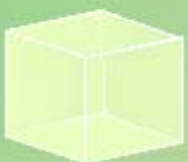


Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2021

Comunidad autónoma de **ARAGÓN**



www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa Asso





Universidad
Zaragoza

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, se pide:

a.- (3 puntos) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b.- (3 puntos) Calcula la matriz X que verifica: $2X - AB = BA$.

c.- (4 puntos) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.- (10 puntos) Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de botas, 1.200 pares de mocasines y 2.100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en 1 par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines que vende a 120 euros. Se pide:

a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

3.- (10 puntos) Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función:

$$B(t) = \frac{2t - 6}{t + 4},$$

donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

a.- (2 puntos) ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?

b.- (4 puntos) En qué momento $t \in [3, 10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.

c.- (2 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150.000 €?

d.- (2 puntos) En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

4.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ bx^2 + 2x + c & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{donde } a, b, c \text{ son parámetros reales. Se pide:}$$

a.- (5 puntos) Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b.- (2 puntos) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c.- (3 puntos) Calcula, para los valores $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$; $\int_1^2 f(x) dx$.

CONTINÚA AL DORSO

unizar.es

- 5.- (10 puntos) Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de Ciencias y Artes, planean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:
- (2,5 puntos) La probabilidad de que quiera ir a Portugal.
 - (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.
 - (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias.
 - (2,5 puntos) Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.
- 6.- (10 puntos) Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0,55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:
- (6 puntos) ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97% tenga una amplitud menor o igual a 0,16 horas?
 - (3 puntos) Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97% para la media poblacional.
 - (1 punto) Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado b.- si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8688	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.



**Universidad
Zaragoza**

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA DE 2021

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN
EJERCICIO DE: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 pts. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) (3 puntos) Calcular $(B - A)$ (0,6 pts) y calcular $(B - A)^{-1}$ (2,4 pts). Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa son:

1. Si se ha calculado haciendo operaciones elementales: transformar cada (a_{ij}) inicial a la matriz identidad (0,6 pts cada coeficiente).
2. Si se ha calculado aplicando la fórmula $(B - A)^{-1} = \frac{1}{|B - A|} (\text{Adj}(B - A))^t$ las calificaciones intermedias serán: $|B - A|$ (0,5 pts), $\text{Adj}(B - A)$ (0,9 pts), traspuesta (0,5 pts), y llegar al resultado (0,5 pts).

b) (3 puntos) Puntuaciones intermedias:

1. Despejar X de la ecuación: $X = \frac{BA + AB}{2}$ (1 pto), calcular los productos: BA , AB (1 pto) y realizar las operaciones $\frac{BA + AB}{2}$ (1 pto).
2. Si se ha supuesto una matriz genérica $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se valorará con (1 pto) realizar las operaciones de la izquierda de la igualdad, (1 pto) realizar las operaciones de la derecha de la igualdad y (1 pto) obtener el valor de las incógnitas a, b, c, d .

c) (4 puntos) Las puntuaciones intermedias son:

Calcular $\text{rg}(C)$ (1,5 pts), concluir que se trata de un sistema compatible indeterminado (1 pto) y obtener la solución (1,5 pts, 0,5 cada incógnita).

Ejercicio 2

a) (8 puntos)

- i. (1 pto) Definir las variables de decisión y la función objetivo.
- ii. (1 pto) Definir las tres restricciones del enunciado (0,25 pts cada una) y la condición de no negatividad de las variables $x, y \geq 0$ (0,25 pts).
- iii. (3 pts) Representar la región factible (0,5 pts por cada una de las cinco restricciones y 0,5 pts por la intersección de todas ellas).

Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

1. Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices:
 - i. (1,5 pts) Calcular las coordenadas de los vértices (cada vértice 0,3).
 - ii. (1 pto) Evaluar la función objetivo en los vértices (cada vértice 0,2).
 - iii. (0,5 pts) Determinar el vértice donde se alcanza el máximo (0,25) y su valor (0,25).

unizar.es



2. Si se ha optado por curvas de nivel:

- i. (2 ptos) Representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta 1 pto, una paralela 0,5 ptos, identificar la dirección de mejora 0,5 ptos).
 - ii. (0,5 ptos) Razonar gráficamente el vértice solución.
 - iii. (0,5 ptos) Determinar analíticamente el máximo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).
- b) (2 puntos) Razonamiento (1 pto) y la respuesta (1 pto).

Ejercicio 3

- a) (2 puntos) Identificar la pregunta con el signo $B(t) < 0$ (1 pto) y resolver la inecuación (1 pto).
- b) (4 puntos) Calcular la derivada de $B(t)$ (1,5 ptos), signo $B'(t) > 0$ (1 pto), calcular la coordenada t del máximo absoluto (1 pto). Calcular, en la unidad solicitada (0,1 ptos), el beneficio máximo (0,4 ptos).
- c) (2 puntos) Expresar que hay que resolver $B(t) = 1,5$ (1 pto) y resolver la ecuación (1 pto).
- d) (2 puntos) Identificar la pregunta con $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t)$ (1 pto) y calcular dicho límite (1 pto).

Ejercicio 4

- a) (5 puntos)
 - i. (3 ptos) Condición de continuidad en $x = 0$ (1 pto), condición de extremo (1 pto) y condición en la derivada (1 pto).
 - ii. (1 pto) Calcular correctamente los coeficientes a, b, c .
 - iii. (1 pto) Caracterizar el extremo.
- b) (2 puntos) Cada límite se calificará con 1 pto.
- c) (3 puntos)
 - (1,5 ptos) Cálculo de primitivas (0,5 ptos cada sumando).
 - (1,5 ptos) Aplicar la Regla de Barrow y llegar al resultado (0,5 ptos cada sumando).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas. Si la respuesta no es correcta o es incompleta pueden aplicarse las siguientes calificaciones intermedias.

