Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Problema 1:

1º) Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \; y \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

$a)$ Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.

$b)$ Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

$c)$ Resuelva el sistema de ecuaciones: $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

2º) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

$a)$ Plantea un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

$b)$ Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

$c)$ En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

Problema 3:

3º) En una empresa el coste total, en euros, se producir q unidades viene dado por la función: $C(q) = 300q - 10q^2 + q^3/3$.

$a)$ Calcule la función coste marginal $[C_m(q) = C'(q)]$. ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

$b)$ Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio, que es: $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

$c)$ Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$. Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

Problema 4:

4º) Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{3} \ \ si \ \ x \leq 0 \\ \sqrt{ax + b} \ \ si \ 0 < x \leq 3 \\ \frac{7}{2} - \frac{x}{6} \ \ \ si \ \ \ x > 3 \end{cases}$, donde a, b son parámetros reales. Se pide:

$a)$ Determina el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$.

$c)$ Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x)$ si $x \in [6, 9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

Problema 5:

5º) Responde a las dos cuestiones siguientes:

$a)$ Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90 % dice que compra ropa (usada o nueva), el 15 % compra ropa de ambos tipos y el 60 % no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

$a_1)$ Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

$a_2)$ Si dice que no compra ropa de segunda mano, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

$b)$ En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25 % de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado, ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

Problema 6:

6º) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

$a)$ Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor de 63 puntos.

$b)$ Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92 %, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

$c)$ Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} y\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ se pide:}$$

$a)$ Calcular el valor de m para que la ecuación matricial $X \cdot A = B$ tenga solución única.

$b)$ Para $m = 1$, resuelva la ecuación matricial anterior.

$c)$ Resuelva el sistema de ecuaciones: $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$a)\ X \cdot A = B;\ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1};\ \ X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = B \cdot A^{-1}}.$ (*)

Para resolver la ecuación matricial pedida tiene que hacerse uso de la matriz inversa de A y, para que A sea invertible, es condición necesaria que sea distinto de cero su determinante.

$$|A| \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0;\ -4m + 8 - 3m \neq 0;\ \ 7m \neq 8 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{m \neq \frac{8}{7}}}.$$

$b)$ Para $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.\ |A| = -4 + 8 - 3 = 1.\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

$$Adj.\,de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}}.$$

$$\boldsymbol{X = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -15 & -2 & 4 \\ -19 & -3 & 5 \end{pmatrix}}}$$

Textos Marea Verde

$c)$ $\quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow Rang\ B = 0.$

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Se trata de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes tiene rango 2, menor que el número de incógnitas, por lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Haciendo, por ejemplo, $z = -\lambda$, las soluciones son:

$$\boldsymbol{x = \lambda, y = \lambda, z = -\lambda, \forall \lambda \in R.}$$

Textos Marea Verde

Problema 2:

2º) Una empresa de transportes valora la apertura de sucursales rurales y/o urbanas. Las sucursales rurales emplean a tres personas, requieren de una inversión de 100.000 euros para su apertura y generan unos ingresos de 15.000 euros al mes. Las sucursales urbanas emplean a 6 personas, requieren de 150.000 euros de inversión y generan un ingreso de 18.000 euros al mes. La empresa de transportes tiene hasta tres millones de euros disponibles para abrir nuevas sucursales, han decidido limitar el número de nuevas sucursales a 25 y se han comprometido a crear como mínimo 60 empleos.

a) Plantea un problema de programación lineal que permita calcular el número de sucursales de cada tipo que deben abrirse para maximizar el ingreso mensual.

b) Resuelva el problema anterior y calcule el ingreso mensual máximo que se obtendría.

c) En la solución óptima, ¿cuántos empleos generará?, ¿se gasta todo el dinero disponible?

Solución:

a) Sean x *e* y el número de sucursales rurales y urbanas que abre la empresa, respectivamente.

Las restricciones que plantea el ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+6y \geq 60 \\ 100.000x+150.000y \leq 3.000.000 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+2y \geq 20} \\ \boldsymbol{2x+3y \leq 60} \\ \boldsymbol{x+y \leq 25} \\ \boldsymbol{x \geq 0;\ y \geq 0} \end{array}\right\}.$$

b)

$① \Rightarrow x+2y \geq 20 \Rightarrow y \geq \frac{20-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	20
y	10	0

$② \Rightarrow 2x+3y \leq 60 \Rightarrow y \leq \frac{60-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	30
y	20	0

$③ \Rightarrow x+y \leq 25 \Rightarrow y \leq 25-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	25
y	25	0

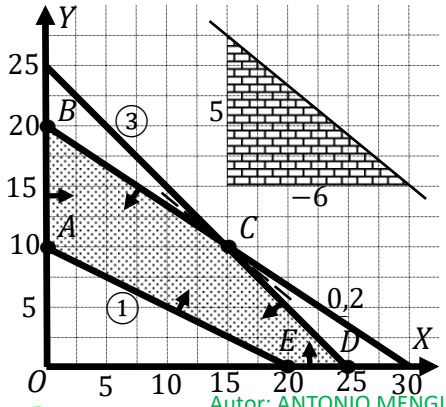
La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow y=10 \Rightarrow A(0,10).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+3y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow y=20 \Rightarrow B(0,20).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=60 \\ x+y=25 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=60 \\ -2x-2y=-50 \end{array}\right\} \Rightarrow y=10;\ x=15 \Rightarrow C(15,10).$$



