MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Zambrana Aguilar y
Antonio Menguiano

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2021–2022.

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- **a)** **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- **b)** **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en <u>dos bloques (A y B)</u> de 4 ejercicios cada uno.**
- **c)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- **d)** **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** <u>En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar</u>.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas, ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- **f)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

<u>EJERCICIO 1</u>. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<-1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) Calcula a y b. **(1 punto)**

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. **(1,5 puntos)**

<u>EJERCICIO 2</u>. (2,5 puntos)

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada de las funciones $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por

$f(x)=4-\dfrac{x^2}{3}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{6}-2$.

<u>EJERCICIO 3</u>. (2,5 puntos)

Sea f la función definida por $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. **(1 punto)**.

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$, para $x\neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & mz & = & -3 \\ -mx & + & 3y & - & z & = & 1 \\ x & - & 4y & + & mz & = & -6 \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1,75 puntos)**

b) Para $m=2$ resuelve el sistema si es posible. **(0,75 puntos)**

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$, donde $m\geq 0$.

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A? **(1 puntos)**

b) Para $m=4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX=12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. **(0,75 puntos)**

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, así como el punto $A(-4,4,7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(0,75 puntos)**

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. **(1,75 puntos)**

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera la recta $r\equiv x-2=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, así como la recta s, determinada por el punto $P(1,2,3)$ y el vector $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

a) Calcula a para que las rectas r y s se corten. **(1,5 puntos)**

b) Calcula a para que las rectas r y s sean perpendiculares. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1.A:

Considera la función continua f definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x<-1 \\ ax+b & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$

a) Calcula a y b. (1 punto)

b) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de f. (1,5 puntos)

Solución:

a) f es una función definida a trozos, y como la continuidad de una función solo se estudia en los puntos del dominio de dicha función, observamos que los puntos donde la continuidad de la función es cuestionable son los puntos donde la gráfica de la función cambia de rama, éstos son los puntos $x=-1$ y $x=1$. Sin embargo, contamos con la certeza de que f es una función continua, por lo tanto, sabemos que:

1. $\exists f(x_0)$
2. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \pm\infty$
3. $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$

Donde x_0 es cualquier punto del dominio de la función. En nuestro caso, nos interesa particularmente los puntos que tienen por abscisa las nombradas anteriormente. Estudiémoslas por separado:

- Para $x=-1$: $f(-1)=a\cdot(-1)+b=b-a$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}(ax+b)=b-a \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x}=-1 \end{cases}$$

Como por ser continua en $x=-1$ debe ser obligatorio la existencia $\lim_{x\to -1} f(x)$, la cual se da si y solo si coinciden los límites laterales, igualamos los resultados obtenidos en cada uno, llegando a que

$$b-a=-1 \qquad (1)$$

- Para $x=1$: $f(1)=\dfrac{1^2}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=a+b\end{cases}$$

Por el mismo razonamiento obtenemos la siguiente igualdad:

$$a+b=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Relacionando las expresiones (1) y (2) obtenemos:

$$\begin{cases}-a+b=-1\\ a+b=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -a+b=-1\\ a+b=\dfrac{1}{2} \quad + \\ \hline 2b=\dfrac{1}{2}-1 \end{array} \Rightarrow b=-\frac{1}{4}$$

Sustituyendo el valor encontrado en cualquiera de las dos expresiones anteriores, obtenemos

$$a=\frac{3}{4}$$

Solución: $a=\dfrac{3}{4}$; $b=-\dfrac{1}{4}$

b) Comenzamos estudiando las asíntotas horizontales de f:

A.H.: las estudiamos calculando el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=+\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Conclusión: existe una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$. La ecuación de la asíntota horizontal es $y=0$.

A.V.: por ser una función continua en todo $\mathbb{R}$ podemos asegurar la no existencia de ninguna asíntota vertical.

A.O.: las asíntotas oblicuas de una función solo hace falta estudiarlas cuando no existen las asíntotas horizontales. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-1.$$

Conclusión: existe una asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$. La ecuación de la asíntota oblicua es $y=x-1$.

Solución: **f tiene una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$ en la recta $y=0$. f tiene una asíntota oblicua cuando $x\to+\infty$ sobre la recta $y=x-1$. f no tiene asíntotas verticales debido a que es continua.**

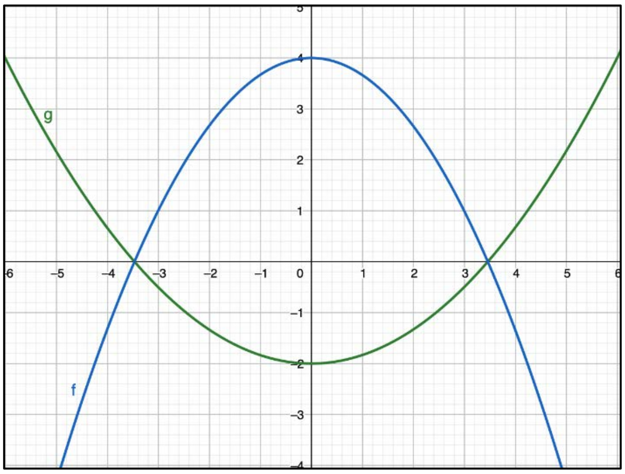
VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Este ejercicio es muy común en Selectividad. La resolución del primer apartado no muestra especial dificultad más allá de saber interpretar correctamente el trozo de función que tenemos que evaluar en el límite en cada caso. En el segundo apartado es de gran ayuda darse cuenta de que no existen asíntotas horizontales porque, según el enunciado, f es continua. Es importante recordar también que solo hallaremos las asíntotas oblicuas cuando no existan asíntotas horizontales, por lo que, al existir una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$, no calculamos $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ ni $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)$.

