Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022 Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ANTONIO MENGUIANO

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

BLOQUE A

1º) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo. Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

2º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

$a)$ Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

$b)$ Para $a = 2$, calcule la matriz inversa de A.

$c)$ Para $a = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + I_3 = B^t \cdot C$.

BLOQUE B

3º) $a)$ Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(0, 18)$ es -3.

$b)$ Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

4º) $a)$ Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 6x - 3 \ \ si \ \ x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 2 \ \ si \ \ x > 1 \end{cases}$ con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

$b)$ Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y y la gráfica de la función $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

BLOQUE C

5º) En un estudio realizado en una sucursal bancaria se ha determinado que el 70 % de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200.000 euros. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200.000 euros. Se elige al azar un cliente al que han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

a) El crédito no sea hipotecario y no supere los 200.000 euros.

b) Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200.000 euros.

c) Si su crédito supera los 200.000 euros, que este no sea hipotecario.

6º) En su tiempo libre, el 65 % de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45 % lee libros y el 15 % no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

a) Juegue con videojuegos o lea libros.

b) Juegue con videojuegos y no lea libros.

c) Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

BLOQUE D

7º) La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica $15\ MPa$ (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia de $800\ MPa$.

a) Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92 %, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que $2\ MPa$?

8º) Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92 % para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

b) En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0,02?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE A

1º) Una pastelería decide preparar dos tipos de cajas de pastelitos para regalar a los clientes en su inauguración. En total dispone de 120 piononos y 150 pestiños. En la caja del primer tipo habrá 3 piononos y 2 pestiños y en la del segundo tipo 4 piononos y 6 pestiños. Deben preparar al menos 9 cajas del segundo tipo. Determine cuántas cajas de cada tipo deberá preparar para realizar el máximo número de regalos posible. En este caso, indique cuántos piononos y cuántos pestiños se utilizarán.

SOLUCIÓN

Sean x e y el número de cajas de los tipos primero y segundo que se preparan en la pastelería, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+4y\le 120 \\ 2x+6y\le 150 \\ x\ge 0;\ y\ge 9 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 3x+4y\le 120 \\ x+3y\le 75 \\ x\ge 0;\ y\ge 9 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x+4y\le 120 \Rightarrow y\le \frac{120-3x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	40
y	30	0

② $\Rightarrow x+3y\le 75 \Rightarrow y\le \frac{75-x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	30
y	25	15

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=9 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,9).$ $\qquad B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow y=25 \Rightarrow B(0,25).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+4y=120 \\ x+3y=75 \end{array}\right\} \Rightarrow$

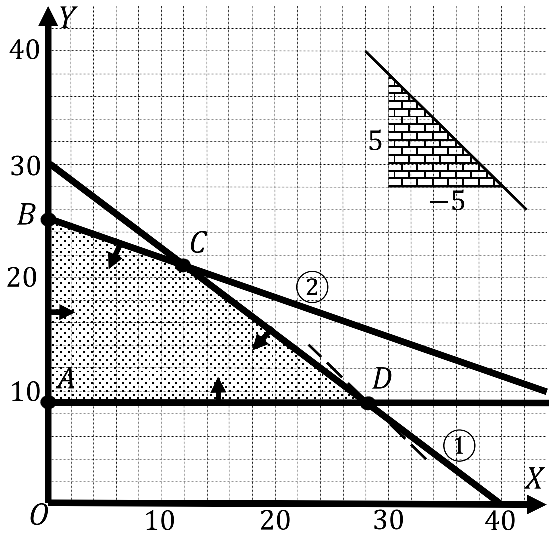
$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x-4y=-120 \\ 3x+9y=225 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=105;$

$y=21;\ x+63=75;\ x=75-63=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(12,21).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=9 \\ 3x+4y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+36=120;$

$3x=120-36=84;\ x=28 \Rightarrow D(28,9).$



La función de objetivos es $f(x,y)=x+y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,9)=0+9=9.$ $\qquad B \Rightarrow f(0,25)=0+25=25.$

$C \Rightarrow f(12,21)=12+21=33.$ $\qquad D \Rightarrow f(28,9)=28+9=37.$

El valor máximo se produce en el punto $D(28,9)$.

También se hubiera obtenido el punto $D(28, 9)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x = -\frac{5}{5}x \Rightarrow m = -\frac{5}{5}$.

$$\underline{\boldsymbol{M\acute{a}ximos\ regalos\ preparando\ 28\ cajas\ del\ primero\ y\ 9\ del\ segundo.}}$$

$Piononos: 28 \cdot 3 + 9 \cdot 4 = 84 + 36 = 120.$

$Pesti\tilde{n}os: 28 \cdot 2 + 9 \cdot 6 = 56 + 54 = 110.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ utilizan\ 120\ piononos\ y\ 110\ pesti\tilde{n}os.}}$$

2º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) Halle los valores del parámetro a para que la matriz A tenga inversa.

b) Para $a=2$, calcule la matriz inversa de A.

c) Para $a=2$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+I_3=B^t\cdot C$.