$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ x + y = 25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 25 \Rightarrow D(25, 0).$

$E \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ x + 2y = 20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 20 \Rightarrow E(20, 0).$

La función de objetivos es $f(x, y) = 15.000x + 18.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 10) = 15.000 \cdot 0 + 18.000 \cdot 10 = 0 + 180.000 = 180.000.$

$B \Rightarrow f(0, 20) = 15.000 \cdot 0 + 18.000 \cdot 20 = 0 + 360.000 = 360.000.$

$C \Rightarrow f(15, 10) = 15.000 \cdot 15 + 18.000 \cdot 10 = 225.000 + 180.000 = 405.000.$

$D \Rightarrow f(25, 0) = 15.000 \cdot 25 + 18.000 \cdot 0 = 375.000 + 0 = 375.000.$

$E \Rightarrow f(20, 0) = 15.000 \cdot 20 + 18.000 \cdot 0 = 300.000 + 0 = 300.000.$

El valor máximo se produce en el punto $C(15, 10)$.

También se hubiera obtenido el punto $C(15, 10)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 15.000x + 18.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{15.000}{18.000}x = -\frac{5}{6}x \Rightarrow m = -\frac{5}{6}.$

Máximo beneficio abriendo 15 sucursales rurales y 10 urbanas.

Se produciría un beneficio máximo de 405.000 euros.

$c)$ 15 sucursales rurales y 10 urbanas: $n = 15 \cdot 3 + 10 \cdot 6 = 45 + 60 = 105.$

La solución óptima generará 105 empleos.

El gasto es: $15 \cdot 100.000 + 10 \cdot 150.000 = 3.000.000.$

En la solución óptima se gasta todo el dinero disponible.

Textos Marea Verde

Problema 3:

3º) En una empresa el coste total, en euros, se producir q unidades viene dado por la función: $C(q) = 300q - 10q^2 + q^3/3$.

a) Calcule la función coste marginal $[C_m(q) = C'(q)]$. ¿A partir de qué unidad el coste marginal aumenta al aumentar la producción?

b) Determine el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio, que es: $CM(q) = \frac{C(q)}{q}$.

c) Si el precio de venta unitario, en euros, del artículo en el mercado es $P(q) = 240 - 2q$. Determine para qué nivel de producción se maximiza el beneficio (ingresos menos costes).

Solución:

a) $C_m(q) = C'(q) = 300 - 20q + q^2$.

Una función es creciente cuando su derivada es positiva.

$(C_m)'(q) = C''(q) = -20 + 2q > 0;\ -10 + q > 0 \Rightarrow q > 10$.

Por ser la función coste marginal una parábola convexa (U) por ser positivo el coeficiente de q^2:

El coste marginal aumenta a partir de producir 10 unidades.

$b)\ CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{300q - 10q^2 + q^3/3}{q} = 300 - 10q + \frac{1}{3}q^2$.

Una función tiene un mínimo cuando se anula su primera derivada y es positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$(CM)'(q) = -10 + \frac{2}{3}q$. $\qquad (CM)''(q) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow Mínimo$.

$(CM)'(q) = 0 \Rightarrow -10 + \frac{2}{3}q = 0;\ -30 + 2q = 0;\ -15 + q = 0 \Rightarrow q = 15$.

El nivel de producción se minimiza produciendo 15 unidades.

c) Los ingresos son el producto de los elementos producidos por el precio de cada uno de ellos:

$I(q) = q \cdot P(q) = q \cdot (240 - 2q) \Rightarrow I(q) \Rightarrow I(q) = 240q - 2q^2$.

$B(q) = I(q) - C(q) = (240q - 2q^2) - \left(300q - 10q^2 + \frac{1}{3}q^3\right) =$

$= 240q - 2q^2 - 300q + 10q^2 - \frac{1}{3}q^3 \Rightarrow B(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 8q^2 - 60q$.

El beneficio es máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$B'(q) = -q^2 + 16q - 60$. $\qquad B''(q) = -2q + 16$.

$B'(q) = 0 \Rightarrow -q^2 + 16q - 60 = 0;\ q^2 - 16q + 60 = 0;\ q = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} =$

$= \frac{16 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = 8 \pm 2 \Rightarrow q_1 = 6, q_2 = 10$.

Textos Marea Verde

$B''(6) = -2 \cdot 6 + 16 = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ q = 6.$

$B''(10) = -2 \cdot 10 + 16 = -4 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ q = 10.$

El beneficio es máximo produciendo 10 unidades.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 4:

4º) Se considera la función: $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} \ \ si \ \ x\leq 0 \\ \sqrt{ax+b} \ \ si \ 0<x\leq 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} \ \ \ si \ \ \ x>3 \end{cases}$, donde a, b son parámetros reales. Se pide:

$a)$ Determina el valor de los parámetros para que $f(x)$ sea continua.

$b)$ Para dichos valores, analice si $f(x)$ es derivable en $x=0$ y en $x=3$.

