

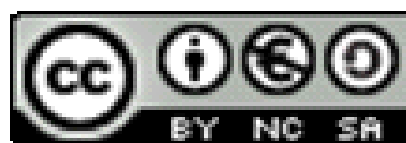
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022

Comunidad autónoma de **PAÍS VASCO**



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano



 Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2021–2022 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INSTRUCCIONES GENERALES Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. Debes responder a cuatro de ellos, de por lo menos tres bloques diferentes. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos. TIEMPO: 90 minutos.		
BLOQUE: ÁLGEBRA. 1º) Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos? 2º) El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización a lo sumo 120 viviendas, de los tipos A y B. Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda tipo A es 100.000 euros, y el de la del tipo B es 300.000 euros. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 euros y por una de tipo B a 40.000 euros. a) ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio? b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?		
BLOQUE: ANÁLISIS. 3º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$: a) Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$. b) En el caso $a = 2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos. c) En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función. 4º) a) Calcula las derivadas de las siguientes funciones: $f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3. \quad g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}.$ b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$. c) Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$. d) Calcula $I = \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) \cdot dx$.		

BLOQUE: PROBABILIDAD.

5º) Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15 % tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y en el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen error. Si abrimos el libro por una página al azar:

- ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?
- Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.
- Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
- Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

6º) Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

- Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.
- Sabemos que $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.
- Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$, y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA.

7º) En un examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

- Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.
- Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?
- Si la desviación típica es 1,5 puntos y el aprobado se obtiene con una puntuación igual o superior a 5 puntos ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

8º) Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1.000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

- Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.
- Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- Interpretar los resultados obtenidos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE: ÁLGEBRA.

19) Una determinada empresa de selección de personal realiza un test de 90 preguntas. Por cada acierto da 6 puntos; por cada fallo quita 2,5 puntos, y por cada pregunta no contestada quita 1,5 puntos. Para aprobar hay que obtener por lo menos 210 puntos. ¿Cuántas preguntas hay que contestar correctamente para obtener los 210 puntos, y que el número de preguntas no contestadas más el número de aciertos sea igual al doble del número de fallos?

Solución

Sean x, y, z el número de preguntas acertadas, falladas y no contestadas, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ 6x - 2,5y - 1,5z = 210 \\ z + x = 2y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 90 \\ 12x - 5y - 3z = 420 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 90 & 1 & 1 \\ 420 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{30 \cdot \begin{vmatrix} 90 & 1 & 1 \\ 420 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-5-24-3+5-6-12} = \frac{30 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 14 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{2 \cdot (-15-28-18-14)}{-3} =$$

$$= \frac{-2 \cdot 75}{-3} = 2 \cdot 25 \Rightarrow x = 50.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 90 & 1 \\ 12 & 420 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 12 & 14 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{2 \cdot (14-9-14-36)}{-3} = \frac{-2 \cdot 45}{-3} = 2 \cdot 15 \Rightarrow y = 30.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 90 \\ 12 & -5 & 420 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{30 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 12 & -5 & 14 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-45} = \frac{2 \cdot (-72+14+15+28)}{-3} = \frac{-2 \cdot 15}{-3} = 2 \cdot 5 \Rightarrow z = 10.$$

Acierta 50 preguntas, falla en 30 y no contesta en 10.

2º) El ayuntamiento de una determinada ciudad ha concedido la licencia para la construcción de una urbanización a lo sumo 120 viviendas, de los tipos A y B. Para ello, la empresa constructora dispone de un capital máximo de 15 millones de euros. El coste de construcción de la vivienda tipo A es 100.000 euros, y el de la del tipo B es 300.000 euros. Además, el beneficio obtenido por la venta de una vivienda de tipo A asciende a 20.000 euros y por una de tipo B a 40.000 euros.

a) ¿Cuántas viviendas de cada tipo deben construirse para obtener el máximo beneficio?

b) ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Solución

a) Sean x e y el número de viviendas los tipos A y B que se construyen en la ciudad, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ 100.000x + 300.000y \leq 15.000.000 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array}$$

① $\Rightarrow x + y \leq 120 \Rightarrow y \leq 120 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

② $\Rightarrow x + 3y \leq 150 \Rightarrow y \leq \frac{150-x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 3y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 120; y = 40 \Rightarrow A(0, 50).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ x + 3y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x - y = -120 \\ x + 3y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2y = 30; y = 15; x = 105 \Rightarrow B(105, 15).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 120 \Rightarrow C(120, 0).$

