MATEMÁTICAS II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1º) Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

$a)$ Si sabemos que $f(x)$ corta al eje de abscisas en $x = 1$, calcula la expresión de $f(x)$.

$b)$ Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

$c)$ Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$ es 15 u^2. Calcule el valor de a.

2º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} ax + 2y + 3z = 2 \\ 2x + ay + z = a \\ x + y + 4z = 1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real a.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $a = 2$.

3º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

$a)$ Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si el paralela, calcule la distancia de r a π, si es secante, calcule el punto de corte.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta a la recta r en un punto P, la primera coordenada de éste es 5 veces mayor que la segunda.

4º) $a)$ Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte al eje de ordenadas en el punto $A(0, 5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.

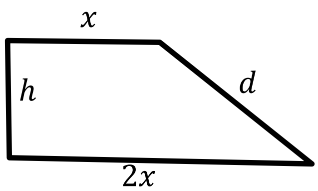
$b)$ Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0, 4)$. Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

5º) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

$a)$ Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$b)$ Determine los valores de a, b y c para que $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6º) En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, por lo que la base mayor mida el doble de la base menor, tal como muestra la figura, y que el lado oblicuo respecto de las bases (d) se tan corto como sea posible.



$a)$ Justifique que se satisfacen las relaciones $h = \frac{20}{x}$ y $d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.

$b)$ Encuentre las dimensiones del trapecio para los que la longitud del lado d es mínima.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

1º) Sea $f'(x) = 3x^2 - 12x$ la derivada de una función $f(x)$.

$a)$ Si sabemos que $f(x)$ corta al eje de abscisas en $x = 1$, calcula la expresión de $f(x)$.

$b)$ Calcule la abscisa del punto de inflexión de $f(x)$ y estudie la concavidad de la función.

$c)$ Sabemos que el área del recinto limitado por la curva $f''(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = a$, con $a > 2$ es 15 u². Calcule el valor de a.

SOLUCIÓN

$a)$ $f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (3x^2 - 12x) \cdot dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + C = x^3 - 6x^2 + C.$

$f(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 6 \cdot 1^2 + C = 0;\ \ 1 - 6 + C = 0 \Rightarrow C = 5.$

$$\underline{\boldsymbol{f(x) = x^3 - 6x^2 + 5}}.$$

$b)$ Una función polinómica tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 6x - 12 = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$

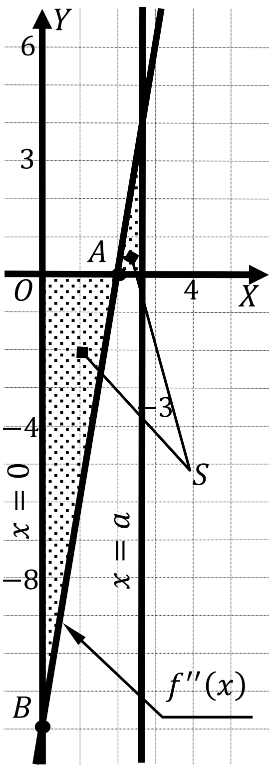
$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 5 = 8 - 24 + 5 = -11 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P.I. \to P(2, -11)}}.$$

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$$\underline{\boldsymbol{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow \in (-\infty, 2)}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \in (2, +\infty)}}.$$



$c)$ La función $f''(x) = 6x - 12$ es una recta que contiene a los puntos $A(2, 0)$ y $B(3, 6)$. La representación gráfica de la situación se indica, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$S = \int_2^0 (6x - 12) \cdot dx + \int_2^a (6x - 12) \cdot dx = 15;$

$\left[\frac{6x^2}{2} - 12x\right]_2^0 + \left[\frac{6x^2}{2} - 12x\right]_2^a = 15;$

$[3x^2 - 12x]_2^0 + [3x^2 - 12x]_2^a =$

$= 0 - (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2) + (3a^2 - 12a) - (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2) =$

$= -12 + 24 + 3a^2 - 12a - 12 + 24 = 15;$

$3a^2 - 12a + 9 = 0;\ a^2 - 4a + 3 = 0;$

$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 3.$

La solución $a = 1$ no cumple la condición de $a > 2$, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{a = 3}}.$$

2º) Considere el sistema $\left.\begin{array}{r} ax+2y+3z=2 \\ 2x+ay+z=a \\ x+y+4z=1 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro real a.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Resuelve, si es posible, el sistema para el caso de $a=2$.

