema 6:

$a)$ Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

$b)$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^t\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

Problema 7:

$a)$ Resuelva el sistema matricial: $\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{cases}$.

$b)$ Calcule $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$, $n \in N$.

Problema 8:

Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A(0,1,1)$ y es paralela a los planos π_1 que contiene a los siguientes puntos: $B_1(-1,0,2), B_2(1,3,1)$ y $B_3(2,-1,0)$, y $\pi_2 \equiv x + 2z = 1$.

Problema 9:

Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,1),\ \overrightarrow{u_2} = (0,3,1),\ \overrightarrow{u_3} = (1,-2,0)\ y\ \overrightarrow{u_4} = (-2,0,1).$$

$a)$ Compruebe si los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo: $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}$.

$b)$ Calcule las siguientes expresiones:

$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})$, $(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1})$, siendo $(\cdot)\ y\ (\times)$ los productos escalar y vectorial de los vectores, respectivamente.

Problema 10:

La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/d\ell$ y desviación típica 30 $\mu g/d\ell$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/d\ell$.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

$b)$ El 45 % de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

BY NC SA

RESPUESTAS

Problema 1:

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^3+bx+2 \;\; si \;\; x\leq 0 \\ \frac{L(x+1)}{ax} \;\; si \;\; x>0 \end{cases}$, $a,b\in R;\;\; a,b\neq 0.$

$a)$ Determine los valores de $a,b\in R$ para que la función $f(x)$ sea continua en R.

$b)$ Calcule aquellos valores que además hacen que la función $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $x=-1$, y determine el tipo de extremo que es.

Solución:

La función $y=x^3+bx+2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}\;\;\forall b\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **f es continua y derivable en $(-\infty,0)$**

La función $y=L(x+1)$ es continua y derivable en $\{x\in\mathbb{R}/x+1>0\}=(-1,\infty)\Rightarrow$

$y=\frac{L(x+1)}{ax}$ es continua y derivable en $(-1,0)\cup(0,\infty)\;\;\forall a\neq 0$

$\Rightarrow$ **f es continua y derivable en $(0,\infty)\;\;\forall a\neq 0$**

a) Por lo razonado anteriormente f es continua $\mathbb{R}-\{0\}\;\forall a\neq 0$

Para que f sea continua en $x=0$, debe cumplirse: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$:

$$\left.\begin{array}{c} f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^3+bx+2)=2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{L(x+1)}{ax}\right)=\frac{0}{0}\underbrace{=}_{Regla\ de\ l'Hôpital}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1/x+1}{a}\right)=\frac{1}{a} \end{array}\right\}\underbrace{\Rightarrow}_{f\ \text{continua en}\ x=0}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{f\ \text{continua en}\ x=0} 2=\frac{1}{a} \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{1}{2}$$

Para que f sea continua en $\mathbb{R}$, b puede tomar cualquier valor real y $a=\frac{1}{2}$

b) Como hemos explicado al principio la función f es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ si $a\neq 0$

En particular, si $x\in(-\infty,0)$: $\quad f'(x)=3x^2+b$

Si f tiene un extremo relativo en $x=-1$, debe cumplirse $f'(1)=0\Rightarrow 3+b=0\Rightarrow b=-3$

Existe también la derivada segunda de la función en este intervalo $f''(x)=6x$

$f''(-1)=-6\Rightarrow$ En $x=-1$ hay un máximo relativo

Para que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$ y tenga un extremo relativo en $x=-1$

$$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b=-3}$$

El punto $(-1,4)$ **es un mínimo relativo**

BY NC SA

Autora: Milagros Latasa Asso
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 2:

Calcule el valor de $a \in R\ (a \neq 0)$ para que se verifique $\lim_{x\to 0}(1-sen^2x)^{\frac{\alpha}{x^2}} = 2$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}(1-sen^2x)^{\frac{\alpha}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(cos^2x)^{\frac{\alpha}{x^2}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{x^2}\,Ln(cos^2x)} = e^L$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{a}{x^2}\,Ln(cos^2x) = \lim_{x\to 0}\frac{2a\,Ln(cosx)}{x^2} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital} \lim_{x\to 0}\frac{2a\frac{-senx}{cosx}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\,senx}{x\,cosx} = \frac{0}{0}$$

$$L \underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital} \lim_{x\to 0}\frac{-a\,cosx}{cosx - x\,senx} = \frac{-a}{1} = -a$$

Entonces: $\lim_{x\to 0}(1-sen^2x)^{\frac{\alpha}{x^2}} = e^{-a} = 2 \Longrightarrow \frac{1}{e^a} = 2 \Longrightarrow \frac{1}{2} = e^a \Longrightarrow a = Ln\left(\frac{1}{2}\right) = -Ln2$

El valor de $a \in R\ (a \neq 0)$ / $\lim_{x\to 0}(1-sen^2x)^{\frac{\alpha}{x^2}} = 2$ es $\boldsymbol{a = -Ln2}$

BY NC SA

Problema 3:

Calcule: $I = \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} \cdot dx$.