$c)$ Calcule los valores máximo y mínimo de $f(x)$ si $x\in[6,9]$ y las coordenadas de los puntos donde se alcanzan dichos valores.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0\ y\ x=3$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=0\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{ax+b}=\sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Rightarrow 2\sqrt{3}=\sqrt{b}\Rightarrow \underline{b=12}.$$

La función resulta: $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} \ \ si \ \ x\leq 0 \\ \sqrt{ax+12} \ \ si \ 0<x\leq 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} \ \ \ si \ \ \ x>3 \end{cases}$.

$$Para\ x=3\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{ax+12}=\sqrt{3a+12}=f(3) \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{7}{2}-\frac{x}{6}\right)=\frac{7}{2}-\frac{3}{6}=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\Rightarrow \sqrt{3a+12}=3;\ \ 3a+12=9\Rightarrow \underline{a=-1}.$$

$$\boldsymbol{\underline{a=-1}.\ \underline{b=12}.}$$

$b)$ La función resulta: $f(x)=\begin{cases} x^2+2\sqrt{3} \ \ si \ \ x\leq 0 \\ \sqrt{-x+12} \ \ si \ 0<x\leq 3 \\ \frac{7}{2}-\frac{x}{6} \ \ \ si \ \ \ x>3 \end{cases}$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x \quad si \quad x\leq 0 \\ \frac{-1}{2\sqrt{-x+12}} \ \ si \ 0<x\leq 3 \\ -\frac{1}{6} \quad si \quad x>3 \end{cases}.$$

Textos Marea Verde

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = \frac{-1}{2\sqrt{12}} \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow$$

$La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 0.$

$$Para\ x = 3 \Rightarrow \begin{cases} f'(3^-) = \frac{-1}{2\sqrt{-3+12}} = -\frac{1}{6} \\ f'(3^+) = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow f'(3^-) = f'(3^+) \Rightarrow$$

$La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ para\ x = 3.$

$c)$ Para $x \in [6, 9]$ la función resulta $f(x) = \frac{7}{2} - \frac{x}{6}$, que es una recta de pendiente negativa, por lo cual, es decreciente en el intervalo considerado.

Sus valores máximo y se producen para los valores $x = 6$ y para $x = 9$, respectivamente.

$f(6) = \frac{7}{2} - \frac{6}{6} = \frac{5}{2} \Rightarrow$

$Valor\ máximo\ de\ la\ función: \frac{5}{2}\ en\ P\left(6, \frac{5}{2}\right).$

$$f(9) = \frac{7}{2} - \frac{9}{6} = \frac{21 - 9}{6} = \frac{12}{6} \Rightarrow$$

$Valor\ mínimo\ de\ la\ función: \frac{1}{9}\ en\ Q(9, 2).$

Textos Marea Verde

Problema 5:

5º) Responde a las dos cuestiones siguientes:

$a)$ Se ha realizado una encuesta sobre la compra de ropa por internet, en concreto sobre compra de ropa nueva y compra de ropa de segunda mano. De los entrevistados, el 90 % dice que compra ropa (usada o nueva), el 15 % compra ropa de ambos tipos y el 60 % no compra ropa de segunda mano. Para un encuestado elegido al azar:

$a_1)$ Calcule la probabilidad de que compre ropa nueva y no de segunda mano.

$a_2)$ Si dice que no compra ropa de segunda mano, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco compre ropa nueva?

$b)$ En una encuesta realizada a 64 jóvenes 8 se mostraron contrarios a llevar mascarillas en el interior de recintos de ocio. Calcule un intervalo de confianza al 97 % para determinar la proporción de jóvenes que son contrarios al uso de mascarilla en interiores de recintos de ocio. Por otro lado, el alcalde de la ciudad considera que si existe un 25 % de jóvenes adversos al uso de mascarilla se requiere aplicar algún tipo de medida de concienciación. A la vista del intervalo calculado, ¿se debería implantar alguna medida de concienciación?

Solución:

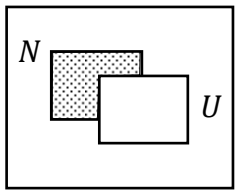
$a)$ $Datos$: $P(N \cup U) = 0{,}90;\ \ P(N \cap U) = 0{,}15;\ \ P(\overline{U}) = 0{,}60.$

$a_1)$

$$P(U) = 1 - P(\overline{U}) = 1 - 0{,}60 \Rightarrow P(U) = 0{,}40.$$

$$P(N \cup U) = P(N) + P(U) - P(N \cap U) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N) = P(N \cup U) + P(N \cap U) - P(U) = 0{,}90 + 0{,}15 - 0{,}40 \Rightarrow P(N) = 0{,}65.$$



