MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García
ebaumatematicas.com

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

PRUEBA DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBAS DE ADMISIÓN

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS

CONVOCATORIA ORDINARIA. CURSO 2022–2023.

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

- **a) Duración: 1 hora y 30 minutos.**
- **b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en dos bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
- **c)** Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- **d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas, ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- **f)** En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 f(x)\right)$.

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sea la función $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, f(-2))$ y $(2, f(2))$.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$.

Autor: Juan Antonio Martínez García

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}\left(t^2\right) dt$. Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El $60\,\%$ de los coches blancos más el $50\,\%$ de los coches negros representan el $30\,\%$ de los coches vendidos. El $20\,\%$ de los coches blancos junto con el $60\,\%$ de los coches negros y el $60\,\%$ de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.

b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

El plano perpendicular al segmento de extremos $P(0, 3, 8)$ y $Q(2, 1, 6)$ que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera el punto $A(-1, 1, 3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2, 1, 1)$ y $C(0, 1, -1)$.

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1 punto]** Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)$.

Solución:

a) Usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=\frac{0-1\left(e^x-e^{-x}\right)}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-e^x+e^{-x}}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}=0\Rightarrow -e^x+e^{-x}=0\Rightarrow e^{-x}=e^x\Rightarrow -x=x\Rightarrow -2x=0\Rightarrow x=0$$

Estudiamos el cambio de signo antes y después de $x = 0$.

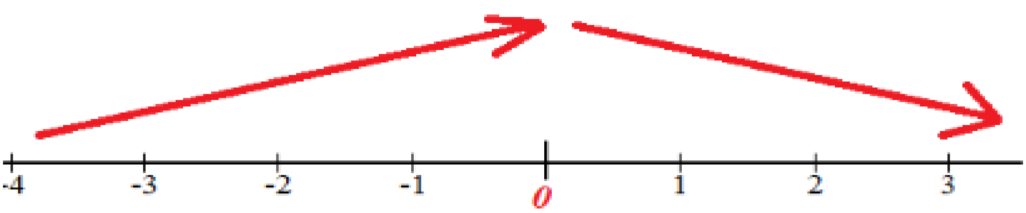
En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$f'(-1)=\dfrac{-e^{-1}+e^1}{\left(e^{-1}+e^1\right)^2}\approx 0.24>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-e^1+e^{-1}}{\left(e^1+e^{-1}\right)^2}\approx -0.24<0$.

La función decrece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo que es absoluto en $x = 0$. En dicho valor la función vale $f(0)=\dfrac{1}{e^0+e^{-0}}=\dfrac{1}{2}$. El máximo absoluto tiene coordenadas $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

La función no presenta mínimo relativo ni absoluto pues su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{0+\infty}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{\infty+0}=0$. La función no alcanza valores menores que 0, pero dicho valor no se alcanza en ningún punto de la gráfica de la función.

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 f(x)\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty+0}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty-0}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\frac{2}{\infty+0}=\frac{2}{\infty}=\boxed{0}$$

Ejercicio 2.A:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x^3-2x+5$.

a) **[1,5 puntos]** Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2,f(-2))$ y $(2,f(2))$.

b) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.

Solución:

a)

La pendiente de la recta que pasa por los puntos *(–2, f(–2))* y *(2, f(2))* vale:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^3-2(-2)+5=1 \\ f(2)=2^3-2\cdot 2+5=9 \end{array}\right\}\Rightarrow Pendiente=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{9-1}{4}=2$$

La pendiente de la recta tangente es la derivada. Igualamos las expresiones y hallamos el punto o puntos pedidos.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2 \\ Pendiente=2 \end{array}\right\}\Rightarrow 3x^2-2=2\Rightarrow 3x^2=4\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}}$$

Existen dos puntos donde se cumple lo pedido: $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}$; $x=+\sqrt{\frac{4}{3}}$

b) Hallamos las coordenadas del punto de inflexión igualando a cero la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-2\Rightarrow f''(x)=6x$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6x=0\Rightarrow x=0$$

$$Como\ f'''(x)=6\Rightarrow f'''(0)=6\neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-2\cdot 0+5=5 \\ f'(0)=3\cdot 0^2-2=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow y-5=-2(x-0)\Rightarrow \boxed{y=-2x+5}$$

Hallamos la ecuación de la recta normal en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=5 \\ f'(0)=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow y-5=-\frac{1}{-2}(x-0)\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x+5}$$

Ejercicio 3.A:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $f(x)=x|x-1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

Solución:

La función valor absoluto la ponemos como una función a trozos.

$$f(x)=x|x-1|=\begin{cases} x(-x+1) & si\ x\le 1 \\ x(x-1) & si\ x>1 \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$. En el entorno de este valor la función es $f(x)=x|x-1|=x(-x+1)$.