Solución:

$$u = x^3 - 3x + 2 \quad \Longrightarrow du = (3x^2 - 3x\,)dx = 3(x^2 - x\,)dx$$

$$I = \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} \cdot dx = \frac{1}{3}\int \frac{3(x^2-1)}{x^3-3x+2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{u'}{u}\, dx = \frac{1}{3}\, Ln\,|u| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\, Ln\,|x^3 - 3x + 2| + C$$

$$\boldsymbol{I = \int \frac{x^2-1}{x^3-3x+2} dx \;=\; \frac{1}{3}\, Ln\,|x^3 - 3x + 2| + C}$$

BY NC SA

Problema 4:

Para la función $f(x)=\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}$:

$a)$ Estudie el dominio de definición y calcule las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas caso de existir.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=1$.

Solución:

a) $x^2-x-2=0 \Longrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}$

$$Dom\, f = \mathbb{R}-\{-1,2\}$$

- $x=-1$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{-3}{0}=-\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{-3}{0}=+\infty$$

$$x=-1 \text{ es asíntota vertical}$$

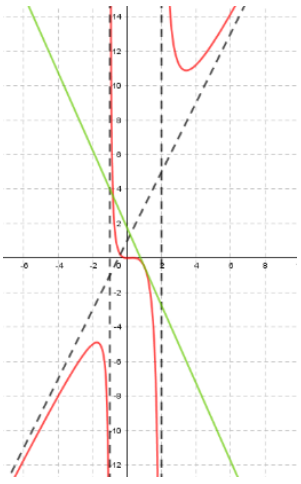
- $x=2$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to2^-} f(x)=\lim_{x\to2^-}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{12}{0}=-\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\frac{12}{0}=+\infty$$

$$x=2 \text{ es asíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=-\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}=\infty$$

No existen asíntotas horizontales



- Veamos por último si existen asíntotas oblicuas:

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}:x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2}{x^3-x^2-2x}=2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-x^2}{x^2-x-2}-2x\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-x^2-2x(x^2-x-2)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x}{x^2-x-2}=1$$

Análogamente $n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=1$

La recta $\boldsymbol{y=2x+1}$ es una asíntota oblicua de f en $-\infty$ y en $+\infty$

b) La ecuación de la recta tangente es $y-y_1=m(x-x_1)$ siendo (x_1,y_1)un punto de la recta, por ejemplo, el punto de tangencia, y $m=f'(abscisa\ punto\ de\ tangencia)=f'(x_1)$

$$x_1=1 \qquad y_1=\frac{2.1^3-1^2}{1^2-1-2}=-\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=\frac{(6x^2-2x)(x^2-x-2)-(2x^3-x^2)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}=\frac{2x^4-4x^3-11x^2+4x}{(x^2-x-2)^2}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m=f'(1)=\frac{2.1^4-4.1^3-11.1^2+4.1}{(1^2-1-2)^2}=-\frac{9}{4}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es entonces:

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{9}{4}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}$$

La solución es: $y = -\frac{9}{4}x + \frac{7}{4}$

BY NC SA

Problema 5:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A - kI$ según los valores de $k \in R$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

$b)$ Calcule la inversa de $A - kI$ para $k = 0$.

Solución:

$$a)\ A - kI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix}$$

El rango máximo posible es 3 y $rango(A - kI) = 3 \Leftrightarrow Det\ (A - kI) \neq 0$

$$Det\ (A - kI) = \begin{vmatrix} -k & 0 & -2 \\ 1 & 2-k & 1 \\ 1 & 0 & 3-k \end{vmatrix} = (2-k)\begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = (2-k)(k^2 - 3k + 2)$$

$Det\ (A - kI) = (2-k)(k^2 - 3k + 2) = 0 \Longrightarrow 2 - k = 0$ o bien $k^2 - 3k + 2 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow k = 2$ o bien $k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{2}{1} \Longrightarrow k = 1$ o bien $k = 2$

- Si $k \neq 1, 2,\ Det\ (A - kI) \neq 0$ .Existe un menor de orden 3 distinto de 0, luego

$$rango(A - kI) = 3$$

- Si $k = 1\ rango(A - kI) = rango\ (A - I) \neq 3$

  El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ de la matriz $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es distinto de 0 lo que justifica que en este caso:

$$rango(A - I) = 2$$

- Si $k = 2\ rango(A - kI) = rango\ (A - 2I) \neq 3$

  $rango\ (A - 2I) = rango \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{f1' = f2 + 2f1 \\ f3' = f3 - f1}}{=} rango \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ ya que esta matriz solo tiene un vector fila linealmente independiente

$$rango(A - 2I) = 1$$

Si $k \neq 1, 2: rango(A - kI) = 3\ ,\ rango\ (A - I) = 2\ ,\ rango(A - 2I) = 1$

b) Para $k = 0\ A - kI = A$ y $Det\ A = (2-0)(0^2 - 3.0 + 2) = 4 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t$

BY NC SA

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 6:

$a)$ Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcule justificadamente $\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix}$.