La función de objetivos es $f(x, y) = 20.000x + 40.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 50) = 20.000 \cdot 0 + 30.000 \cdot 40 = 0 + 120.000 = 120.000.$

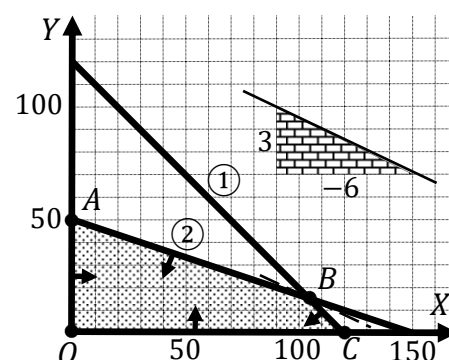
$B \Rightarrow f(105, 15) = 20.000 \cdot 105 + 40.000 \cdot 15 = 2.100.000 + 600.000 = 2.700.000.$

$C \Rightarrow f(120, 0) = 20.000 \cdot 120 + 40.000 \cdot 0 = 2.400.000 + 0 = 2.400.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(105, 15)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

x	0	120
y	120	0
x	0	150
y	50	0



$$f(x, y) = 20.000x + 40.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20.000}{40.000}x = -\frac{20.000}{40.000}x \Rightarrow m = -\frac{3}{6}.$$

Obtiene el máximo beneficio fabricando 105 de tipo A y 15 de tipo B.

b) El máximo beneficio es de 2.700.000 euros.

BLOQUE: ANÁLISIS.

3º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$:

- a) Encuentra el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 0$.
 b) En el caso $a = 2$, analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, y los máximos y mínimos relativos.
 c) En el caso $a = 2$, realiza la representación gráfica de la función.

Solución

a) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{1-2x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x - a) = -a = f(0) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{a = -1.}}$$

b) Para $a = 2$ la función es $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Para $x < 0$ la función es $f(x) = \frac{2x+1}{1-2x}$.

$f'(x) = \frac{2 \cdot (1-2x) - (2x+1) \cdot (-2)}{(1-2x)^2} = \frac{2-4x+4x+2}{(1-2x)^2} = \frac{4}{(1-2x)^2} > 0, \forall x < 0$, lo cual implica que la función es monótona creciente para $x < 0$, teniendo en cuenta, además, que el denominador de la función $(1-2x)$ no se anula para $x < 0$.

Para $x \geq 0$ la función es $f(x) = x^2 - x - 2$, que es una parábola convexa (U) por ser positivo el coeficiente de x^2 ; su vértice (mínimo) es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 1 = 0; \quad 2x = 1; \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-2-8}{4} = -\frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).}}$$

Decrecimiento: $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Para los máximos y mínimos relativos se tiene en cuenta lo siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{1-2x} = -1. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x - 2) = \infty.$$

El único extremo relativo de la función es:

Mínimo: $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$.

c) Teniendo en cuenta que la función tiene una asíntota horizontal en su parte negativa para $y = -1$ y todo lo obtenido en los apartados anteriores, la representación gráfica de la función es, aproximadamente, la que se expresa en la figura adjunta.

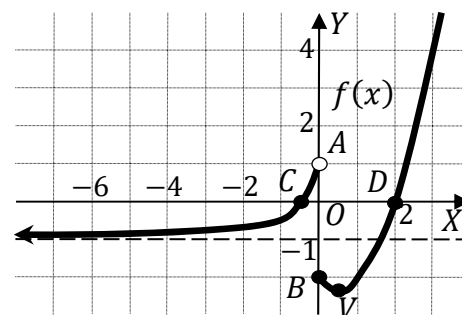
$$f(0^-) = \frac{2 \cdot 0 + 1}{1 - 2 \cdot 0} = 1 \Rightarrow A(0, 1).$$

$$f(0^+) = 0^2 - 0 - 2 \Rightarrow B(0, -2)$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{1-2x} = 0; \quad 2x+1 = 0; \quad x = -\frac{1}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow D(2, 0).$$



4º) a) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3. \quad g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}.$$

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función $h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) Determina, si existen, las asíntotas verticales y horizontales de la función $h(x)$.

d) Calcula $I = \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) \cdot dx$.

