

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de CATALUÑA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JAIME CARRASCOSA OROZCO





Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Respondeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p .

[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$.

[1 punt]

Problema 3:

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi: x = y$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π .

[1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r , trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π .

[1,25 punts]

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què $\ln$ és el logaritme neperià.
- a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]
- b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asymptota horitzontal.
[0,5 punts]
- c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

Problema 5:

5. a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resolcu l'equació matricial $A^2X = A - 3I$, en què

I és la matriu identitat.

[1,25 punts]

- b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I .

[1,25 punts]

Problema:6

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.
- a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.
[1,25 punts]
- b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.
[1,25 punts]

RESPUESTAS SÈRIE 2

Problema 1:

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

Solució:

a) Para determinar la recta tangente buscamos el punto de tangencia, y con la derivada en ese punto, la pendiente de la recta:

Para $x = a$ es $f(a) = 4 - a^2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(a, 4 - a^2)$.

$$f'(x) = -2x \rightarrow m = f'(a) = -2a.$$

La ecuación de la recta tangente es: $y = y_0 + m(x - x_0)$

$$y = (4 - a^2) - 2a(x - a) = 4 - a^2 - 2ax + 2a^2 = -2ax + a^2 + 4. \text{ C.q.d.}$$

La recta tangente corta a los ejes de coordenadas en los puntos:

$$X: \begin{cases} y = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{cases} \rightarrow -2ax + a^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{a^2+4}{2a} \rightarrow A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right).$$

$$Y: \begin{cases} x = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{cases} \rightarrow y = a^2 + 4 \rightarrow B(0, a^2 + 4).$$

Queda comprobado que la recta tangente es $y = -2ax + a^2 + 4$, y conta a los ejes coordenados en los puntos: $A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)$ y $B(0, a^2 + 4)$.

b) El triángulo de vértices OAB es rectángulo, y su área vale: $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4)$. Imponemos que sea mínima anulando la derivada primera y haciendo positiva la segunda:

$$\text{Área}(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)^2}{a}.$$

$$\text{Área}'(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2 \cdot (a^2+4) \cdot 2a] \cdot a - (a^2+4)^2 \cdot 1}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4) \cdot [4a^2 - (a^2+4)]}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4) \cdot (3a^2-4)}{a^2} = 0.$$

$(a^2 + 4) \cdot (3a^2 - 4) = 0$. Es siempre distinto de cero: $a^2 + 4$. Anulamos:

$3a^2 - 4 = 0 \rightarrow 3a^2 = 4 \rightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. La solución negativa da longitudes negativas luego no tiene sentido geométrico

$$\text{Área}''(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2a \cdot (3a^2-4) + (a^2+4) \cdot 6a] \cdot a^2 - [(a^2+4) \cdot (3a^2-4)] \cdot 2a}{a^4} = \frac{3a^4 + 16a^3 + 16}{2a^3} \rightarrow \text{Área}''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

El área del triángulo es mínima para $a =$

Problema: 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p .

[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$.

[1 punt]

Solució:

a) Para discutir el sistema estudiamos los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = p^2 + 2 + 2p^2 - 2p - p^3 - 2 = 0 \rightarrow p^3 - 3p^2 + 2p = 0;$$

$$p(p^2 - 3p + 2) = 0 \rightarrow p = 0. \quad \text{y } p^2 - 3p + 2 = 0 \rightarrow p = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow p = 1, p = 2.$$

Por lo que si $p \neq 0, p \neq 1, p \neq 2$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible y determinado**.

Para $p = 0 \rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 = 2 \neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es **incompatible**.

Para $p = 1 \rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 2 - 4 - 1 - 4 = -1 \neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $p = 2 \rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tiene la primera y la tercera fila iguales, luego su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menos que el número de incógnitas, luego el sistema es **compatible e indeterminado**.