Ejercicio 2.A:

De entre todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes de coordenadas, determina las dimensiones de aquel de área máxima que puede inscribirse en la región limitada de las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **, definidas por** $f(x)=4-\dfrac{x^2}{3}$ **y** $g(x)=\dfrac{x^2}{6}-2$**.**

Solución:

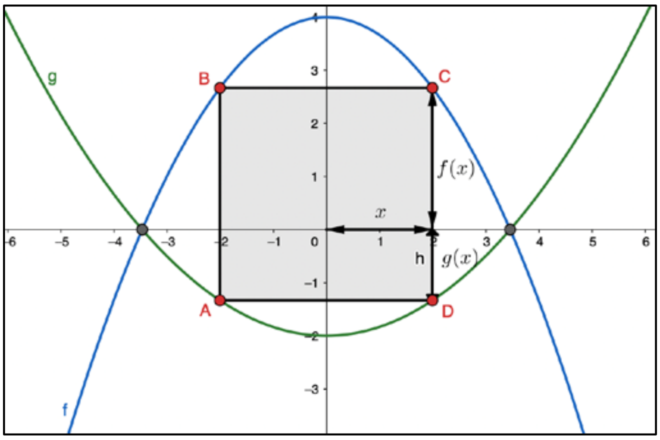
Primero vamos a realizar un esbozo de las gráficas de $f(x)=4-\dfrac{x^2}{3}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{6}-2$:



A tener en cuenta

Antes de hacer el esbozo debes notar que en la gráfica deberán quedarte **dos parábolas**, pues ambas funciones son **cuadráticas**, y que f **quedará por encima de** g **en el recinto de interés** (fuera es justamente al contrario), puesto que el coeficiente de x^2 de f es negativo y el de g es positivo, y además $f(0)>g(0)$. Si tu esbozo no cumple estas características resulta conveniente revisarlo y corregirlo.

Vamos ahora a dibujar un rectángulo de lados paralelos a los ejes que se encuentre dentro del recinto.



Llamando b a la base del rectángulo, h a su altura y considerando la función $A(b,h)$, que nos da el área del rectángulo, definida por $A(b,h)=b\cdot h$, tenemos que:

Gracias al dibujo anterior podemos notar como:

$b = x + |-x| = 2x$ y $h = f(x) + |g(x)| = f(x) - g(x)$, con $x > 0$. Por lo tanto:

$$A(x) = 2x \cdot \left[4 - \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x^2}{6} - 2\right)\right] \Rightarrow A(x) = 12x - x^3$$

A continuación, procedemos a derivar la función que nos da el área del rectángulo buscado para conocer los candidatos a máximos y mínimos de la función $A(x)$.

$A'(x) = -3x^2 + 12$. Como la derivada en un máximo o en un mínimo se anula, igualamos $A'(x)$ a 0.
$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$. La restricción $x > 0$ impuesta al principio obliga a descartar x_2. Por lo tanto, el único candidato a máximo de la función será el punto $M(2, f(2))$. Sin embargo, aún no podemos asegurarlo, necesitamos para ello aplicar el **Criterio de la Segunda Derivada** o bien, armar una **tabla de valores**.

- Criterio de la Segunda Derivada: Hallamos la segunda derivada $A''(x) = -6x$, que resulta ser $A''(2) < 0 \Rightarrow$ Máximo.

- Tabla de valores. Criterio de la Primera Derivada: Vamos a estudiar el signo de la derivada para valores cercanos a $x = 2$ por derecha y por izquierda.

	$x = 2^-$	$x = 2$	$x = 2^+$
$\text{sgn}[A'(x)]$	$A'(x) > 0$	$A'(x) = 0$	$A'(x) < 0$
Conclusión: en $x = 2$, $A(x)$ alcanza un máximo relativo.			

Por lo tanto, el área máxima se obtiene cuando $x = 2$. En este caso, las dimensiones del rectángulo son: $b = 2 + 2 = 4u$; $h = 4 - \frac{2^2}{3} - \frac{2^2}{6} + 2 = 6 - \frac{8+4}{6} = 4u$, o sea se trata del cuadrado de lado $4u$. Obteniéndose un área máxima de $16u^2$.

***Solución:* El rectángulo buscado tiene por dimensiones $4u \times 4u$.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: En este ejercicio es importante notar que ambas funciones son parábolas, conocer qué función queda por encima de cuál y tener cuidado con el signo de las imágenes de las funciones, porque en nuestro caso, la imagen de $g(x)$ era negativa (que lo podíamos ver fácilmente a través del esbozo) y por tanto, debíamos sumar el módulo (o valor absoluto) de este valor. También hay que tener cuidado al aplicar el Criterio de la Segunda Derivada, puesto que al resultar nula, no es concluyente este criterio (no se trata de un punto de inflexión).

Ejercicio 3.A:

Sea f **la función definida por** $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f **con el eje de abscisas y esboza la gráfica de la función. (1 punto).**

b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f **y el eje de abscisas. (1,5 puntos).**

Solución:

a) Para calcular los puntos de corte de f con el eje de abscisas hacemos $f(x)=0$.

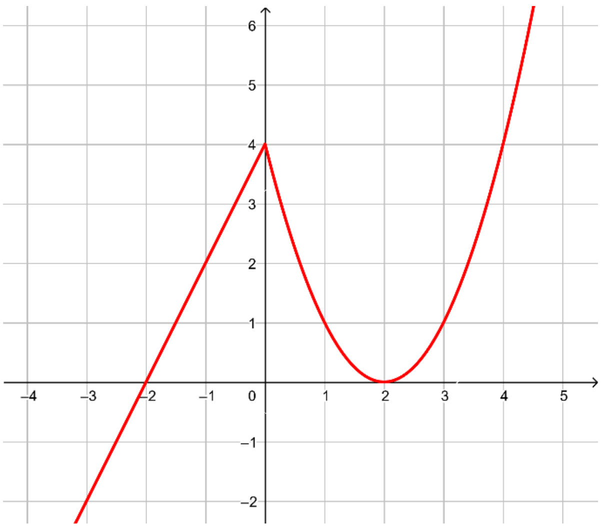
Para la primera rama de la función, tenemos: $2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow X_1(-2,0)$.