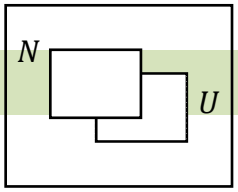
$N \cap \overline{U} = N - (N \cap U)$

$$P(N \cap \overline{U}) = P(N) - P(N \cap U) = 0{,}65 - 15 \Rightarrow \underline{P(N \cap \overline{U}) = 0{,}50}.$$

$$\boldsymbol{\underline{P(N \cap \overline{U}) = 0{,}50.}}$$

$a_2)$ $P(\overline{N}|\overline{U}) = \frac{P(\overline{N} \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \frac{1-P(N \cup U)}{P(\overline{U})} = \frac{1-0{,}90}{0{,}60} = \frac{0{,}10}{0{,}60} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\underline{P(\overline{N}|\overline{U}) = 0{,}167.}}$$



$P(\overline{N} \cap \overline{U}) = 1 - P(N \cup U)$

$b)$ Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}97 \ \rightarrow\ \alpha = 1 - 0{,}97 = 0{,}03 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$$(1 - 0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$$

Datos: $n = 64;\ \ p = \frac{8}{64} = 0{,}125;\ \ q = 1 - 0{,}125 = 0{,}875;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente:

Textos Marea Verde

$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}125 - 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{64}};\ 0{,}125 + 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}125 \cdot 0{,}875}{64}}\right);$$

$(0{,}125 - 2{,}17 \cdot 0{,}0413;\ 0{,}125 + 2{,}17 \cdot 0{,}0413);$

$(0{,}125 - 0{,}0897;\ 0{,}125 + 0{,}0897).$

$$\boldsymbol{I.C._{97\,\%} = (0{,}0353;\ 0{,}2147).}$$

Por no estar incluido el valor del 25 % $(0{,}25)$ en el intervalo de confianza:

No es necesario tomar medidas de concienciación.

Problema 6:

6º) Por una prueba de acceso a la Universidad realizada a los estudiantes de segundo de Bachillerato, se sabe que las calificaciones obtenidas se distribuyen según una distribución normal.

$a)$ Si la media de la prueba selectiva es de 65 puntos y la desviación típica 8. Calcule la probabilidad de que la nota media de 25 estudiantes elegidos al azar sea mayor de 63 puntos.

$b)$ Calcule un intervalo de confianza para la nota media de ingreso en DADE, con un nivel de confianza del 92 %, sabiendo que ingresan 100 estudiantes, que la nota media de acceso es de 80 puntos y que la desviación típica es 8,8 puntos.

$c)$ Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior se reduzca a la mitad (con los datos del apartado b).

Solución:

$a)$ $Datos:\ \mu = 65;\ \ n = 25;\ \ \sigma = 8.$

$$X \to N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(65;\ \frac{8}{\sqrt{25}}\right) = N(65;\ 1{,}6). \qquad \text{Tipificando: } Z = \frac{X-65}{1{,}6}.$$

$$P = P(X > 63) = P\left(Z > \frac{63-65}{1{,}6}\right) = P\left(Z > \frac{-2}{1{,}6}\right) = P(Z > -1{,}25) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}25) = \underline{0{,}8944}.$$

$$\boldsymbol{P(X > 63) = \underline{0,8944}.}$$

$b)$ Para un nivel de confianza del 92 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}92 \ \to\ \alpha = 1 - 0{,}92 = 0{,}08 \ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}04} = 1{,}75.$$

$$(1 - 0{,}04 = 0{,}9600 \ \to z = 1{,}75).$$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 80;\ \ \sigma = 8{,}8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(80 - 1{,}75 \cdot \frac{8{,}8}{\sqrt{100}};\ 80 + 1{,}75 \cdot \frac{8{,}8}{\sqrt{100}}\right);\ (80 - 1{,}75 \cdot 0{,}88;\ 80 + 1{,}75 \cdot 0{,}88);$$

$$(80 - 1{,}54;\ 80 + 1{,}54)$$

$$\boldsymbol{I.C._{92\,\%} = \underline{(78{,}46;\ 81{,}54)}.}$$

$c)$ $$E = \frac{81{,}54-78{,}46}{2} = \frac{3{,}08}{2} = 1{,}54.$$

Datos: $n = 100;\ \ \sigma = 8{,}8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75;\ \ E = \frac{1{,}54}{2} = 0{,}77.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}75 \cdot \frac{8{,}8}{0{,}77}\right)^2 =$

$$= (1{,}75 \cdot 11{,}4286)^2 = 20^2 = 400.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 400 estudiantes

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{matrix}(m+1)x = m-2 \\ 2x+y=-3 \\ 3x-2y+mz=-8\end{matrix}\right\}$. Se pide:

$a)$ Exprese el sistema anterior en forma matricial $(A \cdot X = B)$ y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

$b)$ ¿Existe algún valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

$c)$ Para $m = 1$, calcule $X = A^{-1} \cdot B$, siendo A, B las matrices del apartado $a)$.

Problema 2:

2º) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultaros: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30 % y la de los fondos de inversión sea del 5 %. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y, además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000 euros.

$a)$ Plantea un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

$b)$ Resuelva el problema anterior y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

$c)$ Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35 % para las criptomonedas y 0 % para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

Problema 3:

3º) Dada: $f(x) = 50 + \frac{1-x}{100} + \frac{1}{1-x}$. Se pide:

$a)$ Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

$b)$ Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo. ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?

$c)$ Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5, 21]$ euros el kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto. ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

Problema 4:

4º) La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x(x-1)^2$.