$$f(x)=x(-x+1)=-x^2+x\to f'(x)=-2x+1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=-0+1=1 \\ f(0)=0(-0+1)=0 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$$

Nos piden calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)=x|x-1|$ y la recta $y=x$. Vemos donde se cortan ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x|x-1| \\ y=x \end{array}\right\}\Rightarrow x|x-1|=x\Rightarrow$$

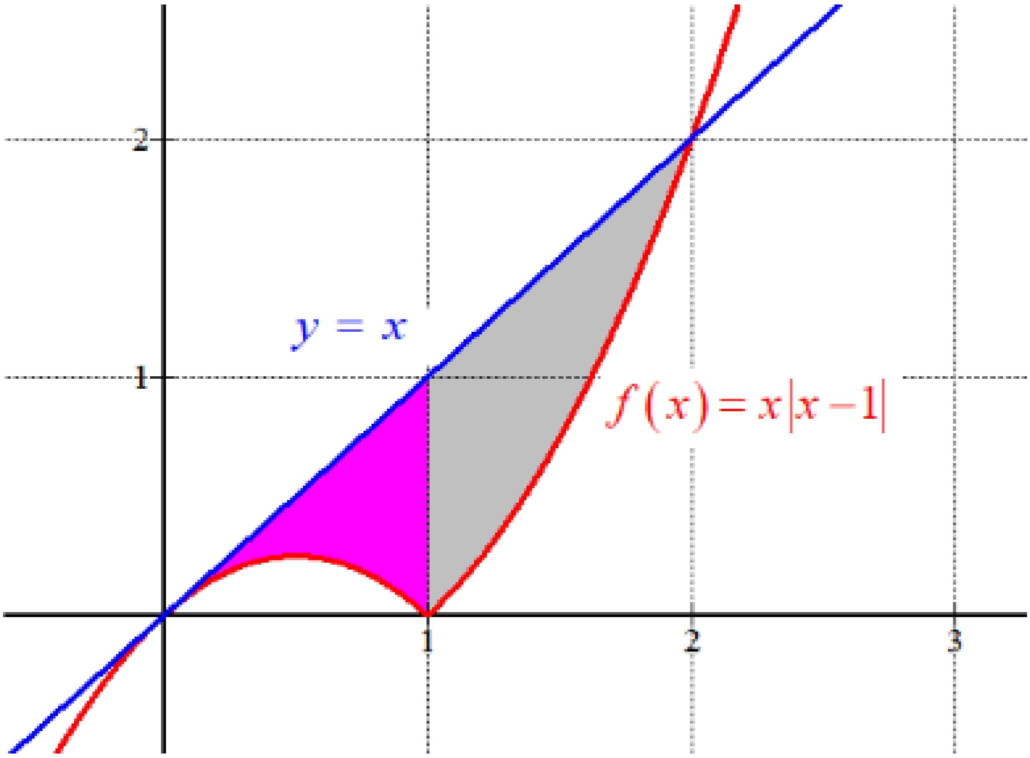
$$\Rightarrow\begin{cases} x(x-1)=x\to x^2-x=x\to x^2-2x=0\to x(x-2)=0\to\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \\ x(-x+1)=x\to -x^2+x=x\to -x^2=0\to x=0 \end{cases}$$

El recinto del cual queremos hallar el área es el valor absoluto de la integral definida de la función entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones. Como la función cambia de definición en $x = 1$ dividimos el área en dos partes.

$$\int_0^1 x(-x+1)dx=\int_0^1 -x^2+xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\left[-\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}\right]=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\int_1^2 x(x-1)dx=\int_1^2 x^2-xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right]-\left[\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}\right]=\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

El área del recinto es la suma de estos dos valores: $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$ *unidad cuadrada*.



y = x
f(x) = x|x − 1|
1
2
1
2
3

Ejercicio 4.A:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xF(x)}{sen(x^2)}=\frac{0\cdot F(0)}{sen(0^2)}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)=...}$$

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por lo que la función $F(x)$ es continua y derivable siendo su derivada $F´(x)=sen(x^2)$

Usando esta propiedad calculamos el valor del límite pedido.

$$...=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)+xF´(x)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)+xsen(x^2)}{2x\cdot\cos(x^2)}=\frac{F(0)+0sen(0^2)}{2\cdot 0\cdot\cos(0^2)}=\frac{0}{0}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)=}\lim_{x\to 0}\frac{F´(x)+sen(x^2)+x\cdot 2x\cdot\cos(x^2)}{2\cos(x^2)+2x\cdot 2x\cdot\left[-sen(x^2)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x^2)+sen(x^2)+2x^2\cdot\cos(x^2)}{2\cos(x^2)-4x^2\cdot sen(x^2)}=\frac{0+0+0}{2\cos(0)+0}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

BLOQUE B

Ejercicio 5B:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El $60\,\%$ de los coches blancos más el $50\,\%$ de los coches negros representan el $30\,\%$ de los coches vendidos. El $20\,\%$ de los coches blancos junto con el $60\,\%$ de los coches negros y el $60\,\%$ de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendidos de cada color.