$b)$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelva el sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^t\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, donde A^t es la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) $$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{Segunda columna} \\ \text{suma de dos vectores}}} \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2d & 2f & 2f \\ -g & -i & -i \\ a & c & c \end{vmatrix}}_{\substack{=0 \\ \text{tiene dos} \\ \text{columnas iguales}}} =$$

$$\underbrace{=}_{\substack{\text{Sacando de F1} \\ \text{el factor 2}}} 2\begin{vmatrix} d & e & f \\ -g & -h & -i \\ a & b & c \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\text{Intercambiando F2 y F3}} -2\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{\text{Intercambiando F2 y F1}} 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{Sacando de F3} \\ \text{el factor} -1}} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

$$\begin{vmatrix} 2d & 2e+2f & 2f \\ -g & -h-i & -i \\ a & b+c & c \end{vmatrix} = -10$$

b) $$A - \frac{1}{2}A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema $\left(A - \frac{1}{2}A^t\right) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$

El determinante de la matriz de coeficientes

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$el sistema es de Cramer y la solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 9 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{6}{2} = 3$$

El sistema es compatible determinado y la solución única es:

$$\boldsymbol{x = 2 \qquad y = -1 \qquad z = 3}$$

BY NC SA

Problema 7:

$a)$ Resuelva el sistema matricial: $\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases}$.

$b)$ Calcule $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n, n\in N$.

Solución:

a) $:\begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \\ 3X-2Y=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\end{cases} \underset{E2'=3E2}{\overset{E1'=2E1}{\sim}} \begin{cases} 4X+6Y=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & 14\end{pmatrix} \\ 9X-6Y=\begin{pmatrix}15 & 9\\ -6 & 12\end{pmatrix}\end{cases} \underset{E2''=E1'+E2'}{\overset{E1''=E1}{\sim}} \begin{cases} 2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix} \\ 13X=\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix}\end{cases}$

$$13X=\begin{pmatrix}13 & 13\\ 0 & 26\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$2X+3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}\Rightarrow 3Y=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es :

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad Y=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

b) Razonamos por inducción:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^2.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^3.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ -15 & 1\end{pmatrix}$$

Supongamos que para $k\in\mathbb{N}$ se cumple $\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}2^k & 0\\ -(2^k-1) & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k & 0\\ -2^k+1 & 1\end{pmatrix}$

Se conserva también para $k+1$

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^k.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k & 0\\ -2^k+1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k.2 & 0\\ 2.(-2^k+1)-1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 0\\ -2^{k+1}+2-1 & 1\end{pmatrix}==\begin{pmatrix}2^{k+1} & 0\\ -2^{k+1}+1 & 1\end{pmatrix}$$

Tal como hemos supuesto. Por tanto:

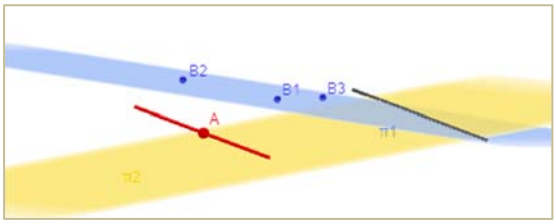
$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\mathbf{2^n} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-2^n+1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \forall n\in N$$

BY NC SA

Problema 8:

Calcule la ecuación implícita de la recta (como intersección de dos planos) que pasa por el punto $A(0,1,1)$ y es paralela a los planos π_1 que contiene a los siguientes puntos: $B_1(-1,0,2), B_2(1,3,1)\ y\ B_3(2,-1,0)$, y $\pi_2 \equiv x+2z=1$.