- a) (2,5 puntos)
 - i. (1 pto) Definir los sucesos $I = \text{Viajar a Italia}$, $P = \text{Viajar a Portugal}$, $F = \text{Viajar a Francia}$, $A = \text{alumno de artes}$, $C = \text{alumno de ciencias}$.
 - ii. (0,5 ptos) Llevar datos a una tabla de contingencia.
 - iii. (1 pto) Calcular $P(P)$.
- b) (2,5 puntos)
 - i. (1 pto) Expresar la probabilidad a calcular como $P(A/I)$.
 - ii. (1,5 ptos) Calcular $P(A/I)$.
- c) (2,5 puntos)
 - i. (1 pto) Expresar la probabilidad a calcular como $P(F \cap C)$.
 - ii. (1,5 ptos) Calcular $P(F \cap C)$.
- d) (2,5 puntos)
 - i. (1 pto) Expresar la probabilidad a calcular como $P(F/C)$.
 - ii. (1,5 ptos) Calcular $P(F/C)$.

Ejercicio 6

- a) (6 puntos)
 - i. (1,5 ptos) Saber qué cuantil buscar.
 - ii. (1,5 ptos) Calcularlo.
 - iii. (3 ptos) Poner la fórmula del error (1,5 ptos). Sustituir y calcular (1,5 ptos).

Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos. Si el cálculo se realiza tomando el error (semiamplitud) como 0,16 h. en vez de 0,08 h., se resta 1 pto.
- b) (3 puntos)
 - i. (1,5 ptos) Calcular el error (semiamplitud del intervalo).
 - En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a., aunque no lo sea.
 - ii. (1,5 ptos) Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo.
- c) (1 punto) Es suficiente con argumentar que, al no estar el valor 5 dentro del intervalo, hay motivos para dudar –con los datos del problema– de la afirmación del Ministerio.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

a) Calcula $(B - A)^{-1}$.

b) Calcula la matriz X que verifica: $2X - AB = BA$.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones: $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$a) B - A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(B - A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \exists (B - A)^{-1}$$

$$(B - A)^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(B - A)} (\text{Adj}(B - A))^t = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(B - A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2X - AB = BA \Rightarrow 2X = BA + AB \Rightarrow X = \frac{1}{2} (BA + AB) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ 5/2 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Transformamos el sistema en otro equivalente triangular, utilizando el método de Gauss. Trabajamos con la matriz de coeficientes. Por ser el sistema homogéneo, la columna correspondiente a términos independientes en la matriz ampliada, no presenta variaciones frente a cualquier combinación lineal de sus filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F2' = F2 - 2F1 \\ F3' = F3 + F1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{F3'' = F3' + 2F2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema $S \equiv C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es equivalente a $S' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

S' es compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$S' \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \text{de solución general:} \quad \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 2:

Un mayorista de zapatos pone a la venta su stock, en concreto, 800 pares de totas, 1 200 pares de mocasines y 2 100 pares de zapatillas. Lanza dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en un par de botas, 3 pares de mocasines y 7 pares de zapatillas y se vende a 360 euros. La oferta B consiste en 2 pares de botas y 2 pares de mocasines y se vende a 120 euros. Se pide:

- a) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada oferta que maximiza el ingreso obtenido con la venta. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?
- b) Razona cuántos pares de botas, mocasines y zapatillas quedarán sin vender en la solución óptima.

Solución:

- a) Sean $x = n^{\circ}$ de lotes A $y = n^{\circ}$ de lotes B

Nuestro objetivo es maximizar $z = f(x, y) = 360x + 120y$ sometida a las restricciones

$$\begin{cases} I_1: x + 2y \leq 800 \\ I_2: 3x + 2y \leq 1200 \\ I_3: 7x \leq 2100 \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución del sistema

La intersección de los semiplanos que representan las dos últimas inecuaciones limitan la solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x + 2y = 800$ que pasa por los puntos (0, 400) y (800, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 ($0 + 2 \cdot 0 \leq 800$) $\Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x = 300$, paralela al eje de ordenadas. El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 ($7 \cdot 0 \leq 2100$) $\Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La región factible es el polígono OABCD. Las coordenadas de sus vértices son las intersecciones:

$$A \equiv \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 800 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 800 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 0 \\ y = 400 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 400)$$

$$B \equiv \begin{cases} x + 2y = 800 \\ 3x + 2y = 1200 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 800 \\ -3x - 2y = -1200 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y = 800 \\ -2x = -400 \end{cases} \sim \begin{cases} y = \frac{800 - x}{2} \\ x = 200 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{600}{4} = 300, x = 200 \Rightarrow B = (200, 300)$$

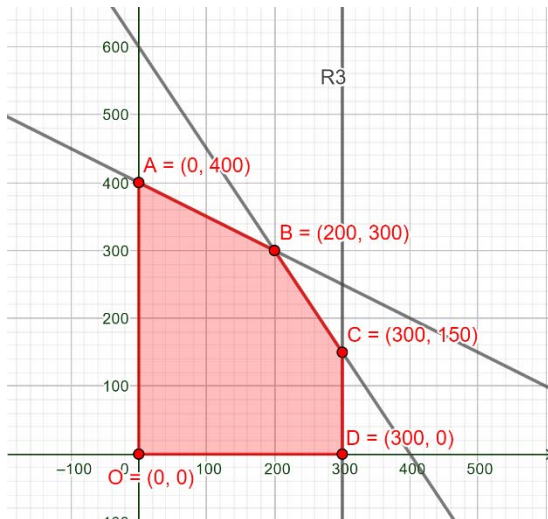
$$C \equiv \begin{cases} x = 300 \\ 3x + 2y = 1200 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 300 \\ y = \frac{1200 - 3x}{2} \end{cases} = 150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = (300, 150)$$