SOLUCIÓN

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=4a^2+6+2-3a-a-16=4a^2-4a-8=0;$$

$a^2-a-2=0;\ \ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow a_1=-1, a_2=2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}}$$

$$a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{F_1+F_2=-F_3\}\Rightarrow Rang\ M=2.$$

$$a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_1=C_4\}\Rightarrow Rang\ M=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $a=2$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ 2x+2y+z=2 \\ x+y+4z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se elimina una ecuación (primera).

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+3z=2 \\ x+y+4z=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{Haciendo } y=\lambda:$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3z=2-2\lambda \\ x+4z=1-\lambda \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -2x-3z=-2+2\lambda \\ 2x+8z=2-2\lambda \end{array}\right\}\Rightarrow 5z=0;\ \ z=0.\ \ x=1-\lambda.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=1-\lambda,\ \ y=\lambda,\ \ z=0,\ \ \forall\lambda\in R.}}$$

3º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

$a)$ Determine la posición relativa de la recta r respecto al plano $\pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0$. Si el paralela, calcule la distancia de r a π, si es secante, calcule el punto de corte.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta s perpendicular al plano π y que corta a la recta r en un punto P, la primera coordenada de éste es 5 veces mayor que la segunda.

SOLUCIÓN

$a)$ Un vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (1, 3, 1)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1, -2, 4)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no son paralelos por no ser proporcionales sus componentes.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1, 3, 1) \cdot (1, -2, 4) = 1 - 6 + 4 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ no son perpendiculares, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}}$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv x - 2 = \frac{y+1}{3} = z - 3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x - 6 = y + 1 \\ x - 2 = z - 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x - y = 7 \\ x - z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{matrix} 3x - y = 7 \\ x - z = -1 \\ x - 2y + 4z = 4 \end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 6 + 4 = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}}$$

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x - 2y + 4z - 4 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (2 + \lambda) - 2(-1 + 3\lambda) + 4(3 + \lambda) = 4;$$

$$2+\lambda+2-6\lambda+12+4\lambda=4;\;\; \lambda=-12 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+12=14 \\ y=-1+36=35 \\ z=3+12=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Q(14,35,15).}}$$

$b)$ Un punto genérico de r es $A'(2+\lambda,-1+3\lambda,3+\lambda)$ y de ellos, el que tiene la primera coordenada 5 veces mayor que la segunda es el siguiente:

$$2+\lambda=5\cdot(-1+3\lambda);\;\; 2+\lambda=-5+15\lambda;\;\; 7=14\lambda;\;\; \lambda=\tfrac{1}{2}.$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ y=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2} \\ z=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right).$$

La recta s pedida tiene como vector director al vector normal del plano, que es $\vec{n}=(1,-2,4)$, y que contiene al punto $A\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x=\frac{5}{2}+\mu \\ y=\frac{1}{2}-2\mu. \\ z=\frac{7}{2}+4\mu \end{cases}}}$$

4º) a) Encuentre una función polinómica $y = g(x)$ de grado 3 tal que corte al eje de ordenadas en el punto $A(0,5)$, que la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ sea horizontal y que $g''(x) = 2x + 1$.

b) Compruebe que la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16$ tiene una raíz en $x = 2$ y que es estrictamente creciente en el intervalo $(0,4)$. Utilice esta información para calcular el área determinada por la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

SOLUCIÓN

a) Sea la función $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Por cortar al eje de ordenadas en el punto $A(0,5)$: $g(0) = 5 \Rightarrow d = 5$.

Por ser horizontal la recta tangente a $y = g(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$ se cumple que: $g'(1) = 0$.