Solución:

Llamamos "x" al número de coches blancos, "y" al número de coches negros y "z" al número de coches rojos.

El número total de coches vendidos es $x+y+z$.

"El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos" → $0.6\cdot x+0.50\cdot y=0.30(x+y+z)$

"El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos" → $0.20\cdot x+0.60\cdot y+0.60\cdot z=\dfrac{x+y+z}{2}$

"Se han vendido 100 coches negros más que blancos" → $y=x+100$.

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}0.6\cdot x+0.50\cdot y=0.30(x+y+z)\\ 0.20\cdot x+0.60\cdot y+0.60\cdot z=\dfrac{x+y+z}{2}\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6x+5y=3(x+y+z)\\ 2x+6y+6z=10\dfrac{x+y+z}{2}\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6x+5y=3x+3y+3z\\ 2x+6y+6z=5x+5y+5z\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2y-3z=0\\ -3x+y+z=0\\ y=x+100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2(x+100)-3z=0\\ -3x+x+100+z=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2x+200-3z=0\\ -2x+z+100=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x-3z=-200\\ z=-100+2x\end{array}\right\}\Rightarrow 5x-3(-100+2x)=-200\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+300-6x=-200\Rightarrow -x=-500\Rightarrow\boxed{x=500}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{y=500+100=600}\\ \boxed{z=-100+2\cdot 500=900}\end{array}\right.$$

Se han vendido 500 coches blancos, 600 negros y 900 rojos.

Ejercicio 6.B:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **[0,5 puntos]** Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.

b) **[2 puntos]** Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación $AX + X = B$.

Solución:

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + m^3 - 0 - 0 - 0 = m^3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^3 = 0 \Rightarrow m = 0$$

La matriz A tiene inversa cuando m es distinto de 0.

b) Despejo X de la ecuación $AX + X = B$.

$$(A+I)X = B \Rightarrow X = (A+I)^{-1} B$$

Comprobamos que la matriz $A + I$ tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A+I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + m^3 - 0 - 0 - 0 = m^3 + 1$$

$$|A+I| = 0 \Rightarrow m^3 + 1 = 0 \Rightarrow m^3 = -1 \Rightarrow m = \sqrt[3]{-1} = -1$$

La matriz $A + I$ tiene inversa pues $m \neq -1$. La calculamos.

$$(A+I)^{-1} = \frac{Adj\left(A+I\right)^T}{|A+I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}}{m^3+1} = \frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} m & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & m^2 & -m\\ -m & 1 & m^2\\ m^2 & -m & 1\end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de la matriz X.

$$X=(A+I)^{-1}B=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & m^2 & -m\\ -m & 1 & m^2\\ m^2 & -m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{m^3+1}\begin{pmatrix}1 & -m & m^2\\ -m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & -m\end{pmatrix}}$$

Ejercicio 7.B:

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$.

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución:

El punto medio M del segmento PQ tiene coordenadas $M=\frac{(0,3,8)+(2,1,6)}{2}=(1,2,7)$.

El plano π perpendicular al segmento PQ tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{PQ}$. Y contiene al punto M.

$$\overrightarrow{PQ}=(2,1,6)-(0,3,8)=(2,-2,-2)$$

$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(2,-2,-2)\\ M(1,2,7)\in\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi:2x-2y-2z+D=0\\ M(1,2,7)\in\pi\end{cases}\Rightarrow 2-4-14+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=16\Rightarrow \pi:2x-2y-2z+16=0\Rightarrow \boxed{\pi:x-y-z+8=0}$$

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A\rightarrow\begin{cases}\pi:x-y-z+8=0\\ OX:\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow x+8=0\Rightarrow x=-8\Rightarrow A(-8,0,0)$$

$$B\rightarrow\begin{cases}\pi:x-y-z+8=0\\ OY:\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow -y+8=0\Rightarrow y=8\Rightarrow B(0,8,0)$$

$$C\rightarrow\begin{cases}\pi:x-y-z+8=0\\ OZ:\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\end{cases}\Rightarrow -z+8=0\Rightarrow z=8\Rightarrow C(0,0,8)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,8,0)-(-8,0,0)=(8,8,0)\\ \overrightarrow{AC}=(0,0,8)-(-8,0,0)=(8,0,8)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 8 & 8 & 0\\ 8 & 0 & 8\end{vmatrix}=64i-64k-64j=(64,-64,-64)$$

$$Área=\frac{\sqrt{64^2+(-64)^2+(-64)^2}}{2}=\boxed{32\sqrt{3}\approx 55.426\ unidades\ cuadradas}$$

