

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022

Comunidad autónoma de CATALUÑA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano





EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2021–2022**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

Ejercicio 1:

1º) En el Instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de San Jorge. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Sabemos que han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo?

b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos?

Ejercicio 2:

2º) Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un tipo de fruta determinado que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en cientos de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable en 1,2 euros por cada kilogramo.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20° C de temperatura.

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso?

Ejercicio 3:

3º) Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para los trabajadores y trabajadoras. Cada cesta tipo A contendrá un jamón, una botella de cava y cinco barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá dos jamones, tres botellas de cava y dos barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por tanto, cava seguro que no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa se lo repiensa y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo se tendrán que hacer?

Ejercicio 4:

4º) Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en cientos) es dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2 + b}$, en la que a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Sabemos que al instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 cientos y que el valor máximo de población se ha alcanzado a los 2 minutos de iniciar el estudio.

a) Encuentre los valores de a y b .

b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie el comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias.

Ejercicio 5:

5º) Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentra para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$.

b) Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, en la que I denota la matriz identidad de orden 2.

Ejercicio 6:

6º) En los modelos matemáticos que se utilizan para descubrir la evolución de una enfermedad, se llama R_0 el número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando ese número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, por término medio, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia. Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando sólo una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva R_0 , que se llama efectiva y se denota con R_e , es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se logra controlar la epidemia si la R_e es inferior a uno.

a) En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si analizamos una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿existe riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población?

b) En el caso concreto de la llamada gripe española de 1.918, se estima que $R_0 = 4$. Calcula qué porcentaje de población habría sido necesario vacunar, como mínimo, para detener la epidemia de esta enfermedad.

c) Exprese, en general, el umbral de población mínimo a vacunarse en función del valor de R_0 de una enfermedad. Haga un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1:

1º) En el Instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de San Jorge. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Sabemos que han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

a) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo?

b) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos?

SOLUCIÓN

a) Sean x, y, z los ramos de rosas de los tipos clásico, pequeño y grande que se elaboran en el Instituto, respectivamente.

$$\text{El sistema de ecuaciones lineales que se deduce es: } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 85 \\ x + 3y + 6z = 200 \\ x + 2y + 3z = 135 \end{array} \right\}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 85 & 1 & 1 \\ 200 & 3 & 6 \\ 135 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{765 + 400 + 810 - 405 - 1.020 - 600}{9 + 2 + 6 - 3 - 12 - 3} = \frac{1.975 - 2.025}{-1} = \frac{-50}{-1} = 50.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 85 & 1 \\ 1 & 200 & 6 \\ 1 & 135 & 3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{600 + 135 + 510 - 200 - 810 - 255}{-1} = \frac{1.245 - 1.265}{-1} = \frac{-20}{-1} = 20.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 85 \\ 1 & 3 & 200 \\ 1 & 2 & 135 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{405 + 170 + 200 - 255 - 400 - 135}{-1} = \frac{775 - 790}{-1} = \frac{-15}{-1} = 15.$$

Se han elaborado 50 ramos clásicos, 20 pequeños y 15 grandes.

b) $\text{Ingresos} = 50 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 15 \cdot 10 = 150 + 100 + 150 = 400.$

Si se venden todos los ramos se obtiene un ingreso de 400 euros.

Ejercicio 2:

2º) Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un tipo de fruta determinado que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde x representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en cientos de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable en 1,2 euros por cada kilogramo.

a) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20° C de temperatura.

b) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso?

SOLUCIÓN

a) La función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 , por lo cual, presenta un máximo para el valor que anula su primera derivada:

$$f'(x) = -2x + 46 = 0; -x + 23 = 0 \Rightarrow x = 23.$$

$$f(23) = -23^2 + 46 \cdot 23 - 360 = -529 + 1.058 - 360 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(23, 169).$$

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 46x - 360 = 0; x^2 - 46x + 360 = 0;$$

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{2.116 - 1.440}}{2} = \frac{46 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{46 \pm 26}{2} = 23 \pm 13 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 36.$$

El invernadero es productivo entre 10° C y 36° C.

$$f(20) = -20^2 + 46 \cdot 20 - 360 = -400 + 920 - 360 = 160.$$

$$I(20) = 160 \cdot 100 \cdot 1,2 = 160 \cdot 120 = 19.200.$$

Los ingresos por hectárea del invernadero a 20° C son de 19.200 euros.

b) Del apartado anterior se deduce que:

La producción del invernadero es máxima a una temperatura de 23° C.

$$I(23) = 169 \cdot 100 \cdot 1,2 = 169 \cdot 120 = 20.280.$$

Los ingresos máximos por hectárea del invernadero son de 20.280 euros.