Solución

a) $f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot (3x^3 + 5x)^3 + (x^2 - 1) \cdot [3 \cdot (3x^3 + 5x)^2 \cdot (9x^2 + 5)] = \\ &= (3x^3 + 5x)^2 \cdot [2x \cdot (3x^3 + 5x) + 3 \cdot (x^2 - 1) \cdot (9x^2 + 5)] = \\ &= (3x^3 + 5x)^2 [3(2x^4 + 5x^2 - 9x^2 - 5)] = (3x^3 + 5x)^2 \cdot [3(2x^4 - 4x^2 - 5)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{f'(x) = 3x^2 \cdot (3x + 5)^2 \cdot (2x^4 - 4x^2 - 5)}. \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{L(3x)}{e^{2x}}. \quad g'(x) = \frac{\frac{3}{3x} \cdot e^{2x} - L(3x) \cdot 2 \cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2} = \frac{\frac{1}{x} - 2 \cdot L(3x)}{e^{2x}} \Rightarrow$$

$$\underline{g'(x) = \frac{1 - 2x \cdot L(3x)}{x \cdot e^{2x}}}.$$

b) La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$h'(x) = \frac{3 \cdot (2x+1) - (3x+6) \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6x+3-6x-12}{(2x+1)^2} = \frac{-9}{(2x+1)^2}.$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow m = h'(1) = \frac{-9}{(2 \cdot 1 + 1)^2} = \frac{-9}{9} \Rightarrow m = -1.$$

$$\text{El punto de tangencia es el siguiente: } h(1) = \frac{3 \cdot 1 + 6}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{9}{3} = 3 \Rightarrow P(1, 3).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 3)$:

$$y - 3 = -1 \cdot (x - 1) = -x + 1.$$

$$\underline{\text{La recta tangente es } t \equiv x + y - 4 = 0.}$$

c) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \frac{3x+6}{2x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\text{La recta } y = \frac{3}{2} \text{ es asíntota horizontal.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$2x + 1 = 0; \quad x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

La recta $x = -\frac{1}{2}$ es asíntota vertical.

$$d) I = \int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) \cdot dx =$$

$$= \int e^{3x} \cdot dx - 3 \cdot \int x^2 \cdot dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx - 4 \cdot \int \frac{1}{(x+2)^2} \cdot dx =$$

$$= A - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2B - 4C \Rightarrow I = A - x^3 + 2B - 4C. \quad (*)$$

$$A = \int e^{3x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = t \\ dx = \frac{1}{3} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \int e^t \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot e^t \Rightarrow A = \frac{1}{3} \cdot e^{3x}.$$

$$B = \int \frac{1}{x+2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = L|t| = L|x+2|.$$

$$C = \int \frac{1}{(x+2)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2} \cdot dt = \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{t} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{x+2} + C.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos por A, B y C:

$$I = A - x^3 + 2B - 4C = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - x^3 + 2 \cdot L|x+2| + \frac{4}{x+2} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - x^3 + L(x+2)^2 + \frac{4}{x+2} + K.$$

BLOQUE: PROBABILIDAD.

5º) Un libro tiene 230 páginas repartidas en 3 capítulos. El primer capítulo tiene 100 páginas, y de ellas el 15 % tiene errores. El segundo consta de 80 páginas, de las cuales 8 tienen errores; y en el tercero, de 50 páginas, sólo hay 40 que no tienen error. Si abrimos el libro por una página al azar:

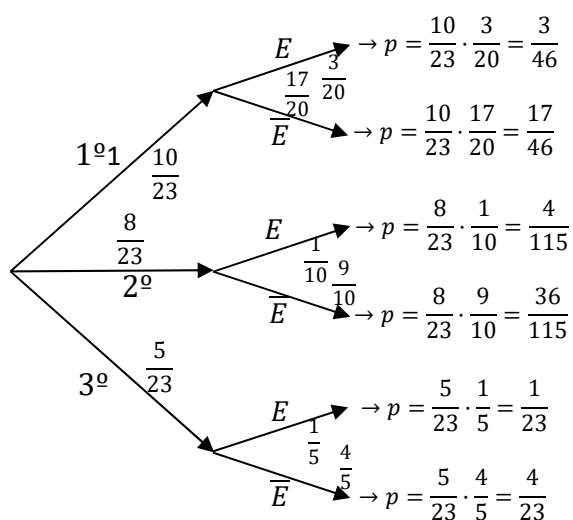
- a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del segundo capítulo?
- b) Calcula la probabilidad de que la página elegida tenga errores y sea del tercer capítulo.
- c) Calcula la probabilidad de que la página elegida no tenga errores.
- d) Observamos que la página elegida tiene errores, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tercer capítulo?