La discusión completa del sistema es:

- Si $p = 0$ o bien $p = 1$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema es **incompatible**.
- Si $p = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema es compatible **indeterminado**.
- Si $p \neq 0, p \neq 1$ y $p \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema es **compatible determinado**.

b) Si $p = 2$ el sistema es: $\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\}$, que es compatible indeterminado.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 - \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -2x - y = -2 + \lambda \\ 2x + 2y = 1 - 4\lambda \end{array} \right\}$$

Hacemos $z = \lambda$, y sumamos: $y = -1 - 3\lambda$.

$$2x + y = 2 - \lambda \rightarrow 2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda \rightarrow 2x = 3 + 2\lambda \rightarrow x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$x = \frac{3}{2} + \lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbf{R}$$

Problema 3:

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi: x = y$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π .

[1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r , trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π .

[1,25 punts]

Solució:

a) La recta t que passa per $P(-1, 3, 1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - y = 0$ tiene como vector

director al vector normal de $\pi: \vec{n} = (1, -1, 0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

El punto M , intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\pi \equiv x - y = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow -1 + \lambda - (3 - \lambda) = 0; -1 + \lambda - 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow M(1, 1, 1).$$

Debe verificarse: $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$.

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = [(1, 1, 1) - (-1, 3, 1)] = (2, -2, 0).$$

$$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = [(x, y, z) - (1, 1, 1)] = (x-1, y-1, z-1).$$

$$(2, -2, 0) = (x-1, y-1, z-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ y-1 = -2 \rightarrow y = -1 \\ z-1 = 0 \rightarrow z = 1 \end{cases}.$$

El punto simétrico pedido es: $P'(3, -1, 1)$

b) De la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$ conocemos un punto: $Q(1, 0, 2)$ y el vector de dirección: $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$.

Buscamos un vector perpendicular a $\vec{v}_r = (2, 3, 1)$ y al vector normal al plano $\pi: (1, -1, 0)$

$$\vec{n}'_{\gamma} = \vec{v}_r \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i + 3k + 2k - j = -i - j + 5k \Rightarrow \vec{n}'_{\gamma} = (1, 1, -5).$$

El haz de planos γ tiene por expresión general: $\gamma \equiv x + y - 5z + D = 0$. Imponemos que contenga a $Q(1, 0, 2)$: $\gamma \equiv x + y - 5z + D = 0 \rightarrow 1 + 0 - 5 \cdot 2 + D = 0; D - 9 = 0 \Rightarrow D = 9$.

El plano pedido es: $x + y - 5z + 9 = 0$

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què $\ln$ és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.

[1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.

[0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.

[1 punt]

Solució:

a) Buscamos un punto en el que la tangente sea horizontal, es decir:

$$f'(x) = 0 = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \rightarrow 1 - \ln(x) = 0 \rightarrow \ln(x) = 1 \rightarrow x = e \rightarrow f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

El punto buscado tiene de coordenadas: $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$

Como ya hemos visto que es un punto de tangente horizontal, podría ser un punto de inflexión si se anulara la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln(x)) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2 \ln(x) - 3}{x^3} \rightarrow f''(e) = \frac{2 \ln(e) - 3}{e^3} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$$

En $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$ la función alcanza un **máximo** relativo

b) Calculamos el comportamiento de la función cuando tiende a infinito

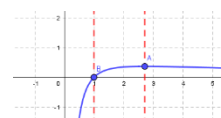
$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ Tanto el numerador como el denominador tienden a infinito por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x > 0$

c) Para $x = 1, y = 0$, la curva pasa por el punto $B(1, 0)$.

Calculamos el área mediante un cambio de variables: $\ln(x) = t \rightarrow \frac{1}{x} \cdot dx = dt$



$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} \cdot dx = \int_0^1 t \cdot dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 u^2.$$

$$\text{Àrea} = \frac{1}{2} = 0.5 u^2$$

Problema 5:

5. a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resolueu l'equació matricial $A^2 X = A - 3I$, en què

I és la matriu identitat.

[1,25 punts]

b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I .