Solución:



La dirección de la recta buscada puede obtenerse como producto vectorial de los dos vectores asociados a π_1 y π_2

$\overrightarrow{n_1}$ paralelo a $\overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-7,1,-11)$

$\overrightarrow{n_2} = (1,0,2)$. El vector $\vec{v}$ paralelo a la recta es también paralelo a $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2,3,-1)$

La ecuación continua de la recta buscada es entonces $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$

Pasamos a implícitas, igualando primer y segundo términos y primero y tercero:

$$r \equiv \begin{cases} 3x = 2y-2 \\ -x = 2z-2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$$

Una posible solución es $r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}$

Es válida la compuesta por cualquier pareja de planos que contengan al punto $A(0,1,1)$ y la dirección $\vec{v} = (2,3,-1)$

BY NC SA

Problema 9:

Sean los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1, 1, 1),\ \overrightarrow{u_2} = (0, 3, 1),\ \overrightarrow{u_3} = (1, -2, 0)\ y\ \overrightarrow{u_4} = (-2, 0, 1).$$

$a)$ Compruebe si los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo: $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4}$.

$b)$ Calcule las siguientes expresiones:

$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})$, $(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1})$, siendo $(\cdot)\ y\ (\times)$ los productos escalar y vectorial de los vectores, respectivamente.

Solución:

a) $$\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = 2(-1, 1, 1) - (0, 3, 1) = (-2, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3} = (-1, 1, 1) + (1, -2, 0) = (0, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_4} = (-2, 0, 1)$$

$\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow$ el producto mixto $(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}) \neq 0$

$$(\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow$$

$\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$ son linealmente independientes

b) $(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) = [2(-1, 1, 1) - (0, 3, 1)].[2(-1, 1, 1) - (0, 3, 1)] =$

$= (-2, -1, 1)\,.(-2, -1, 1) = |(-2, -1, 1)|^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4 + 1 + 1 = 6$

$$(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) = [(-2, 0, 1) - (-1, 1, 1)] \times [(-2, 0, 1) - (-1, 1, 1)] =$$

$$= (-1, -1, 0) \times (-1, -1, 0) = \vec{0} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$(2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) = 6$ $\qquad$ $(\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) \times (\overrightarrow{u_4} - \overrightarrow{u_1}) = \vec{0}$

BY NC SA

Problema 10:

La cantidad de hierro en suero de una mujer adulta sigue una distribución normal de media 120 $\mu g/d\ell$ y desviación típica 30 $\mu g/d\ell$. Se considera que una mujer tiene un tipo de anemia por falta de hierro si su cantidad de hierro no llega a 75 $\mu g/d\ell$.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro?

$b)$ El 45 % de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a k. Averigüe el valor de k.

Solución:

Sea X la variable que mide la cantidad de hierro en suero de una mujer adulta $X = N(120,30)$

$a)$ $P(\text{“una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro”}) = P(X < 75) =$

$$= P\left(\frac{X-120}{30} < \frac{75-120}{30}\right) = P(Z < -1.5) = P(Z > 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

La probabilidad de que una mujer adulta tenga anemia por falta de hierro es 0.0668

$b)$ El 45 % de mujeres adultas tienen una cantidad de hierro en suero superior a $k \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 0.45 \Longrightarrow P(X \leq k) = 0.55$$

$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X-120}{30} \leq \frac{k-120}{30}\right) = P\left(Z \leq \frac{k-120}{30}\right) = 0.55$$

Los valores en la tabla de $Z = N(0,1)$ más próximos a 0.55 son 0.5478 y 0.5517, correspondientes a los valores 0.12 y 0.13. La media de ambos 0.125 sería 0.54975 que es prácticamente 0.55. Nos quedamos entonces con este valor para $\frac{k-120}{30}$

$$\frac{k-120}{30} = 0.125 \Longrightarrow k = 120 + 30\ .\ 0.125 = 123.75$$

$$\boldsymbol{k = 123.75}$$

BY NC SA

Textos Marea Verde

Logo de la Comunidad	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2020–2021** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Problema 1:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 5 - ax^2 \ \ si \ \ x \leq 1 \\ \frac{6}{ax} \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$, $a \in R; \ \ a \neq 0$.

$a)$ Calcule los valores de $a \in R$ para que la función $f(x)$ sea continua.

$b)$ Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la rectas $x = 0$ y $x = e$ sea $6u^2$.

Problema 2:

Calcule el siguiente límite: $\lim_{x \to 1} \left(sen \ \frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

Problema 3:

Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

Problema 4:

Para la función $f(x) = \frac{e^x}{x^3 - x}$:

$a)$ Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x = 2$.

Problema 5:

Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in R$.

$b)$ Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

BY NC SA

Problema 6:

Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$a)$ Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

$b)$ Calcule la matriz X que verifica la ecuación matricial $I + B \cdot X = C_1 \cdot C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Problema 7:

Dado el sistema $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$:

$a)$ Discuta según los valores de $a \in R$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

$b)$ Resuelva el sistema para $a = 0$.

