Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2021

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JAIME CARRASCOSA OROZCO

Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 2

Qualificació			TR
Qüestions	1		
	2		
	3		
	4		
	5		
	6		
Suma de notes parcials			
Qualificació final			

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal ....

Número del tribunal ....

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x)=\dfrac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.

a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable x perquè la fàbrica no tingui pèrdues.
[1,25 punts]

b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici.
[1,25 punts]

2. En una pastisseria volen preparar capsetes de panellets per a obsequiar els millors clients durant la setmana de la Castanyada. En total, disposen de 120 panellets de pinyons i de 150 panellets de coco. Volen preparar capsetes de dos tipus: les del primer tipus contindran 3 panellets de pinyons i 2 de coco, i les del segon tipus contindran 4 panellets de pinyons i 6 de coco. La idea de la pastisseria és preparar el nombre màxim de capsetes possible amb els panellets de què disposen tenint en compte que, com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]

b) Determineu quantes capsetes cal preparar de cada tipus per a fer el màxim nombre d'obsequis possible. Indiqueu si, en aquest cas, s'utilitzaran tots els panellets disponibles i, si no és així, quants en sobraran de cada tipus.
[1,25 punts]

3. En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.
[0,75 punts]

b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.
[1,75 punts]

4. Un granger vol construir un corral rectangular per als seus conills. Sabem que només disposa de 40 m lineals de tanca metàl·lica.

a) Anomenem x l'amplària del corral i y la seva llargària. Escriviu la funció que permet calcular l'àrea del corral tenint en compte només l'amplària x.
[1,25 punts]

b) Calculeu en quin punt assoleix el seu màxim la funció que heu trobat a l'apartat anterior. Deduïu quina ha de ser l'amplària x i quina la llargària y perquè el corral tingui l'àrea màxima. Quina serà aquesta àrea màxima?
[1,25 punts]

5. Considereu la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de A^n. Demostreu que la inversa de A^n és $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.
[1,25 punts]

6. Considereu la funció real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.
[1,25 punts]

b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a = 12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los.
[1,25 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x)=\dfrac{-0{,}2x^2+5x-20}{x}$, en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.

a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable x perquè la fàbrica no tingui pèrdues.
[1,25 punts]

b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici.
[1,25 punts]

Solución:

$a)$ La fábrica no tendrá pérdidas si $f(x) \geq 0$. Como x es el número de unidades vendidas, $x \geq 0$, y la función $f(x)$ será positiva o negativa cuando lo sea su numerador.

$-0.2 \cdot x^2 + 5x - 20 = 0 \rightarrow \ x^2 - 25x + 100 = 0 \rightarrow \ x = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 20.$

La función $g(x) = -0.2 \cdot x^2 + 5x - 20$, que es una parábola cóncava ($\cap$), ya que es negativo el coeficiente de x^2, y corta al eje de abscisas en los puntos $x_1 = 5 \ y \ x_2 = 20$, por tanto:

La fábrica no tendrá pérdidas si fabrica entre $\mathbf{5}$ y $\mathbf{20}$ unidades.

$b)$ Hallamos el beneficio máximo anulando su primera derivada y viendo cuando es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = \frac{(-0.4 \cdot x + 5) \cdot x - (-0.2 \cdot x^2 + 5x - 20) \cdot 1}{x^2} = \frac{-0.4 \cdot x^2 + 5x + 0.2 \cdot x^2 - 5x + 20}{x^2} = \frac{-0.2 \cdot x^2 + 20}{x^2}.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-0.2 \cdot x^2 + 20}{x^2} = 0 \rightarrow \ -0.2 \cdot x^2 + 20 = 0 \rightarrow \ 0.2 \cdot x^2 = 20 \rightarrow \ x^2 = 100 \rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow x = 10.$

La solución negativa no tiene sentido.

$$f''(x) = \frac{-0.4x \cdot x^2 - (-0.2x^2 + 20) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-0.4x^2 + 0.4x^2 - 40}{x^3} = \frac{-40}{x^3} \rightarrow f''(10) = \frac{-40}{10^3} < 0$$

El beneficio es máximo para $x = 10$.

$$f(10) = \frac{-0.2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 20}{10} = \frac{-20 + 50 - 20}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