Solución

a)

$$P(2^\circ) = \frac{80}{230} = \frac{8}{23} = 0,3478.$$

b)



$$P = P(3^\circ \cap E) = P(3^\circ) \cdot P(E|3^\circ) = \frac{5}{23} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{23} = 0,0435.$$

$$\begin{aligned} c) P = P(\bar{E}) &= P(1^\circ \cap \bar{E}) + P(2^\circ \cap \bar{E}) + P(3^\circ \cap \bar{E}) = \\ &= P(1^\circ) \cdot P(\bar{E}|1^\circ) + P(2^\circ) \cdot P(\bar{E}|2^\circ) + P(3^\circ) \cdot P(\bar{E}|3^\circ) = \\ &= \frac{10}{23} \cdot \frac{17}{20} + \frac{8}{23} \cdot \frac{9}{10} + \frac{5}{23} \cdot \frac{4}{5} = \frac{85}{230} + \frac{72}{230} + \frac{40}{230} = \frac{85+72+40}{230} = \frac{197}{230} = 0,8565. \end{aligned}$$

$$d) P = P(3^\circ|E) = \frac{P(3^\circ \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{5}{23} \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{197}{230}} = \frac{\frac{1}{23}}{\frac{33}{230}} = \frac{10}{33} = 0,3030.$$

6º) Sea A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) Sabemos que $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) Sabemos que $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$, y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Solución

a) Datos: $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ y $P(A \cup B) = 0,5$.

$$P = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,3 - 0,5 = \underline{0,2}.$$

b) Datos: $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ y $P(C \cup D) = 0,7$.

$$P = P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C) + P(D) - P(C \cup D)}{P(D)} = \frac{0,5 + 0,6 - 0,7}{0,6} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3} = \underline{0,6667}.$$

c) Datos: $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$.

Dos sucesos A y E son independientes cuando $P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$

$$P = P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = 0,4 + 0,6 - 0,24 = \underline{0,76}.$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA.

7º) En un examen de Lengua Inglesa el 30 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 7,6 puntos. Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 6,8 puntos.

a) Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) Si la desviación típica es 1,5 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) Si la desviación típica es 1,5 puntos y el aprobado se obtiene con una puntuación igual o superior a 5 puntos ¿qué porcentaje del alumnado ha aprobado el examen?

Solución

a) Datos: $P(X > 7,6) = 0,3$; $\mu = 6,8$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$P(X > 7,6) = 0,3 \Rightarrow P\left(Z > \frac{7,6-6,8}{\sigma}\right) = 0,3; \quad P\left(Z > \frac{0,8}{\sigma}\right) = 0,3;$$

$$P\left(Z \leq \frac{0,8}{\sigma}\right) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de manera inversa, al valor 0,7 le corresponde:

$$\left. \begin{array}{l} 0,6985 - - - 0,52 \\ 0,7019 - - - 0,26 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 26 - - - 0,01 \\ 15 - - - -x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{0,15}{26} = 0,006.$$

$$\frac{0,8}{\sigma} = 0,526; \quad \sigma = \frac{0,8}{0,526} \Rightarrow$$

$$\underline{\sigma = 1,52.}$$

b) Siendo β la puntuación que supera el 20 % de la población, se tienen los siguientes datos:

$$P(X < \beta) = 1 - 0,20 = 0,80; \quad \mu = 6,8; \quad \sigma = 1,5.$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\beta-6,8}{1,5}$.

$$P(X < \beta) = 0,80; \quad P\left(Z < \frac{\beta-6,8}{1,5}\right) = 0,80.$$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de manera inversa, al valor 0,80 le corresponde:

$$\left. \begin{array}{l} 0,7995 - - - 0,84 \\ 0,8023 - - - 0,85 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 28 - - - 0,01 \\ 5 - - - -x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{0,05}{28} = 0,002.$$

$$\frac{\beta-6,8}{1,5} = 0,842; \quad \beta - 6,8 = 0,842 \cdot 1,5 = 1,263; \quad 6,8 + 1,263 \Rightarrow$$

$$\underline{\beta \cong 8,1.}$$

c) Datos: $\mu = 6,8$; $\sigma = 1,5$.

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(6,8; 1,5). \quad \text{Tipificando la variable: } Z = \frac{X-6,8}{1,5}.$$

$$P = P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-6,8}{1,5}\right) = P\left(Z \geq \frac{-1,8}{1,5}\right) = P(Z \geq -1,2) = \\ = P(Z < 1,2) = 0,8849.$$

Ha aprobado el examen el 88,49 % del alumnado.