SOLUCIÓN

a) Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=a^2+3-4a=0;\ \ a^2-4a+3=0;\ \ a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=2\pm 1\Rightarrow a_1=1, a_2=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a\in R-\{1,3\}.}}$$

b) Para $a=2$ la matriz es $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A|=2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1.\quad A^t=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix}.}}$$

c) $X\cdot A+I_3=B^t\cdot C;\ \ X\cdot A=B^t\cdot C-I_3;\ \ X\cdot A\cdot A^{-1}=(B^t\cdot C-I_3)\cdot A^{-1};$

$X\cdot I=(B^t\cdot C-I_3)\cdot A^{-1}\Rightarrow \underline{X=(B^t\cdot C-I_3)\cdot A^{-1}}.$ (*)

$$B^t\cdot C-I_3=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}-I_3=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B^t \cdot C - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$X = (B^t \cdot C - I_3) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 6 & 5 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -28 & -21 & 19 \\ 16 & 12 & -11 \\ -6 & -5 & 4 \end{pmatrix}}.$$

BLOQUE B

3º) $a)$ Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales. Calcule los valores de a, b y c, sabiendo que la gráfica de f posee un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 3$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(0, 18)$ es -3.

$b)$ Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje de abscisas y la gráfica de la función $g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

SOLUCIÓN

$a)$ $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Por tener un extremo relativo para $x = 3$: $f'(3) = 0$:

$3 \cdot 3^2 + 2a \cdot 3 + b = 0;\ \ 27 + 6a + b = 0;\ \ 6a + b = -27.\quad (1)$

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto, por lo cual: $m = f'(0) = -3$:

$3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = -3 \Rightarrow \underline{b = -3}$.

Sustituyendo en (1) el valor de b: $6a - 3 = -27;\ \ 6a = -24 \Rightarrow \underline{a = -4}$.

Por contener la función al punto $P(0, 18)$ es $f(0) = 18$:

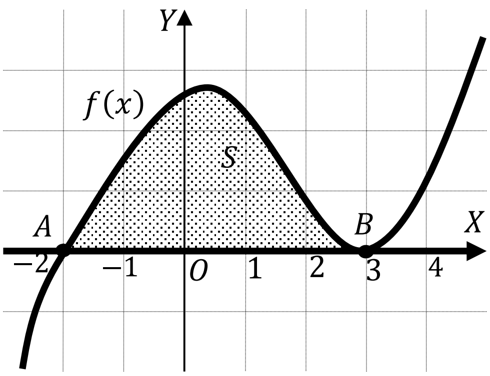
$f(0) = 0^3 + a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 18 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{c = 18.}}$$

$b)$ Las abscisas de los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son las raíces de la ecuación $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$. Se resuelve por Ruffini:

Los puntos de corte son $A(-2, 0)$ y $B(3, 0)$.

	1	-4	-3	18
-2		-2	12	-18
	1	-6	9	$\boxed{0}$
3		3	-9	
	1	-3	$\boxed{0}$	
3		3		
	1	$\boxed{0}$		



Por ser doble la raíz $x = 3$, la función tiene en $B(3, 0)$ un máximo o un mínimo relativo. Para diferenciarlo tenemos en cuenta que $g(0) = 18$, por lo cual, el punto $B(3, 0)$ es un mínimo relativo.

La representación gráfica, aproximada, de la unción se expresa en la gráfica.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente, teniendo en cuenta que, en el intervalo de la superficie, todas las ordenadas de la función son positivas:

$$S = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (x^3 - 4x^2 - 3x + 18)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 18x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} - \frac{4 \cdot 3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 18 \cdot 3\right) - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4 \cdot (-2)^3}{3} - \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} + 18 \cdot (-2)\right] = \quad = \frac{81}{4} - 36 - \frac{27}{2} + 54 - 4 - \frac{32}{3} + 6 + 36 = 56 + \frac{81}{4} - \frac{27}{2} - \frac{32}{3} = \frac{672 + 243 - 162 - 128}{12} = \frac{915 - 290}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{625}{12}\,u^2 \cong 52{,}08\,u^2.}}$$

4º) a) Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 6x-3 \;\; si \;\; x\le 1 \\ ax^2+bx+2 \;\; si \;\; x>1 \end{cases}$ con a y b números reales. Determine los valores de a y b para que f sea continua y derivable en todo su dominio.

b) Calcule el área del recinto acotado, limitado por el eje OX y y la gráfica de la función $g(x)=-2x^2+8x-6$.