$a)$ ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

$b)$ ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

$c)$ Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

Problema 5:

5º) Responda a las cuestiones siguientes:

$a)$ Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurto, roturas, daños, etc., de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40 % de su cartera, los móviles representan el 45 % y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40 % de teléfonos móviles y un 9 % de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

$a_1)$ Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

$a_2)$ Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

$a_3)$ Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

$b)$ En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

Problema 6:

6º) El tiempo de espera para recibir en casa “tu compra en pocos minutos” se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

$a)$ Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

$b)$ Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

$c)$ Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza $(9{,}7;\ 13{,}5)$ minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Dado el sistema lineal: $\left.\begin{matrix}(m+1)x = m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{matrix}\right\}$. Se pide:

$a)$ Exprese el sistema anterior en forma matricial $(A\cdot X = B)$ y determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema sea compatible determinado.

$b)$ ¿Existe algún valor del parámetro m para que el sistema sea compatible indeterminado? En caso afirmativo, resuelva el sistema.

$c)$ Para $m=1$, calcule $X = A^{-1}\cdot B$, siendo A, B las matrices del apartado $a)$.

Solución:

$a)$ $\left.\begin{matrix}(m+1)x = m-2\\ 2x+y=-3\\ 3x-2y+mz=-8\end{matrix}\right\} \Rightarrow A\cdot X = B \Rightarrow \underline{\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-2\\ -3\\ -8\end{pmatrix}}.$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & m\end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} m+1 & 0 & 0 & m-2\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & m & -8\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & -2 & m\end{vmatrix} = m(m+1) = 0 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 0.$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Para}\ \left\{\begin{matrix}\boldsymbol{m\neq -1}\\ \boldsymbol{m\neq 0}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$b)$ $Para\ m=-1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & -1 & -8\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & -8\end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix} = 3\cdot(-4-3) = -21 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$$

$Para\ m=-1 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ \ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$

$Para\ m=0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & 0 & -8\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -3\\ 3 & -2 & -8\end{vmatrix} = -8+8+6-6 = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ m=0 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

Textos Marea Verde

Se resuelve el sistema para $m = 0$, que resulta: $\left.\begin{matrix} x = -2 \\ 2x + y = -3 \\ 3x - 2y = -8 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Solución: $x = -2, y = 1, z = \lambda, \forall \lambda \in R$.

$c)$ Para $m = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. $|A| = 2$. $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 21 \end{pmatrix}}.$$

La solución del sistema es: $x = -\frac{1}{2}, y = -2, z = -\frac{21}{2}$.

Problema 2:

2º) Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultaros: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30 % y la de los fondos de inversión sea del 5 %. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que en criptomonedas y, además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3.000 euros y un mínimo de 1.000 euros.

a) Plantea un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b) Resuelva el problema anterior y calcule la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

c) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35 % para las criptomonedas y 0 % para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fondos es una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

Solución:

a) Sean x e y las cantidades que invierte Fernanda en criptomonedas y en fondos de inversión, respectivamente, expresados en miles de euros.

Las condiciones son: $\left.\begin{matrix} x+y\leq 10 \\ x\leq y \\ 3\geq x\geq 1;\ y\geq 0; \end{matrix}\right\}$ **. (cantidades en miles de euros).**

b)

$① \Rightarrow x+y\leq 10 \Rightarrow y\leq 10-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

$② \Rightarrow x\leq y \Rightarrow y\geq x \Rightarrow P(4,0)\rightarrow No.$

x	0	10
y	10	0

x	0	10
y	0	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

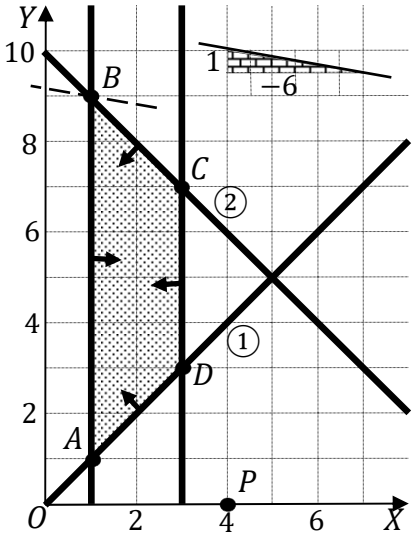
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ x=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=1 \Rightarrow A(1,1).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1 \\ x+y=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=9 \Rightarrow B(1,9).$

$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3 \\ x+y=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=7 \Rightarrow C(3,7).$

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3 \\ x=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=3 \Rightarrow D(3,3).$



La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=0{,}3x+0{,}05y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(1,1) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 1 = 0{,}3 + 0{,}05 = 0{,}35.$

$B \Rightarrow f(1,9) = 0{,}3 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 9 = 0{,}3 + 0{,}45 = 0{,}75.$

$C \Rightarrow f(3,7) = 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 7 = 0{,}9 + 0{,}35 = 1{,}25.$

$D \Rightarrow f(3,3) = 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}05 \cdot 3 = 0{,}9 + 0{,}15 = 1{,}05.$

El máximo se produce en el punto $C(3,7)$. También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 0{,}3x + 0{,}05y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0{,}3}{0{,}05}x = -\frac{1}{6}x \Rightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

El beneficio es máximo invirtiendo $\begin{cases} \mathbf{3.000\ euros\ en\ criptomonedas} \\ \mathbf{7.000\ euros\ en\ fondos\ de\ inversión} \end{cases}$.