Autor: Juan Antonio Martínez García

Ejercicio 8.B:

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera el punto $A(-1,1,3)$ y la recta r determinada por los puntos $B(2,1,1)$ y $C(0,1,-1)$.

a) **[1,5 puntos]** Halla la distancia del punto A a la recta r.

b) **[1 punto]** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

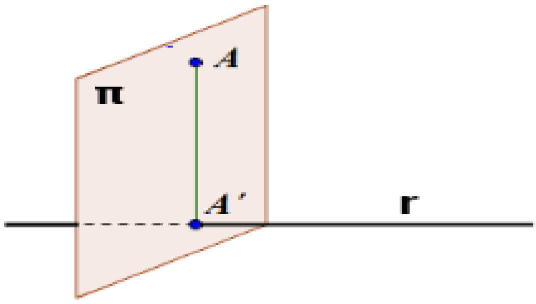
Solución:

Hallamos la ecuación de la recta r.

$$r:\begin{cases} B(2,\ 1,\ 1)\in r \\ C(0,\ 1,\ -1)\in r \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v_r}=\overrightarrow{CB}=(2,1,1)-(0,1,-1)=(2,0,2) \\ B(2,\ 1,\ 1)\in r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \\ z=1+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

a)



Hallamos la proyección ortogonal del punto A en la recta r. Para ello hallamos el punto A´ perteneciente a la recta tal que el vector $\overrightarrow{AA'}$ sea ortogonal al vector director de la recta $\vec{v_r}=(2,0,2)$.

$$\left.\begin{array}{r} r:\begin{cases} x=2+2t \\ y=1 \\ z=1+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R} \\ A'\in r \end{array}\right\} \Rightarrow A'(2+2t,1,1+2t)$$

$$\overrightarrow{AA'}=(2+2t,1,1+2t)-(-1.1,3)=(3+2t,0,-2+2t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=(2,0,2) \\ \overrightarrow{AA'}=(3+2t,0,-2+2t) \\ \vec{v_r}\cdot\overrightarrow{AA'}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,0,2)(3+2t,0,-2+2t)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+4t-4+4t=0 \Rightarrow 8t=-2 \Rightarrow t=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2+2\frac{-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \\ y=1 \\ z=1+2\frac{-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)$$

La distancia del punto A a la recta r es la distancia del punto A al punto A´, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{3}{2},1,\frac{1}{2}\right)-(-1,1,3)=\left(\frac{5}{2},0,\frac{-5}{2}\right)$$

$$d(A,r)=d(A,A')=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+0^2+\left(\frac{-5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\cong 3.54\ unidades$$

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,1,1)-(-1,1,3)=(3,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-1)-(-1,1,3)=(1,0,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-2j+12j=10j=(0,10,0)$$

$$Área\ ABC=\frac{\sqrt{0^2+10^2+0^2}}{2}=\boxed{5\ unidades\ cuadradas}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: Este ejercicio consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques A y B de 4 ejercicios cada uno. Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención del resultado deben estar suficientemente justificados.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE A

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}5x+1 & si \quad -2\le x\le 0\\ e^x\cos(x) & si \quad 0<x\le 2\pi\end{cases}$.

a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{2}$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(\ln(x))^2$ (In denota la función logaritmo neperiano).

a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0<a<1$, tal que $\displaystyle\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}\,dx+2=0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$.

a) **[1,25 puntos]** Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

BLOQUE B

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) **[1 punto]** Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) **[1,5 puntos]** Halla x, distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto P(2, 6, –2).

b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos A(0, 2, –2), $B(3,\ 2,\ 1)$ y C(2, 3, 2) con los planos cartesianos.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Sea la función $f:[-2,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}5x+1 & si \quad -2\le x\le 0\\ e^x\cos(x) & si \quad 0<x\le 2\pi\end{cases}$.

a) **[2 puntos]** Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[0,5 puntos]** Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{2}$.

a) En el intervalo $-2\le x\le 0$ la función es $f(x)=5x+1$ una recta creciente, por lo que el valor mínimo lo alcanza en $x=-2$ y el máximo en $x=0$. Como $f(-2)=5(-2)+1=-9$ y $f(0)=5(0)+1=1$ tenemos que el valor mínimo en $[-2,0]$ es -9 y el máximo es 1.