SOLUCIÓN

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, independientemente de los valores reales de a y b, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1}(6x-3)=3=f(1) \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(ax^2+bx+2)=a+b+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Rightarrow a+b+2=3;\;\; a+b=1. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando el correspondiente valor de b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 6 \;\; si \;\; x\le 1 \\ 2ax+b \;\; si \;\; x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-)=6 \\ f'(1^+)=2a+b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+) \Rightarrow 6=2a+b;\;\; 2a+b=6. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a-b=-1 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=5}}. \quad \underline{\boldsymbol{b=-4}}.$$

b) La parábola $g(x)=-2x^2+8x-6$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

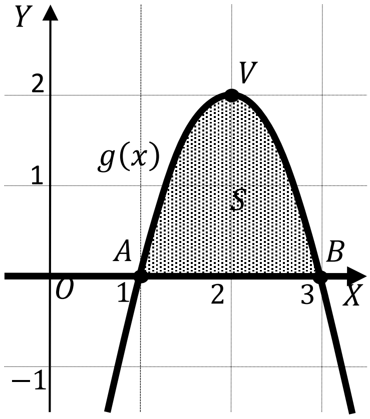
$g'(x)=-4x+8=0 \Rightarrow -4(x-2)=0 \Rightarrow x=2.$

$g(2)=-2\cdot 2^2+8\cdot 2-6=-8+16-6=2 \Rightarrow V(2,2).$

Los puntos de corte de la parábola con el eje X son los siguientes

$g(x)=0;\; -2x^2+8x+6=0;\;\; x^2-4x+3=0;\;\; x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=$

$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow A(1,0) \\ x_2 = 3 \Rightarrow B(3,0) \end{cases}.$



en la figura adjunta.

En el intervalo $(1,3)$ todas las ordenadas de la función $g(x)$ son positivas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_1^3 g(x) \cdot dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6) \cdot dx = \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} - 6x\right]_1^3$$

$= \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right]_1^3 = \left(-2 \cdot \frac{3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1\right) =$

$$= -18 + 36 - 18 + \frac{2}{3} - 4 + 6 = 2 + \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{8}{3}\, u^2 \cong 2,67\, u^2.}$$

BLOQUE C

5º) En un estudio realizado en una sucursal bancaria se ha determinado que el 70 % de los créditos concedidos son hipotecarios y el 25 % de los créditos superan los 200.000 euros. El 20 % de los créditos son hipotecarios y de más de 200.000 euros. Se elige al azar un cliente al que han concedido un crédito. Calcule la probabilidad de que:

$a)$ El crédito no sea hipotecario y no supere los 200.000 euros.

$b)$ Si su crédito no es hipotecario, este no supere los 200.000 euros.

$c)$ Si su crédito supera los 200.000 euros, que este no sea hipotecario.

SOLUCIÓN

$A \rightarrow Crédito\ hipotecario.$ $\qquad B \rightarrow Crédito\ mayor\ de\ 200.000\ euros.$

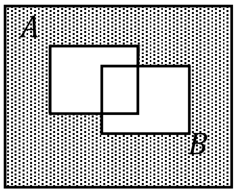
$Datos:\ P(A) = 0,70;\ \ P(B) = 0,25;\ \ P(A \cap B) = 0,20.$

$a)$ $\quad P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B).$ (*)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= 0,70 + 0,25 - 0,20 = 0,95 - 0,20 \Rightarrow P(A \cup B) = 0,75.$

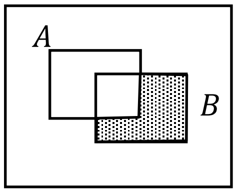
Sustituyendo este valor en (*): $P = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25.$



$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$

$b)$ $\quad P = P\left(\overline{B}/\overline{A}\right) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1-0,75}{1-0,70} = \frac{0,25}{0,30} = \frac{5}{6} = 0,8333.$

$c)$ $P = P\left(\overline{A}/B\right) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25-0,20}{0,25} = \frac{0,05}{0,25} = \frac{1}{5} = 0,2.$



$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

6º) En su tiempo libre, el 65 % de los estudiantes de un centro educativo juega con videojuegos, el 45 % lee libros y el 15 % no hace ninguna de las dos cosas. Elegido al azar un estudiante de dicho centro, calcule la probabilidad de que:

$a)$ Juegue con videojuegos o lea libros.

$b)$ Juegue con videojuegos y no lea libros.

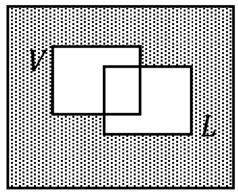
$c)$ Lea libros sabiendo que no juega con videojuegos.

SOLUCIÓN

$$Datos:\ P(V) = 0{,}65;\ \ P(L) = 0{,}45;\ \ P\left(\overline{V} \cap \overline{L}\right) = 0{,}15.$$

$a)$ $\qquad P\left(\overline{V} \cap \overline{L}\right) = 1 - P(V \cup L) \Rightarrow$

$\Rightarrow P = P(V \cup L) = 1 - P\left(\overline{V} \cap \overline{L}\right) = 1 - 0{,}15 = \underline{0{,}85}.$



$P\left(\overline{V} \cap \overline{L}\right) = 1 - P(V \cup L)$

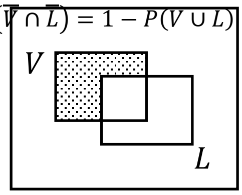
$b)$ $P = P\left(V \cap \overline{L}\right) = P(V) - P(V \cap L). \quad (*)$

$\qquad P(V \cap L) = P(V) + P(L) - P(V \cup L) =$

$= 0{,}65 + 0{,}45 - 0{,}85 = 1{,}10 - 0{,}85 \Rightarrow P(V \cap L) = 0{,}25.$

Sustituyendo este valor en (*):