$$D \equiv \begin{cases} x = 300 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D = (300, 0)$$

$$O \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow O = (0, 0)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:



$$z(O) = F(0, 0) = 360.0 + 120.0 = 0$$

$$z(A) = F(0, 400) = 360.0 + 120.400 = 48000$$

$$z(B) = F(200, 400) = 360.200 + 120.400 = 120000$$

$$z(C) = F(300, 150) = 360.300 + 120.150 = 126000$$

$$z(D) = F(300, 0) = 360.300 + 120.0 = 108000$$

La solución se alcanza en el vértice C. Por tanto, debe vender 300 lotes del tipo A y 150 del tipo B para maximizar el beneficio y será en este caso de 126 000 €

b) Si vende 300 lotes de la oferta A y 150 del tipo B, vende los siguientes artículos:

Botas: $300 \cdot 1 + 2 \cdot 150 = 600$ pares de botas.

Le quedarían sin vender $800 - 600 = 200$ pares de botas.

Mocasines: $300 \cdot 3 + 2 \cdot 150 = 1200$ mocasines.

Le quedarían sin vender $1200 - 1200 = 0$, es decir, vende todos los mocasines.

Zapatillas: $300 \cdot 7 = 2100$ zapatillas.

Vende todas las zapatillas

Si consigue alcanzar la solución óptima le quedarían sin vender 200 pares de botas exclusivamente

Problema 3:

Un grupo de jóvenes emprendedores valoran abrir una empresa y, para ello, han encargado un estudio de mercado en el que estimaron que los beneficios para los próximos años, en cientos de miles de euros, vendrán dados por la función $B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$, donde t representa los años transcurridos desde la apertura. Los emprendedores quieren saber:

- ¿En qué intervalo la empresa tendrá pérdidas?
- En qué momento $t \in [3, 10]$ se alcanza el máximo beneficio y a cuántos euros asciende su valor. Justifica la respuesta.
- ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener un beneficio de 150 000 euros?
- En un horizonte infinito de tiempo, ¿existe límite para el beneficio? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

Solución:

La función beneficio $B(t) = \frac{2t-6}{t+4}$ es una función de dominio $[0, \infty)$, (restricción de $f(t) = \frac{2t-6}{t+4}$ de dominio de $\mathbb{R} - \{-4\}$)

- a) Resolvemos la inecuación $B(t) = \frac{2t-6}{t+4} < 0$

B puede cambiar de signo si se anula el numerador o el denominador de su expresión analítica $2t - 6 = 0 \Rightarrow t = 3$

$$t + 4 = 0 \Rightarrow t = -4$$

	$[0,3)$	3	$[3, \infty)$
Signo B	-	0	+

La empresa tiene pérdidas los tres primeros años

- b) B es continua y derivable en $[0, \infty)$. Estudiemos su crecimiento a partir del signo de su derivada

$$B'(t) = \frac{2(t+4) - (2t-6)}{(t+4)^2} = \frac{14}{(t+4)^2} > 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \Rightarrow B \text{ es estrictamente creciente en } [0, \infty).$$

$$B \text{ estrictamente creciente en } [0, \infty) \Rightarrow B(3) < B(10) = \frac{2 \cdot 10 - 6}{10 + 4} = 1$$

El máximo beneficio en este periodo se alcanza a los 10 años y es de 100 000 €

- c) 150000 € = 1.5 cientos de miles de €

$$B(t) = \frac{2t-6}{t+4} = 1.5 \Rightarrow \frac{2t-6}{t+4} = \frac{1.5(t+4)}{t+4} \Rightarrow 2t-6 = 1.5t+6 \Rightarrow 0.5t = 12 \Rightarrow t = 24$$

Se alcanza un beneficio de 150 000 € al cabo de 24 años

- d) $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t-6}{t+4} = 2.$

B es una función estrictamente creciente y su límite en el infinito es 2. Por lo tanto:

El beneficio de la empresa no superará nunca los 200 000 €

Problema 4:

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ bx^2 + 2x + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$ donde a, b, c son parámetros reales. Se pide:

a) Determina los valores de los parámetros para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$, la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y $f'(-1) = -1$. Caracteriza si el extremo es máximo o mínimo.

b) Calcula, para los valores $a = 1, b = -2, c = 3$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Calcula, para los valores $a = 1, b = -2, c = 3$; $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

Solución:

a) La función $y = \frac{a}{1-x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\} \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua y derivable en $(-\infty, 0)$

La función $y = bx^2 + 2x + c$ es continua y derivable en $\mathbb{R} \quad \forall b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua y derivable en $(0, \infty)$

- Para que f sea continua en $x = 0$, debe cumplirse: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{a}{1-x} \right) = a = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx^2 + 2x + c) = c$$

- Por otra parte $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2bx + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(-1) = \frac{a}{4} = -1 \Rightarrow a = -4$

$$a = c \Rightarrow c = -4$$

- f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y es derivable en este valor $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow f'(1) = 2b + 2 = 0 \Rightarrow b = -1$

Con estos valores calculados

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-4}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-4}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f \text{ es derivable en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ y } f''(x) = \begin{cases} \frac{-8}{(1-x)^3} & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f''(1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{en } x = 1 \text{ } f \text{ presenta un máximo relativo}$$

Para que se cumplan las condiciones pedidas $a = -4, b = -1, c = -4$.