Para la segunda rama de la función, tenemos: $(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow X_2=(2,0)$.

A tener en cuenta

Al hacer $f(x)=0$ es frecuente encontrar el siguiente error entre los estudiantes: *solo igualar* $(x-2)^2$ *a cero porque es el trozo de función condicionado a* $x\geq 0$. Sin embargo, es de vital importancia tratar de evitar este **error**, ya que **este razonamiento es incorrecto**, porque que $(x-2)^2$ sea el trozo de función condicionado a $x\geq 0$ implica que **la expresión anterior es la que nos da el valor de la imagen de** f **cuando** $x=0$ (y, en general, cuando $x\geq 0$); sin embargo, nosotros estamos buscando **los valores de abscisa que anulan la imagen de la función**.

Gráfica de $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<0 \\ (x-2)^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$:

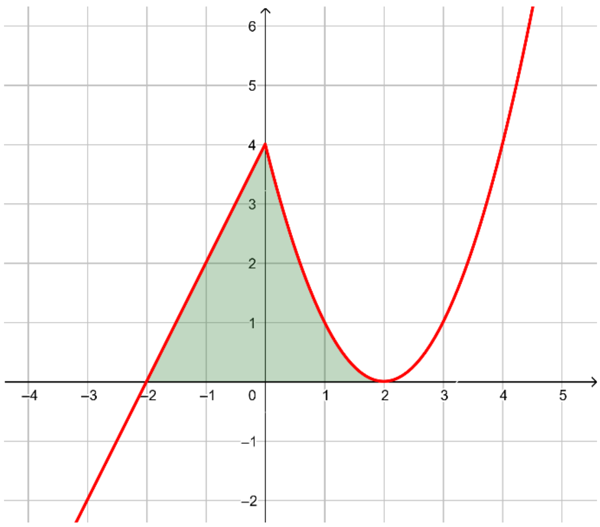


A tener en cuenta

Para hacer un esbozo correcto debes notar como la primera rama es una **recta**, por lo tanto, la graficamos armando una tabla de valores. Basta con conocer dos puntos para poder definir la recta, pero es recomendable dar alguno más, contemplando la posibilidad de que te hayas podido equivocar en alguno de los dos anteriores. La segunda rama es una **parábola**, para graficarla debes conocer algunos puntos característicos como el vértice, los puntos de corte con los ejes y puntos cercanos al vértice. El vértice de una parábola de la forma $y=ax^2+bx+c,\ \ a\neq 0$ es el punto que tiene por coordenadas $V\left[\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right]$. También lo puedes hallar derivando $y=ax^2+bx+c$ e igualando a 0.

Solución: **Los puntos de corte de f con el eje de abscisas son $X_1(-2,0)$ y $X_2(2,0)$. El esbozo de la gráfica de la función está realizado arriba.**

b) El esbozo realizado en el apartado anterior nos puede servir de ayuda para solucionar este otro apartado. Nos piden calcular el área representada en verde en la siguiente ilustración:



Por tanto, es fácil notar como $A=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(2x+4)\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx$, y por tanto:

$$A=\int_{-2}^{0}(2x+4)\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx=[x^2+4x]_{-2}^{0}+\int_{0}^{2}(x^2-4x+4)\,dx=[x^2+4x]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_0^2$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, o Regla de Barrow se llega a que:

$$A=\left[0-\left((-2)^2+4(-2)\right)\right]+\left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2+4\cdot 2-0\right)=\frac{20}{3}u^2$$

Solución: **El área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas es $\frac{20}{3}u^2$.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Para poder hacer este ejercicio es necesario saber cómo graficar una función a trozos y evidentemente, saber integrar. La representación de la función a trozos no resulta especialmente complicada teniendo en cuenta que la primera rama es una recta y la segunda es una parábola. Hay que prestar especial atención a los errores comunes que se comentan en el apartado *A tener en cuenta* y en el segundo apartado debemos darnos cuenta de que el área que nos piden calcular la obtenemos haciendo la suma de dos integrales definidas. Es importante ver en el primer apartado que los puntos de corte hallados se correspondan con la posterior representación de la función y que, como en el segundo apartado, nos piden obtener el valor de un área éste no puede ser negativo.

En el segundo apartado, el valor de la primera integral, que corresponde al área del recinto limitado por f y el eje OX desde $x=-2$ hasta $x=0$ lo podemos calcular directamente como el área de un triángulo.

Ejercicio 4.A:

Considera la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$, para $x\neq 1$. Halla una primitiva de f que pase por el punto $(2,6)$.

Solución:

Primero hallamos una primitiva cualquiera de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-2x+1}$. Sea $F(x)$ dicha primitiva.

$$F(x)=\int\frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$$

Realizamos la división de x^3 entre x^2-2x+1:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & & & & x^2-2x+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & 2x^2 & -x & & x+2 \\ \hline & 2x^2 & -x & & \\ & -2x^2 & +4x & -2 & \\ \hline & & 3x & -2 & \end{array}$$

A tener en cuenta

Pincha aquí si necesitas repasar el algoritmo de la división. Recuerda que detenemos el algoritmo cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor. Además, recuerda la prueba de la división: $\dfrac{D(x)}{d(x)}=C(x)+R(x)$, que nos servirá para expresar el cociente indicado de x^3 entre x^2-2x+1 de la forma en la que sigue.