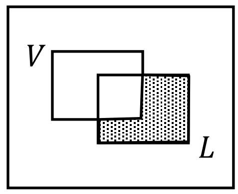
$\qquad P = P(V) - P(V \cap L) = 0{,}65 - 0{,}25 = \underline{0{,}40}.$



$\overline{V} \cap L = V - (V \cap L)$

$c)$ $\qquad P = P\left(L/\overline{V}\right) = \frac{P\left(L \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{P(L) - P(V \cap L)}{1 - P(V)} = \frac{0{,}45 - 0{,}25}{1 - 0{,}65} =$

$= \frac{0{,}20}{0{,}35} = \underline{\frac{4}{7} = 0{,}5714}.$



$L \cap \overline{V} = L - (V \cap L)$

BLOQUE D

7º) La resistencia media a la ruptura de una nueva gama de herramientas sigue una distribución Normal de desviación típica $15\ MPa$ (megapascales). Se seleccionan al azar 100 herramientas forjadas en la misma máquina durante el mismo proceso de producción, obteniéndose una resistencia de $800\ MPa$.

a) Realizando la estimación con un nivel de confianza del 92 %, ¿entre qué valores se estima la resistencia media poblacional de esta gama de herramientas?

b) Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo en la estimación de la resistencia media a la ruptura sea menor que $2\ MPa$?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1-\alpha=0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$$

$$(1-0{,}04=0{,}9600 \ \rightarrow z=1{,}75).$$

Datos: $n=100;\ \overline{x}=800;\ \sigma=15;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x},\sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(800-1{,}75\cdot\frac{15}{\sqrt{100}};\ 800+1{,}75\cdot\frac{15}{\sqrt{100}}\right);\quad (800-1{,}75\cdot 1{,}5;\ 800+1{,}75\cdot 1{,}5);$ $(800-2{,}625;\ 800+2{,}625).$

$$\boldsymbol{I.C._{92\,\%}=(797{,}375;\ 802{,}625).}$$

b) Datos: $\sigma=15;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\ E=2.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}75\cdot\frac{15}{2}\right)^2=$ $=(1{,}75\cdot 7{,}5)^2=13{,}125^2=172{,}26.$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 173 herramientas

8º) Se quiere estudiar la proporción de perros que están vacunados en Andalucía. Para ello, se toma una muestra aleatoria de 400 perros de los que 320 resultan estar vacunados.

a) Obtenga un intervalo con un nivel de confianza del 92 % para estimar la proporción de perros vacunados en Andalucía y calcule el error máximo cometido.

b) En una nueva muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, ¿cuántos perros, como mínimo, hay que elegir para que el error sea menor que 0,02?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1-\alpha=0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=1{,}75.$$

$$(1-0{,}04=0{,}9600 \ \rightarrow z=1{,}75).$$

Datos: $n=400;\ \ p=\frac{320}{400}=0{,}8;\ \ q=1-0{,}8=0{,}2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}8-1{,}75\cdot\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{400}};\ 0{,}8+1{,}75\cdot\sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{400}}\right);$$

$(0{,}8-1{,}75\cdot 0{,}02;\ 0{,}8+1{,}75\cdot 0{,}02);\ \ (0{,}8-0{,}035;\ 0{,}8+0{,}035)$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{92\,\%}=(0{,}765;\ \ 0{,}835).}}$$

$$E=\frac{0{,}835-0{,}765}{2}=\frac{0{,}070}{2}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{E=0{,}035.}}$$

b) Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\ \ E=0{,}02;\ \ p=0{,}8;\ \ q=0{,}2.$

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=1{,}75^2\cdot\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{0{,}02^2}=3{,}0625\cdot\frac{0{,}16}{0{,}0004}=$$

$$=3{,}0625\cdot 400=1.225.$$

$$\underline{\boldsymbol{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 1.225 \textit{ perros}.}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

$b)$ Determine las dimensiones de dos matrices P y Q siendo $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$.

2º) Se consideran el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7; \; -x + 3y \leq 21; \;\; x + 2y \leq 19; \; x + y \leq 14.$$

$a)$ Represente dicho recinto y determine sus vértices.

$b)$ Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

$c)$ ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

BLOQUE B

3º) $a)$ Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $P(-2, -3)$.

$b)$ Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

4º) El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la vente de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dada por la siguiente función: $B(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15, x \geq 0$.

$a)$ Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

$b)$ ¿Para qué valores de x la función no tiene pérdidas?

$c)$ ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

$d)$ ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5.000 euros?

BLOQUE C

5º) En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0,4 y para un estudiante de B es 0,5.

a) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es $0{,}395$, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

6º) Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que: $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$, $P(A^c) = \frac{5}{7}$, $P(B^c) = \frac{2}{3}$.

a) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) Calcule $P(A^c \cap B^c)$.

c) Calcule $P(B/A^c)$.

BLOQUE D

7º) Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1.500 tornillos, resultando que 1.425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97 %.

b) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de la nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %?