El extremo relativo en $x = 1$ es un máximo. Es el punto $(1, -3)$

b) Para estos valores $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x \leq 0 \\ -2x^2 + 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 + 2x + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- c) En este apartado, f tiene la misma expresión analítica que en el anterior y en el intervalo $[1, 2]$, $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$. Entonces:

$$I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (-2x^2 + 2x + 3) \cdot dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{-2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{-2 \cdot 1^3}{3} + 1^2 + 3 \cdot 1 \right) = \frac{-16}{3} + 4 + 6 + \frac{2}{3} - 1 - 3 = \frac{-14}{3} + 6 = \frac{4}{3}$$

$$I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \frac{4}{3}$$

Problema 5:

Al terminar el bachillerato los 100 alumnos de un Centro, de las modalidades de Ciencias y Artes, plantean viajar por Italia, Francia o Portugal. Entre los 55 alumnos de Ciencias se sabe que 10 quieren ir a Italia, 25 a Francia y 20 a Portugal. En el grupo de Artes hay 30 que quieren ir a Italia y 15 a Portugal. Elegido un alumno al azar, calcula:

- La probabilidad de que quiera ir a Portugal.
- Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes.
- Probabilidad de que un alumno que quiera ir a Francia y sea de Ciencias.
- Probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia.

Solución:

Sean los sucesos: A_1 = “el alumno elegido al azar quiere viajar a Italia”
 A_2 = “el alumno elegido al azar quiere viajar a Francia”
 A_3 = “el alumno elegido al azar quiere viajar a Portugal”
 B = “el alumno elegido al azar es de Ciencias”
 B^c = “el alumno elegido al azar es de Artes”

$$a) P(A_3) = P(A_3/B)P(B) + P(A_3/B^c)P(B^c) = \frac{20}{55} \cdot \frac{55}{100} + \frac{15}{45} \cdot \frac{45}{100} = \frac{35}{100} = 0.35$$

La probabilidad de que un alumno, elegido al azar, quiera ir a Portugal es **0.35**

$$b) P(B^c/A_1) = \frac{P(B^c)P(A_1/B^c)}{P(A_1)} = \frac{\frac{45}{100} \cdot \frac{30}{45}}{\frac{55}{100} \cdot \frac{10}{45} + \frac{45}{100} \cdot \frac{30}{45}} = \frac{\frac{45}{100} \cdot \frac{30}{45}}{\frac{55}{100} \cdot \frac{10}{45} + \frac{45}{100} \cdot \frac{30}{45}} = \frac{\frac{30}{100}}{\frac{10}{100} + \frac{30}{100}} = \frac{30}{40} = 0.75$$

La probabilidad de que un alumno que quiera ir a Italia sea de Artes es **0.75**

$$c) P(A_2 \cap B) = P(A_2/B)P(B) = \frac{25}{55} \cdot \frac{55}{100} = \frac{25}{100} = 0.25$$

La probabilidad de que un alumno quiera ir a Francia y sea de Ciencias es **0.25**

$$d) P(A_2/B) = \frac{25}{55} = 0.45$$

La probabilidad de que un alumno de Ciencias quiera ir a Francia es de **0.45**

Problema 6:

Se quiere estimar el tiempo diario de conexión a redes sociales de los universitarios. Se sabe que dicho tiempo tiene una distribución normal con desviación típica de 33 minutos (0.55 horas). Se desea construir un intervalo de confianza para la media diaria de conexión a redes sociales. Se pide:

- a) ¿A cuántos estudiantes debemos entrevistar para garantizar que el intervalo de confianza del 97 % tenga una amplitud menor o igual a 0.16 horas?
- b) Se ha encuestado a 100 universitarios y se ha obtenido una media de 4 horas al día. Calcula el intervalo de confianza al 97 % para la media poblacional.
- c) Un informe de cierto Ministerio afirma que la media del tiempo que los universitarios pasan conectados a las redes sociales es de 5 horas al día. Razona, a la vista del apartado b) si hay motivos para dudar de su afirmación.

Solución:

Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 97 %:

$$1 - \alpha = 0,97 \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985$$

El valor más cercano en la tabla es 0.9850 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 2.17$

- a) La amplitud del intervalo debe ser menor que 0.16 horas $\Rightarrow$ el error máximo admisible $E \leq 0.08$.

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0.08 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{0.55}{\sqrt{n}} \leq 0.08 \Rightarrow 1.1935 \leq 0.08 \sqrt{n}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1.1935}{0.08} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} \geq 14.91875 \Rightarrow n \geq 14.91875^2 \Rightarrow n \geq 222.5691016$$

El tamaño de la muestra debe ser por lo menos de **223** universitarios

b) $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(4 - 2,17 \frac{0.55}{\sqrt{100}}, 4 + 2,17 \frac{0.55}{\sqrt{100}} \right) = (3.88065, 4.11935)$

El intervalo de confianza es: **(3.88065, 4.11935)**

- c)

Existen motivos para dudar de la afirmación del Ministerio dado que 5 horas está fuera del intervalo obtenido para la media



**Universidad
Zaragoza**

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2021

EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. La nota final será el resultado de sumar las puntuaciones obtenidas en las preguntas realizadas y dividir dicha suma para tres.

1.- (10 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a.- (3 puntos) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$, calcula A^{-1} .
- b.- (7 puntos) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m , el sistema de ecuaciones:

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.- (10 puntos) El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 u. de proteína y 3 u. de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3€ y 2€, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60€.

- a.- (8 puntos) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.
- b.- (2 puntos) Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg. de soja y 15 kg. de maíz?

3.- (10 puntos) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a.- (3 puntos) Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$, ¿ $f(x)$ es continua en la recta real?
- b.- (3 puntos) Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1, 4]$.
- c.- (1 punto) Analiza la concavidad ($\cap$) - convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.
- d.- (3 puntos) Calcula $\int_1^2 f(x) dx$.