8º) Se ha diseñado un experimento para comprobar el porcentaje de una población que ha sido vacunada frente a una determinada enfermedad. Para ello se ha elegido una muestra al azar de 1.000 personas, y se les ha preguntado si han recibido la vacuna o no. De ellas, 860 han respondido que sí y el resto que no. Con esta información:

- Estimar, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de personas de la población que han recibido la vacuna.
- Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.
- Interpretar los resultados obtenidos.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } n = 1.000; p = \frac{860}{1.000} = 0,86; q = 1 - 0,86 = 0,14; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente:

$$\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \right).$$

$$\left(0,86 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,86 \cdot 0,14}{1.000}}; 0,86 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,86 \cdot 0,14}{1.000}} \right);$$

$$(0,86 - 1,96 \cdot 0,0110; 0,86 + 1,96 \cdot 0,0110); (0,86 - 0,0215; 0,86 + 0,0215) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I.C._{95\%} = (0,8385; 0,8815).$$

Se estima que se ha vacunado entre el 83,85 % y 88,15 % de la población.

$$b) \quad E = \frac{0,8815 - 0,8385}{2} = \frac{0,043}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{E = 0,0215 = 2,15 \%}.$$

c) De lo anterior se deduce que, con un error del 2,15 % se han vacunado entre el 83,85 % y el 88,15 % de la población con un nivel de confianza del 95 %.

 Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2021–2022 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
--	--	---

INSTRUCCIONES GENERALES

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. Debes responder a cuatro de ellos, de por lo menos tres bloques diferentes. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA**BLOQUE: ÁLGEBRA.**

1º) Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido

por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Representa el recinto mencionado.

b) Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

2º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad $B^2 = A$.

b) Igualmente, para que se cumpla $B + C = A^{-1}$.

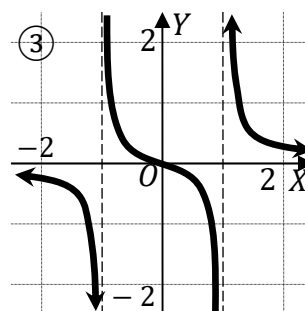
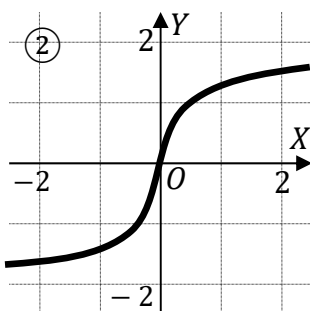
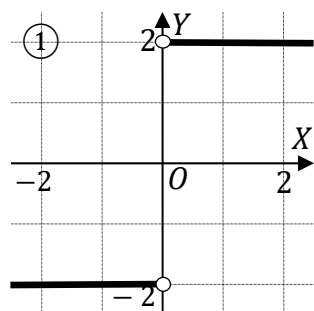
c) Determina el valor de x para que $A + B + C = 3 \cdot I_2$, siendo $I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

BLOQUE: ANÁLISIS.

3º) a) Asocia, razonadamente, las funciones:

A) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, B) $g(x) = \frac{|x|}{x}$, C) $h(x) = \sqrt[3]{x}$,

con las siguientes representaciones gráficas:



b) En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

4º) La velocidad que lleva un patinete, $v(t)$, en función del tiempo, t , viene dada por la función $v(t) =$

$$\begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}.$$

- a) Determina los valores de a y b para que la función $v(t)$ sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.
- b) Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento es patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.
- c) En el caso de $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD.

5º) Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por cada persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.

- a) Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.
- b) Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.
- c) Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

6º) Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7. Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) Ambas han encestado. b) Ninguna ha encestado.
- c) Sólo Deiene ha encestado. d) Al menos una ha encestado.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA.

7º) La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y varianza 16 grados².

- a) Obtén el intervalo característico para el 80 %.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11º?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8º y 10º?
- d) ¿Cuál es la proporción de días con más de 9º?
- e) Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12º?

8º) Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores: $\bar{x} = 52,5 \text{ kg}$ y $\sigma = 5,3 \text{ kg}$. Hemos hecho la siguiente afirmación: “el peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg”. ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE: ÁLGEBRA.