[1,25 punts]

Solució:

a) Resolvemos la ecuación:

$$A^2 X = A - 3I \rightarrow (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \rightarrow I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \rightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de A^2 por el método de Gauss.

$$(A^2 | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\{F_1 \leftrightarrow F_3\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\{F_1 \leftrightarrow F_3\}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \rightarrow M^3 - 3M^2 + 3M - 0 = I \rightarrow M \cdot (M^3 - 3M^2 + 3I) = I.$

Por la definición de matriz inversa, la matriz $(M^3 - 3M^2 + 3I)$ es la inversa de la matriz M :

$$M^{-1} = M^3 - 3M^2 + 3I$$

Problema 6:

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

[1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.

[1,25 punts]

Solució:

a) La función $f(x)$ es suma de una función exponencial y de una función polinómica, ambas continuas en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$.

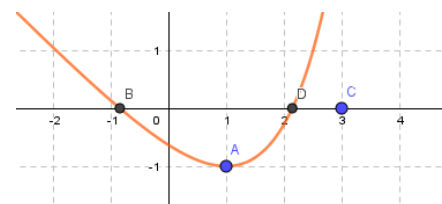
Estudio de los extremos relativos, crecimiento y decrecimiento. Calculamos la derivada primera:

$$f'(x) = e^{x-1} - 1 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \rightarrow e^{x-1} = 1 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1.$$

Para $x > 1 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow$ La función es creciente si $x \in (1, +\infty)$

Para $x < 1 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow$ La función es decreciente si $x \in (-\infty, 1)$

Por lo tanto en $x = 1$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego en ese punto alcanza un mínimo.



El punto **A(1, -1)** es un mínimo relativo.

b) La función es continua en toda la recta real. Vamos a aplicar el teorema de Bolzano en cada uno de los intervalos $(-1, 1)$ y $(1, 3)$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ".

$$(-1, 1): \begin{cases} f(-1) = e^{-1-1} - (-1) - 1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases} \quad \text{Como } f(x) \text{ es monótona decreciente}$$

en $(-1, 1)$, aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(-1, 1)$:

$$(1, 3): \begin{cases} f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(3) = e^{3-1} - 3 - 1 = e^2 - 4 \cong 4,39 > 0 \end{cases} \quad \text{Como } f(x) \text{ es monótona creciente en}$$

$(1, 3)$, aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(1, 3)$

Por tanto $f(x)$ tiene exactamente **dos** raíces en $(-1, 3)$.



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
 Oficina d'Accés a la Universitat

2020

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Sèrie 4

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal

Número del tribunal

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

Considere el sistema
$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
, dependiente del parámetro real k .

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .
- Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k = 1$ y haga una interpretación geométrica.

Problema 2:

- Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentra también la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el mismo punto.
- Haga un esbozo de la gráfica de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

Problema 3:

En R^3 se dan los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(4, 1, 2)$ y $D(1, 1, t)$, en donde t es un valor real.

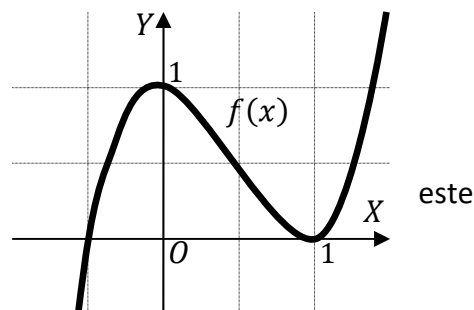
- ¿Para qué valor real de t los cuatro puntos son coplanarios?
- Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5 u^3$.

Nota: El volumen de un tetraedro definidos por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores.

Problema 4:

a) En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.

b) Calcule los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en punto sea $-\frac{3}{2}$.



Problema 5:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) Encuentre los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Compruebe que, para $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Problema 6:

Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

RESPUESTAS SÈRIE 4

Problema 1:

Considere el sistema
$$\begin{cases} x + ky + z = 3 + k \\ kx + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
, dependiente del parámetro real k .