El máximo beneficio mensual es de **1 000** euros y se obtiene vendiendo **10** toneladas de confeti

Problema: 2

2. En una pastisseria volen preparar capsetes de panellets per a obsequiar els millors clients durant la setmana de la Castanyada. En total, disposen de 120 panellets de pinyons i de 150 panellets de coco. Volen preparar capsetes de dos tipus: les del primer tipus contindran 3 panellets de pinyons i 2 de coco, i les del segon tipus contindran 4 panellets de pinyons i 6 de coco. La idea de la pastisseria és preparar el nombre màxim de capsetes possible amb els panellets de què disposen tenint en compte que, com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.

[1,25 punts]

b) Determineu quantes capsetes cal preparar de cada tipus per a fer el màxim nombre d'obsequis possible. Indiqueu si, en aquest cas, s'utilitzaran tots els panellets disponibles i, si no és així, quants en sobraran de cada tipus.

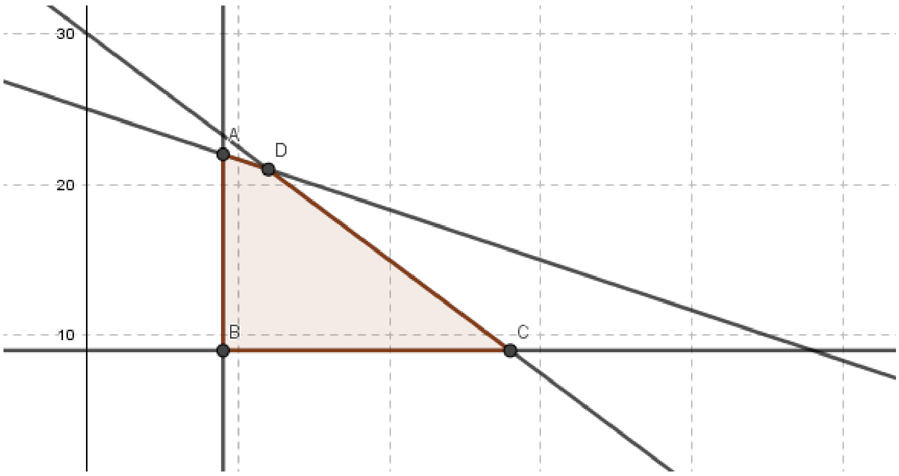
[1,25 punts]

Solución:

Es un problema de programación lineal.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+4y\le 120 \\ 2x+6y\le 150 \\ x\ge 9;\ y\ge 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+4y\le 120 \\ x+3y\le 75 \\ x\ge 9;\ y\ge 9 \end{array}\right\}.$

La región factible es:



Los vértices de la región factible son:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=9 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow 9+3y=75;\ \ 3y=66;\ \ y=22 \Rightarrow A(9,22).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=9 \\ y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow D(9,9).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=9 \\ 3x+4y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+36=120;\ \ 3x=84;\ \ x=28 \Rightarrow C(28,9).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+4y=120 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x-4y=-120 \\ 3x+9y=225 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=105;\ \ y=21;\ \ x+63=75;\ \ x=12 \Rightarrow (12,21).$$

La función de objetivo es: $f(x, y) = x + y$

b) Calculamos el valor de la función objetivo en cada vértice:

$A: f(9, 22) = 9 + 22 = 31.$

$B: f(9, 9) = 9 + 9 = 18.$

$C: f(28, 9) = 28 + 9 = 37.$

$D: f(12, 21) = 12 + 21 = 33.$

El valor máximo se obtiene en el vértice $C(29, 9)$.

El máximo se obtiene con $\mathbf{29}$ cajas del primer tipo y $\mathbf{9}$ del segundo.

Veamos lo que sobra con dicho máximo:

$Piñones: 120 - (28 \cdot 3 + 9 \cdot 4) = 120 - (84 + 36) = 120 - 120 = 0.$

$Coco: 150 - (28 \cdot 2 + 9 \cdot 6) = 150 - (56 + 54) = 150 - 110 = 40.$

Sobran $\mathbf{40}$ panellets de coco

Problema 3:

3. En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa.

[0,75 punts]

b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat.