El beneficio máximo es de 1.250 euros.

$c)$ La nueva función de objetivos es la siguiente: $g(x,y) = 0{,}35x + 0y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow g(1,1) = 0{,}35 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0{,}35 + 0 = 0{,}35.$

$B \Rightarrow g(1,9) = 0{,}35 \cdot 1 + 0 \cdot 9 = 0{,}35 + 0 = 0{,}35.$

$C \Rightarrow g(3,7) = 0{,}35 \cdot 3 + 0 \cdot 7 = 1{,}05 + 0 = 1{,}05.$

$D \Rightarrow g(3,3) = 0{,}35 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 1{,}05 + 0 = 1{,}05.$

El mínimo se produce en los puntos $A(1,1)$ y $B(1,9)$, lo cual supone que se minimiza la función en todos los puntos del segmento $\overline{AB}$. Como quiera que el punto $Q(1,5)$ pertenece al segmento $\overline{AB}$.

Invertir 1.000 euros en criptomonedas y 5.000 en fodos es óptimo.

Problema 3:

3º) Dada: $f(x) = 50 + \frac{1-x}{100} + \frac{1}{1-x}$. Se pide:

$a)$ Calcule el dominio y, si existen, las asíntotas verticales y horizontales.

$b)$ Razone que $f(x)$ tiene dos extremos relativos, uno mínimo y otro máximo. ¿El valor en el mínimo de la función es mayor o menor que el valor en el máximo?

$c)$ Supongamos que x representa el precio de venta de un kg de solomillo según la época del año, $x \in [5, 21]$ euros el kilo, y $f(x)$ el ingreso diario de un mayorista (en cientos de euros) por la venta del producto. ¿A qué precio debe vender para obtener el máximo ingreso? ¿A cuántos euros asciende dicho ingreso máximo?

Solución:

$a)$ $\quad f(x) = 50 + \frac{1-x}{100} + \frac{1}{1-x} = \frac{5.000\cdot(1-x)+(1-x)^2+100}{100(1-x)} =$

$= \frac{5.000-5.000x+1-2x+x^2+100}{100(1-x)} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-5.002x+5.100}{100(1-x)}$.

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$100(1-x) = 0;\ \ x = 1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R - \{1\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5.002x+5.100}{100(1-x)} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$1 - x = 0;\ \ x = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical.}}$$

$b)$ La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{100} + \frac{-1\cdot(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{100} + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{1}{(1-x)^2};\ \ (1-x)^2 = 100;\ \ 1 - x = \sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow$$

$1 - x = -10 \Rightarrow x_1 = 11;\ \ 1 - x = 10 \Rightarrow x_2 = -9.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = -0 + \frac{0\cdot(x+1)^3-1\cdot[2\cdot(1-x)\cdot(-1)]}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$f''(11) = \frac{2}{(1-11)^3} = \frac{2}{-1.000} < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 11$.

$f(11) = 50 + \frac{1-11}{100} + \frac{1}{1-11} = 50 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 50 - \frac{1}{5} = \frac{249}{5} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\text{Máx. } A\left(11, \frac{249}{5}\right).}}$$

$f''(-9) = \frac{2}{(1+9)^3} = \frac{2}{1.000} > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = -9$.

$$f(-9) = 50 + \frac{1+9}{100} + \frac{1}{1+9} = 50 + \frac{1}{5} = \frac{251}{5} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\text{Mín. } B\left(-9, \frac{251}{5}\right).}}$$

El valor de la función en el mínimo es mayor que en el máximo $\left(\frac{251}{5} > \frac{240}{5}\right)$; esto es comprensible teniendo que cuenta que la función no es continua.

$c)$ Al intervalo $[5, 21]$ pertenece $x = 11$ que hace máxima la función y, también, la función es continua en este intervalo, por lo cual, el valor del máximo es absoluto en el intervalo.

$f(11) = \frac{249}{5} = 49{,}8.$

$$\underline{\boldsymbol{\text{El beneficio es máximo vendiendo el solomillo a 11 euros el kilo.}}}$$

$$\underline{\boldsymbol{\text{El ingreso máximo es de 4.980 euros.}}}$$

Textos Marea Verde

Problema 4:

4º) La primera derivada de una cierta función es $f'(x) = x(x-1)^2$.

a) ¿En qué intervalo $f(x)$ es creciente? y ¿decreciente? Calcule los extremos relativos.

b) ¿En qué intervalo es cóncava la gráfica de $f(x)$? ¿y convexa? Calcule los puntos de inflexión de $f(x)$.

c) Determine $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 10$.