4.- (10 puntos) Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 16}{x + 3}$$

- a.- (4 puntos) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
- b.- (6 puntos) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

CONTINÚA AL DORSO

unizar.es



- 5.- (10 puntos) Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25%, 30% y 45%, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1%, 2% y 3%, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:
- a.- (3 puntos) Calcula la probabilidad de que esté mal corregido.
 - b.- (3 puntos) El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.
 - c.- (4 puntos) El examen tiene un error de corrección ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?
- 6.- (10 puntos) Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.
- a.- (6 puntos) Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20%. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0,1 con un nivel de confianza del 98%?
 - b.- (4 puntos) Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98% para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5238	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.



**Universidad
Zaragoza**

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2021

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

EJERCICIO DE: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

CUESTIONES GENERALES

- En los criterios de evaluación se dan las puntuaciones para las distintas fases de realización de los ejercicios. En algunos ejercicios en los que hay más de una manera de resolverlos se dan criterios dependiendo de cada forma de resolución; aun así, puede haber otras formas de resolver los problemas que no estén contempladas en los criterios expuestos. En este caso queda a criterio del corrector la forma de puntuar el ejercicio.
- En todo caso, debe darse por válida cualquier forma de resolución de los ejercicios, siempre que sea correcta y esté suficientemente razonada, por inusual o larga que sea.
- Como regla general, un pequeño error puntual de cuentas se penalizará con 0,1 pts. Si el error se produce en un paso intermedio, el resto del ejercicio se corregirá dando como válido el valor (erróneo) obtenido por el estudiante y no se le penalizará por ello en el resto del ejercicio, a no ser que el error dé lugar a un ejercicio significativamente más sencillo que el original, en cuyo caso la puntuación queda a criterio del corrector.

Ejercicio 1

a) (3 puntos) Determinar los valores de m para que la matriz tenga inversa se valorará con (1 pto) y calcular A^{-1} (2 pts). Las puntuaciones intermedias para el cálculo de la inversa serán:

1. Si se ha calculado haciendo operaciones elementales: transformar cada (a_{ij}) inicial a la matriz identidad (0,5 pts cada coeficiente).
2. Si se ha calculado aplicando la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj(A))^t$ las calificaciones intermedias serán: $|A|$ (0,1 pts), $Adj(A)$ (0,9 pts), traspuesta (0,5 pts), y llegar al resultado (0,5 pts).

b) (7 puntos) Discusión (3 pts) y resolución (4 pts). Las puntuaciones intermedias son:

(3 pts) Discusión:

- (1 pto) Calcular $rg(B)$.
- (1 pto) Calcular rango de matriz ampliada.
- (1 pto) Valor de m que hace incompatible el sistema (0,5 pts) y valores de m para SCD (0,5 pts).

(4 pts) Resolución:

Método de Gauss:

- (1 pto) Escalonar las matrices.
- (3 pts) Obtener la solución (1 pto determinar el valor de cada incógnita).

Regla de Cramer:

- (1 pto) Plantear la solución aplicando la regla de Cramer.
- (3 pts) Obtener la solución por determinantes (1 pto determinar el valor de cada incógnita).

Ejercicio 2

a) (8 puntos)

- i. (1 pto) Definir las variables de decisión y la función objetivo.
- ii. (1 pto) Definir las restricciones del enunciado (0,25 pts cada una) y la condición de no negatividad de las variables $x, y \geq 0$ (0,25 pts).
- iii. (3 pts) Representar cada una de las cinco restricciones (0,5 pts cada una) y la intersección de todas ellas (0,5 pts).

Para evaluar el cálculo de la solución óptima (aunque sea a partir de un planteamiento erróneo, siempre que no dé lugar a un problema mucho más sencillo que el original) se procederá como sigue:

Si se ha optado por evaluar la función objetivo en los vértices:

- i. (1,5 pts) Calcular las coordenadas de los vértices (cada vértice 0,3 pts).
- ii. (1 pto) Evaluar la función objetivo en los vértices (cada vértice 0,2 pts).
- iii. (0,5 pts) Determinar el vértice donde se alcanza el mínimo (0,25 pts) y su valor (0,25 pts).

unizar.es



Si se ha optado por curvas de nivel:

- i. (2 ptos) Representar dos rectas de nivel e identificar la dirección de crecimiento (la primera recta 1 pto, la paralela 0,5 ptos, identificar la dirección de mejora 0,5 ptos).
 - ii. (0,5 ptos) Razonar gráficamente el vértice solución.
 - iii. (0,5 ptos) Determinar analíticamente el mínimo (0,25 ptos) y su valor (0,25 ptos).
- b) (2 puntos) El razonamiento (1 pto) y la respuesta correcta (1 pto).

Ejercicio 3

- a) (3 puntos)
- i. (2 ptos) Se valorará con (1 pto) el cálculo de los límites laterales y valor de $f(0)$ y (1 pto) concluir que es continua en $x = 0$ a partir del análisis anterior.
 - ii. (1 pto) La continuidad en el resto de la recta real.
- b) (3 puntos) Las puntuaciones intermedias son: hallar la derivada de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (0,5 ptos), puntos críticos (0,5 ptos). Calcular la coordenada x del mínimo absoluto (1 pto) y las coordenadas de los dos máximos (0,5 ptos cada uno). Si sólo han calculado los extremos relativos se calificará con 0,75 ptos el mínimo y 0,75 ptos el máximo.
- c) (1 punto) No se ofrecen calificaciones intermedias.
- d) (3 puntos)
- i. (1,5 ptos) Cálculo de primitivas (0,5 ptos cada sumando).
 - ii. (1,5 ptos) Aplicar la Regla de Barrow y llegar al resultado (0,5 ptos cada sumando).