Ejercicio 3:

3º) Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para los trabajadores y trabajadoras. Cada cesta tipo A contendrá un jamón, una botella de cava y cinco barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá dos jamones, tres botellas de cava y dos barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por tanto, cava seguro que no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

b) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa se lo repiensa y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo se tendrán que hacer?

SOLUCIÓN

a) Como las botellas de cava son suficientes, no se considera este dato para la resolución del apartado.

Sean x e y el número de cestas de los tipos A y B que se elaboran en la empresa, respectivamente.

$$\text{Las restricciones son las siguientes: } \begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 5x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x + 2y \leq 40 \Rightarrow y \leq \frac{40-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	40
y	20	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow 5x + 2y \leq 120 \Rightarrow y \leq \frac{120-5x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	24
y	60	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow A(0, 20).$$

$$B \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 40 \\ 5x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = -40 \\ 5x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow$$

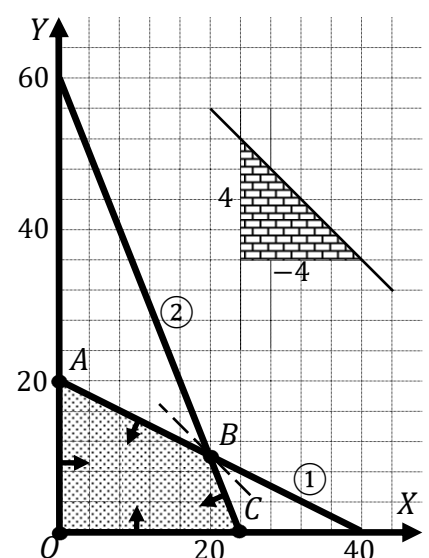
$$\Rightarrow 4x = 80; x = 20; 2y = 20; y = 10 \Rightarrow B(20, 10).$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow 5x = 120; x = 24 \Rightarrow C(24, 0).$$

La función de objetivos es $f(x, y) = x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 20) = 0 + 20 = 20.$$



$$B \Rightarrow f(20, 10) = 20 + 10 = 30.$$

$$C \Rightarrow f(24, 0) = 24 + 0 = 24.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(20, 10)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -x = -\frac{4}{4}x \Rightarrow m = -\frac{4}{4}.$$

La solución idónea es que la empresa elabore 20 cestas A y 10 B.

b) Si las cestas son las mismas, ($y = x$), el problema es el mismo sustituyendo la "y" por "x".

$$\text{Las restricciones quedan de la forma: } \left. \begin{array}{l} x + 2x \leq 40 \\ 5x + 2x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3x \leq 40 \\ 7x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array}.$$

Siendo $x \leq \frac{40}{3} = 13,33$ y $x \leq \frac{120}{7} = 17,14$ y $x \geq 0$, la solución es $x \leq 13,33$ y como el número de cestas tiene que ser natural:

Con estas condiciones la empresa debe elaborar 13 cestas de cada tipo.

Ejercicio 4:

4º) Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en cientos) es dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2+b}$, en la que a y b son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Sabemos que al instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 cientos y que el valor máximo de población se ha alcanzado a los 2 minutos de iniciar el estudio.

a) Encuentre los valores de a y b .

b) Calcule la población máxima de bacterias y estudie el comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias.

SOLUCIÓN

$$a) \quad P(0) = 6 \Rightarrow a + \frac{12 \cdot 0}{0^2+b} = 6 \Rightarrow \underline{a = 6}. \quad P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2+b}.$$

$$P'(t) = 0 + \frac{12 \cdot (t^2+b) - 12t \cdot 2t}{(t^2+b)^2} = \frac{12t^2 + 12b - 24t^2}{(t^2+b)^2} = \frac{12b - 12t^2}{(t^2+b)^2}.$$

$$P'(2) = 0 \Rightarrow \frac{12b - 12 \cdot 2^2}{(2^2+b)^2} = 0; \quad 12b - 48 = 0; \quad b - 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