8º) El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8,1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

b) Con un nivel de confianza del 92 %, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) Suponiendo $\mu = 7{,}61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE A

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

$a)$ Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

$b)$ Determine las dimensiones de dos matrices P y Q siendo $A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$.

SOLUCIÓN

$a)$ $A \cdot X + B = A^2 \cdot C;$ $A \cdot X = A^2 \cdot C - B;$ $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A^2 \cdot C - B);$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot A^2 \cdot C - A^{-1} \cdot B = I \cdot A \cdot C - A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A \cdot C - A^{-1} \cdot B}$.

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 2F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - 2F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to \tfrac{1}{3}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A \cdot C - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - A^{-1} \cdot B =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -13 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -4 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{19}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}}}.$$

$b)$ Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

Supongamos que las dimensiones de las matrices son $P_{(t,x)}$ y $Q_{(y,z)}$. La dimensión de P^t es ${P^t}_{(x,t)}$.

Las dimensiones de las matrices conocidas son $A_{(3,3)}, B_{(3,2)}$ y $C_{(3,2)}$.

$A \cdot P^t + C \Rightarrow A_{(3,3)} \cdot {P^t}_{(x,t)} + C_{(3,2)} \Rightarrow D_{(x,t)} + C_{(3,2)} \Rightarrow x = 3, t = 2 \Rightarrow \underline{P_{(2,3)}}$.

$C \cdot (Q \cdot B) \Rightarrow C_{(3,2)} \cdot \left[Q_{(y,z)} \cdot B_{(3,2)}\right] = C_{(3,2)} \cdot E_{(y,2)} \Rightarrow y = 2, z = 3 \Rightarrow \underline{Q_{(2,3)}}$.

2º) Se consideran el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y-2x\leq 7;\ -x+3y\leq 21;\ \ x+2y\leq 19;\ x+y\leq 14.$$

a) Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x,y)=x+4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

SOLUCIÓN

a)

$① \Rightarrow y-2x\leq 7 \Rightarrow y\leq 7-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	2
y	7	14

$② \Rightarrow -x+3y\leq 21 \Rightarrow y\leq \frac{21+x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	3
y	7	8

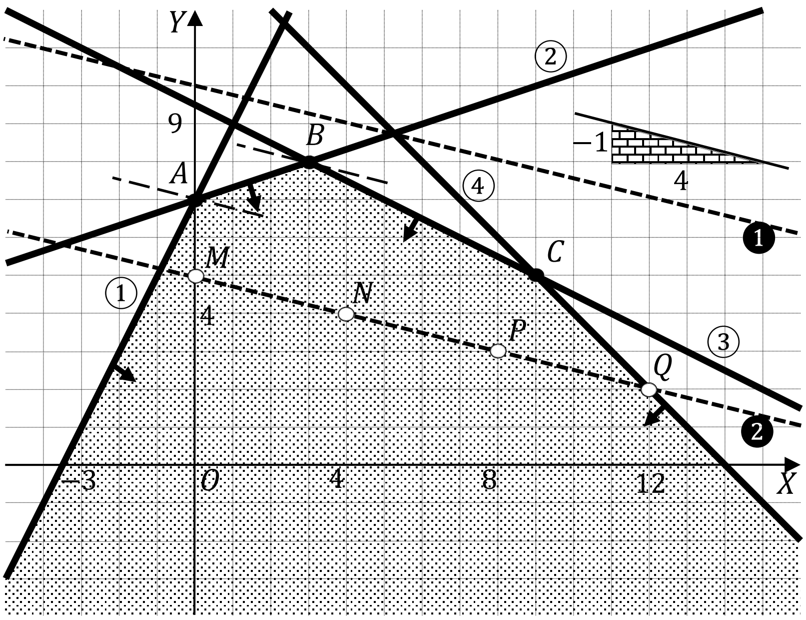
$③ \Rightarrow x+2y\leq 19 \Rightarrow y\leq \frac{19-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	1	7
y	9	6

$④ \Rightarrow x+y\leq 14 \Rightarrow y\leq 14-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	7	9
y	7	5

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-2x=7 \\ -x+3y=21 \end{array}\right\} \begin{array}{r} -2x+y=7 \\ -x+3y=21 \end{array}\Big\} \begin{array}{r} 2x-y=-7 \\ -2x+6y=42 \end{array}\Big\} \Rightarrow 5y=35;$$

$y=7;\ -2x+7=7;\ \ x=0\Rightarrow \underline{A(0,7)}.$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+3y=21 \\ x+2y=19 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=40;\;\; y=8;\; x+16=19;\;\; x=3 \Rightarrow \underline{B(3,8)}.$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=19 \\ x+y=14 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2y=19 \\ -x-y=-14 \end{array}\right\} \Rightarrow y=5;\;\; x=9 \Rightarrow \underline{C(9,5)}.$$

$b)$ Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow F(0,7) = 0 + 4 \cdot 7 = 0 + 28 = 28.$

$B \Rightarrow F(3,8) = 3 + 4 \cdot 8 = 3 + 32 = 35.$

$C \Rightarrow F(9,5) = 9 + 4 \cdot 5 = 9 + 20 = 29.$

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ B(3,8)\ y\ su\ valor\ es\ 35.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ A(0,7)\ y\ su\ valor\ es\ 28.}}$

También se hubiera obtenido los puntos anteriores por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$F(x,y) = x + 4y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x \Rightarrow m = \frac{-1}{4}.$

$c)$ Como puede observarse en el apartado anterior:

$\underline{\boldsymbol{No\ es\ posible\ que\ la\ función\ alcance\ el\ valor\ 40.\ \ (El\ máximo\ es\ 35).}}$

Gráficamente, serían los puntos de la recta ❶ $\Rightarrow y = \frac{40-x}{4}$ que no pertenecen a la zona factible.