1º) Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido

por las siguientes restricciones:

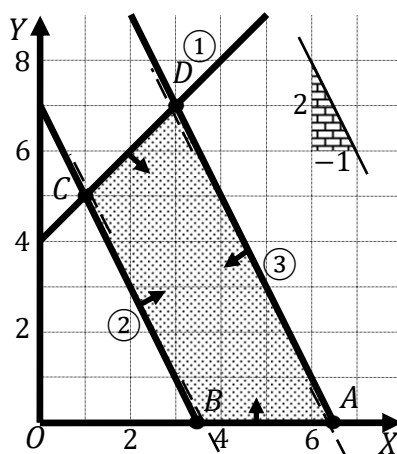
$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Representa el recinto mencionado.

b) Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

Solución

a)



① $\Rightarrow y - x \leq 4 \Rightarrow y \leq x + 4 \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

② $\Rightarrow y + 2x \geq 7 \Rightarrow y \geq 7 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

③ $\Rightarrow 2x + y \leq 13 \Rightarrow y \leq 13 - 2x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	4	8
x	0	2
y	7	3
x	3	5
y	7	3

b) La región factible es la que aparece sombreada en la figura anterior.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow 2x = 13; x = \frac{13}{2} \Rightarrow A\left(\frac{13}{2}, 0\right).$

$B \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \Rightarrow 2x = 7; x = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, 0\right).$

$$C \Rightarrow \begin{cases} y - x = 4 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + x = -4 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \Rightarrow 3x = 3; x = 1; y = 5 \Rightarrow C(1, 5).$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} y - x = 4 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 2x = 8 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow 3y = 21; y = 7; x = 3 \Rightarrow D(3, 7)$$

La función de objetivos: $f(x, y) = 4x + 2y - 1$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$$A \Rightarrow f\left(\frac{13}{2}, 0\right) = 4 \cdot \frac{13}{2} + 2 \cdot 0 - 1 = 26 + 0 - 1 = 25.$$

$$B \Rightarrow f\left(\frac{7}{2}, 0\right) = 4 \cdot \frac{7}{2} + 2 \cdot 0 - 1 = 14 + 0 - 1 = 13.$$

$$C \Rightarrow f(1, 5) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 5 - 1 = 4 + 10 - 1 = 13.$$

$$D \Rightarrow f(3, 7) = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 7 - 1 = 12 + 14 - 1 = 25.$$

Los valores máximos se producen en los puntos A y D y los valores mínimos se producen en los puntos B y C.

También se hubieran obtenido los mismos puntos por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 4x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{2}x + 1 = -\frac{2}{1}x \Rightarrow m = -\frac{2}{1}.$$

Los valores máximos se producen en los puntos A $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ y D(3, 7).

Los valores mínimos se producen en los puntos B $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ y C(1, 5).

El valor máximo es 25 y el valor mínimo es 13.

2º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad $B^2 = A$.

b) Igualmente, para que se cumpla $B + C = A^{-1}$.

c) Determina el valor de x para que $A + B + C = 3 \cdot I_2$, siendo $I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

$$a) \quad B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x^2 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 2 \\ x = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{x = 1}.$$

$$b) \quad B + C = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj. de } A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. de } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B + C = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x-1 = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{x = 0}.$$

$$c) \quad A + B + C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A + B + C = 3 \cdot I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

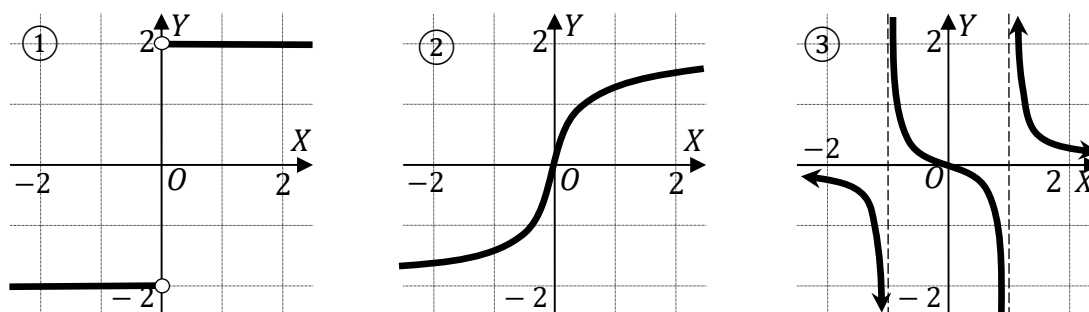
$$\underline{x = 0}$$

BLOQUE: ANÁLISIS.

3º) a) Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x}{x^2-1}, B) g(x) = \frac{|x|}{x}, C) h(x) = \sqrt[3]{x},$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

Solución

a) A) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. Teniendo en cuenta que $f(0) = 0$; que $f(x)$ es simétrica con respecto al origen, por ser $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} = -f(x)$, y que $f(x)$ tiene por asíntota horizontal $y = 0$, por ser $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 0$ y son asíntotas verticales las rectas $x = -1$ y $x = 1$, por ser $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ y $x_2 = 1$:

La función A) se relaciona con la gráfica ③.