$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$g'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0;\ \ 3a + 2b + c = 0.$ (1)

$g''(x) = 6ax + 2b$.

$g''(x) = 2x + 1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 6a = 2 \\ 2b = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \frac{1}{3};\ \ b = \frac{1}{2}.$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos de a y b:

$3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} + c = 0;\ \ 1 + 1 + c = 0 \Rightarrow c = -2.$

$$\underline{\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5.}}$$

b) $f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 16 = -8 + 24 - 16 = 0.$

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ x = 2\ es\ una\ raíz\ de\ f(x) = -x^3 + 6x^2 - 16.}}$$

$f'(x) = -3x^2 + 12x$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 12x = 0;\ -3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$

$$\underline{\boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow (Creciente) \Rightarrow \forall x \in (0,4), como\ había\ que\ comprobar.}}$$

Teniendo en cuenta que $f(0) = -16 < 0$ y que $f(4) = -4^3 + 6 \cdot 4^2 - 16 =$

$= -64 + 96 - 16 = 96 - 80 = 16 > 0$, la superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_2^0 f(x) \cdot dx + \int_2^4 f(x) \cdot dx = [F(x)]_2^0 + [F(x)]_2^4 =$

$= F(0) - F(2) + F(4) - F(2) \Rightarrow S = F(0) + F(4) - 2 \cdot F(2).$ (*)

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^3 + 6x^2 - 16) \cdot dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - 16x \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 16x.$ Sustituyendo este valor en (*):

$$S = 0 + \left(-\frac{4^4}{4} + 2 \cdot 4^3 - 16 \cdot 4\right) - 2 \cdot \left(-\frac{2^4}{4} + 2 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2\right) = -64 + 128 - 64 + 8 - 32 + 64 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 40\ u^2.}}$$

5º) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, que depende de los parámetros a, b y c.

$a)$ Calcule las matrices X tales que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$b)$ Determine los valores de a, b y c para que $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

SOLUCIÓN

$a)$ $X^2 = X \cdot X = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2 = b^2 = c^2 = 1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \to b = -1; c = 1 \\ a = -1 \to b = 1; c = -1 \end{array} \right\}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluciones}: \boldsymbol{X_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \ \boldsymbol{y} \ \boldsymbol{X_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}}.$$

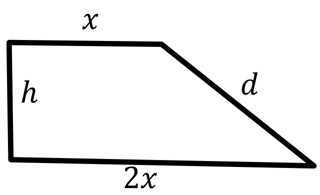
$b)$ Sabiendo que $X^{-1} \cdot X = X \cdot X^{-1} = I$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{2} & \frac{1}{2}-\frac{b}{2} & -\frac{1}{2}-\frac{c}{2} \\ 0 & b & 1+c \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 2, b = 1, c = -1}}.$$

6º) En el patio de una escuela se quiere crear un área de juego de 30 m^2 para los más pequeños en forma de trapecio rectangular, por lo que la base mayor mida el doble de la base menor, tal como muestra la figura, y que el lado oblicuo respecto de las bases (d) se tan corto como sea posible.



$a)$ Justifique que se satisfacen las relaciones $h = \frac{20}{x}$ y $d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}$.

$b)$ Encuentre las dimensiones del trapecio para los que la longitud del lado d es mínima.

SOLUCIÓN

$a)$ La superficie del trapecio rectángulo es $S = \frac{Base+base}{2} \cdot Altura$:

$S = \frac{2x+x}{2} \cdot h = 30;\ \frac{3x}{2} \cdot h = 30;\ \frac{x}{2} \cdot h = 10 \Rightarrow \underline{h = \frac{20}{x}}.$

De la observación de la figura se deduce, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que se puede formar en el trapecio:

$$d = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{20}{x}\right)^2 + x^2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(x) = \sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}.}}$$