Sin embargo, si es posible que la función alcance el valor 20; serían todos los valores de la zona factible que satisfacen: $F(x,y) = x + 4y = 20.$

Gráficamente, serían los puntos de la recta ❷ $\Rightarrow y = \frac{20-x}{4}$ que pertenecen a la zona factible, que para valores enteros de x son los siguientes:

$x = 0 \Rightarrow M(0,5);\;\; x = 4 \Rightarrow N(4,4);\;\; x = 8 \Rightarrow P(8,3);\;\; x = 12 \Rightarrow Q(12,2).$

BLOQUE B

3º) $a)$ Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $P(-2, -3)$.

$b)$ Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

SOLUCIÓN

$a)$ $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$.

Por tener la función un extremo para $x = \frac{1}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2b \cdot \frac{1}{3} + c = 0;\ 1 + 2b + 3c = 0;\ 2b + 3c = -1.$ (1)

Por pasar la función f pase por el punto $P(-2, -3) \Rightarrow f(-2) = -3$.

$f(-2) = -3 \Rightarrow (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) - 1 = -3;$

$-8 + 4b - 2c - 1 = -3;\ 4b - 2c = 6;\ 2b - c = 3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2b + 3c = -1 \\ 2b - c = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2b + 3c = -1 \\ -2b + c = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4c = -4 \Rightarrow \underline{c = -1}.$$

$2b - (-1) = 3;\ 2b + 1 = 3;\ 2b = 2 \Rightarrow \underline{b = 1}$.

$b)$ Las abscisas de los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son las raíces de la ecuación $-x^3 - x^2 + x + 1 = 0$. Se resuelve por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & \boxed{0} \\ -1 & & 1 & 1 & \\ \hline & -1 & -1 & \boxed{0} & \\ -1 & & 1 & & \\ \hline & -1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

Los puntos de corte son $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$.

Los extremos relativos de la función son los siguientes:

$g'(x) = -3x^2 - 2x + 1.\quad g''(x) = -6x - 2.$

$g'(x) = 0;\ -3x^2 - 2x + 1 = 0;\ 3x^2 + 2x - 1 = 0;$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} =$

$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \frac{-1 \pm 2}{3} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}.$

$g''(-1) = -6 \cdot (-1) - 2 = 6 - 2 > 0 \Rightarrow Mín. relativo\ para\ x = -1.$

$g(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 1 = 0 \Rightarrow Mín. \Rightarrow A(-1, 0),$

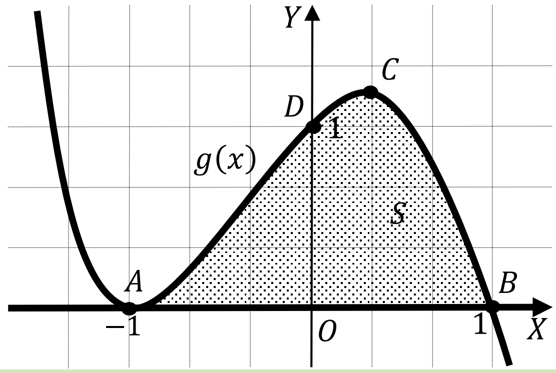
$g''\left(\frac{1}{3}\right) = -6 \cdot \frac{1}{3} - 2 = -2 - 2 < 0 \Rightarrow Máx. relativo\ para\ x = \frac{1}{3}.$

$g\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{-1-3+36}{27} = \frac{32}{27} \Rightarrow Mín. \Rightarrow$

$\Rightarrow C\left(\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right)$.

El corte con el eje Y es $D(0, 1)$.

Teniendo en cuenta que la función es continua en R y los extremos relativos calculados, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:



$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{g'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon \left(-1, \frac{1}{3}\right)}.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{g'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)}}$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta, de donde se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} (-x^3 - x^2 + x + 1) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left(-\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 1\right] =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{4}{3}\, u^2 \cong 1,33\, u^2}.}$$

4º) El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la vente de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dada por la siguiente función: $B(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15, x \geq 0$.

$a)$ Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

$b)$ ¿Para qué valores de x la función no tiene pérdidas?

$c)$ ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

$d)$ ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5.000 euros?