[1,75 punts]

Solución:

a) Llamamos x, y, z al número de hombres, mujeres y niños, respectivamente, que asisten a la fiesta familiar. El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{array}\right\}.$$

Resolvemos por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-3-1-60}{-1-3-1-3}=\frac{-64}{-8}=8.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{1-60+3}{-8}=\frac{4-60}{-8}=\frac{-56}{-8}=7.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{1-20-20-1}{-8}=\frac{-40}{-8}=5.$$

Se han reunido en la fiesta **8** hombre, **7** mujeres y **5** niños.

Problema 4:

4. Un granger vol construir un corral rectangular per als seus conills. Sabem que només disposa de 40 m lineals de tanca metàl·lica.

a) Anomenem x l'amplària del corral i y la seva llargària. Escriviu la funció que permet calcular l'àrea del corral tenint en compte només l'amplària x.
[1,25 punts]

b) Calculeu en quin punt assoleix el seu màxim la funció que heu trobat a l'apartat anterior. Deduïu quina ha de ser l'amplària x i quina la llargària y perquè el corral tingui l'àrea màxima. Quina serà aquesta àrea màxima?
[1,25 punts]

Solución:

$a)$ Llamamos x, y a las dimensiones del corral. Como sólo dispone de 40 m de tela metálica, el perímetro es:

$2x + 2y = 40 \rightarrow \ x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x.$

El área del corral es:

$$S = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot (20 - x) \Rightarrow S(x) = 20x - x^2$$

$$S(x) = 20x - x^2 b)$$

Para calcular cuando es máxima el área calculamos los valores que anulan a la derivada primera

$$S'(x) = 20 - 2x \rightarrow S'(x) = 0 = 20 - 2x \rightarrow \ 10 - x = 0 \rightarrow x = 10.$$

Para saber si en $x = 10$ la función presenta un máximo o un mínimo determinamos el signo de la derivada segunda en ese punto

$S''(x) = -2 < 0 \rightarrow S''(10) = -2$ Luego el punto es un máximo

$y = 20 - 10 = 10.$

El área es máxima para el cuadrado de lado $\mathbf{10}$ metros

$$S = x \cdot y = 10 \cdot 10 = 100$$

El área máxima es de $\mathbf{100}$ metros cuadrados

Problema 5:

5. Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de A^n. Demostreu que la inversa de A^n és $\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
[1,25 punts]

b) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació matricial $A^{10}\cdot X-A^{20}=A$.
[1,25 punts]

Solución:

$a)$ Calculamos las potencias sucesivas de A

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Observamos que podemos generalizar:

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Calculamos la inversa de A^n por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^n|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & n & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -n\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$
$$\{F_1\to F_1-nF_2\}$$

Por tanto, la inversa de A^n es $\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$b)$ Despejamos X de la ecuación. Pasamos $-A^{20}$ sumando, y multiplicamos por la inversa de A^{10}.

$$A^{10}\cdot X-A^{20}=A\to\ A^{10}\cdot X=A+A^{20}\to\ (A^{10})^{-1}\cdot A^{10}\cdot X=(A^{10})^{-1}\cdot(A+A^{20})\to I\cdot X=(A^{10})^{-1}\cdot(A+A^{20})$$

$$X=(A^{10})^{-1}\cdot(A+A^{20})$$

En particular A^{10} y A^{20} valen:

$$A^{10}=\begin{pmatrix}1 & 10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ y\ A^{20}=\begin{pmatrix}1 & 20\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Como $(A^n)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ entonces $(A^{10})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Sustituimos y operamos:

$$A+A^{20}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 20\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 21\\ 0 & 2\end{pmatrix}\to X=(A^{10})^{-1}\cdot(A+A^{20})=\begin{pmatrix}1 & -10\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 21\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$$

Problema:6

6. Considereu la funció real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x = -1$.

[1,25 punts]

b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a = 12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los.

[1,25 punts]

Solución:

a) La función dada es continua y derivable, por lo que, para tener un extremo relativo debe anularse la primera derivada en ese punto:

$$x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2ax \rightarrow f'(-1) = 12 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) = 0 \rightarrow$$

$$12 - 2a = 0 \rightarrow \quad 6 - a = 0 \rightarrow a = 6.$$

$$\boldsymbol{a = 6}$$

b) Para $a = 12$ la función es $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$.