En el intervalo $0<x\le 2\pi$ la función es $f(x)=e^x\cos(x)$ usamos la derivada para obtener los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=e^x\cos(x)-e^x sen(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)=0\Rightarrow\left\{e^x\ne 0\right\}\Rightarrow\cos(x)-sen(x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\cos(x)=sen(x)\Rightarrow\{0<x\le 2\pi\}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}\\ x=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos valores.

$$f'(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)\Rightarrow f''(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)\right)+e^x\left(-sen(x)-\cos(x)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=e^x\left(\cos(x)-sen(x)-sen(x)-\cos(x)\right)=e^x\left(-2sen(x)\right)=-2e^x sen(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-2e^{\pi/4}sen\left(\frac{\pi}{4}\right)=-e^{\pi/4}\sqrt{2}<0\to\text{¡Máximo!}\\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-2e^{5\pi/4}sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{\pi/4}\sqrt{2}>0\to\text{¡Mínimo!}\end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}\approx 1.55.$$

La función presenta un mínimo relativo en $x=\frac{5\pi}{4}$. En dicho valor la función vale

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=e^{5\pi/4}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}=-35.88$.

Comprobamos si la función es continua en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 5x+1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x\cos(x)=e^0\cos(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$$

La función es continua en el intervalo $x = 0$.

En $x = 0$ la función cambia de definición y no tiene un máximo relativo pues al tener un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{4}$ significa que la función crece en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

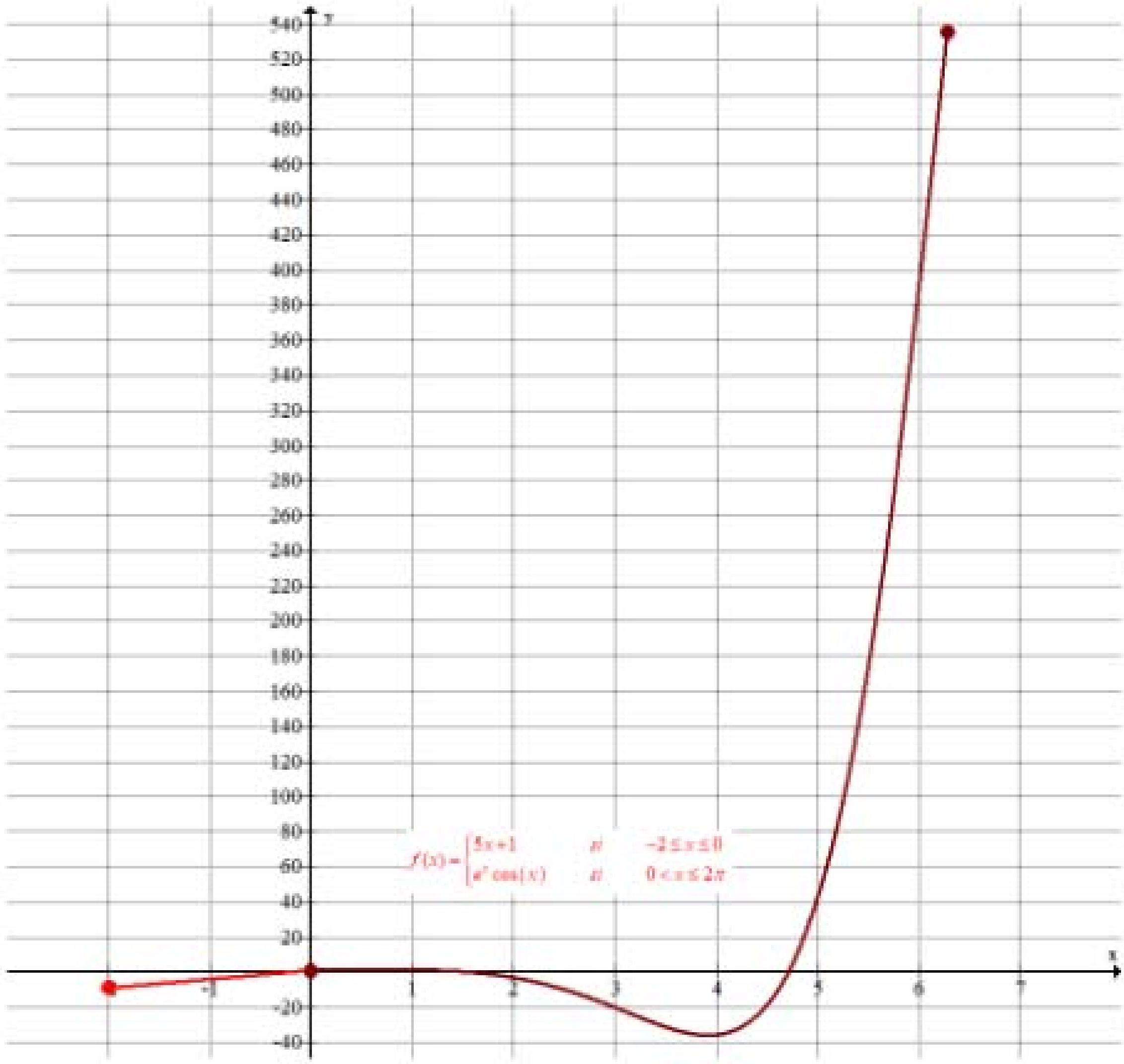
El máximo relativo de la función es $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\pi/4}\right)$ y el mínimo relativo es $\left(\frac{5\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}\right)$