Ejercicio 4

- a) (4 puntos) Dominio (0,5 ptos), estudio de asíntotas horizontales (0,75 ptos), estudio de asíntotas verticales (0,75 ptos). Estudio de asíntotas oblicuas (1 pto para el término m y 1 pto para n).
- b) (6 puntos) Calcular $f'(x)$ (2 ptos), calcular los puntos críticos (1 pto) y analizar el carácter de los puntos críticos (1,5 ptos cada uno).

Ejercicio 5

Para obtener la máxima calificación no se necesita tanto detalle como aparece en la pauta de corrección. La falta de notación puede ser sustituida por la explicación, diagramas o tablas.

- a) (3 puntos)
- i. (1 pto) Definir los sucesos que intervienen en el enunciado: A = examen corregido por Alvarado, B = examen corregido por Benítez, C = examen corregido por Cadiñanos.
 - ii. (1 pto) Identificar que hay que aplicar el teorema de la probabilidad total y extraer del enunciado las probabilidades.
 - iii. (1 pto) Aplicar la fórmula y obtener el resultado.
- b) (3 puntos)
- i. (1 pto) Expresar la probabilidad a calcular como $P(B/M)$.
 - ii. (1 pto) Identificar que hay que aplicar el teorema de Bayes y extraer del enunciado los datos.
 - iii. (1 pto) Aplicar la fórmula y obtener el resultado.
- c) (4 puntos)
- i. (1 pto) Identificar que hay que calcular $P(A/M)$, $P(C/M)$ y comparar el valor con $P(B/M)$.
 - ii. (2 ptos) Calcular $P(A/M)$, $P(C/M)$ (1 pto cada una).
 - iii. (1 pto) Comparar resultados y concluir.

Ejercicio 6

- a) (6 puntos)
- i. (1,5 ptos) Saber qué cuantil buscar.
 - ii. (1,5 ptos) Calcularlo.
 - iii. (3 ptos) Poner la fórmula del error (1,5 ptos). Sustituir y calcular n (1,5 ptos).
- Si se deja el valor n no entero o se toma el anterior en vez del posterior, se restan 0,5 ptos.
- b) (4 puntos)
- i. (1,5 ptos) Calcular $\hat{p}$, $\hat{q}$.
 - ii. (1 pto) Calcular $Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ (error o semiamplitud del intervalo). En esta parte se dará como correcto el cuantil del apartado a.-, aunque no lo sea.
 - iii. (1,5 ptos) Poner la fórmula del intervalo de confianza y calcularlo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Determina los valores del parámetro m para que A tenga inversa. Para $m = 2$ calcula A^{-1} .

b) Discute y resuelve, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema de ecuaciones:

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a) La matriz A admite inversa si su determinante es distinto de 0. Por tanto:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{9}{6} \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

Para $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \quad |A| = -3$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Adj } A)^t = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que A admita inversa $m \neq \frac{3}{2}$. Si $m = 2$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2/3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) La matriz de coeficientes es $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & m & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{9}{6} \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

- Si $m \neq \frac{3}{2}$ $|B| \neq 0$ es un menor no nulo de orden máximo tanto de la matriz de coeficientes como de la matriz ampliada luego

Rango B = Rango $\bar{B}$ = nº de incógnitas = 3 $\Rightarrow$ Sistema es compatible determinado.

Escribimos su solución, utilizando la regla de Cramer:

Para cada $m \neq \frac{3}{2}$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{9-6m} = \frac{2}{2m-3} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{9-6m} = \frac{-1}{2m-3} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & m \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{9-6m} = \frac{2}{2m-3}$$

- Para $m = \frac{3}{2}$ $|B| = 0 \Rightarrow \text{Rango } B \neq 2$

$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
 $M_{134} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$ es un menor de orden 3 de la matriz ampliada. Luego $Rango \bar{B} = 3 \neq 2 = Rango B \Rightarrow$ El sistema es incompatible

Para $m = \frac{3}{2}$ el sistema es incompatible

Problema 2:

El nutricionista de una fábrica de piensos aconseja a los granjeros dedicados a la cría de cerdos una ingesta de, al menos, 28 unidades de proteína y, al menos, 36 unidades de grasa vegetal. El nutricionista sabe que cada kilo de soja proporciona 5 unidades de proteína y 3 unidades de grasa y cada kilo de maíz proporciona 1 unidad de proteína y 3 unidades de grasa. Los precios del kilo de soja y maíz son 3 euros y 2 euros, respectivamente y el granjero dispone de un presupuesto de 60 euros.

a) Plantea y resuelve un problema de programación lineal que permita calcular la cantidad de soja y maíz que deben consumir los cerdos de manera que se minimice el coste de la alimentación. Obtén dicho valor mínimo.

b) Si el granjero pensara que la dieta más cara es la mejor, ¿sería una solución óptima adquirir 12 kg de soja y 15 kg de maíz?