Una función es creciente cuando su primera derivada es positiva y es decreciente cuando es negativa.

Analizamos el signo de la derivada primera:

$$f'(x) = 12x^2 + 24x \rightarrow f'(x) = 0 = 12x^2 + 24x = \ 12x(x + 2) = 0$$

Se anula para $x = -2, y\ para\ x = 0$.

Tenemos los intervalos: $(-\infty, -2), (-2, 0)\ y\ (0, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Por ejemplo, $x = 1 \in (0, +\infty)$:

$f'(1) = 12 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = 36 > 0 \Rightarrow$ La función es creciente

Luego:

Si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ entonces la función es creciente, y si $x \in (-2, 0)$ es decreciente

Para $x = -2$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego alcanza un máximo.

Para $x = 0$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego alcanza un mínimo.

$$f(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 - 2 = -32 + 48 - 2 = 48 - 34 = 14 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{(-2, 14)}$ es un máximo relativo

$$f(0) = -2 \Rightarrow$$

$\boldsymbol{(0, -2)}$ es un mínimo relativo

RESPUESTAS SÈRIE 2

Problema 1:

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.

[1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima.

[1,25 punts]

Solución:

a) Para determinar la recta tangente buscamos el punto de tangencia, y con la derivada en ese punto, la pendiente de la recta:

Para $x = a$ es $f(a) = 4 - a^2$, por lo cual el punto de tangencia es $P(a, 4 - a^2)$.

$f'(x) = -2x \to m = f'(a) = -2a$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = y_0 + m(x - x_0)$

$y = (4 - a^2) - 2a(x - a) = 4 - a^2 - 2ax + 2a^2 = -2ax + a^2 + 4$. C.q.d.

La recta tangente corta a los ejes de coordenadas en los puntos:

$$X: \left.\begin{matrix} y = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{matrix}\right\} \to -2ax + a^2 + 4 = 0 \to \quad x = \frac{a^2+4}{2a} \to A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right).$$

$$Y: \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = -2ax + a^2 + 4 \end{matrix}\right\} \to y = a^2 + 4 \to B(0, a^2 + 4).$$

Queda comprobado que la recta tangente es $\boldsymbol{y = -2ax + a^2 + 4}$, y conta a los ejes coordenados en los puntos: $\boldsymbol{A\left(\frac{a^2+4}{2a}, 0\right)}$ y $\boldsymbol{B(0, a^2 + 4)}$.

b) El triángulo de vértices OAB es rectángulo, y su área vale: $\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4)$. Imponemos que sea mínima anulando la derivada primera y haciendo positiva la segunda:

$$Área(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+4}{2a} \cdot (a^2 + 4) = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4)^2}{a}.$$

$$Área'(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2 \cdot (a^2+4) \cdot 2a] \cdot a - (a^2+4)^2 \cdot 1}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4) \cdot [4a^2 - (a^2+4)]}{a^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2+4) \cdot (3a^2-4)}{a^2} = 0.$$

$(a^2 + 4) \cdot (3a^2 - 4) = 0$. Es siempre distinto de cero: $a^2 + 4$. Anulamos:

$3a^2 - 4 = 0 \to \ 3a^2 = 4 \to a = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. La solución negativa da longitudes negativas luego no tiene sentido geométrico

$$Área''(a) = \frac{1}{4} \cdot \frac{[2a \cdot (3a^2-4) + (a^2+4) \cdot 6a] \cdot a^2 - [(a^2+4) \cdot (3a^2-4)] \cdot 2a}{a^4} = \frac{3a^4 + 16a^3 + 16}{2a^3} \to Área''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0$$

El área del triángulo es mínima para $\boldsymbol{a} =$

Problema: 2

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real p:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre p.
[1,5 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$.
[1 punt]

Solución:

a) Para discutir el sistema estudiamos los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = p^2 + 2 + 2p^2 - 2p - p^3 - 2 = 0 \to \ p^3 - 3p^2 + 2p = 0;$$

$p(p^2 - 3p + 2) = 0 \to p = 0.$ y $p^2 - 3p + 2 = 0 \to \ p = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \to p = 1, p = 2.$

Por lo que si $p \neq 0, p \neq 1$, $p \neq 2$ el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al rango de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible y determinado**.