Solución:

c) $\quad f(x) = \int f'(x)\cdot dx = \int [x(x-1)^2]\cdot dx = \int [x\cdot(x^2-2x+1)]\cdot dx =$

$= \int (x^3 - 2x^2 + x)\cdot dx \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$

$f(0) = 10 \Rightarrow \frac{0^4}{4} - \frac{2\cdot 0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + C = 10 \Rightarrow C = 10.$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 10.}$$

a) La función polinómica $f(x)$ es continua en su dominio, que es R.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-1)^2 = 0;\ \ x_1 = 0, x_2 = x_3 = 1.$

Para estudiar los periodos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de la derivada en los periodos en que las raíces de la primera derivada dividen al dominio de la función, que son: $(-\infty, 0), (0,1)\ y\ (1, +\infty)$.

$Para\ x = -1 \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(-1) = -1\cdot(-1-1)^2 = -4 < 0.$

$Para\ x = \frac{1}{2} \in (0,1) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)^2 = \frac{1}{8} > 0.$

$Para\ x = 2 \in (1, +\infty) \Rightarrow f'(2) = 2\cdot(2-1)^2 = 2 > 0.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty).}$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = 1\cdot(x-1)^2 + x\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1 = (x-1)\cdot[(x-1)+2x] \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) = (x-1)(3x-1).$

$f''(0) = (0-1)(0-1) = 1 > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = 0$.

$f(0) = 10 \Rightarrow \underline{Mín.\ A(0,10)}.$

Textos Marea Verde

$$\boldsymbol{Mín.\ A(0,10)}$$

$f''(1) = (1-1)(3-1) = 0 \Rightarrow$ Ni máximo ni mínimo ⇒ Para P. I.

$b)$ Una función es cóncava (∩) o convexa (∪) cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 1.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la segunda derivada dividen el dominio de la función en los periodos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, cóncava o convexa.

Considerando, por ejemplo, $x = 0 \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$:

$f''(0) = (-1)(-1) = 1 > 0 \Rightarrow convexa\ para\ x = 0.$

De lo anterior se deducen los periodos de concavidad y convexidad, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right).}$$

$$\boldsymbol{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty).}$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando pasa de ser cóncava a convexa o viceversa, es decir: cuando se anula su segunda derivada.

$f''(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(3x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{3}.$

$f(1) = \frac{1^4}{4} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + 10 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 10 = \frac{3-8+6+120}{12} = \frac{121}{12} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{P.I.: B\left(1, \frac{121}{12}\right).}$$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{4} - \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} + 10 = \frac{1}{4 \cdot 81} - \frac{2}{81} + \frac{1}{18} + 10 = \frac{324-8+18+3.240}{4 \cdot 81} =$

$$= \frac{324 - 8 + 18 + 3.240}{4 \cdot 81} = \frac{3.574}{4 \cdot 81} = \frac{1.787}{162} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P.I.: C\left(\frac{1}{3}, \frac{1.787}{162}\right).}$$

Problema 5:

5º) Responda a las cuestiones siguientes:

a) Una aseguradora ha lanzado seguros multidispositivos a jóvenes para contingencias de hurto, roturas, daños, etc., de patinetes, teléfonos móviles y ordenadores portátiles. Los seguros de patinetes suponen el 40 % de su cartera, los móviles representan el 45 % y los portátiles el resto de su cartera. La compañía conoce que un 51% de patinetes, un 40 % de teléfonos móviles y un 9 % de ordenadores dan lugar a un parte de siniestro.

a_1) Calcule la probabilidad de que se comunique un parte de siniestro.

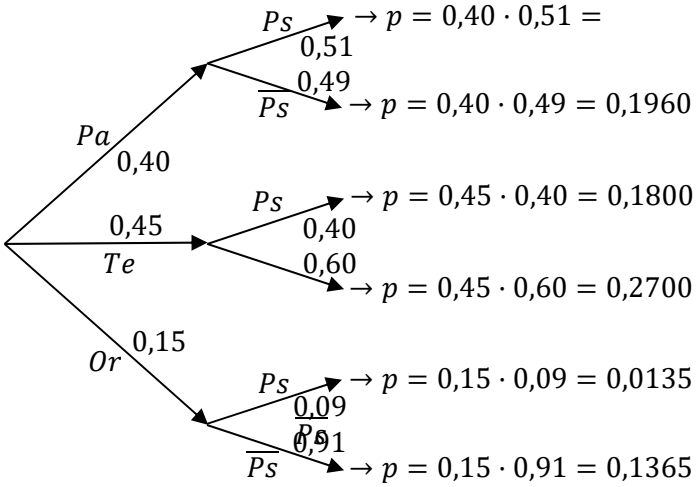
a_2) Si llegara un parte de siniestro, calcule la probabilidad de haber sido una contingencia por un teléfono móvil.

a_3) Si llegara un parte de siniestro, ¿cuál de los tres dispositivos es más probable que haya causado la contingencia?

b) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 99 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