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k .

b) Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $k = 1$ y haga una interpretación geométrica.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3k + k - 1 - k^2 - 3 = -k^2 + 4k - 3 = 0;$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0; \quad k = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 3.$$

Si $k \neq 1$ o si $k \neq 3$ entonces los rangos de ambas matrices es 3, igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $k = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada tiene dos filas iguales por lo que su rango es 2, igual a la matriz de los coeficientes, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

$$\text{Si } k = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 54 + 12 - 6 - 12 - 45 = 8 \neq 0$$

El rango de la matriz ampliada es 3, distinto del de la matriz de los coeficientes que es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Sistema compatible y determinado si $k \neq 1$ o si $k \neq 3$. Sistema compatible indeterminado si $k = 1$.

Sistema incompatible si $k = 3$.

b) Para $k = 1$ el sistema es
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
, que sabemos que es compatible indeterminado y equivalente al sistema
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$
. Haciendo $z = \lambda$:

$$\begin{cases} x + y = 4 - \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = -4 + \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{cases} \rightarrow 2y = 1; \quad y = \frac{1}{2}; \quad x = 4 - \lambda - y = 4 - \lambda - \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{7}{2} - \lambda.$$

Geoméricamente son dos planos que se cortan en la recta: $x = \frac{7}{2} - \lambda, y = \frac{1}{2}, z = \lambda, \forall \lambda \in R$, y el otro plano coincidente.

Problema 2:

a) Dada la función $f(x) = \frac{4}{x}$, calcule la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$. Encuentra también la ecuación de la recta normal a $f(x)$ en el mismo punto.

b) Haga un esbozo de la gráfica de la curva $y = f(x)$ y de la recta $4x + y = 8$, y calcule el área delimitada por estas dos gráficas, el eje de abscisas y la recta $x = 3$.

Solución:

a) Para $x = 1$ es $f(1) = 4$, por lo cual el punto de tangencia es $A(1, 4)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto: $f'(x) = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow m = f'(1) = -\frac{4}{1^2} \Rightarrow m = -4$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $A(1, 4)$ con $m = -4$ es: $y - 4 = -4(x - 1) = -4x + 4$.

$$\text{Recta tangente en } (1, 4): 4x + y - 8 = 0$$

La pendiente de la recta normal es inversa y de signo contrario de la pendiente de la tangente: $m' = \frac{1}{4}$.

La recta normal es la siguiente: $y - 4 = \frac{1}{4}(x - 1) \rightarrow 4y - 16 = x - 1$.

$$\text{Recta normal en } (1, 4): x - 4y + 15 = 0$$

b) La función $f(x) = \frac{4}{x}$ es una hipérbola equilátera que contiene al punto $A(1, 4)$. La recta dada, $4x + y = 8$, es la tangente a la función en el punto $A(1, 4)$.

En el intervalo $(1, 2)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta $t \equiv y = 8 - 4x$, por lo cual:

$$S = \int_1^2 [f(x) - t(x)] \cdot dx + \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_1^2 \left[\frac{4}{x} - (8 - 4x) \right] \cdot dx + \int_2^3 \frac{4}{x} \cdot dx =$$

$$\left[4 \cdot Lx + \frac{4x^2}{2} - 8x \right]_1^2 + [4 \cdot Lx]_2^3 =$$

$$(4 \cdot L2 + 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2) - (4 \cdot L1 + 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1) + 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2 =$$

$$4 \cdot L2 - 2 + 4 \cdot L3 - 4 \cdot L2 = (4 \cdot L3 - 2) u^2$$

$$\text{Área} = (4 \cdot L3 - 2) u^2$$



Problema 3:

En R^3 se dan los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(4, 1, 2)$ y $D(1, 1, t)$, en donde t es un valor real.

a) ¿Para qué valor real de t los cuatro puntos son coplanarios?

b) Encuentre el valor de t para que el tetraedro (irregular) que forman los cuatro puntos tenga un volumen de $5 u^3$.

Nota: El volumen de un tetraedro definidos por los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ es igual a un sexto del valor absoluto del determinante de la matriz formada por los tres vectores.