Por tanto: $F(x)=\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2-2x+1}dx=\int\left(x+2+\frac{3x-2}{x^2-2x+1}\right)dx=\int(x+2)\,dx+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x-2}{x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x-2-x+x}{x^2-2x+1}dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{2x-2}{x^2-2x+1}dx+\int\frac{x}{x^2-2x+1}dx$$

La segunda integral es inmediata, solo recuerda que $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C,\ C\in\mathbb{R}$:

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\int\frac{x}{(x-1)^2}dx$$

Ahora, vamos a descomponer $\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{x}{(x-1)^2}$ como suma de dos fracciones algebraicas. Planteamos la suma, con A y B siendo los numeradores de las dos fracciones que queremos hallar:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A+Bx-B}{(x-1)^2}\Rightarrow\begin{cases}A-B=0\\B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$$. Con lo cual:

$$\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}\Rightarrow\int\frac{x}{(x-1)^2}dx=\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x-1}$$

Sustituyendo esta información en la expresión anterior llegamos a lo siguiente:

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x-1}=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\int(x-1)^{-2}dx+\ln|x-1|$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|+\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x^2-2x+1|-\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+\ln\left[(x-1)^2\right]-\frac{1}{x-1}+\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+C,\quad C\in\mathbb{R}$$

Al pasar por el punto $(2,6)$ sabemos que $F(2)=6$, por lo cual:

$$F(2)=\frac{2^2}{2}+4-\frac{1}{2-1}+3\ln|2-1|+C=6-1+\underbrace{3\ln 0}_{0}+C=6\Rightarrow C=1$$; por lo tanto:

Solución: **La primitiva buscada es** $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x-\frac{1}{x-1}+3\ln|x-1|+1$**.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio que puede resultar largo a aquellos alumnos que no manejen con la suficiente soltura las integrales. Para saber hacer el ejercicio basta con conocer la integral del cociente de la derivada de una función entre la propia función y saber separar una fracción algebraica como suma de otras dos. Hay una solución alternativa que consiste en separar directamente la expresión $\frac{3x-2}{x^2-2x+1}$, que quedaría como $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}$. En ambos casos llegamos al mismo resultado.

Ejercicio 5.B:

Considera el sistema:

$$\begin{cases} x - y + mz = -3 \\ -mx + 3y - z = 1 \\ x - 4y + mz = -6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de m. (1,75 puntos)

b) Para $m=2$ resuelve el sistema si es posible. (0,75 puntos)

Solución:

a) Primero armamos la matriz de coeficientes del sistema, sea A: $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada con los términos independientes, sea $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{array}\right)$.

Vamos a discutir el rango de ambas matrices para luego aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius.

Comenzamos calculando $|A|$ utilizando la Regla de Sarrus e igualando a 0:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix}=3m^2-3=0 \Rightarrow 3(m^2-1)=0 \Rightarrow m=\pm 1$$

Por lo tanto, para $m \neq \pm 1$, el determinante de la matriz de coeficientes resulta no nulo, y entonces, podemos afirmar que $rg(A)=rg(A')=3$.

Veamos para el caso en el cual $m=1$: $A_{(m=1)}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Como vimos, para $m=1$, $|A|=0$, por lo cual el $rg(A)\leq 2$. Como podemos asegurar la existencia de un menor no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0$, podemos asegurar que $rg(A)=2$. Estudiemos el rango de la matriz ampliada:

$A'_{(m=1)}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -6 \end{array}\right)$. Orlamos con la tercera fila y tercera columna.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18-12-1+9+4+6 = -12 \neq 0$$

Por lo tanto, obtenemos que $\left|A'_{(m=1)}\right| \neq 0 \Rightarrow rg\left(A'_{(m=1)}\right) = 3$.

Estudiamos ahora el caso en el que $m=-1$: $A_{(m=-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Como vimos, para $m=-1$, $|A| = 0$, por lo cual el $rg(A) \leq 2$. Como podemos asegurar la existencia de un menor no nulo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$,podemos asegurar que $rg(A) = 2$. Estudiemos el rango de la matriz ampliada:

$$A'_{(m=1)} = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & -6 \end{array}\right)$$. Orlamos con la tercera fila y tercera columna.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix} = -18+12-1+9+4-6 = 0$. Este resultado evidencia que $rg(A') \leq 2$, y es 2 porque hay un menor, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Escribimos por tanto: $rg(A) = rg(A') = 2$.

Solución:

<u>Discusión (Teorema de Rouché-Frobenius)</u>:

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$, entonces $rg(A) = rg(A') = 3 = \text{n}^{\text{o}}\text{ incg.}$: se trata de un S.C.D.

- Si $m = 1$, entonces $rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A')$; $rg(A) < rg(A')$, se trataría de un S.I.

- Si $m = -1$, entonces, $rg(A) = rg(A') = 2 < \text{n}^{\text{o}}\text{ incg.}$: se trata de un S.C.I., donde la solución dependerá de $3-2=1$ parámetro.

A tener en cuenta: Teorema de Rouché-Frobenius

Considérese un sistema de ecuaciones que tiene por A a la matriz de coeficientes y A' a la matriz ampliada del sistema. Si $rg(A)$ y $rg(A')$ denotan el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, respectivamente, se tiene:

1. El sistema es compatible si y solo si los rangos coinciden: $rg(A) = rg(A')$. Si además los rangos coinciden con el número de incógnitas, se trata de un S.C.D. En caso contrario, es un S.C.I. (tiene infinitas soluciones dependientes de $\text{n}^{\text{o}}\text{ incg} - rg(A')$ parámetros.

2. El sistema es incompatible (S.I.) si y solo si $rg(A) \neq rg(A')$. No tiene solución el sistema.

b) La discusión del apartado anterior hace notar que para $m=2$ el sistema es compatible determinado. Para su resolución podemos aplicar el Método de Gauss o Cramer.

- **Solución por Gauss**. Armamos la matriz del sistema y mediante una serie de transformaciones lineales lo convertimos en un sistema escalonado.

$$A'_{(m=2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & -6 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} F_1 \\ 2F_1+F_2 \\ F_1-F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

. De la tercera fila se obtiene $y=1$.

Sustituyendo este resultado en la segunda fila obtenemos $z=-2$. Sustituyendo este resultado en la primera fila llegamos a que $x=2$.