Se justifica que se trata de un máximo para $b = 4$ y $t = 2$.

$$P'(t) = \frac{12 \cdot 4 - 12t^2}{(t^2+4)^2} = 12 \cdot \frac{4-t^2}{(t^2+4)^2}.$$

$$P''(t) = 12 \cdot \frac{-2t \cdot (t^2+4)^2 - (4-t^2) \cdot [2 \cdot (t^2+4) \cdot 2t]}{(t^2+4)^4} = -24 \cdot \frac{t \cdot (t^2+4) + 2t \cdot (4-t^2)}{(t^2+4)^3} =$$

$$= -24 \cdot \frac{t^3 + 4t + 8t - 2t^3}{(t^2+4)^3} \Rightarrow P''(t) = -24 \cdot \frac{12t - t^3}{(t^2+4)^3}.$$

$$P''(2) = -24 \cdot \frac{12 \cdot 2 - 2^3}{(2^2+4)^3} = -24 \cdot \frac{24-8}{8^3} = -3 \cdot \frac{16}{64} < 0 \Rightarrow \text{Máximo, c. q. j.}$$

$$b) \quad \text{La función resulta: } P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2+4}.$$

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2+4} = 6 + \frac{24}{8} = 6 + 3 = 9. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{12t}{t^2+4} \right) = 6$$

El número máximo de bacterias es de 900.

Con el paso del tiempo el número de bacterias se estabiliza en 600.

Ejercicio 5:

5º) Considere las matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Encuentra para qué valores de a es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P \cdot A$.

b) Si $a = 2$, encuentra la matriz X que satisface la ecuación matricial $P \cdot A + X = I$, en la que I denota la matriz identidad de orden 2.

SOLUCIÓN

$$a) P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -a+3 & -2a-1 \end{pmatrix}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|P \cdot A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -a+3 & -2a-1 \end{vmatrix} = 2a+1+3a-9=0; \quad 5a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{5}.$$

La matriz $P \cdot A$ es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{8}{5}\right\}$.

$$b) \text{ Para } a=2 \text{ es } P \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$P \cdot A + X = I; \quad X = I - P \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6:

6º) En los modelos matemáticos que se utilizan para descubrir la evolución de una enfermedad, se llama R_0 el número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando ese número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, por término medio, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si R_0 es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia. Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando sólo una proporción p de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva R_0 , que se llama efectiva y se denota con R_e , es el producto de la R_0 original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se logra controlar la epidemia si la R_e es inferior a uno.

a) En el caso del sarampión, se estima que $R_0 = 15$. Si analizamos una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿existe riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población?

b) En el caso concreto de la llamada gripe española de 1.918, se estima que $R_0 = 4$. Calcula qué porcentaje de población habría sido necesario vacunar, como mínimo, para detener la epidemia de esta enfermedad.

c) Exprese, en general, el umbral de población mínimo a vacunarse en función del valor de R_0 de una enfermedad. Haga un esbozo de esta función para los valores de R_0 entre 1 y 20.

SOLUCIÓN

a) Datos: $R_0 = 15$; $p = 95 \% = 0,95$. Existe riesgo cuando $R_e > 1$.

$$R_e = R_0 \cdot (1 - p) = 15 \cdot (1 - 0,95) = 15 \cdot 0,05 = 0,75 < 1.$$

No existe riesgo de epidemia de sarampión en esa población.

b) $R_e = R_0 \cdot (1 - p) < 1$; $4 \cdot (1 - p) < 1$; $4 - 4p = 1$; $4p = 3$; $p = \frac{3}{4} = 0,75$.

Habría sido necesario vacunar al menos al 75 % de la población.

c) En general tiene que cumplirse que:

$$R_0 \cdot (1 - p) < 1; \quad 1 - p < \frac{1}{R_0}; \quad -p < \frac{1}{R_0} - 1 \Rightarrow$$

$$\underline{p(R_0) > 1 - \frac{1}{R_0}}.$$

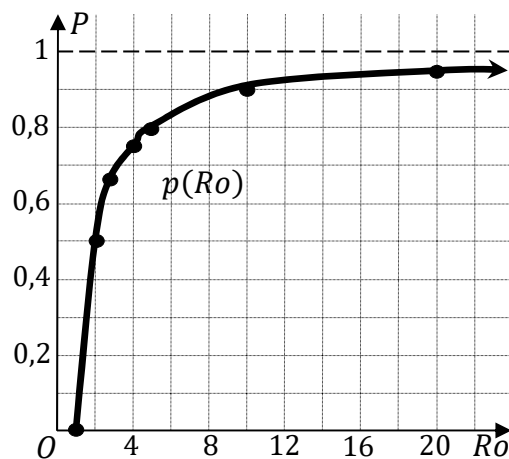
Para representar la función $p(R_0)$ entre los valores 1 y 20 tenemos en cuenta que tiene una asíntota vertical para $R_0 = 1$ y una asíntota horizontal para $R_0 = 0$.