$b)$ Para que el lado d sea mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$d'(x) = \frac{\frac{-400\cdot 2x}{x^4} + 2x}{2\cdot\sqrt{\frac{400}{x^2} + x^2}} = 0 \Rightarrow \frac{-400\cdot 2x}{x^4} + 2x = 0;\ \frac{-400}{x^3} + x = 0;\ x = \frac{400}{x^3};$

$x^4 = 400;\ x^2 = 20;\ x = +\sqrt{20} \Rightarrow x = 2\sqrt{5}.$ $\quad h = \frac{20}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} \Rightarrow h = 2\sqrt{5}.$

$d = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{20 + 20} = \sqrt{40} \Rightarrow d = 2\sqrt{10}$

$\underline{\boldsymbol{Solución: x = d = 2\sqrt{5}\ unidades;\ \ h = 2\sqrt{10}\ unidades.}}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) El palo central que sostiene la lona de la carpa de un circo se ubica perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi \equiv x - z = 6$. Sabemos que la cúpula de la carpa (el punto más alto por donde pasa el palo) está en el punto de coordenadas $P(30, 1, 0)$.

$a)$ Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el palo.

$b)$ Calcule las coordenadas del punto de contacto del palo con el suelo, y la longitud del palo.

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x) = \frac{9}{x^2+x-2}$.

$a)$ Discuta el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

$b)$ Calcule la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente en un mismo gráfico la función y la recta tangente.

Problema 3:

3º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende del parámetro a.

$a)$ Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problema 4:

4º) $a)$ Considere la función $f(x) = \begin{cases} Lx \;\; si \;\; \in (0, e) \\ ax + b \;\; si \;\; x \in [e, 4) \end{cases}$, siendo a y b números reales. Halla los valores de a y b tal que la función sea continua y derivable en el intervalo $(0, 4)$.

$b)$ Calcule la función $g'(x) = \frac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto $P(0, -1)$.

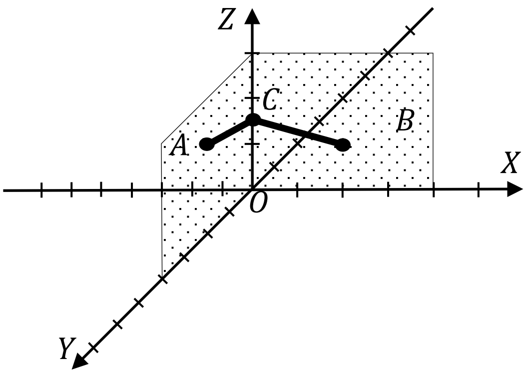
Problema 5:

5º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible.

$b)$ Para el caso de $a = 3$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo B la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Problema 6:



6º) La imagen adjunta muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de manera que una parte es el plano $y = 0$ y la otra parte es el plano $x = 0$.

En el punto $A(2, 0, 2)$ queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, que está situado en la otra pared, en el punto $B(0, 2, 1)$. La conexión entre A y B la haremos mediante un cable que pase por el punto $C(0, 0, h)$, situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Debido a que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, queremos realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

$a)$ Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura h por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dado por la siguiente expresión:

$L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}$.

$b)$ Calcule las coordenadas del punto C por donde ha de pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule la longitud mínima del cable.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) El palo central que sostiene la lona de la carpa de un circo se ubica perpendicularmente sobre el plano de un suelo cuya ecuación es $\pi \equiv x - z = 6$. Sabemos que la cúpula de la carpa (el punto más alto por donde pasa el palo) está en el punto de coordenadas $P(30, 1, 0)$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta que contiene el palo.

b) Calcule las coordenadas del punto de contacto del palo con el suelo, y la longitud del palo.