Reunimos toda la información obtenida para decidir donde está el máximo y mínimo absoluto de la función. También valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $[-2,2\pi]$.

- El valor mínimo en $[-2,0]$ está en $x = -2$ y es -9 y el máximo está en $x=0$ y es 1.
- El valor mínimo relativo en $[0,2\pi]$ está en $x=\frac{5\pi}{4}$ y es -35.88 y el máximo relativo está en $x=\frac{\pi}{4}$ y es 1.55.
- La función en $x=2\pi$ vale $e^{2\pi}\cos(2\pi)=e^{2\pi}\simeq 535.49$.

El máximo absoluto está en $x=2\pi$ con valor $e^{2\pi}\simeq 535.49$.

El mínimo absoluto está en $x=\frac{5\pi}{4}$ y su valor es $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi/4}\simeq -35.88$.



b) La función en un entorno de $x=\dfrac{\pi}{2}$ es $f(x)=e^x\cos(x)$.

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\dfrac{\pi}{2}$ es:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\pi/2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\pi/2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-sen\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=-e^{\pi/2}\\ y-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=-e^{\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \boxed{y=-e^{\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}$$

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

a) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) **[1,25 puntos]** Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Averiguamos cuando se anula la función derivada

$$f'(x)=(\ln(x))^2+x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}=(\ln(x))^2+2\ln(x)=\ln(x)(\ln(x)+2)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \ln(x)(\ln(x)+2)=0\Rightarrow\begin{cases}\ln(x)=0\to\boxed{x=1}\\ \ln(x)+2=0\to\ln(x)=-2\to\boxed{x=e^{-2}}\end{cases}$$

Sustituimos estos valores en la segunda derivada.

$$f'(x)=(\ln(x))^2+2\ln(x)\Rightarrow f''(x)=2\ln(x)\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f''(1)=2\ln(1)\frac{1}{1}+2\frac{1}{1}=2>0\to x=1 \text{ es mínimo}\\ f''(e^{-2})=2\ln(e^{-2})\frac{1}{e^{-2}}+2\frac{1}{e^{-2}}=2(-2)e^2+2e^2=-2e^2<0\to x=e^{-2} \text{ es máximo}\end{cases}$$

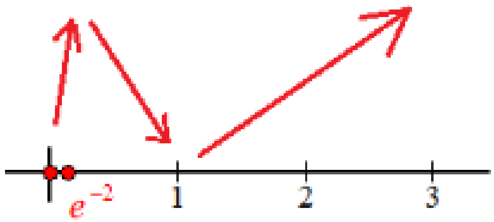
Obtenemos el valor de la función en estos dos puntos críticos.

$$f(1)=1\cdot(\ln(1))^2=0$$

$$f(e^{-2})=e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2=4e^{-2}$$

El mínimo relativo tiene coordenadas $(1,0)$ y el máximo relativo tiene coordenadas $(e^{-2},4e^{-2})$

b) A partir de la información de los extremos relativos la función sigue el esquema siguiente:



Como la función $f(x)=x(\ln(x))^2$ en su dominio $(0,+\infty)$ siempre es mayor o igual que cero el mínimo absoluto de la función es el mínimo relativo $(1,0)$.

Para decidir el máximo absoluto necesitamos conocer la evolución de la función cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x(\ln(x))^2=+\infty(+\infty)^2=+\infty$$

Por lo que la función no tiene máximo absoluto.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Calcula a con $0<a<1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx+2=0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

Hay que determinar cuando $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx+2=0 \Rightarrow \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx=-2$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\int \ln(x)\frac{1}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln(x)\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=\frac{1}{x}dx\to v=\int\frac{1}{x}dx=\ln(x)\end{array}\right\}=\ln(x)\ln(x)-\int \ln(x)\frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x)\frac{1}{x}dx=(\ln(x))^2-\int \ln(x)\frac{1}{x}dx \Rightarrow 2\int \ln(x)\frac{1}{x}dx=(\ln(x))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln(x)\frac{1}{x}dx=\frac{(\ln(x))^2}{2}+K$$

Aplicamos este resultado a la integral definida.