SOLUCIÓN

$a)$ La función $B(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el siguiente:

$$B'(x) = -0{,}04x + 1{,}3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1{,}3}{0{,}04} = \frac{130}{4} = 32{,}5.$$

$$B(32{,}5) = -0{,}02 \cdot 32{,}5^2 + 1{,}3 \cdot 32{,}5 - 15 = -21{,}125 + 42{,}25 - 15 =$$

$$= 42{,}25 - 36{,}125 = 6{,}125 \Rightarrow V(32{,}5; 6{,}125).$$

Los puntos de corte de la función con los ejes coordenados son los siguientes:

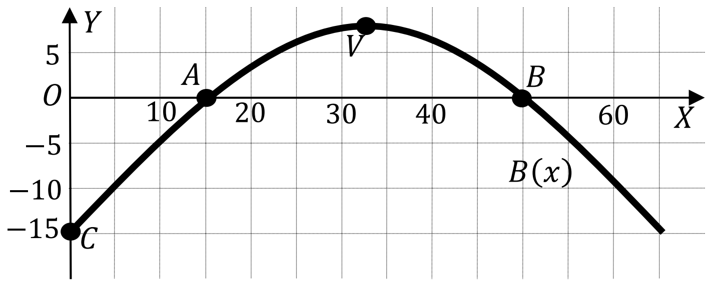
$$Eje\ X \Rightarrow B(x) = 0 \Rightarrow -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15 = 0;\ \ 2x^2 - 130x + 1.500 = 0;$$

$$x^2 - 65x + 750 = 0;\ x = \frac{65 \pm \sqrt{4.225 - 3.000}}{2} = \frac{65 \pm 35}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \rightarrow A(15, 0) \\ x_2 = 50 \rightarrow B(50, 0) \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow C(0, -15).$$

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

En el eje X se expresan los miles de kilogramos de aceituna y en el je Y se expresa el beneficio en miles de euros.



$b)$ ***No hay pérdidas vendiendo entre*** 15.000 ***y*** 50.000 ***kg de aceitunas.***

$c)$ ***El beneficio es máximo vendiendo*** 32.500 ***kg de aceitunas.***

El beneficio es máximo es de 6.125 ***euros.***

$$d)\ B(x) = 5 \Rightarrow -0{,}02x^2 + 1{,}3x - 15 = 5;\ \ 2x^2 - 130x + 2.000 = 0;$$

$$x^2 - 65x + 1.000 = 0;\ x = \frac{65 \pm \sqrt{4.225 - 4.000}}{2} = \frac{65 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 25, x_2 = 40.$$

Obtiene 5.000 ***euros vendiendo*** 25.000 ***y*** 40.000 ***kg de aceitunas.***

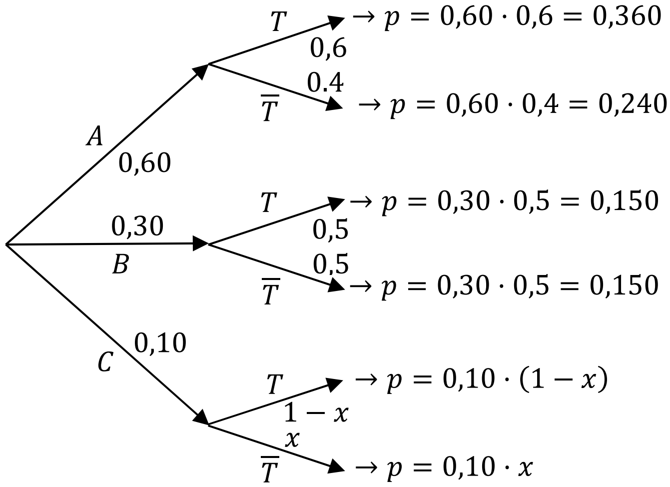
BLOQUE C

5º) En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60 % procedían de la universidad A, el 30 % de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0,4 y para un estudiante de B es 0,5.

a) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0,395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

SOLUCIÓN



a) $P = P(\overline{T}) = 0{,}395 \Rightarrow P(A \cap \overline{T}) + P(B \cap \overline{T}) + P(C \cap \overline{T}) =$

$= P(A) \cdot P(\overline{T}/A) + P(B) \cdot P(\overline{T}/B) + P(C) \cdot P(\overline{T}/C) =$

$= 0{,}60 \cdot 0{,}4 + 0{,}30 \cdot 0{,}5 + 0{,}10 \cdot x = 0{,}240 + 0{,}150 + 0{,}10 \cdot x = 0{,}395;.$

$0{,}10 \cdot x = 0{,}395 - 0{,}390 = 0{,}005 \Rightarrow x = 0{,}05 \Rightarrow 1 - x = 1 - 0{,}05 = 0{,}95.$

La probabilidad de que encuentre trabajo es 0, 95.

b) $P = P(A/\overline{T}) + P(B/\overline{T}) = \frac{P(A\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} + \frac{P(B\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{P(A\cap\overline{T})+P(B\cap\overline{T})}{P(\overline{T})} =$

$= \frac{P(A)\cdot P(\overline{T}/A)+P(B)\cdot P(\overline{T}/B)}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}60\cdot 0{,}4+0{,}30\cdot 0{,}5}{0{,}395\cdot} = \frac{0{,}240+0{,}150}{0{,}395} = \frac{0{,}390}{0{,}395} = \underline{0{,}9873}.$

6º) Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que: $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$, $P(A^c) = \frac{5}{7}$, $P(B^c) = \frac{2}{3}$.