- **Solución por Cramer**.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{vmatrix} = 3(m^2-1) \Rightarrow |A_{m=2}| = 9$

Ahora, sencillamente calculamos los determinantes $|A_{(m=2)x}|$, $|A_{(m=2)y}|$ y $|A_{(m=2)z}|$, que resultan de sustituir en $|A_{m=2}|$ la columna de las x, de las y y de las z por la columna de los términos independientes, respectivamente. Las soluciones son $x = \frac{|A_{(m=2)x}|}{|A_{m=2}|}$, $y = \frac{|A_{(m=2)y}|}{|A_{m=2}|}$ y $z = \frac{|A_{(m=2)z}|}{|A_{m=2}|}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -6 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-18-8-6+36+12+2}{9} \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{2+24+3-2-6-12}{9} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-18-24-1+9+4+12}{9} \Rightarrow \boxed{z=-2}$$

Solución: $x=2;\ y=1;\ z=-2$

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio que no presenta especial dificultad y que es de los más comunes en selectividad. Como recomendación, siempre que nos pidan resolver un sistema y podamos utilizar la Regla de Cramer, es mejor resolverlo de esta forma, ya que por lo general este método es más rápido que Gauss y además las soluciones de las otras incógnitas no dependen de los resultados obtenidos en las incógnitas anteriores, como sí ocurre en Gauss, por lo que en caso de fallar en alguna de ellas, no tenemos todo el ejercicio mal. Asimismo, conviene comprobar las soluciones.

Ejercicio 6.B:

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{pmatrix}$**, donde** $m\geq 0$**.**

a) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A? (1 puntos)

b) Para $m=4$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial $AX=12I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0,75 puntos)

Solución:

a) Recordemos que la inversa de una matriz viene dada por la expresión $A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\left(A^t\right)$, con lo cual no existirá inversa cuando $|A|=0$. Vamos a estudiar este caso:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix}=m^3+m+m-m^2-m-m^2=m^3-2m^2+m;\ |A|=0\Rightarrow m\left(m^2-2m+1\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m_1=0 \\ (m-1)^2=0\Rightarrow m_2=1 \end{cases}$$

Solución: $\exists A^{-1}\forall m\in\mathbb{R}:\{m\geq 0, m\neq 0, m\neq 1\}$

b) Despejamos X de la ecuación matricial: $AX=12I\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}12I\Rightarrow X=A^{-1}12I=12A^{-1}$. Para $m=4$ sí existe solución puesto que existe inversa. Calculamos la inversa para $m=4$:

$$|A|=\begin{vmatrix} m & \sqrt{m} & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & m & 1 \\ \sqrt{m} & 1 & m \end{vmatrix}=m(m-1)^2\xrightarrow{m=4}\left|A_{m=4}\right|=4\cdot 3^2=36$$

$A_{m=4}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, por ser una matriz simétrica: $\left(A_{m=4}\right)^t=A_{m=4}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Hallamos $Adj\left[\left(A_{m=4}\right)^t\right]$, que por ser la adjunta de una simétrica, también es simétrica, por lo que:

$$Adj\left[\left(A_{m=4}\right)^t\right]=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ a_{12} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ a_{13} & a_{23} & \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & -6 & -6 \\ -6 & 12 & 0 \\ -6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Con lo cual:

$$\left(A_{m=4}\right)^{-1}=\frac{1}{36}\cdot\begin{pmatrix}15&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&12\end{pmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}15&-6&-6\\-6&12&0\\-6&0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&4\end{pmatrix}$

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio común en Selectividad. Para resolver el segundo apartado es de gran ayuda notar como estamos trabajando con una matriz simétrica, pues nos ahorra bastante tiempo. Si se dispone del tiempo necesario, sería conveniente comprobar la solución realizando el producto indicado en la ecuación matricial.

Ejercicio 7.B:

Se consideran los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, así como el punto $A(-4,4,7)$.

a) Calcula a y b para que el vector $\vec{w}=(1,a,b)$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0,75 puntos)

b) Determina los cuatro vértices de un paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y que tiene al vector $\overrightarrow{OA}$ como una de sus diagonales, siendo O el origen de coordenadas. (1,75 puntos)

Solución:

a) Por ser $\vec{w}=(1,a,b)$ ortogonal a los vectores $\vec{u}=(-1,2,3)$ y $\vec{v}=(2,0,-1)$, o sea, perpendicular. Se cumple que:

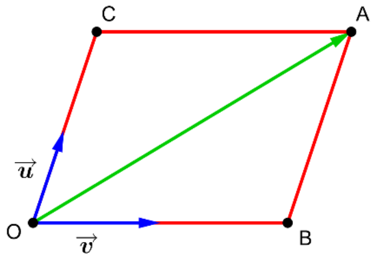
i) $\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (-1,2,3)\cdot(1,a,b)=-1+2a+3b=0 \Rightarrow \boxed{2a+3b=1}$.

ii) $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2,0,-1)\cdot(1,a,b)=2-b=0 \Rightarrow \boxed{b=2}$.

Y por tanto, tendríamos:

Solución: $a=-\dfrac{5}{2}$ **y** $b=2$**.**

b) Vamos a hacer el siguiente dibujo para clarificar la situación:



1. De los cuatro vértices de este paralelogramo, ya conocemos dos: $O(0,0,0)$ y $A(-4,4,7)$.
2. Ahora bien, el vector que une O con B es el vector $\lambda\vec{v},\ \lambda\in\mathbb{R}$. Y el vector que une O con C es el vector $\mu\vec{u}$. Por la *Regla del Paralelogramo*, sabemos que:
3.
4. $\lambda\vec{v}+\mu\vec{u}=\overrightarrow{OA} \Rightarrow (2\lambda,0,-\lambda)+(-\mu,2\mu,3\mu)=(-4,4,7) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda-\mu=-4 \\ 2\mu=4 \\ 3\mu-\lambda=7 \end{cases}$
5. Por lo que aquí deducimos: $\mu=2,\ \lambda=-1$. Por lo tanto: $\lambda\vec{v}=(-2,0,1);\ \ \mu\vec{u}=(-2,4,6)$.