B) $g(x) = \frac{|x|}{x}$. Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, la función $g(x)$ puede redefinirse de la forma: $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Nótese que la función no está definida para $x = 0$. De lo anterior se deduce que:

La función B) se relaciona con la gráfica ①.

C) $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Teniendo en cuenta que se trata de una función continua; que $h(0) = 0$ y que $h(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$, la función $h(x) = \sqrt[3]{x}$ es simétrica con respecto al origen, se deduce que:

La función C) se relaciona con la gráfica ②.

b) $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-1, 1\}}.$

$\underline{R(f) \Rightarrow (-\infty, \infty)}.$

$\underline{D(g) \Rightarrow R - \{0\}}.$

$\underline{R(g) \Rightarrow [-1, 1]}.$

$\underline{D(h) \Rightarrow R}.$

$\underline{R(h) \Rightarrow R}.$

49) La velocidad que lleva un patinete, $v(t)$, en función del tiempo, t , viene dada por la función $v(t) =$

$$\begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}.$$

a) Determina los valores de a y b para que la función $v(t)$ sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.

b) Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento es patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.

c) En el caso de $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.

Solución

a) La función $v(t)$ es continua en $\mathbb{R}$, excepto para $t = 1$ y $t = 5$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\begin{aligned} \text{Para } t = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} (7t^2) = 7 \\ \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} (2t + a) = 2 + a = v(1) \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = v(1) \Rightarrow 7 = 2 + a \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{a = 5.}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } t = 5 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} (2t + 5) = 15 = v(5) \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (-t^2 + 12t + b) = b + 35 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = v(5) \Rightarrow 15 = b + 35 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{b = -20.}$$

b) La función resulta: $v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + 5 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t - 20 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}.$

Una función tiene un extremo relativo, máximo o mínimo, cuando se anula su primera derivada.

$$v'(t) = \begin{cases} 14t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -2t + 12 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases} \Rightarrow v'(t) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 6.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$v''(t) = \begin{cases} 14 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -2 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v''(0) = 14 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ v''(6) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases}$$

El patinete alcanza la velocidad máxima para $t = 6$.

$$v(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 20 = -36 + 72 - 20 = 72 - 56 = 16.$$

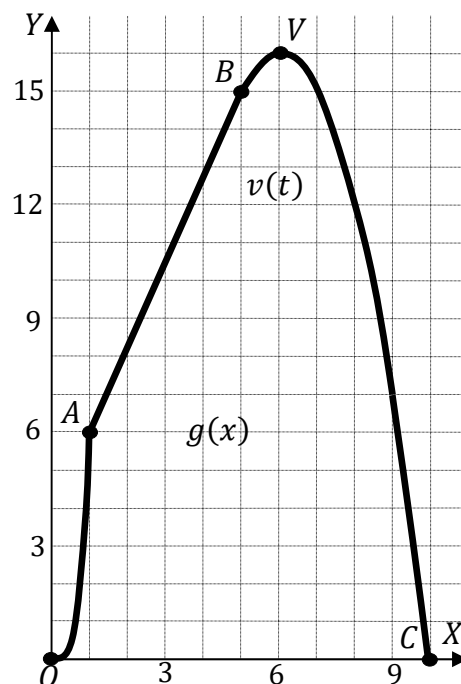
La velocidad máxima que alcanza el patinete es de 16 km/h.

c) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores puede hacerse la representación gráfica de la función, teniendo en cuenta que:

En el intervalo $[0, 1]$ la función es la parábola $v(t) = 7t^2$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de t^2 , cuyo vértice (mínimo) es el origen de coordenadas y su punto extremo es $A(0, 7)$.

En el intervalo $[1, 5]$ la función es el segmento de extremos $A(0, 7)$ y $B(1, 15)$.

En el intervalo $(5, 10]$ la función es la parábola $v(t) = -t^2 + 12t - 20$, que es cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de t^2 , cuyo vértice (máximo) es el punto $V(6, 16)$.



BLOQUE: PROBABILIDAD.

5º) Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por cada persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.

- Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.
- Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.
- Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

Solución

$$a) \quad P = \frac{4}{40} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{10}.$$

b) Se debe tener en cuenta que la primera persona puede ganar el viaje o no, por lo cual, la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de que gane la primera y gane la segunda y de que no gane la primera y gane la segunda:

$$P = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} + \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{12+144}{40 \cdot 39} = \frac{156}{40 \cdot 39} = \frac{4 \cdot 39}{40 \cdot 39} \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{10}.$$

$$c) \quad P = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{12}{8} \cdot \frac{7}{13} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{13} \Rightarrow$$

$$P = \frac{21}{26}.$$

6º) Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7. Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- a) Ambas han encestado.
- b) Ninguna ha encestado.
- c) Sólo Deiene ha encestado.
- d) Al menos una ha encestado.

Solución

a) $P = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} \Rightarrow$

$$P = \frac{6}{35}.$$

b) $P = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \Rightarrow$

$$P = \frac{12}{35}.$$

c) $P = \frac{2}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \Rightarrow$

$$P = \frac{8}{35}.$$

- d) La probabilidad pedida es la unidad menos la probabilidad de que no enceste ninguna:

$$P = 1 - \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = 1 - \frac{12}{35} = \frac{35-12}{35} \Rightarrow$$

$$P = \frac{23}{35}.$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA.

7º) La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y varianza 16 grados².

- a) Obtén el intervalo característico para el 80 %.
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11º?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8º y 10º?
- d) ¿Cuál es la proporción de días con más de 9º?
- e) Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12º?

Solución

a) Datos: $\mu = 10$; $\sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4$.

$$X \rightarrow N(\mu; \sigma) = N(10, 4).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{4}$.

$$P(25 - a < X < 25 + a) = P\left(\frac{10-a-10}{4} \leq Z \leq \frac{10+a-10}{4}\right) = P\left(\frac{-a}{4} \leq Z \leq \frac{a}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-a}{4} \leq Z \leq \frac{a}{4}\right) = 0,8.$$

$$P\left(\frac{-a}{4} \leq Z \leq \frac{a}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right) - P\left(Z \leq -\frac{a}{4}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right)\right] =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right) - 1 + P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right) = 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right) - 1 = 0,8; \quad 2 \cdot P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right) = 1,8;$$

$P\left(Z \leq \frac{a}{4}\right) = 0,9$. Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,9000 le corresponde aproximadamente 1,28, por lo cual:

$$\frac{a}{4} = 1,28 \Rightarrow a = 5,12.$$

El intervalo pedido es el siguiente:

$$(10 - 5,12; 10 + 5,12) \Rightarrow$$

$$(4,88; 15,12).$$

$$b) P = P(X > 11) = P\left(Z > \frac{11-10}{4}\right) = P\left(Z > \frac{1}{4}\right) = P(Z > 0,25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,25) = 1 - 0,5987 = \underline{0,4013}.$$

$$c) P = P(8 < X < 10) = P\left(\frac{8-10}{4} < Z < \frac{10-10}{4}\right) = P\left(\frac{-2}{4} < Z < \frac{0}{4}\right) =$$

$$= P(-0,5 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0,5) =$$

$$= P(Z < 0) - [1 - P(Z < 0,5)] = P(Z < 0) - 1 + P(Z < 0,5) =$$

$$= 0,5 - 1 + 0,6915 = 1,1915 - 1 = \underline{0,1915}.$$

$$d) P = P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9-10}{4}\right) = P\left(Z > \frac{-1}{4}\right) = P(Z > -0,25) = P(Z \leq 0,25)$$

$$P(X > 9) = \underline{0,5987 = 59,87 \%}.$$

$$e) P = P(X < 12) = P\left(Z < \frac{12-10}{4}\right) = P\left(Z < \frac{2}{4}\right) = P(Z < 0,5) = 0,6915.$$

$$n = N \cdot P = 30 \cdot 0,6915 = 20,745.$$

La temperatura ha sido 21 días inferior a 12°.

8º) Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores: $\bar{x} = 52,5 \text{ kg}$ y $\sigma = 5,3 \text{ kg}$. Hemos hecho la siguiente afirmación: “el peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg”. ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Solución

$$E = \frac{54-51}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Datos: $\bar{x} = 52,5$; $\sigma = 5,3$; $E = 1,5$; $n = 100$.

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1,5 \cdot \sqrt{100}}{5,3} = \frac{15}{5,3} = 2,83.$$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ a 2,83 le corresponde el valor 0,9977;

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9977; \quad 2 - \alpha = 1,9954; \quad 1 - \alpha = 0,9954.$$

El nivel de confianza utilizado ha sido del 99,54 %.