Solución:

Sean: $x = \text{n}^\circ$ de Kg de soja

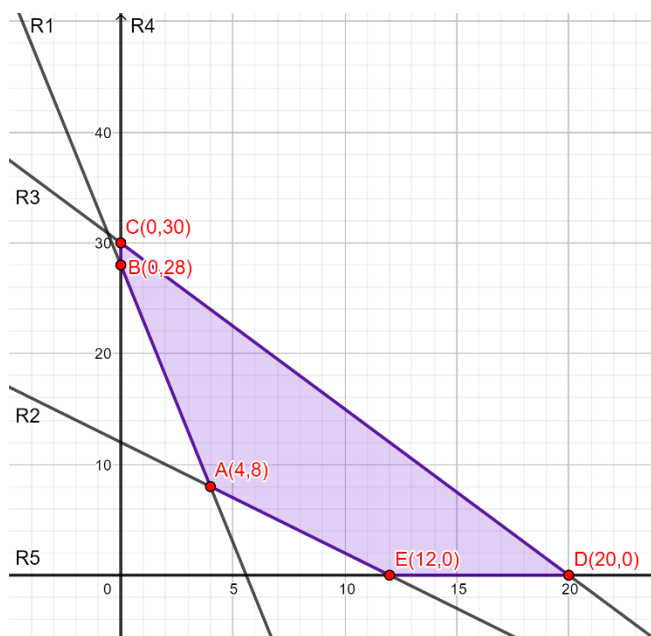
$y = \text{n}^\circ$ de kg de maíz

Nuestro objetivo es minimizar la función objetivo, que representa el coste total

$$Z = F(x, y) = 3x + 2y$$

con las siguientes restricciones:

$$S \equiv \begin{cases} I_1: 5x + y \geq 28 \\ I_2: 3x + 3y \geq 36 \\ I_3: 3x + 2y \leq 60 \\ I_4: x \geq 0 \\ I_5: y \geq 0 \end{cases}$$



La región factible es la solución de este sistema de inecuaciones. Lo resolvemos gráficamente:

Las dos últimas inecuaciones restringen esta solución al primer cuadrante.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $3x + y = 28$ que pasa por los puntos (0, 28) y (8, 4). El punto O (0, 0) no cumple la inecuación I_1 ($3 \cdot 0 + 0 \leq 28$) $\Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 **no** contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $3x + 3y = 36$ que pasa por los puntos (0, 12) y (12, 0). El punto O (0, 0) no cumple la inecuación I_2 ($3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 36$) $\Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 **no** contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $3x + 2y = 60$ que pasa por los puntos (0, 30) y (20, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 ($0 + 0 \leq 60$) $\Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La región factible es el polígono ABCDE, intersección de estos semiplanos y la solución óptima se encuentra en uno de sus vértices.

Determinamos sus coordenadas

$$A \equiv \begin{cases} 5x + y = 28 \\ 3x + 3y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} -15x - 3y = -84 \\ 3x + 3y = 36 \end{cases} \sim \begin{cases} 5x + y = 28 \\ -12x = -48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 4 \end{cases} \quad A = (4, 8)$$

$$B \equiv \begin{cases} 5x + y = 28 \\ x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 28 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 28)$$

$$C \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 60 \\ x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 30 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (0, 30)$$

$$D \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 60 \\ y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D = (20, 0)$$

$$E \equiv \begin{cases} 3x + 3y = 36 \\ y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E = (12, 0)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución, si existe, se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Valoremos la función objetivo en cada uno de ellos:

$$z(A) = F(4, 8) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 28$$

$$z(B) = F(0, 28) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 28 = 56$$

$$z(C) = F(0, 30) = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 30 = 60$$

$$z(D) = F(20, 0) = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 0 = 60$$

$$z(E) = F(12, 0) = 3 \cdot 12 + 2 \cdot 0 = 36$$

La solución se alcanza en el vértice A. Por tanto, la dieta debe contener 4 kg de soja y 8 kg de maíz para minimizar el coste de la nutrición de los animales de la granja y será de 28 €

b) El planteamiento del problema sería el mismo para localizar el coste máximo. Se alcanza en todos los puntos de la recta $3x + 2y = 60$ y sería de 60 €.

Si se adquieren 12 Kg de soja y 15 de maíz, el coste sería de $3 \cdot 12 + 15 \cdot 2 = 66$ €. Esta alternativa no es una solución óptima. Se encuentra fuera del conjunto de soluciones

Problema 3:

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$:

a) Estudia si $f(x)$ es continua en $x = 0$. ¿ $f(x)$ es continua en la recta real?

b) Halla los mínimos y máximos absolutos de $f(x)$ en $x \in [1, 4]$.

c) Analiza la concavidad ($\cap$) y la convexidad ($\cup$) de $f(x)$ cuando $x > 0$.

d) Calcula $I = \int_1^2 f(x) \cdot dx$.

Solución:

a) La función es: $y = -x^2 - 2x$ así como $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ son continuas en $\mathbb{R} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

Veamos si f es continua en $x = 0$

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 6x^2 + 9x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

También f es continua en $x = 0$

f es continua en la recta real

b) La función es: $y = -x^2 - 2x$, $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ son derivables en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0, x \in (0, \infty) \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = \frac{12 \pm 6}{6} = \frac{3}{1}$$

	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
Signo f'	+	0	-	0	+
Crecimiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

Los máximos y mínimos absolutos de f en el intervalo $[1, 4]$ pueden alcanzarse en los extremos relativos que presenta en el mismo, o bien en los extremos. Evaluamos f estos puntos:

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4 \quad f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \quad f(4) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 = 4$$

El máximo absoluto es 4 y se alcanza en los dos extremos del intervalo. El mínimo absoluto es 0, coincide con el relativo y se alcanza en $x = 3$

c) La función es: $y = -x^2 - 2x$, $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ son derivables dos veces en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es dos veces derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 6x - 12 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = 0, x \in (0, \infty) \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

	$(0,2)$	2	$(2, \infty)$
Signo f''	-	0	+
Curvatura de f	$\cap$	Punto de inflexión	$\cup$

f es cóncava en el intervalo $(0, 2)$ y convexa en $(2, \infty)$

$$d) \quad I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + 9 \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{4} + \frac{18x^2}{4} \right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{8 \cdot 2^3}{4} + \frac{18 \cdot 2^2}{4} \right] - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{8}{4} + \frac{18}{4} \right] = \frac{13}{4}$$

$$I = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \frac{13}{4}$$

Problema 4:

Dada la función: $f(x) = \frac{2x^2-16}{x+3}$:

a) Calcula el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determina, si existen, los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ en su dominio.