6. De aquí se obtienen los vértices restantes: $\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{v} = B - O = B = (-2,0,1)$ y $\overrightarrow{OC} = \mu\vec{u} = C - O = C = (-2,4,6)$.

Solución: **Los vértices del paralelogramo son**
$O(0,0,0), A(-4,4,7), B(-2,0,1), C(-2,4,6)$.

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: Es un ejercicio poco común en Selectividad en Andalucía. El primer apartado es muy sencillo de hacer y no presenta especial dificultad más que conocer que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a cero. El segundo apartado puede parecer más complicado para los estudiantes. Existe una solución alternativa a la dada aquí para el apartado b), considerando las rectas que pasan por cada vértice y tienen como vector director a los vectores que forman el paralelogramo. De esta forma, los vértices del paralelogramo serían los puntos de corte de las rectas. Sin embargo, esta última forma, aunque también válida, es más tediosa.

Ejercicio 8.B:

Considera la recta $r \equiv x-2=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{2}$**, así como la recta** s**, determinada por el punto** $P(1,2,3)$ **y el vector** $\vec{v}=(1+a,-a,3a)$**.**

a) Calcula a **para que las rectas** r **y** s **se corten. (1,5 puntos)**

b) Calcula a **para que las rectas** r **y** s **sean perpendiculares. (1 punto)**

Solución:

a) Extraemos del enunciado el vector director de r: $\vec{d_r}=(1,-1,2)$ (las coordenadas del vector director son los denominadores de la expresión por la cual está definida la recta, por estar en su forma continua). El vector director de s es $\vec{d_s}=\vec{v}=(1+a,-a,3a)$.

Dado que r y s se cortan, se pueden dar casos:
1. r y s son coincidentes y entonces se cortan en infinitos puntos.
2. r y s son secantes y entonces se cortan en un único punto.

Exploramos la primera posibilidad:

$\frac{1}{1+a}=\frac{-1}{-a}=\frac{2}{3a}\Rightarrow\begin{cases}-a=-1-a\Rightarrow 0\neq -1\\ -3a=-2a\Rightarrow a=0\end{cases}$. No es posible que r y s sean coincidentes, puesto que

$\nexists a\in\mathbb{R}:\vec{d_r}//\vec{d_s}$.

Exploramos la segunda posibilidad.

Definimos el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$ como el vector que une un punto de r con un punto de s. Un punto de r es el $P_r(2,0,1)$ (que se extrae de la expresión continua de la recta que ofrece el enunciado).

Por tanto: $\overrightarrow{P_rP_s}=P_s-P_r=(-1,2,2)$. Dado que las rectas r y s son secantes:

$$\left|\vec{d_r},\vec{d_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1+a & -a & 3a\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}=-2-2a+6a+2a-3a-4-4a+2a=0$$

De aquí se obtiene: $-6+a=0\Rightarrow a=6$

Solución: **Para que ambas rectas se corten** $a=6$**.**

b) Si r y s son perpendiculares, entonces:

$$\overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{d_s} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{d_s} = 0 \Rightarrow (1,-1,2)\cdot(1+a,-a,3a) = 1+8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$$

Luego, para $a = -\frac{1}{8} \Rightarrow \overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{d_s}$; condición necesaria y suficiente para afirmar que r y s son perpendiculares.

Solución: **Si $a = -\frac{1}{8}$, r y s son perpendiculares.**

VALORACIÓN DEL EJERCICIO: De los dos ejercicios correspondientes al bloque de geometría que figuran en este examen este resulta ser el más común, sencillo y rápido de hacer. En el primer apartado es imprescindible indicar los dos posibles casos, aunque luego más tarde veamos que el primero de ellos no tiene sentido. Para resolver el ejercicio 8 hay que tener en cuenta que aunque para $a = -\frac{1}{8}$, las dos rectas se cruzan, en $\mathbb{R}^3$ pueden cruzarse y ser perpendiculares a la vez.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Este ejercicio consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques A y B de 4 ejercicios cada uno. Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE A

Problema 1:

1º) Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(Lx)^3+2x} = 1$ (donde Lx denota la función logaritmo neperiano).

Problema 2:

2º) Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Problema 3:

3º) Calcula $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio $t = \sqrt{1+x} - 1$).

Problema 4:

4º) Considera las funciones $f, g: R \to R$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

$a)$ Calcula los puntos de corte de las gráficas de $f \ y \ g$. Esboza sus gráficas.

$b)$ Determina el área del recinto limitado por las gráficas de $f \ y \ g$ en el primer cuadrante.

BLOQUE B

Problema 5:

5º) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ y \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

$b)$ Para $a = 1$ calcula X tal que $A \cdot X \cdot B = C$, si es posible.

Problema 6:

6º) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -2$.

$a)$ Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$. $b)$ Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$.

Problema 7:

7º) Considera las rectas $r \equiv x+1 = y-a = -z$ y $s \equiv \begin{cases} x = 5+2\lambda \\ y = -3 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.

$b)$ Halla la ecuación del plano π que pasa por $P(8,-7,2)$ y que contiene a la recta s.

Problema 8:

8º) Sea el plano $\pi \equiv x+y-z=2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z-1$.

$a)$ Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.

$b)$ Dado el punto $Q(2,6,3)$, halla su simétrico respecto del plano π.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

Problema 1:

1º) Calcula a sabiendo que $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(Lx)^3+2x} = 1$ (donde Lx denota la función logaritmo neperiano).