Problema 8:

Calcule la ecuación de la recta r que pase por el punto $A(1, -2, 0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $B(1, 0, 1), C(3, 1, 0)$ y $D(2, -1, 1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

Problema 9:

En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 corresponden a coches eléctricos.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un choche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

$b)$ Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Problema 10:

Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

BY NC SA

RESPUESTAS

Problema 1:

Dada la función $f(x)=\begin{cases}5-ax^2 & si\ x\le 1\\ \frac{6}{ax} & si\ x>1\end{cases}$, $a\in R;\ a\neq 0$.

$a)$ Calcule los valores de $a\in R$ para que la función $f(x)$ sea continua.

$b)$ Determine justificadamente para qué valor de los anteriores se verifica que el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la rectas $x=0$ y $x=e$ sea $6u^2$.

Solución:

a) La función $y=5-ax^2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}\ \ \forall a\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua y derivable en $(-\infty,1)$

La función $y=\frac{6}{ax}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}\quad \forall a\neq 0\Rightarrow$

f es continua y derivable en $(1,\infty)\ \forall a\neq 0$

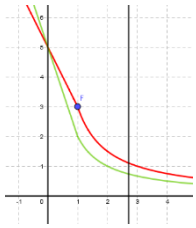
Para que f sea continua en $x=1$, debe cumplirse: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$:

$$\left.\begin{cases}f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(5-ax^2)=5-a\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{6}{ax}\right)=\frac{6}{a}\end{cases}\right\}\underbrace{\Rightarrow}_{f\text{ continua en }x=1} 5-a=\frac{6}{a}\Rightarrow 5a-a^2=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2-5a+6=0\Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{3}{2}$$

f es continua en $\mathbb{R}$ si $a=2$ o bien $a=3$

b) $f(x)=0\Rightarrow 5-ax^2=0\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{a}}$



No hay valores positivos menores que 1 que anulen f ya que $1<+\sqrt{\frac{5}{a}}$

Sea A el área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la recta $x=0$ y $x=e$

$$A=\left|\int_0^1 f(x)dx\right|+\left|\int_1^e f(x)dx\right|=\left|\int_0^1(5-ax^2)dx\right|+\left|\int_1^e\frac{6}{ax}dx\right|=$$

$$=\left|\left[5x-\frac{ax^3}{3}\right]_0^1\right|+\left|\left[\frac{6}{a}Ln\,x\right]_1^e\right|=\left|5-\frac{a}{3}\right|+\left|\frac{6}{a}Ln\,e-\frac{6}{a}Ln\,1\right|=5-\frac{a}{3}+\frac{6}{a}$$

- Si $a=2\quad A=5-\frac{2}{3}+\frac{6}{2}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}u^2$
- Si $a=3\quad A=5-\frac{3}{3}+\frac{6}{3}=5-1+5=6u^2$

El área encerrada por la función $f(x)$, el eje OX y la recta $x=0$ y $x=e$ es $6u^2$ si $\boldsymbol{a=3}$

BY NC SA

Problema 2:

Calcule el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}\ Ln\left(sen\frac{\pi x}{2}\right)} = e^{L}$$

$$L = \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)^2}\ Ln\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{Ln\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)}{(1-x)^2} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{cos\ \frac{\pi x}{2}}{sen\ \frac{\pi x}{2}}}{-2(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{cos\frac{\pi x}{2}}{sen\frac{\pi x}{2}}}{-2(1-x)} = -\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{cos\frac{\pi x}{2}}{(1-x)sen\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{Regla\ L'Hôpital} -\frac{\pi}{4}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi x}{2}}{-sen\frac{\pi x}{2}+(1-x)\frac{\pi}{2}cos\frac{\pi x}{2}} =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-\frac{\pi}{2}sen\ \frac{\pi}{2}}{-sen\ \frac{\pi}{2}+(1-1)\frac{\pi}{2}cos\ \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{-\frac{\pi}{2}.1}{-1+0.\frac{\pi}{2}.0} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{8}$$

Luego:

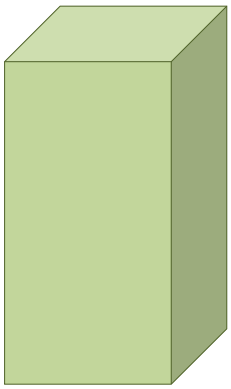
$$\lim_{x\to 1}\left(sen\ \frac{\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{(1-x)^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{8}}$$

BY NC SA

Problema 3:

Se desea construir un depósito con forma de prisma regular de base cuadrada. Además, el depósito es abierto (sin tapa superior). La capacidad total debe ser de 64 m^3. El material de construcción de los laterales tiene un precio de 70 euros por m^2, mientras que el de la base, más resistente, es de 140 euros por m^2. Halle las dimensiones del depósito para que tenga el menor coste posible.