$$p(R_0) > 1 - \frac{1}{R_0} = \frac{R_0 - 1}{R_0} \Rightarrow \lim_{R_0 \rightarrow \infty} p(R_0) = \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \frac{R_0 - 1}{R_0} = 1.$$

Una tabla de valores es la siguiente:

R_0	1	2	3	4	5	10	20
p	0	0,5	0,67	0,75	0,8	0,9	0,95

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.





EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2021–2022**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1ª) El coste de producción (en euros) de x unidades de un determinado producto viene dada por la función $C(x) = 0,02x^2 + 3x + 100$. Estas unidades se ponen a la venta y el precio unitario (en euros) depende del número de unidades producidas x . Concretamente, viene dado por la función $p(x) = 47 - 0,06x$. Supongamos que venden todas las unidades que se producen.

- a) Determine la función que da los beneficios obtenidos en función del número de unidades producidas x .
- b) Determine cuantas unidades debe producir para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio.

Problema 2:

2ª) Martí explica a Marcel que el otro día, cuando cogió el autocar para ir de Barcelona a Tarragona, el autocar se estropeó justo en mitad del trayecto. Desde ese punto fue caminando hasta la población más cercana, por lo que hizo a pie una veintena parte del total del trayecto. Allí cogió un taxi hasta Tarragona, y dice que viajó 5 kilómetros más en autocar que en taxi.

- a) Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular cuántos kilómetros hizo Martín en autocar, a pie y en taxi.
- b) Si el autocar iba a 100 km/h, Martí camino a 5 km/h y el taxi iba a 90 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en realizar todo el trayecto?

Problema 3:

3ª) El museo de Matemáticas de Cataluña (MMACA) tiene previsto montar una exposición. Se estima que el número de visitantes semanales que recibirá la exposición, expresada en decenas de personas, viene dado por la función $f(x) = \frac{240x}{x^2 - 2x + 4}$, en que $x \geq 1$ representa el tiempo, expresado en semanas, el tiempo que la exposición está abierta al público.

- a) ¿Cuántas personas irán a ver la exposición la primera semana? Calcule la tasa de variación media del número de visitantes entre la semana 1 y la semana 4.
- b) ¿Qué semana se prevé que irá más gente a ver la exposición? ¿Cuántos visitantes se estima que irán esa semana?

Problema 4:

4º) La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente, para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Queremos utilizar esta técnica para tratar alimentos que ya han comenzado a deteriorarse. Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Sabemos que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.

a) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad debe ser como mínimo de 60 grays y alrededor no puede exceder de 27 grays. Para ello, determine cuál es la función objetivo a minimizar y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) Si aplicamos un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia alrededor de la parte dañada). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a)?

Problema 5:

5º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valores de a las dos matrices conmutan, es decir, los valores de a para los cuales se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. Compruebe que para este valor de a se satisface que $A \cdot B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

b) Para el valor que ha encontrado en el apartado anterior, calcula las matrices inversas de las matrices $A \cdot B$. Puede aplicar la relación $A \cdot B = 2I$.

Problema 6:

6º) Un inversor se da cuenta que en el momento actual sus acciones tienen unas pérdidas de 2.000 euros. Su asesor financiero tiene una previsión del valor de las acciones para los próximos 30 días. Le dice que el valor de las acciones ya ha comenzado a aumentar y que en pocos días dejará de tener pérdidas. Según las previsiones, en los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de éste día los beneficios volverán a crecer. El asesor también dice al inversor que la previsión de los beneficios para los próximos 30 días tiene como modelo la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, en la que $x \in [0, 30]$.

a) Calcule los valores de los parámetros a, b, c .

b) Si el inversor quiere vender sus acciones durante estos 30 días, ¿cuál es el día en que obtendrá mayor beneficio en la venta? ¿Qué beneficio obtendrá?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) El coste de producción (en euros) de x unidades de un determinado producto viene dada por la función $C(x) = 0,02x^2 + 3x + 100$. Estas unidades se ponen a la venta y el precio unitario (en euros) depende del número de unidades producidas x . Concretamente, viene dado por la función $p(x) = 47 - 0,06x$. Supongamos que venden todas las unidades que se producen.

a) Determine la función que da los beneficios obtenidos en función del número de unidades producidas x .

b) Determine cuantas unidades debe producir para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio.