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{(Lx)^3+2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3\cdot(Lx)^2\cdot\frac{1}{x}+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{3\cdot(Lx)^2+2x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{6\cdot Lx\cdot\frac{1}{x}+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{6\cdot Lx+2x} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\frac{6}{x}+2} = \frac{a}{\frac{6}{\infty}+2} = 1; \quad \frac{a}{0+2} = 1 \Rightarrow$$

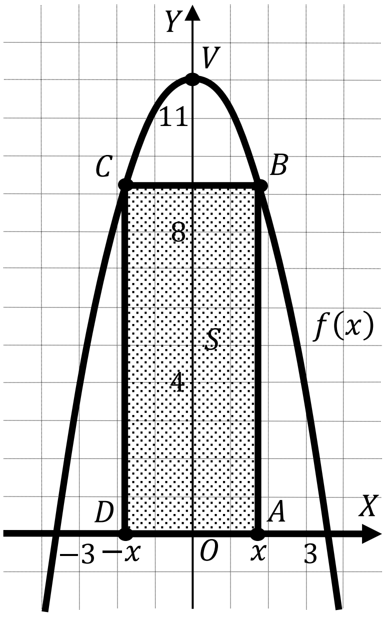
$$\underline{\boldsymbol{a = 2}}.$$

Problema 2:

2º) Calcula los vértices y el área del rectángulo de área máxima inscrito en el recinto limitado por la gráfica de la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = -x^2 + 12$ y el eje de abscisas, y que tiene su base sobre dicho eje.

Solución:

La función $f(x) = -x^2 + 12$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice es $V(0, 12)$; por ser una función par es simétrica con respecto al eje de ordenadas.



El punto B, por pertenecer a la función $f(x)$ tiene por expresión $B(x, -x^2 + 12)$.

Teniendo en cuanta que $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Considerando la simetría de la función, la superficie del rectángulo, en función de x, es la siguiente:

$S(x) = 2 \cdot x \cdot (-x^2 + 12) = -2x^3 + 24x.$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$S'(x) = -6x^2 + 24 = -6 \cdot (x^2 - 4).$

$S'(x) = 0 \Rightarrow -6 \cdot (-x^2 + 4) = 0;\ -x^2 + 4 = 0;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$

La raíz negativa no se ha tenido en cuenta por condición del ejercicio.

Se comprueba a continuación de que se trata de un máximo.

$S''(x) = -6 \cdot (2x) = -12x \Rightarrow S''(2) = -24 < 0 \Rightarrow Máximo, c.q.c.$

$S(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 = -16 + 48 = 32.$

Los vértices del rectángulo son los siguientes:

$\underline{\boldsymbol{A(2,0)}}, \boldsymbol{B(2, -2^2 + 12)} \Rightarrow \underline{\boldsymbol{B(2,8)}}$ **y por simetría:** $\underline{\boldsymbol{C(-2,8)}}$ **y** $\underline{\boldsymbol{D(-2,0)}}$**.**

$\underline{\boldsymbol{La\ superficie\ es\ máxima\ para\ x = 2\ metros\ vale\ 32\ metros\ cuadrados.}}$

Problema 3:

3º) Calcula $I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio $t = \sqrt{1+x} - 1$).

Solución:

$$I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x} - 1 = t;\ \ \sqrt{1+x} = t+1 \\ \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot dx = dt;\ \ dx = 2(t+1) \cdot dt \end{array} \right| \begin{array}{l} x = 8 \to t = 2 \\ x = 3 \to t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot 2(t+1) \cdot dt = 2 \cdot \int_1^2 \frac{t+1}{t} \cdot dt = 2 \cdot \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{t}\right) \cdot dt = 2 \cdot [t + Lt]_1^2 =$$

$$= 2 \cdot [(2 + L2) - (1 + L1)] = 2 \cdot (2 + L2 - 1 - L1) = 2 \cdot (1 + L2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I = \int_3^8 \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} \cdot dx = 2 + L4.}}$$

Problema 4:

4º) Considera las funciones $f, g: R \rightarrow R$ definidas por $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.

a) Calcula los puntos de corte de las gráficas de f y g. Esboza sus gráficas.

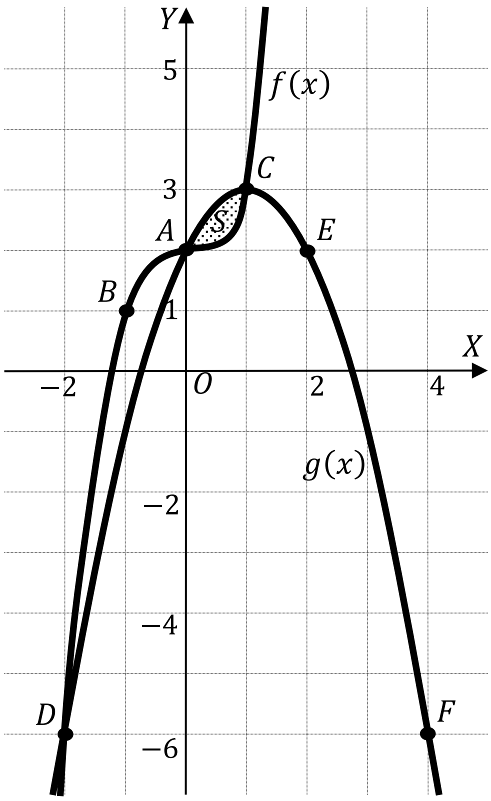
b) Determina el área del recinto limitado por las gráficas de f y g en el primer cuadrante.

Solución:

a) Las dos funciones están definidas en R por ser sumas algebraicas de funciones definidas en R.

La función $f(x) = x^3 + 2$ es monótona creciente y tiene un punto de inflexión en $A(0, 2)$; otros puntos de la función $f(x)$ son $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ y $D(-2, -6)$.

La función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$ es una parábola cóncava (∩) cuyo vértice, C, es el siguiente:



$g'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1;\ \ C(1, 3)$.

Otros puntos de la parábola son $A(0, 2)$, $D(-2, -6)$, $E(2, 2)$ y $F(4, -6)$.

Los puntos de corte de las funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 + 2 = -x^2 + 2x + 2;$

$x^3 + x^2 - 2x = 0;\ \ x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 0;\ \ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = -2, x_3 = 1.$

Los puntos de corte son $A(0, 2), D(-2, -6)$ y $C(1, 3)$.