Solución:

a) La recta r pedida es perpendicular al plano $\pi \equiv x - z = 6$ y contiene al punto $P(30, 1, 0)$.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x - z = 6$ es $\vec{n} = (1, 0, -1)$, que también es director de la recta r, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}}}.$$

b) $$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - z = 6 \\ r \equiv \begin{cases} x = 30 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (30 + \lambda) - (-\lambda) = 6;\ \ 30 + \lambda + \lambda = 6;\ \ 30 + 2\lambda = 6;$$

$$2\lambda = -24;\ \ \lambda = -12 \Rightarrow \left. \begin{cases} x = 30 - 12 = 18 \\ y = 1 \\ z = -(-12) = 12 \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q(18, 1, 12)}}.$$

Problema 2:

2º) Considere la función $f(x) = \frac{9}{x^2+x-2}$.

a) Discuta el dominio, las posibles asíntotas, los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) Calcule la ecuación general de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 4$. Represente en un mismo gráfico la función y la recta tangente.

Solución:

a) Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{D(f)\ \Rightarrow R - \{-2, 1\}}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9}{x^2+x-2} = 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 0\ (eje\ X)}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{Asíntotas\ verticales: x = -2, x = 1}}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2+x-2)-9\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-9\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}.$$

Por ser $(x^2 + x - 2)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, el signo de la primera derivada es el de su numerador.

$$-9\cdot(2x+1) = 0;\ \ 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$Para\ x < -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right)}.$$

$$Para\ x > -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{-18x-9}{(x^2+x-2)^2}. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$f''(x)=\frac{-18\cdot(x^2+x-2)^2+9\cdot(2x+1)\cdot[2\cdot(x^2+x-2)\cdot(2x+1)]}{(x^2+x-2)^4}=\frac{-18\cdot(x^2+x-2)+18\cdot(2x+1)^2}{(x^2+x-2)^3}=$$

$$=\frac{-18\cdot(x^2+x-2-4x^2-8x-1)}{(x^2+x-2)^3}=\frac{-18\cdot(-3x^2-7x-3)}{(x^2+x-2)^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{18\cdot(3x^2+7x+3)}{(x^2+x-2)^3}.$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{18\cdot\left[3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\right]}{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2\right]^3}=\frac{18\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{7}{2}+3\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)^3}=\frac{18\cdot\frac{3-14+12}{4}}{\left(\frac{1-2-8}{4}\right)^3}=\frac{\frac{9}{2}}{\left(-\frac{9}{4}\right)^3}<0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *Máximo relativo para* $x=-\frac{1}{2}$.

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{9}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2}=\frac{9}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}=\frac{9}{\frac{1-2-8}{4}}=\frac{9}{\frac{-9}{4}}=-4\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{M\acute{a}ximo: A\left(-\tfrac{1}{2},-4\right).}}$$

b) La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x)=\frac{-18x-9}{(x^2+x-2)^2}$. $\quad$ *Para* $x=4\Rightarrow m=f'(4)=\frac{-81}{18^2}=-\frac{1}{4}$.

El punto de tangencia es el siguiente: $f(4)=\frac{9}{4^2+4-2}=\frac{1}{2}\Rightarrow P\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $P\left(4,\frac{1}{2}\right)$ con $m=-\frac{1}{4}$:

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}\cdot(x-4);\;\; 4y-2=-x+4.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ pedida\ es\ t\equiv x+4y-6=0.}}$$