SOLUCIÓN

a) Los ingresos obtenidos son los siguientes:

$$I(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (47 - 0,06x) = 47x - 0,06x^2.$$

La función beneficios es:

$$\begin{aligned} B(x) &= I(x) - C(x) = 47x - 0,06x^2 - (0,02x^2 + 3x + 100) = \\ &= 47x - 0,06x^2 - 0,02x^2 - 3x - 100 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{B(x) = -0,08x^2 + 44x - 100.}$$

b) Para que el beneficio sea máximo es necesario que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada:

$$B'(x) = -0,16x + 44.$$

$$B''(x) = -0,16 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0,16x + 44 = 0; -0,04x + 11 = 0; x = \frac{11}{0,04} = 275.$$

El beneficio es máximo produciendo 275 unidades del producto.

$$\begin{aligned} B(275) &= -0,08 \cdot 275^2 + 44 \cdot 275 - 100 = -6.050 + 12.100 - 100 = \\ &= 12.000 - 6.050 = 5.950. \end{aligned}$$

El beneficio máximo es de 5.950 euros.

Problema 2:

2º) Martí explica a Marcel que el otro día, cuando cogió el autocar para ir de Barcelona a Tarragona, el autocar se estropeó justo en mitad del trayecto. Desde ese punto fue caminando hasta la población más cercana, por lo que hizo a pie una veintena parte del total del trayecto. Allí cogió un taxi hasta Tarragona, y dice que viajó 5 kilómetros más en autocar que en taxi.

a) Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular cuántos kilómetros hizo Martín en autocar, a pie y en taxi.

b) Si el autocar iba a 100 km/h, Martí camino a 5 km/h y el taxi iba a 90 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en realizar todo el trayecto?

SOLUCIÓN

a) Para determinar la distancia d entre Barcelona y Tarragona se tiene en cuenta el único dato numérico: que en autocar viajó Martí 5 kilómetros más que en taxi.

$$\frac{d}{2} - \left(\frac{d}{2} - 5\right) = \frac{d}{20}; \quad 5 = \frac{d}{20}; \quad d = 5 \cdot 20 \Rightarrow d = 100 \text{ km.}$$

De la atenta lectura del enunciado se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x = \frac{100}{2} = 50 \\ z = \frac{100}{2} - 5 = 45 \end{array} \right\} \Rightarrow 50 + y + 45 = 100; \quad y + 95 = 5 \Rightarrow y = 5.$$

Martí viajó 50 km en autobús, 5 km andando y 45 km en taxi.

$$b) \quad v = \frac{e}{t} \Rightarrow t = \frac{e}{v} \Rightarrow t = \frac{x}{v_x} + \frac{y}{v_y} + \frac{z}{v_z} = \frac{50}{100} + \frac{5}{5} + \frac{45}{90} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.$$

Martí tardó 2 horas en realizar todo el trayecto.

Problema 3:

3º) El museo de Matemáticas de Cataluña (MMACA) tiene previsto montar una exposición. Se estima que el número de visitantes semanales que recibirá la exposición, expresada en decenas de personas, viene dado por la función $f(x) = \frac{240x}{x^2-2x+4}$, en que $x \geq 1$ representa el tiempo, expresado en semanas, el tiempo que la exposición está abierta al público.

a) ¿Cuántas personas irán a ver la exposición la primera semana? Calcule la tasa de variación media del número de visitantes entre la semana 1 y la semana 4.

b) ¿Qué semana se prevé que irá más gente a ver la exposición? ¿Cuántos visitantes se estima que irán esa semana?