Solución:

a) Los puntos $A(3, 1, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(4, 1, 2)$ y $D(1, 1, t)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, 1) - (3, 1, 1)] = (-3, -1, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(4, 1, 2) - (3, 1, 1)] = (1, 0, 1).$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = [(1, 1, t) - (3, 1, 1)] = (-2, 0, t - 1).$$

Los puntos A, B, C y D son coplanarios cuando lo sean los tres vectores que determinan, por lo cual, el rango de los tres vectores tiene que ser 2, es decir: que el determinante de la matriz que forman es cero.

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1.$$

Los puntos A, B, C y D son coplanarios para $t = -1$

$$b) V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = 5 \Rightarrow \left| \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix} \right| = 30 \rightarrow$$

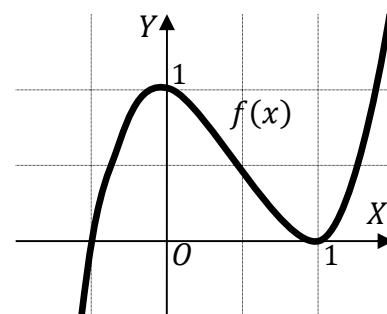
$$|1 + t| = 30 \rightarrow \begin{cases} 1 + t = 30 \rightarrow t_1 = 29 \\ -1 - t = 30 \rightarrow t_2 = -31 \end{cases}$$

El volumen del tetraedro ABCD es de $5 u^3$ para $t = 29$ y para $t = -31$

Problema 4:

a) En la figura adjunta se muestra la gráfica de la función $f(x)$. Represente de manera esquemática la gráfica de la función derivada de $f(x)$. Explique el razonamiento que ha seguido.

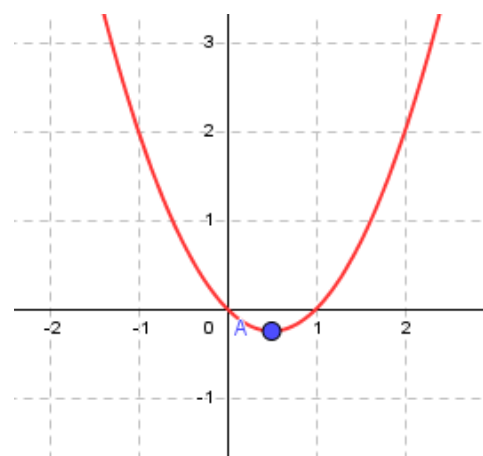
b) Calcule los valores de a y b para que la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ tenga un punto de inflexión en $x = \frac{1}{2}$ y su derivada en este punto sea $-\frac{3}{2}$.

**Solución:**

a) La derivada de una función representa el valor de la tangente de la función en cada uno de sus puntos. Por tener la función un máximo en $x = 0$ y un mínimo para $x = 1$, la función derivada se anula para estos valores, por lo cual, su expresión es de la forma:
 $f'(x) = \pm x \cdot (x - 1)$.

Para determinar el signo más o menos se tiene en cuenta, por ejemplo, que la función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$, el signo es positivo y la función derivada tiene por expresión $f'(x) = x \cdot (x - 1)$, que es una parábola convexa (U), por ser positivo el coeficiente de x^2 .

El vértice de la función derivada es el siguiente: $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.



b) $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$. Imponemos que la derivada sea $-\frac{3}{2}$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow 3a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; \quad \frac{3}{4}a + b = -\frac{3}{2}; \quad 3a + 4b = -6.$$

Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto es condición necesaria que se anule la segunda derivada en ese punto.

$$g''(x) = 6ax + 2b.$$

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 6a \cdot \frac{1}{2} + 2b = 0; \quad 3a + 2b = 0. \quad (1)$$