Solución:

a)



a_1) $P = P(Ps) = P(Pa \cap Ps) + P(Te \cap Ps) + P(Or \cap Ps) =$

$= P(Pa) \cdot P(Ps/Pa) + P(Te) \cdot P(Ps/Te) + P(Or) \cdot P(Ps/Or) =$

$= 0{,}40 \cdot 0{,}51 + 0{,}45 \cdot 0{,}40 + 0{,}15 \cdot 0{,}09 = 0{,}2040 + 0{,}1800 + 0{,}0135 = \underline{0{,}3975}.$

a_2) $P = P(Te/Ps) = \frac{P(Te \cap Ps)}{P(Ps)} = \frac{P(Te) \cdot P(Ps/Te)}{P(Ps)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}40}{0{,}3975} = \frac{0{,}18}{0{,}3975} = \underline{0{,}4825}.$

a_3) $P = P(Pa/Ps) = \frac{P(Pa \cap Ps)}{P(Ps)} = \frac{P(Pa) \cdot P(Ps/Pa)}{P(Ps)} = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}51}{0{,}3975} = \frac{0{,}204}{0{,}3975} = \underline{0{,}5132}.$

Textos Marea Verde

$$P = P(Or/Ps) = \frac{P(Or \cap Ps)}{P(Ps)} = \frac{P(Or)\cdot P(Ps/Or)}{P(Ps)} = \frac{0{,}15\cdot 0{,}09}{0{,}3975} = \frac{0{,}0135}{0{,}3975} = \underline{0{,}0340}.$$

Es más probable que presenta parte de siniestro el usuario de patinete.

b) En una ciudad se ha encuestado a 100 personas preguntándoles si tenían contratado algún seguro para su teléfono móvil. Se obtuvo como resultado que 15 personas tenían contratado este tipo de seguro. Determine un intervalo de confianza al 96 % para la proporción de personas de esa ciudad que tienen contratado un seguro para su móvil.

Para un nivel de confianza del 96 % es:

$1 - \alpha = 0{,}96 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}96 = 0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055.$

$(1 - 0{,}02 = 0{,}9800 \rightarrow z = 2{,}055).$

Datos: $n = 100;\ p = \frac{15}{100} = 0{,}15;\ q = 1 - 0{,}15 = 0{,}85;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}15 - 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{100}};\ 0{,}15 + 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15\cdot 0{,}85}{100}}\right);$$

$(0{,}15 - 2{,}055 \cdot 0{,}0357;\ 0{,}15 + 2{,}055 \cdot 0{,}0357);\ (0{,}15 - 0{,}0734;\ 0{,}15 + 0{,}0734).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{96\,\%} = (0{,}0766;\ 0{,}2234).}}$$

Problema 6:

6º) El tiempo de espera para recibir en casa "tu compra en pocos minutos" se distribuye según una distribución normal de varianza 16 minutos.

a) Si la media para el tiempo de espera fuera de 12 minutos, ¿cuál sería la probabilidad de que la media de 7 pedidos fuese de más de 10 minutos?

b) Si la media obtenida a partir de una muestra aleatoria de 49 encargos fue de 12 minutos, calcule un intervalo de confianza para la media poblacional, con un nivel de confianza del 97 %.

c) Con datos de 16 encargos se ha calculado el intervalo de confianza $(9{,}7;\ 13{,}5)$ minutos para el tiempo medio en recibir el pedido. Determine el nivel de confianza de ese intervalo.

Solución:

$a)$ $Datos:\ \mu = 12;\ \sigma = \sqrt{16} = 4;\ n = 7.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N\left(12, \frac{4}{\sqrt{7}} \cong 1{,}51\right)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-12}{1{,}51}$.

$$P = P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-12}{1{,}51}\right) = P\left(Z > \frac{-2}{1{,}51}\right) = P(Z > -1{,}32) =$$

$$= 1 - P(Z > 1{,}32) = P(Z \leq 1{,}32) = \underline{0{,}9066}.$$

$$\boldsymbol{P(X > 10) = \underline{0{,}9066}}$$

b) Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0{,}97 \ \to\ \alpha = 1 - 0{,}97 = 0{,}03 \ \to\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$

$(1 - 0{,}015 = 0{,}9850 \ \to z = 2{,}17).$

Datos: $n = 49;\ \overline{x} = 12;\ \sigma = 4;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(12 - 2{,}17 \cdot \frac{4}{\sqrt{49}};\ 12 + 2{,}17 \cdot \frac{4}{\sqrt{49}}\right);\ (12 - 2{,}17 \cdot 0{,}5714;\ 12 + 2{,}17 \cdot 0{,}5714);$$

$(12 - 1{,}24;\ 12 + 1{,}24).$

$$\boldsymbol{I.C._{97\,\%} = \underline{(10{,}76;\ 13{,}24)}.}$$

$c)$ $\overline{x} = \frac{13{,}5+9{,}7}{2} = \frac{23{,}2}{2} = 11{,}6.$ $E = \frac{13{,}5-9{,}7}{2} = \frac{3{,}8}{2} = 1{,}9.$

Datos: $\overline{x} = 11{,}6;\ \sigma = 4;\ E = 1{,}9;\ n = 16.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1{,}9 \cdot \sqrt{16}}{4} = 1{,}9.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ a 1,9 le corresponde el valor 0,9713;

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9713;\ 2 - \alpha = 1{,}9426;\ \alpha = 2 - 1{,}9426 = 0{,}0574.$

$1 - \alpha = 1 - 0{,}0574 = 0{,}9426.$

$$\boldsymbol{\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 94{,}26\ \%.}}$$