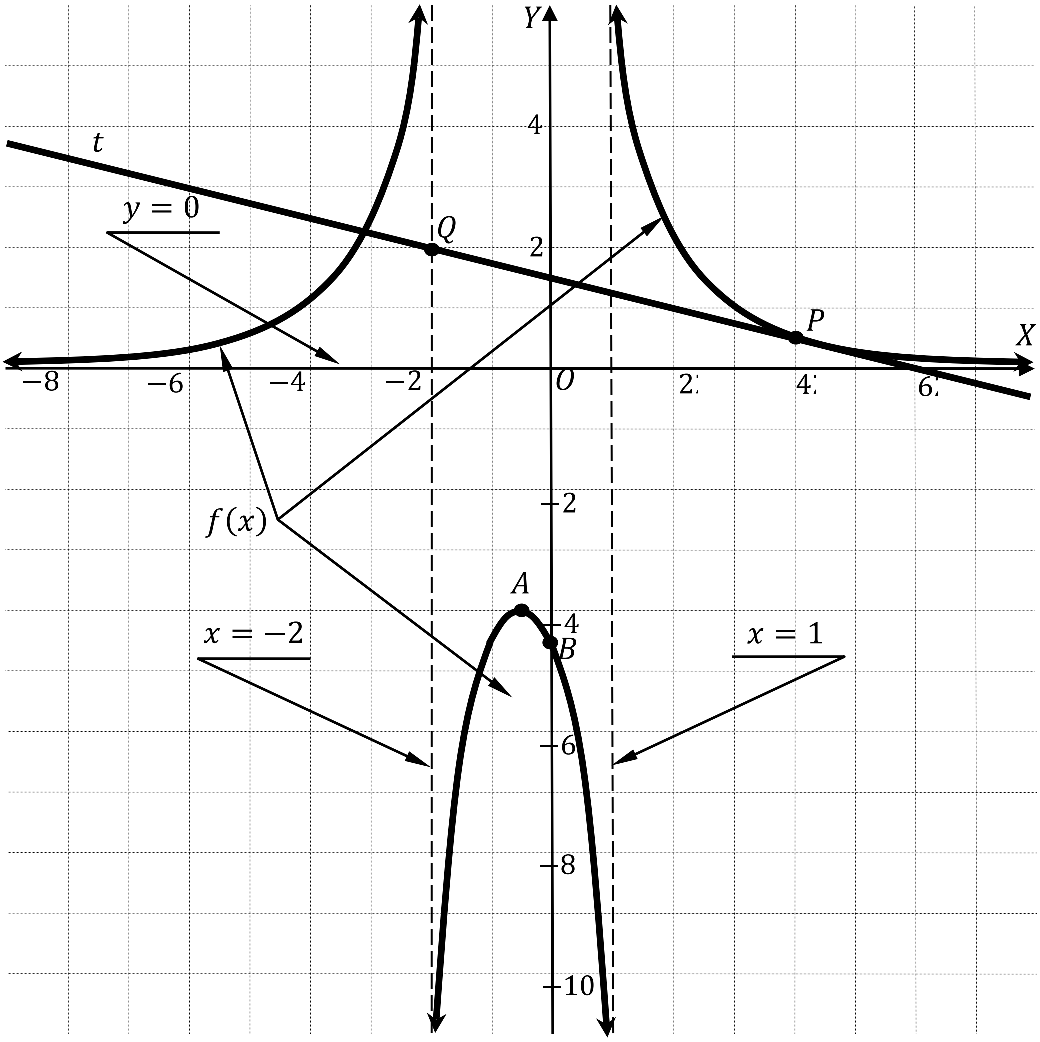
Para facilitar la representación gráfica de la situación se determinan los puntos de corte con los ejes, que son los siguientes:

Eje X $\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow\frac{9}{x^2+x-2}=0\Rightarrow x\notin R\Rightarrow$ $\underline{\textit{No corta al eje } X}$.

Eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=\frac{9}{0+0-2}=-\frac{9}{2}\Rightarrow B\left(0,-\frac{9}{2}\right)$.

Para la representación gráfica de la tangente se tiene en cuenta que contiene al punto $Q(-2,2)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura siguiente.



Problema 3:

3º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix}$, que depende del parámetro a.

$a)$ Calcule el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a.

$b)$ Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24a^2 + 21a^2 - 105 - 12a^2 - 18a^2 =$

$= -65 + 15a^2 = 0;\ -13 + 3a^2 = 0;\ \ 3a^2 = 13 \Rightarrow a = \pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{39}}{3}$.