Resolvemos el sistema obtenido:

$$\begin{cases} 3a + 4b = -6 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + 4b = -6 \\ -3a - 2b = 0 \end{cases} \rightarrow 2b = -6 \rightarrow b = -3.$$

$$3a + 2 \cdot (-3) = 0 \rightarrow a - 2 = 0 \rightarrow a = 2.$$

$$\mathbf{a = 2; \quad b = -3}$$

Problema 5:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) Encuentre los valores de a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Compruebe que, para $a = 3$, la matriz A es invertible y resuelve la ecuación matricial

$$A \cdot X = B - 3I, \text{ siendo } B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 0; -a(a+1)(a+3) + a(a-1)(2a+1) + 2a(a+3) = 0;$$

$$a(a+3) \cdot [-(a+1) + 2] + a(a-1)(2a+1) = 0; a(a+3)(1-a) - a(1-a)(2a+1) = 0;$$

$$a(1-a)(2-a) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2.$$

La matriz A es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$.

b) Del apartado anterior se deduce que la matriz A es invertible para $a = 3$, por lo que su comprobación es superflua; no obstante, se comprueba a continuación.

$$\text{Para } a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 78 - 72 = 6 \neq 0.$$

La matriz $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ es invertible

$$A \cdot X = B - 3I \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -72 + 42 + 36 = 6; A^{-1} = \frac{\text{Adj. de } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$B - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot (B - 3 \cdot I) &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -30 & -30 \\ 36 & 36 & 36 \\ -36 & -36 & -36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$.

a) Estudie si tiene puntos críticos y, en caso de que los tenga, justifique de qué tipo son. Determine también cuáles son los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Compruebe que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-2, 1)$.

Solución:

a) Por tratarse de una función racional la función es continua en toda la recta real excepto los valores de x que anulan el denominador: $x - 2 = 0$; $x = 2 \Rightarrow D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$.

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que son derivables y en los que se anula su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2} = 0; \quad 2x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(6x^2 - 12x) \cdot (x-2)^2 - 2x^2(x-3) \cdot [2 \cdot (x-2) \cdot 1]}{(x-2)^4} = \frac{(6x^2 - 12x) \cdot (x-2) - 4x^2(x-3)}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{6x^3 - 12x^2 - 12x^2 + 24x - 4x^3 + 12x^2}{(x-2)^3} = \frac{2x^3 - 12x^2 + 24x}{(x-2)^3} = \frac{2x(x^2 - 6x + 12)}{(x-2)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2 \cdot 0 \cdot (0^2 - 6 \cdot 0 + 12)}{(0-2)^3} = 0; \text{ Tiene en ese punto un punto de inflexión}$$

$$f''(3) = \frac{2 \cdot 3 \cdot (3^2 - 6 \cdot 3 + 12)}{(3-2)^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 3. \quad f(3) = \frac{3^3}{3-2} = \frac{27}{1} = 27 \Rightarrow \text{Mín.} \Rightarrow A(3, 27)$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Teniendo en cuenta el dominio de la función y las raíces de su primera derivada, se determinan los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, +\infty)$, en los cuales la función es creciente o decreciente. Determinamos cada caso.

$$\text{Para } x = -1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 \cdot (-1-6)}{(-1-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente.}$$

$$\text{Para } x = 1 \in (0, 2) \Rightarrow f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 \cdot (1-6)}{(1-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente.}$$

$$\text{Para } x = 2.5 \in (2, 3) \Rightarrow f'(2.5) = \frac{2 \cdot 2.5^2 \cdot (3-3)}{(3-2)^2} < 0 \Rightarrow \text{Decreciente.}$$

$$\text{Para } x = 5 \in (3, +\infty) \Rightarrow f'(8) = \frac{2 \cdot 5^2 \cdot (5-3)}{(5-2)^2} > 0 \Rightarrow \text{Creciente.}$$

La función es creciente si $x \in (3, +\infty)$ y decreciente en el resto

b) La función $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ es continua en el intervalo $[-2, 1]$, por lo cual, podemos aplicar el teorema de Bolzano, que dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2 > 0.$$

$$f(1) = \frac{1^3}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 < 0.$$

Lo anterior demuestra que la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $(-2, 1)$.

Como la función $f(x)$ es monótona decreciente en el intervalo $(-2, 1)$, entonces la raíz es única.