Para $p = 0 \to M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 = 2 \neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es **incompatible**.

Para $p = 1 \to M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 + 2 - 4 - 1 - 4 = -1 \neq 0$, luego su rango es 3, mientras que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, por lo que el sistema es incompatible.

Para $p = 2 \to M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, tiene la primera y la tercera filas iguales, luego su rango es 2, igual al rango de la matriz de los coeficientes y menos que el número de incógnitas, luego el sistema es **compatible e indeterminado**.

La discusión completa del sistema es:

- Si $p = 0$ o bien $p = 1$ el $RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ y el sistema es **incompatible**.
- Si $p = 2$ el $RgM = 2 = RgM^* < n$ y el sistema es compatible **indeterminado**.
- Si $p \neq 0,\ p \neq 1$ y $p \neq 2$ el $RgM = 3 = RgM^* = n$ y el sistema es **compatible determinado**.

$b)$ Si $p = 2$ el sistema es: $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=2-\lambda \\ 2x+2y=1-4\lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y=-2+\lambda \\ 2x+2y=1-4\lambda \end{array}\right\}$$

Hacemos $z = \lambda$, y sumamos: $y = -1 - 3\lambda$.

$$2x + y = 2 - \lambda \rightarrow \; 2x - 1 - 3\lambda = 2 - \lambda \rightarrow \; 2x = 3 + 2\lambda \rightarrow \; x = \frac{3}{2} + \lambda.$$

$$\boldsymbol{x = \frac{3}{2} + \lambda, y = -1 - \lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R}$$

Problema 3:

3. Considereu el punt $P=(-1,3,1)$, el pla $\pi: x=y$ i la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π.
[1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Solución:

a) La recta t que pasa por $P(-1,3,1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x-y=0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,-1,0) \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-y=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1+\lambda-(3-\lambda)=0;\ -1+\lambda-3+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow M(1,1,1).$$

Debe verificarse: $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'}$.

$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=[(1,1,1)-(-1,3,1)]=(2,-2,0)$.

$\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OM}=[(x,y,z)-(1,1,1)]=(x-,y-1,z-1)$.

$$(2,-2,0)=(x-1,y-1,z-1) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1=2 \to x=3 \\ y-1=-2 \to y=-1 \\ z-1=0 \to z=1 \end{array}\right\}.$$

El punto simétrico pedido es: $\boldsymbol{P'(3,-1,1)}$

b) De la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$ conocemos un punto: $Q(1,0,2)$ y el vector de dirección: $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$.

Buscamos un vector perpendicular a $\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)$ y al vector normal al plano π: $(1,-1,0)$

$$\overrightarrow{n'_\gamma}=\overrightarrow{v_r}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-i+3k+2k-j=-i-j+5k \Rightarrow\Rightarrow \overrightarrow{n_\gamma}=(1,1,-5).$$

El haz de planos γ tiene por expresión general: $\gamma \equiv x+y-5z+D=0$. Imponemos que contenga a $Q(1,0,2)$: $\gamma \equiv x+y-5z+D=0 \longrightarrow 1+0-5\cdot 2+D=0;\ D-9=0 \Rightarrow D=9$.

El plano pedido es: $\boldsymbol{x+y-5z+9=0}$

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x>0$, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y=f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt.
[1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y=f(x)$ i les rectes $x=1$ i $x=e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0<x<5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat.
[1 punt]

Solución:

$a)$ Buscamos un punto en el que la tangente sea horizontal, es decir:

$$f'(x)=0=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}\to\ 1-\ln(x)=0\to\ \ln(x)=1\to x=e\to f(e)=\frac{\ln(e)}{e}=\frac{1}{e}.$$

El punto buscado tiene de coordenadas: $\boldsymbol{A\left(e,\frac{1}{e}\right)}$

Como ya hemos visto que es un punto de tangente horizontal, podría ser un punto de inflexión si se anulara la derivada segunda:

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x))\cdot 2x}{x^4}=\frac{2\ln(x)-3}{x^3}\to f''(e)=\frac{2\ln(e)-3}{e^3}=\frac{2\cdot 1-3}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0$$