Se calcula el rango por el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2a \cdot F_1 \\ F_3 \to F_3 - 7 \cdot F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 5 - 2a^2 & 3a - 6a \\ 0 & 4a - 7a & 9 - 21 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 5 - 2a^2 & -3a \\ 0 & -3a & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to -\tfrac{1}{3}F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & 5 - 2a^2 & -3a \\ 0 & a & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 5 - 2a^2 & -3a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to F_3 - \frac{5-2a^2}{a} \cdot F_2\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 0 & a & 4 \\ 0 & 0 & \frac{5a^2-20}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{5a^2-20}{a} = 0;\ \ 5a^2 - 20 = 0;\ \ a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{Para} \begin{Bmatrix} a \neq -2 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A = 3};}\ \ \underline{\boldsymbol{Para} \begin{Bmatrix} a = -2 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A = 2}.}$$

$b)$ De la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se deduce el sistema de ecuaciones lineales homogéneo: $\left.\begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{matrix}\right\}$, equivalente al sistema que resulta de restar a cada ecuación la anterior: $\left.\begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{matrix}\right\}$, que a su vez, es equivalente al sistema: $\left.\begin{matrix} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{matrix}\right\}$.

Para su resolución se parametriza, por ejemplo, $z = \lambda$;

$$\left.\begin{matrix} x + 2y = -3\lambda \\ x + y = -\lambda \end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} x + 2y = -3\lambda \\ -x - y = \lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = -2\lambda.\ \ x = -y - \lambda = 2\lambda - \lambda \Rightarrow x = \lambda.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x = \lambda};\ \ \boldsymbol{y = -2\lambda};\ \ \boldsymbol{z = \lambda}, \forall \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{R}.}$$

Problema 4:

4º) a) Considere la función $f(x)=\begin{cases} Lx \;\; si \;\; \in (0,e) \\ ax+b \;\; si \;\; x\in [e,4) \end{cases}$, siendo a y b números reales. Halla los valores de a y b tal que la función sea continua y derivable en el intervalo $(0,4)$.

b) Calcule la función $g'(x)=\frac{x^3}{9x^4+1}$ y que pasa por el punto $P(0,-1)$.

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en $(0,4)$, excepto para $x=e$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x=e \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e} Lx=1 \\ \lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\lim\limits_{x\to e}(ax+b)=ae+b=f(e) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{x\to e^+} f(x)=f(e)\Rightarrow ae+b=1. \quad (*)$$

La función $f(x)$ es derivable en $(0,4)$, excepto para $x=e$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de a y b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} \;\; si \;\; \in (0,e) \\ a \;\; si \;\; x\in [e,4) \end{cases} \Rightarrow x=e \;\Rightarrow f'(e)=\begin{cases} \frac{1}{e} \;\; si \;\; \in (0,e) \\ a \;\; si \;\; x\in [e,4) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\; f'(e^-)=f'(e^+)\Rightarrow \frac{1}{e}=a\Rightarrow ae=1.$ Sustituyendo en (*): $b=0$.

$$\underline{\boldsymbol{La\; funci\acute{o}n\; f(x)\; es\; continua\; y\; derivable\; en\; (0,4)\; para\; a=\frac{1}{e}\; y\; b=0.}}$$

$$b)\; g'(x)=\frac{x^3}{9x^4+1}\Rightarrow g(x)=\int \frac{x^3}{9x^4+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 9x^4+1=t \\ 36x^3\cdot dx=dt \\ x^3\cdot dx=\frac{1}{36}\cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{36}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{36}\cdot Lt+C\Rightarrow g(x)=\frac{1}{36}\cdot L(9x^4+1)+C.$$

$$g(0)=-1\Rightarrow \frac{1}{36}\cdot L(9\cdot 0^4+1)+C=1;\;\; \frac{1}{36}\cdot L1+C=1;\;\; \frac{1}{36}\cdot 0+C=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=1\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{g(x)=\frac{1}{36}\cdot L(9x^4+1)+C.}}$$

Problema 5:

5º) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

$a)$ Calcule los valores del parámetro a para los cuales la matriz A es invertible.