SOLUCIÓN

$$a) \quad f(1) = \frac{240 \cdot 1}{1^2 - 2 \cdot 1 + 4} = \frac{240}{1 - 2 + 4} = \frac{240}{3} = 80.$$

Se estima que visitarán la exposición la primera semana 800 personas.

$$f(4) = \frac{240 \cdot 4}{4^2 - 2 \cdot 4 + 4} = \frac{240 \cdot 4}{16 - 8 + 4} = \frac{240 \cdot 4}{12} = \frac{240}{3} = 80.$$

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow TVM[1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{80 - 80}{3} = 0.$$

$$\underline{TVM[1, 4] = 0.}$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{240 \cdot (x^2 - 2x + 4) - 240x \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{240 \cdot (x^2 - 2x + 4 - 2x^2 + 2x)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{240 \cdot (-x^2 + 4)}{(x^2 - 2x + 4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{240 \cdot (-x^2 + 4)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = 0; \quad -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual, $x = 2$.

La semana que más personas visitarán la exposición será la segunda.

$$f(2) = \frac{240 \cdot 2}{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = \frac{240 \cdot 2}{4 - 4 + 4} = \frac{240 \cdot 2}{4} = \frac{240}{2} = 120.$$

La segunda semana visitarán la exposición 1.200 personas.

Problema 4:

4º) La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente, para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Queremos utilizar esta técnica para tratar alimentos que ya han comenzado a deteriorarse. Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Sabemos que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.

a) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad debe ser como mínimo de 60 grays y alrededor no puede exceder de 27 grays. Para ello, determine cuál es la función objetivo a minimizar y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) Si aplicamos un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia alrededor de la parte dañada). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a)?

SOLUCIÓN

a) Del enunciado se deducen las condiciones del ejercicio, que son las inecuaciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y \geq 60 \\ 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y \geq 30 \\ 3x + y \leq 27 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 3x + 2y \geq 30 \Rightarrow y \geq \frac{30-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$$

x	0	10
y	15	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow 3x + y \leq 27 \Rightarrow y \leq 27 - 3x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	9	0
y	0	27

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 2y = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 30; y = 15 \Rightarrow A(0, 15).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + y = 27 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 27 \Rightarrow B(0, 27).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 30 \\ -3x - y = -27 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 3; 3x + 6 = 30; 3x = 24;$$

$$x = 8 \Rightarrow C(8, 3).$$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

La función de objetivos: $f(x, y) = 4x + 5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 15) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 15 = 0 + 75 = 75.$$

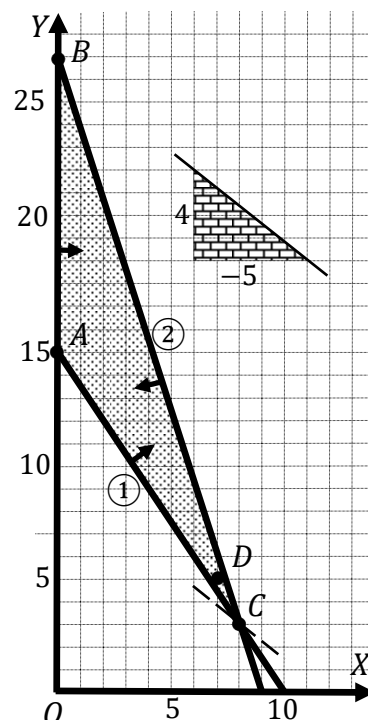
$$B \Rightarrow f(0, 27) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 27 = 0 + 135 = 135.$$

$$C \Rightarrow f(8, 3) = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 32 + 15 = 47.$$

El valor mínimo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 4x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x \Rightarrow m = -\frac{4}{5}.$$



El radiación es mínima usando 8 grays de cobalto y 3 grays de cesio

La radiación mínima es de 47 grays.

$$b) \quad 3x + 5y \geq 30 \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 21 + 10 = 31 \geq 30.$$

$$3x + y \leq 27 \Rightarrow \text{Para } \begin{cases} x = 7 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 7 + 5 = 26 \leq 26.$$

Queda comprobado que se cumplen las dos restricciones aplicando un tratamiento con 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio.

En el gráfico se justifica la posibilidad anterior teniendo en cuenta que el punto $D(7, 5)$ pertenece a la zona factible.

Considerando la función de objetivos: $f(x, y) = 4x + 5y$, el coste del tratamiento anterior es el siguiente:

$$D \Rightarrow f(7, 5) = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 = 28 + 25 = 53 > 45.$$

Queda comprobado que este tratamiento es peor que la solución encontrada.