$a)$ ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

$b)$ Calcule $P(A^c \cap B^c)$. $c)$ Calcule $P(B/A^c)$.

SOLUCIÓN

$Datos$: $P(A \cup B) = \frac{3}{7}$, $P(A^c) = \frac{5}{7}$, $P(B^c) = \frac{2}{3}$.

$a)$ $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$. $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$;

$P(A \cap B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - \frac{3}{7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7-3}{21} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{4}{21}$.

Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{4}{21} \neq \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow$$

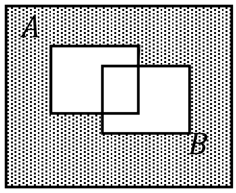
$$\underline{\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ independientes}}.$$

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

$P(A \cap B) = \frac{4}{21} \neq 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ incompatibles}}.$$

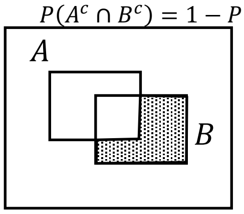
$b)$ $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{7} = \underline{\frac{4}{7}}$.



$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B)$

$c)$ $P(B/A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{B(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{4}{21}}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{7-4}{21}}{\frac{5}{7}} =$

$= \frac{3 \cdot 7}{21 \cdot 5} \Rightarrow \underline{P(B/A^c) = \frac{1}{5}}$.



$B \cap A^c = B - (A \cap B)$

BLOQUE D

7º) Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1.500 tornillos, resultando que 1.425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97 %.

b) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de la nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1 %?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha=0{,}97 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}97=0{,}03 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}015}=2{,}17.$$

$$(1-0{,}015=0{,}9850 \ \rightarrow z=2{,}17).$$

Datos: $n=1.500;\ \ p=\frac{1.425}{1.500}=0{,}95;\ \ q=1-0{,}95=0{,}05;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}95-2{,}17\cdot\sqrt{\frac{0{,}95\cdot 0{,}05}{1.500}};\ 0{,}95+2{,}17\cdot\sqrt{\frac{0{,}95\cdot 0{,}05}{1.500}}\right);$$

$(0{,}95-2{,}17\cdot 0{,}0056;\ \ 0{,}95+2{,}17\cdot 0{,}0056);\ \ (0{,}95-0{,}0122;\ \ 0{,}95+0{,}0122).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{97\,\%}=(0{,}9378;\ \ 0{,}9622).}}$$

b) Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}17;\ \ E=0{,}01;\ \ p=0{,}95;\ \ q=0{,}05.$

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=2{,}17^2\cdot\frac{0{,}95\cdot 0{,}05}{0{,}01^2}=4{,}7089\cdot\frac{0{,}0475}{0{,}0001}=$$

$=4{,}7089\cdot 475=2.236{,}73.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 2.237\ tornillos.}}$$

8º) El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8,1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para estimar la media poblacional.

b) Con un nivel de confianza del 92 %, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) Suponiendo $\mu = 7{,}61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha = 0{,}97 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}97 = 0{,}03 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1-0{,}015 = 0{,}9850 \;\rightarrow z = 2{,}17).$$

Datos: $n = 100;\;\; \overline{x} = 8{,}1;\;\; \sigma = 3;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\; y\; n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(8{,}1 - 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}};\; 8{,}1 + 2{,}17 \cdot \frac{3}{\sqrt{100}}\right);\;\; (8{,}1 - 2{,}17 \cdot 0{,}3;\; 8{,}1 + 2{,}17 \cdot 0{,}3);$$

$(8{,}1 - 0{,}651;\; 8{,}1 + 0{,}651).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{97\,\%} = (7{,}449;\; 8{,}751).}}$$

b) Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1-\alpha = 0{,}92 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}92 = 0{,}08 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}04} = 1{,}75.$$

$$(1-0{,}04 = 0{,}9600 \;\rightarrow z = 1{,}75).$$

Datos: $\sigma = 3;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75;\;\; E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}75 \cdot \frac{3}{1}\right)^2 =$

$= 5{,}25^2 = 27{,}56.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 28\ titulados.}}$$

c) Se trata de una distribución normal cuya desviación típica es la de los apartados anteriores dividida por la raíz cuadrada de la muestra.

$Datos\!:\;\; \mu = 7{,}61;\;\; \sigma = 3;\;\; n = 36.$

$$X \to N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(7{,}61;\ \frac{3}{\sqrt{36}}\right) = N(7{,}61;\ 0{,}5). \quad Z = \frac{X - 7{,}61}{0{,}5}.$$

$$P = P(X > 8) = P\left(Z > \frac{8 - 7{,}61}{0{,}5}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}39}{0{,}5}\right) = P(Z > 0{,}78) =$$

$$= 1 - P(Z \le 0{,}78) = 1 - 0{,}7823 = \underline{0{,}2177}.$$