Solución:

a) f es una función racional. Existe en todo valor que no anule el denominador de su expresión analítica

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$$

- $x = -3$ es una posible asíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x^2-16}{x+3} = \frac{2}{0} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2-16}{x+3} = \frac{2}{0} = +\infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-16}{x+3} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-16}{x+3} = \infty$

No existen asíntotas horizontales

- Veamos por último si existen asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2-16}{x+3} : x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-16}{x^2+3x} = 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2-16}{x+3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-16-2x(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x-16}{x+3} = -6$$

$$\text{Análogamente } n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = -6$$

La recta $y = 2x - 6$ es una asíntota de f en $-\infty$ y en $+\infty$

b) f es derivable en su dominio y su derivada es $f'(x) = \frac{4x(x+3)-(2x^2-16)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x+16}{(x+3)^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{4} = \frac{-12 \pm 4}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-16}{4} = -4$$

Podemos estudiar su monotonía y posibles extremos relativos de f a partir del signo de su derivada:

	$(-\infty, -4)$	-4	$(-4, -3)$	-3	$(-3, -2)$	-2	$(-2, \infty)$
Signo f'	+	0	-	$\nexists$	+	0	+
Crecimiento de f	Creciente	Máximo relativo	Decreciente	$\nexists$	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente

f tiene un mínimo relativo en el punto $(-2, -8)$ y un máximo relativo en el punto $(-4, -16)$

Problema 5:

Los profesores Alvarado, Benítez y Cadiñanos, han corregido el 25 %, 30 % y 45 %, respectivamente, de los exámenes de una oposición. Los porcentajes de cometer algún fallo en la corrección son 1 %, 2 % y 3 %, respectivamente. Si se selecciona un examen al azar:

- Calcular la probabilidad de que esté mal corregido.
- El examen tiene un error de corrección, calcula la probabilidad de haber sido corregido por Benítez.
- El examen tiene un error de corrección, ¿qué corrector tiene mayor probabilidad de haber corregido mal el examen?

Solución:

Nombramos los sucesos:

A = "Alvarado ha corregido un examen de la oposición" $P(A) = 0.25$

B = "Benítez ha corregido un examen de la oposición" $P(B) = 0.3$

C = "Cadiñanos ha corregido un examen de la oposición" $P(C) = 0.45$

F = "El profesor ha cometido un fallo en la corrección"

$$P(F/A) = 0.01 \quad P(F/B) = 0.02 \quad P(F/C) = 0.03$$

A, B y C constituyen un sistema completo de sucesos, dado que son incompatibles dos a dos y la unión de los tres es el espacio muestral.

- Probabilidad de que un examen, elegido al azar, esté mal corregido = $P(F)$

Por el teorema de la probabilidad total

$$P(F) = P(F/A) \cdot P(A) + P(F/B) \cdot P(B) + P(F/C) \cdot P(C)$$

$$P(F) = 0.01 \cdot 0.25 + 0.02 \cdot 0.3 + 0.03 \cdot 0.45 = 0.022$$

La probabilidad de que un examen, elegido al azar, esté mal corregido es **0.022**

- Tal como hemos nombrado los sucesos, nos piden $P(B/F)$.

$$P(B/F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B) \cdot P(F/B)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.022} = 0.2727$$

La probabilidad de que si un examen, elegido al azar, presenta un fallo, haya sido corregido por Benítez es de **0.2727**

- Calculemos también $P(A/F)$ y $P(C/F)$

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F/A)}{P(F)} = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.022} = 0.1136$$

$$P(C/F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P(C) \cdot P(F/C)}{P(F)} = \frac{0.45 \cdot 0.03}{0.022} = 0.6136$$

El profesor que tiene mayor probabilidad de haber corregido el examen, si el examen elegido al azar presenta un fallo, es Cadiñanos

Problema 6:

Se desea estimar la proporción de estudiantes que viven en un colegio mayor a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de estudiantes.

a) Por estudios previos se sabe que el porcentaje de estudiantes alojados en un colegio mayor es del 20 %. ¿De qué tamaño debemos elegir la muestra para que el error de la estimación de la proporción sea menor de 0.1 con un nivel de confianza del 98 %?

b) Se toma una muestra de 50 estudiantes y se observa que 12 se alojan en un colegio mayor, calcula el intervalo de confianza al 98 % para la proporción de estudiantes alojados en un colegio mayor.

Solución:

Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 98 %:

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99$$

El valor más cercano en la tabla es 0,9901 correspondiente al valor $z_{\alpha/2} = 2.33$

a) En este caso $p_r = 0.2$. El error máximo admisible $E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} \leq 0.1$.

$$\begin{aligned} E \leq 0.1 &\Rightarrow 2.33 \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{n}} \leq 0.1 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.16}{n}} \leq \frac{0.1}{2.33}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{0.16}{n} \leq \left(\frac{0.1}{2.33}\right)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow n \geq \frac{0.16}{0.00184} \cong 86.86 \end{aligned}$$

La muestra debe ser de **87** estudiantes por lo menos

d) En este caso $p_r = \frac{12}{50} = 0.24$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por

$$\begin{aligned} \left(p_r - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} \right) &= \left(0.24 - 2.33 \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}}, 0.24 + 2.33 \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}} \right) = \\ &= (0.24 - 0.0604, 0.24 + 0.0604) = \mathbf{(0.1796, 0.3004)} \end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la proporción pedido es **(0.1796, 0.3004)**