La representación gráfica de la situación, de forma aproximada, se expresa en la figura anterior.

b) De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^1 [(-x^2 + 2x + 2) - (x^3 + 2)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 2x) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^1 = \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 =$$

$$= \left(-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + 1^2\right) - 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{-3 - 4 + 12}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{5}{12}\ u^2 \cong 0,42\ u^2.}}$$

BLOQUE B

Problema 5:

5º) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determina los valores de a para los que la matriz B no tiene inversa.

$b)$ Para $a = 1$ calcula X tal que $A \cdot X \cdot B = C$, si es posible.

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4a + 2 - 2a^2 - 2 = 0;\ -2a^2 + 4a = 0;\ -2a(a-2) = 0;$$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ B\ no\ tiene\ inversa\ para\ a = 0\ y\ a = 2.}}$$

$b)$ $\quad A \cdot X \cdot B = C;\ A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1};\ I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}}.$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para $a = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 2 - 2 = 2.$

$$B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ B^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.\ de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ -20 & 10 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-10} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

6º) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -2$.

$a)$ Calcula: $\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix}$. $b)$ Calcula: $\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix}$.

Solución:

En la realización del ejercicio se utilizan las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

5ª.- El valor del determinante de una matriz es igual que el determinante de su matriz traspuesta.

$$a)\ \begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ p & r & q \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -6\cdot(-2) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} a & c & b \\ 2x & 2z & 2y \\ -3p & -3r & -3q \end{vmatrix} = 12.}$$

$$b)\ \begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & -2a \\ y & b & -2b \\ z & c & -2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} x & -3p & -2a \\ y & -3q & -2b \\ z & -3r & -2c \end{vmatrix} = (-3)\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} x & p & a \\ y & q & b \\ z & r & c \end{vmatrix} =$$

$$= 6\cdot\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ z & y & z \end{vmatrix} = -6\cdot(-2) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\begin{vmatrix} x & a-3p & -2a \\ y & b-3q & -2b \\ z & c-3r & -2c \end{vmatrix} = 12.}$$

Problema 7:

7º) Considera las rectas $r \equiv x+1=y-a=-z$ y $s \equiv \begin{cases} x=5+2\lambda \\ y=-3 \\ z=2-\lambda \end{cases}$.

$a)$ Calcula a para que r y s se corten. Determina dicho punto de corte.

$b)$ Halla la ecuación del plano π que pasa por $P(8,-7,2)$ y que contiene a la recta s.

Solución:

$a)$ Un punto y un vector director de la recta r son $A(-1,a,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,1,-1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(5,-3,2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,0,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(5,-3,2)-(-1,a,0)]=(6,-3-a,2)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Las rectas r y x se cortan cuando los vectores $\{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}$ son coplanarios, es decir, cuando su rango es dos, para lo cual es necesario que el valaor del determinante que forman sea cero:

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\vec{w}\}=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -3-a & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$$-2\cdot(-3-a)-6+(-3-a)-4=0;\ \ 6+2a-6-3-a-4=0 \Rightarrow a=7.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ para\ a=7.}}$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=-1+\delta \\ y=7+\delta \\ z=-\delta \end{cases}$.

$\left.\begin{cases} 5+2\lambda=-1+\delta \\ -3=7+\delta \\ 2-\lambda=-\delta \end{cases}\right\} \Rightarrow \delta=-10.$ El punto de corte de las rectas r y s es

$$\underline{\boldsymbol{P(-11,-3,10).}}$$

$b)$ El punto $B(5,-3,2) \in s$ con el punto $P(8,-7,2)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=[(8,-7,2)-(5,-3,2)]=(3,-4,0)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{BP}) \equiv \begin{vmatrix} x-8 & y+7 & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}=0;$$

$$-8(z-2)-3(y+7)-4(x-8)=0;\ \ 8(z-2)+3(y+7)+4(x-8)=0$$

$$8z-16+3y+21+4x-32=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 4x+3y+8z-27=0.}}$$

Problema 8:

8º) Sea el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv x = \frac{y}{3} = z - 1$.

$a)$ Calcula, si existe, el punto de intersección de π y r.

$b)$ Dado el punto $Q(2, 6, 3)$, halla su simétrico respecto del plano π.

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z = 2 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + 3\lambda - (1 + \lambda) = 2;\ \ 4\lambda - 1 - \lambda = 2;\ \ 3\lambda = 3 \Rightarrow$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(1, 3, 2)}}.$$

$b)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ es $\vec{n} = (1, 1, -1)$.

La recta t, perpendicular a π y que contiene al punto $Q(2, 6, 3)$ tiene la siguiente expresión por unas ecuaciones paramétricas: $t \equiv \begin{cases} x = 2 + \delta \\ y = 6 + \delta \\ z = 3 - \delta \end{cases}$.

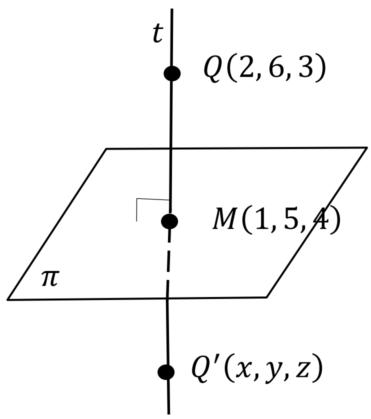
El punto M, intersección de la recta t con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z = 2 \\ t \equiv \begin{cases} x = 2 + \delta \\ y = 6 + \delta \\ z = 3 - \delta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2 + \delta) + (6 + \delta) - (3 - \delta) = 2;$$

$$2 + \delta + 6 + \delta - 3 + \delta = 2;\ \ 3\delta = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = -1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 1 = 5 \\ z = 3 + 1 = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow M(1, 5, 4).$$



$$\left.\begin{array}{l} \frac{x + 2}{2} = 1 \Rightarrow x = 0 \\ \frac{y + 6}{2} = 5 \Rightarrow y = 4 \\ \frac{z + 3}{2} = 4 \Rightarrow z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q'(0, 4, 5\ )}}.$$