$b)$ Para el caso de $a = 3$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B - 3I$, siendo B la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución:

$a)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a(a+1)(a+3) + a(a-1)(2a+1) + 2a(a+3) = 0;$$

$$a \cdot [(-a^2 - 4a - 3) + (2a^2 - a - 1) + (2a + 6)] = 0;\ \ a(a^2 - 3a + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = 0;\ \ a^2 - 3a + 2 = 0;\ \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_2 = 1,\ a_3 = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{0, 1, 2\}}}.$$

$$b)\ B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B - 3I = I.$$

$$A \cdot X = B - 3I = I;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I;\ \ I \cdot X = A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}.$$

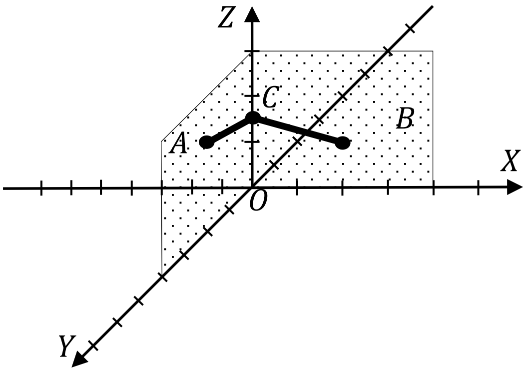
Para $a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. $|A| = -72 + 42 + 36 \Rightarrow |A| = 6.$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ -30 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}.\ A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ -30 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 6:



6º) La imagen adjunta muestra dos paredes perpendiculares de una sala representadas en unos ejes de coordenadas, de manera que una parte es el plano $y = 0$ y la otra parte es el plano $x = 0$.

En el punto $A(2, 0, 2)$ queremos colgar un altavoz que debe estar conectado a un equipo de sonido, que está situado en la otra pared, en el punto $B(0, 2, 1)$. La conexión entre A y B la haremos mediante un cable que pase por el punto $C(0, 0, h)$, situado en la recta vertical de intersección de las dos paredes. Debido a que la calidad del sonido depende, entre otros factores, de la longitud del cable que une los dos aparatos, queremos realizar una instalación con el mínimo de cable posible.

$a)$ Compruebe que la longitud total del cable necesario, en función de la altura h por donde debe pasar el cable en el eje vertical OZ, viene dado por la siguiente expresión:

$L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}.$

$b)$ Calcule las coordenadas del punto C por donde ha de pasar el cable para que la longitud del cable sea mínima. Calcule la longitud mínima del cable.

Solución:

$a)$ $$L(h) = \overline{AC} + \overline{CB} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (2-h)^2} \\ \overline{CB} = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2 + (1-h)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + 4 - 4h + h^2} + \sqrt{4 + 1 - 2h + h^2} = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ L(h) = \sqrt{h^2 - 4h + 8} + \sqrt{h^2 - 2h + 5}.}}$$

$b)$ Para que la longitud sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$L'(h) = \frac{2h-4}{2 \cdot \sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{2h-2}{2 \cdot \sqrt{h^2-2h+5}} = \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} = \frac{-h+1}{\sqrt{h^2-2h+5}}; \ \frac{h^2-4h+4}{h^2-4h+8} = \frac{h^2-2h+1}{h^2-2h+5};$$

$$(h^2 - 4h + 4)(h^2 - 2h + 5) = (h^2 - 4h + 8)(h^2 - 2h + 1);$$

$$h^4 - 2h^3 + 5h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 20h + 4h^2 - 8h + 20 =$$

$$= h^4 - 2h^3 + h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 4h + 8h^2 - 16h + 8;$$

$$-20h - 8h + 20 = -4h - 16h + 8; \ -28h + 20 = -20h + 8; \ \ 12 = 8h \Rightarrow h = \frac{3}{2}.$$

La longitud del cable es mínima cuando $h = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{C\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)}$.

Para $h = \frac{3}{2} \Rightarrow L\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} + 8} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 5} =$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} - 6 + 8} + \sqrt{\frac{9}{4} - 3 + 5} = \sqrt{\frac{9}{4} + 2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 2} = 2 \cdot \sqrt{\frac{9+8}{4}} = \sqrt{17}.$$

$\underline{\boldsymbol{La\ longtidud\ mínima\ del\ cable\ es\ L = \sqrt{17}\ m.}}$