Solución:



Sean $x\,, y$ respectivamente, la longitud del lado de la base y la altura del depósito

Debe cumplirse $V = 64\ m^3 \Longrightarrow x^2 y = 64 \Longrightarrow y = \frac{64}{x^2}$

Si pretendemos que el coste sea lo menor posible, la función coste C debe ser mínima:

$$C(x) = 140\,.x^2 + 280\,.xy = 140\,x^2 + 280\,x\,\frac{64}{x^2} = \frac{140x^3+17920}{x}$$

C es una función derivable en $(0,\infty)$, luego, podemos estudiar su monotonía y extremos a partir del signo de su derivada:

$$C'(x) = \frac{420x^2.x - (140x^3 + 17920)}{x^2} = \frac{280x^3 - 17920}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Longrightarrow 280x^3 - 17920 = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{17920}{280} = 64 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$$

	$(0,4)$	4	$(4,\infty)$
Signo de C'	Negativa	0	Positiva
Monotonía de C	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Luego el mínimo coste se alcanza si $x = 4\ m$. Para este valor $y = \frac{64}{4^2} = 4m$

El depósito debe tener forma cúbica con $4\ m$ de arista

BY NC SA

Textos Marea Verde

Problema 4:

Para la función $f(x)=\frac{e^x}{x^3-x}$:

$a)$ Estudie la existencia de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas. Calcúlelas cuando existan.

$b)$ Calcule la recta tangente a la curva en el punto $x=2$.

Solución:

a) $x^3-x=0 \Longrightarrow x(x^2-1)=0 \Longrightarrow x=0\,, x=-1$ o bien $x=1$

$$Dom\, f = \mathbb{R}-\{-1,0,1\}$$

- $x=-1$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{-1}}{0}=-\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{-1}}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

- $x=0$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{1}{0}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{1}{0}=-\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

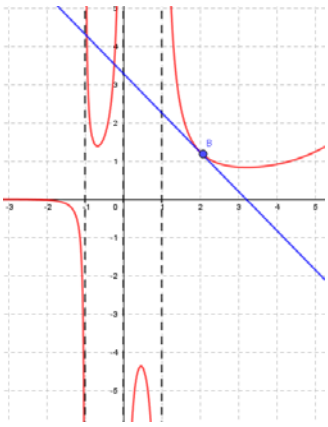
- $x=1$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^1}{0}=-\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

- $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=0 \Longrightarrow y=0$ es asíntota horizontal en$-\infty$

$\lim_{x\to \infty} f(x)=\lim_{x\to \infty}\frac{e^x}{x^3-x}=\frac{e^{\infty}}{\infty}=\infty$ ya que e^{∞} es un infinito de orden superior al del denominador



$y=0$ es asíntota horizontal en -∞

- Veamos por último si existen asíntotas oblicuas. Caso de existir, sería en $+\infty$ ya que en $-\infty$ hay asíntota horizontal

$m=\lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to \infty}\left(\frac{e^x}{x^3-x}:x\right)=\lim_{x\to \infty}\left(\frac{e^x}{x^4-x^2}\right)=\frac{e^{\infty}}{\infty}=\infty$ ya que e^{∞} es un infinito de orden superior al del denominador

No existen asíntotas oblicuas

BY NC SA

Textos Marea Verde

b) La ecuación de la recta tangente es $y - y_1 = m(x - x_1)$ siendo (x_1, y_1)un punto de la recta, por ejemplo el punto de tangencia, y $m = f'(abscisa\ punto\ de\ tangencia) = f'(x_1)$

$$x_1 = 2 \qquad y_1 = \frac{e^2}{2^3 - 2} = \frac{e^2}{6}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^3 - x) - e^x(3x^2 - 1)}{(x^3 - x)^2} = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 - x + 1)}{(x^3 - x)^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m = f'(2) = \frac{e^2(2^3 - 3.2^2 - 2 + 1)}{(2^3 - 2)^2} = -\frac{5e^2}{36}$$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es entonces:

$$y - \frac{e^2}{6} = -\frac{5e^2}{36}(x - 2)$$

La recta tangente en $x = 2$ tiene por ecuación: $y = -\frac{5e^2}{36}x + \frac{16e^2}{36}$

BY NC SA

Problema 5:

Dada la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Estudie el rango de la matriz $A = I + P$, donde I es la matriz identidad de orden 3, según los valores de $k \in R$.

$b)$ Para $k = 1$, calcule la inversa de la matriz A del apartado anterior.