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx=\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_a^1=\left[\frac{(\ln(1))^2}{2}\right]-\left[\frac{(\ln(a))^2}{2}\right]=-\frac{(\ln(a))^2}{2}$$

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx=-2 \Rightarrow -\frac{(\ln(a))^2}{2}=-2 \Rightarrow \frac{(\ln(a))^2}{2}=2 \Rightarrow (\ln(a))^2=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(a)=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases}\ln(a)=2\to a=e^2>1\\ \ln(a)=-2\to \boxed{a=e^{-2}<1}\end{cases}$$

El valor buscado es $a=e^{-2}$.

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$.

a) **[1,25 puntos]** Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
b) **[1,25 puntos]** Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 5-x^2=\frac{4}{x^2}\Rightarrow 5x^2-x^4=4\Rightarrow -x^4+5x^2-4=0\Rightarrow$$

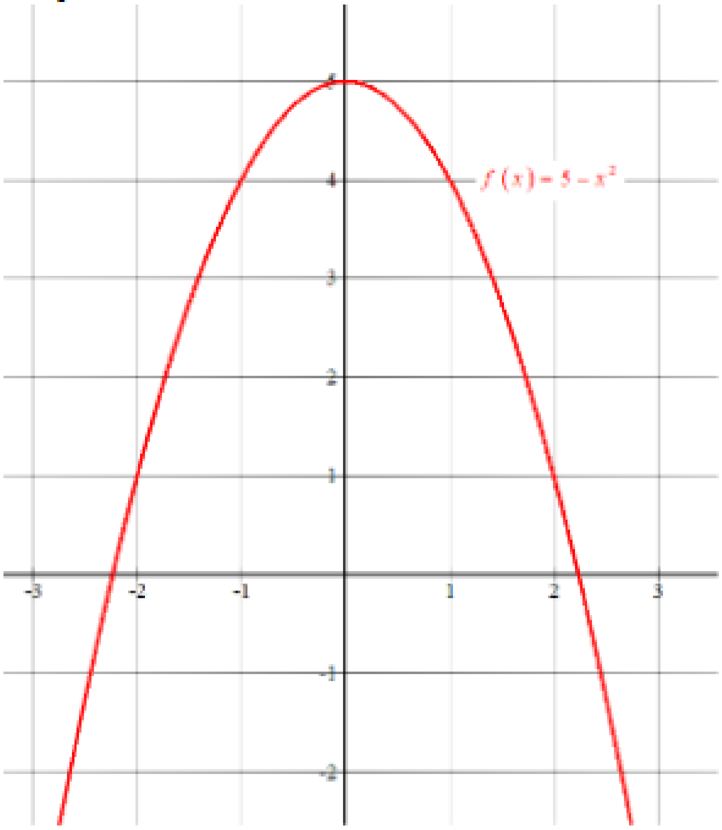
$$\Rightarrow x^2=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-1)(-4)}}{2(-1)}=\frac{-5\pm3}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-5+3}{-2}=1=x^2\to x=\sqrt{1}=\pm1\\[2mm]\dfrac{-5-3}{-2}=4=x^2\to x=\sqrt{4}=\pm2\end{cases}$$

Las gráficas tienen 4 puntos de corte: $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$.

La función $f(x)=5-x^2$ es una parábola con vértice en $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{-2}=0$.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