Problema 5:

5º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valores de a las dos matrices conmutan, es decir, los valores de a para los cuales se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. Compruebe que para este valor de a se satisface que $A \cdot B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

b) Para el valor que ha encontrado en el apartado anterior, calcula las matrices inversas de las matrices $A \cdot B$. Puede aplicar la relación $A \cdot B = 2I$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} a) \quad A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2+2 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}. \\ A \cdot B &= B \cdot A \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=1. \end{aligned}$$

Las matrices A y B conmutan para $a = 1$.

$$\begin{aligned} b) \quad \text{Para } a=1 \Rightarrow A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I. \\ (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} &= 2I \cdot (A \cdot B)^{-1}; \quad I = 2I \cdot (A \cdot B)^{-1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot I.}$$

Problema 6:

6º) Un inversor se da cuenta que en el momento actual sus acciones tienen unas pérdidas de 2.000 euros. Su asesor financiero tiene una previsión del valor de las acciones para los próximos 30 días. Le dice que el valor de las acciones ya ha comenzado a aumentar y que en pocos días dejará de tener pérdidas. Según las previsiones, en los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de éste día los beneficios volverán a crecer. El asesor también dice al inversor que la previsión de los beneficios para los próximos 30 días tiene como modelo la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, en la que $x \in [0, 30]$.

a) Calcule los valores de los parámetros a, b, c .

b) Si el inversor quiere vender sus acciones durante estos 30 días, ¿cuál es el día en que obtendrá mayor beneficio en la venta? ¿Qué beneficio obtendrá?

SOLUCIÓN

a) $f(0) = -2.000 \Rightarrow$

$$\underline{c = -2.000.}$$

Del enunciado se deduce que la función beneficios tiene un máximo relativo para $x = 10$ y un mínimo relativo para $x = 20$, por lo cual: $f'(10) = f'(20) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b.$$

$$f'(10) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 10^2 + 2a \cdot 10 + b = 0; \quad 20a + b = -300. \quad (1)$$

$$f'(20) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 20^2 + 2a \cdot 20 + b = 0; \quad 40a + b = -1.200. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} 20a + b = -300 \\ 40a + b = -1.200 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -20a - b = 300 \\ 40a + b = -1.200 \end{array} \right\} \Rightarrow 20a = -900 \Rightarrow$$

$$\underline{a = -45.}$$

$$-20 \cdot 45 + b = -300; \quad b = 900 - 300 \Rightarrow$$

$$\underline{b = 600.}$$

La función beneficios resulta $f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 2.000$.

b) $f(10) = 10^3 - 45 \cdot 10^2 + 600 \cdot 10 - 2.000 =$

$$= 1.000 - 4.500 + 6.000 - 2.000 = 7.000 - 6.500 = 500.$$

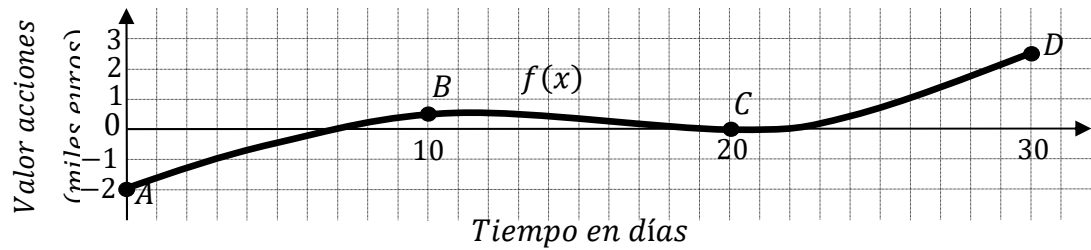
$$f(20) = 20^3 - 45 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - 2.000 =$$

$$= 8.000 - 18.000 + 12.000 - 2.000 = 20.000 - 20.000 = 0.$$

$$f(30) = 30^3 - 45 \cdot 30^2 + 600 \cdot 30 - 2.000 =$$

$$= 27.000 - 40.500 + 18.000 - 2.000 = 45.000 - 42.500 = 2.500.$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la expresada en la figura adjunta.



Obtiene el máximo beneficio vendiendo las acciones el día 30.

El beneficio máximo es de 2.500 euros.