Solución:

a) $A = I + P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -2k \\ 1 & -k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$

El rango máximo posible es 3 y $rangoA = 3 \Leftrightarrow Det\ A \neq 0$

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-k & -2k \\ 1 & -k & 1 \end{vmatrix} = (1-k) - 2k - k - (1-k) - 1 - 2k^2 = -2k^2 - 3k - 1$$

$$Det\ A = 0 \Longrightarrow -2k^2 - 3k - 1 = 0 \Longrightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{-4} = \begin{matrix} -1 \\ -1/2 \end{matrix}$$

- Si $k \neq -1, k \neq -1/2,\ Det\ A \neq 0$ .Existe un menor de orden 3 distinto de 0, luego $rangoA = 3$

- Si $k = -1$

  En este caso: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $rango\ A \neq 3$ dado que $Det\ A = 0$

El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ de la matriz A es distinto de 0 lo que justifica que:

$$rangoA = 2$$

- Si $k = -1/2$

  En este caso: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ y $rango\ A \neq 3$ dado que $Det\ A = 0$

El menor de orden 2 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ de la matriz A es distinto de 0 lo que justifica que:

$$rangoA = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq -\frac{1}{2}$: $rangoA = 3$.

$Si\ k = -1\ y\ k = -\frac{1}{2}$: $rango\ \mathrm{A} = 2$

BY NC SA

b) Si $k = 1 \Longrightarrow Det\ A = -2.1^2 - 3.1 - 1 = -6 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Adj\ A = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} == \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

BY NC SA

Problema 6:

Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}, C_1=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\\1&0\end{pmatrix}$ y $C_2=\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}$:

$a)$ Compruebe que la matriz B tiene inversa y calcúlela.

$b)$ Calcule la matriz X que verifica la ecuación matricial $I+B\cdot X=C_1\cdot C_2$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Solución:

a) $Det\ B=\begin{vmatrix}3&-1&1\\1&1&1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=-3+1+1+1-3-1=-4\neq 0\Longrightarrow \exists B^{-1}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener B^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&-1&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{F1'=F2\\F2'=F1}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\3&-1&1&1&0&0\\-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{F2''=F'2-3F1'\\F3'=F'1+F3}}{\rightarrow}$$

$$\underset{\substack{F2''=F'2-3F1'\\F3'=F'1+F3}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&-4&-2&1&-3&0\\0&2&0&0&1&1\end{array}\right)\underset{F2'''=F3'}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&2&0&0&1&1\\0&-4&-2&1&-3&0\end{array}\right)\underset{F3''=F3'+2F2'''}{\rightarrow}$$

$$\underset{F3''=F3'+2F2'''}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&2&0&0&1&1\\0&0&-2&1&-1&2\end{array}\right)\underset{\substack{F2''''=1/2F2'''\\F3'''=-\frac{1}{2}F3''}}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&0&0&1/2&1/2\\0&0&1&-1/2&1/2&-1\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\underset{F1'''=F1''-F2''''-F3'''}{\rightarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1/2&0&1/2\\0&1&0&0&1/2&1/2\\0&0&1&-1/2&1/2&-1\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1/2&1/2\\-1/2&1/2&-1\end{pmatrix}$$

b) $I+B\cdot X=C_1\cdot C_2\Longrightarrow B\cdot X=C_1\cdot C_2-I\Longrightarrow B^{-1}BX=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow IX=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)\Longrightarrow X=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)$$

$$C_1\cdot C_2=\begin{pmatrix}1&1\\3&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2&0\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&1\\-6&4&-1\\-1&2&0\end{pmatrix}\qquad C_1\cdot C_2-I=\begin{pmatrix}1&4&1\\-6&3&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}$$

$$X=B^{-1}(C_1\cdot C_2-I)=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2\\0&1/2&1/2\\-1/2&1/2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&4&1\\-6&3&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&0\\-7/2&5/2&-1\\-5/2&-5/2&0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&3&0\\-7/2&5/2&-1\\-5/2&-5/2&0\end{pmatrix}$$

BY NC SA

Problema 7:

Dado el sistema $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 3 \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$:

$a)$ Discuta según los valores de $a \in R$ qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones.

$b)$ Resuelva el sistema para $a = 0$.

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & a & -2 \end{pmatrix}$

$$Det\ A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} = 12a - 2 - 10 - 16 + 15 + a = 13a - 13 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

a) Utilizamos el teorema de Rouché -Fröbenius para discutir el sistema

- Si $a \neq 1 \Longrightarrow Det\ A$ es un menor de orden 3 distinto de 0, tanto de la matriz A como de la matriz $\bar{A} \Longrightarrow rango\ A = rango\ \bar{A} = 3 =$nº de incógnitas$\Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $a = 1\ \ rango\ A \neq 3$

$$rango \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{Intercambio \\ F1\ y\ F2}} rango \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2-3F1 \\ F3'=F3-2F1}} rango \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F3''=F3'-F2'} rango \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -13 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existen dos vectores fila linealmente independiente tanto e la matriz A como de $\bar{A} \Longrightarrow rango A = rango\ \bar{A} = 2 < nº\ de\ incógnitas = 2 \Longrightarrow$El sistema es compatible indeterminado

Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado. Si $a = 1$ compatible indeterminado

b) Para $a = 0$, $Det\ A = -13 \Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado. Podemos utilizar la regla de Cramer para obtener la solución

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 2 - 30 + 16 + 5 - 0}{-13} = \frac{7}{13}$$

BY NC SA

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & -5 & 0\end{vmatrix}}=\frac{0+2-4-12+6-0}{-13}=\frac{8}{13}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 4 & 3\\ 2 & -5 & -2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & -5 & 0\end{vmatrix}}=\frac{-24-6-5-8+45-2}{-13}=\frac{0}{-13}=0$$

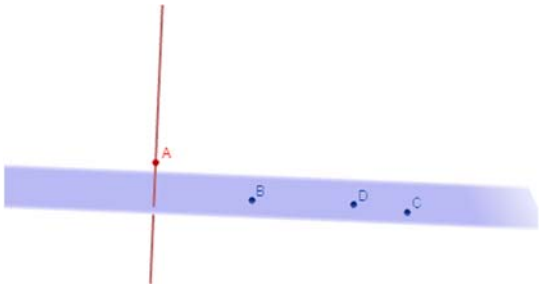
La solución del sistema si $a=0$.es: $x=\frac{7}{13}$ $y=\frac{8}{13}$ $z=0$

BY NC SA

Problema 8:

Calcule la ecuación de la recta r que pase por el punto $A(1,-2,0)$ y es perpendicular al plano determinado por los puntos $B(1,0,1), C(3,1,0)$ y $D(2,-1,1)$. Exprésela como intersección de dos planos.

Solución:



El vector asociado al plano que pasa por B, C y D es el vector director de la recta.

$$\overrightarrow{BC} = (2,1,-1) \qquad \overrightarrow{BD} = (1,-1,0)$$

$\vec{v}$ paralelo a $\vec{n}$ paralelo a

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,-3)$$

La recta buscada tiene por ecuación continua:

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-3}$$

Igualando por una parte primera y tercera igualdades (π_1)y por otra segunda y tercera (π_2), obtenemos las ecuaciones generales de dos planos del haz que define r

$$\pi_1 \equiv 3x - z - 3 = 0 \qquad \pi_2 \equiv 3y - z + 6 = 0 \qquad r = \pi_1 \cap \pi_2$$

Una posible solución es:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - z - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{cases}$$

BY NC SA

Problema 9:

En un departamento de calidad se analiza el funcionamiento del software del motor de vehículos eléctricos e híbridos. Se revisaron 85 coches eléctricos y 145 coches híbridos. En total, 43 coches tenían errores en el software de sus motores. Además, de los motores con software defectuoso, 12 corresponden a coches eléctricos.

$a)$ Calcule la probabilidad de que un coche revisado seleccionado al azar, sea híbrido y presente el software de su motor correcto.

$b)$ Calcule la probabilidad de que un coche híbrido seleccionado al azar tenga defectuoso el software del motor.

Solución:

Resolvemos mediante una tabla de contingencia. En verde están los datos del enunciado. Los otros, se rellenan:

	Con errores	Sin errores	Total
Eléctricos	**12**	**73**	**85**
Híbridos	**31**	**114**	**145**
Total	**43**	**187**	**230**

Utilizamos la regla de Laplace:

$a)$ $P = \frac{114}{230} = \frac{57}{115} = \mathbf{0.4957}$

$b)$ $P = \frac{31}{145} = \mathbf{0.2138}$

BY NC SA

Problema 10:

Uno de cada 7 deportistas de la selección española de gimnasia deportiva, será elegido para las próximas olimpiadas. Se escogen aleatoriamente y de modo independiente 9 deportistas de dicha selección española.

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sean elegidos exactamente 2 de estos 9 deportistas para las próximas olimpiadas?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que alguno (al menos 1) de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas?

Solución:

Como un deportista puede ser elegido, o no, se trata de una distribución binomial donde:

$n = 9;\ p = \frac{1}{7};\ q = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$

$P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$a)\ P(2) = \binom{9}{2} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^7 = \frac{9!}{(9-2)!\cdot 2!} \cdot 0.0204 \cdot 0.3399 = \frac{9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 2} \cdot 0.0069 = 36 \cdot 0.0069 = 0.2497.$

$$P(2) = \mathbf{0.2497}$$

$b)$ La probabilidad pedida es el suceso contrario de que no sea elegido ninguno.

$1 - P(0) = 1 - \binom{9}{0} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^9 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0.2497 = 0.7503.$

La probabilidad de que alguno de estos 9 deportistas sea elegido para las próximas olimpiadas es de $\mathbf{0.7503}$

BY NC SA