En $\boldsymbol{A\left(e,\frac{1}{e}\right)}$ la función alcanza un **máximo** relativo

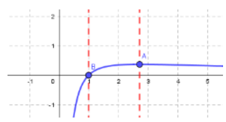
$b)$ Calculamos el comportamiento de la función cuando tiende a infinito

$k=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ Tanto el numerador como el denominador tienden a infinito por lo que podemos aplicar la regla de *L'Hôpital*.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

La recta $\boldsymbol{y=0}$ es asíntota horizontal cuando $x>0$

$c)$ Para $x=1, y=0$, la curva pasa por el punto $B(1,0)$.



Calculamos el área mediante un cambio de variables: $\ln(x)=t\to\frac{1}{x}\cdot dx=dt$

$$S=\int_1^e f(x)\cdot dx=\int_1^e\frac{\ln(x)}{x}\cdot dx=\int_0^1 t\cdot dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{1}{2}=0.5\,u^2.$$

Área = $\boldsymbol{\frac{1}{2}=0.5\,u^2}$

Problema 5:

5. *a*) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $A^2X = A - 3I$, en què I és la matriu identitat.
[1,25 punts]

b) Una matriu quadrada M satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què I és la matriu identitat. Justifiqueu que M és invertible i expresseu la inversa de M en funció de les matrius M i I.
[1,25 punts]

Solución:

a) Resolvemos la ecuación:

$$A^2X = A - 3I \to (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \to I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I) \to$$
$$X = (A^2)^{-1} \cdot (A - 3I)$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obtiene la inversa de A^2 por el método de Gauss.

$$(A^2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \leftrightarrow F_3\}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\{F_1 \leftrightarrow F_3\}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) $M^3 - 3M^2 + 3M - I = O \to M^3 - 3M^2 + 3M - O = I \to M \cdot (M^3 - 3M + 3I) = I.$

Por la definición de matriz inversa, la matriz $(M^3 - 3M + 3I)$ es la inversa de la matriz M:

$$\boldsymbol{M^{-1} = M^3 - 3M + 3I}$$

Problema 6:

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement.

[1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$.

[1,25 punts]

Solución:

a) La función $f(x)$ es suma de una función exponencial y de una función polinómica, ambas continuas en todo su dominio, que es R.

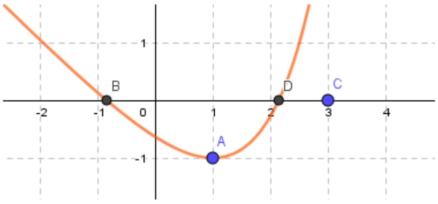
Estudio de los extremos relativos, crecimiento y decrecimiento. Calculamos la derivada primera:

$f'(x) = e^{x-1} - 1 \to f'(x) = 0 \to e^{x-1} - 1 = 0 \to \ e^{x-1} = 1 \to x - 1 = 0 \to \ x = 1.$

Para $x > 1 \to f'(x) > 0 \to$ La función es creciente si $x \in (1, +\infty)$

Para $x < 1 \to f'(x) < 0 \to$ La función es decreciente si $x \in (-\infty, 1)$

Por lo tanto en $x = 1$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego en ese punto alcanza un mínimo.



El punto $\boldsymbol{A(1, -1)}$ es un mínimo relativo.

b) La función es continua en toda la recta real. Vamos a aplicar el teorema de Bolzano en cada uno de los intervalos $(-1, 1)\ y\ (1, 3)$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$(-1, 1)$: $\begin{cases} f(-1) = e^{-1-1} - (-1) - 1 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \\ f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}$ Como $f(x)$ es monótona decreciente en $(-1,1)$,aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(-1, 1)$:

$(1, 3)$: $\begin{cases} f(1) = e^{1-1} - 1 - 1 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(3) = e^{3-1} - 3 - 1 = e^2 - 4 \cong 4{,}39 > 0 \end{cases}$. Como $f(x)$ es monótona creciente en $(1, 3)$,aplicando el *teorema de Bolzano* sabemos que tiene una única raíz en ese intervalo $(1, 3)$

Por tanto $f(x)$ tiene exactamente **dos** raíces en $(-1, 3)$.