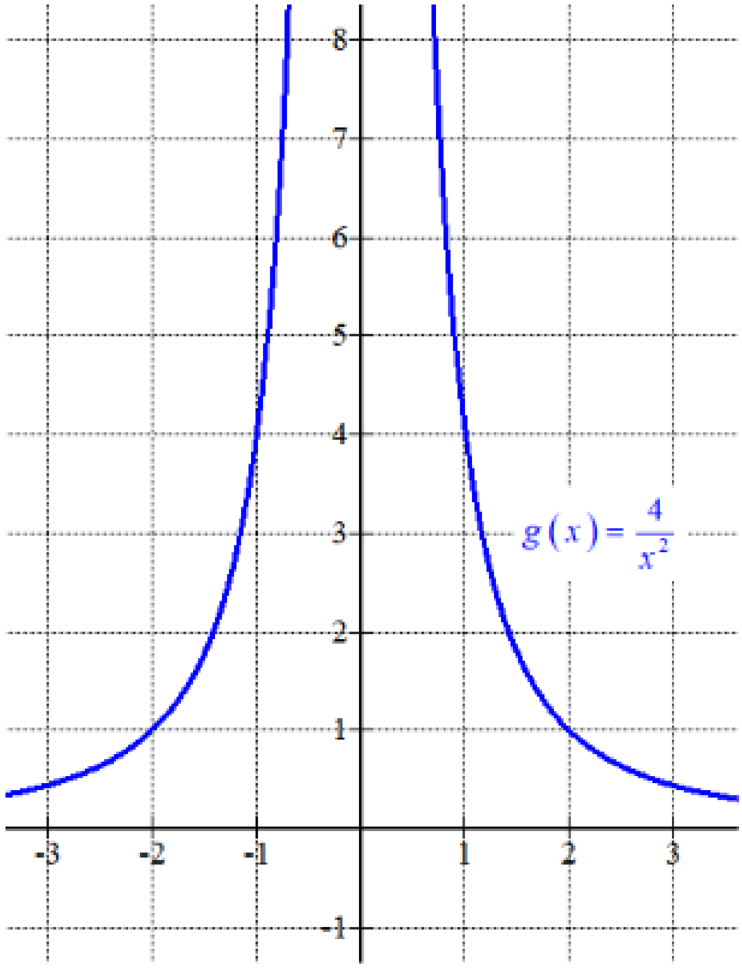
x	$y=5-x^2$
–2	1
–1	4
0	5
1	4
2	1



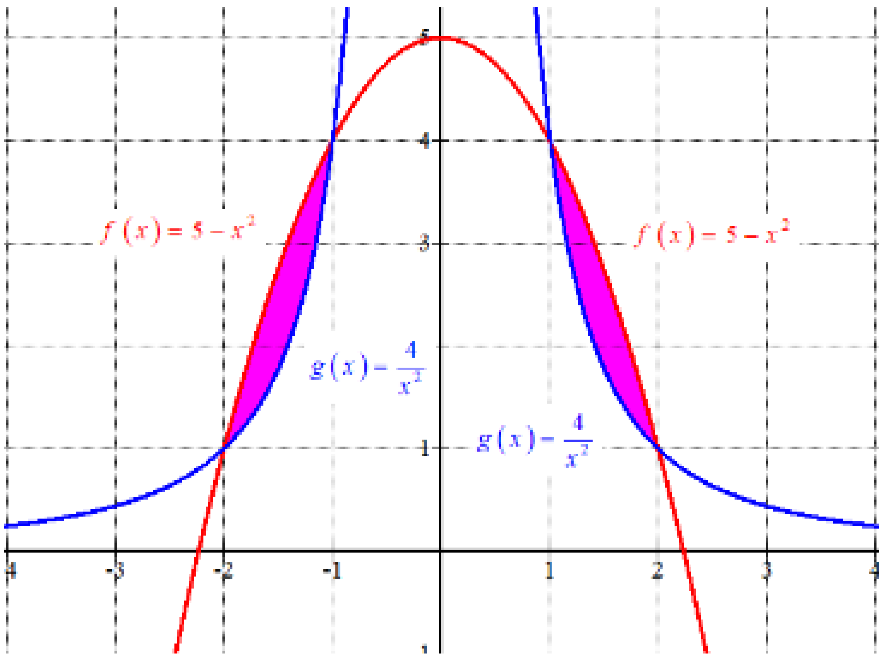
La función $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$ tiene una asíntota vertical en $x=0$.

Hacemos una tabla de valores de la función $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$ y la representamos.

x	$y=\frac{4}{x^2}$
-2	1
-1	4
-0.5	16
0.5	16
1	4
2	1



b) Hay dos recintos limitados por las gráficas. Dibujamos los recintos y vemos que tienen el mismo valor de área, dada la simetría de las funciones.



Calculamos una de las áreas.

$$\acute{A}rea1 = \int_{-2}^{-1} 5 - x^2 - \frac{4}{x^2} dx = \int_{-2}^{-1} 5 - x^2 - 4x^{-2} dx = \left[5x - \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_{-2}^{-1} = \left[5(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{4}{-1} \right] - \left[5(-2) - \frac{(-2)^3}{3} + \frac{4}{-2} \right] =$$

$$= -5 + \frac{1}{3} - 4 - \left(-10 + \frac{8}{3} - 2 \right) = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}\ u^2$$

El área total es $2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1.33\ u^2$

BLOQUE B

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2.5 puntos)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) **[1 punto]** Halla los valores de m para que la matriz $A-mI$ no tenga inversa.

b) **[1,5 puntos]** Halla x, distinto de cero, para que $A-xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A-I)$.

a) Para que no tenga inversa el determinante debe ser nulo.

$$A-mI=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\1&1&1-m\end{pmatrix}$$

$$|A-mI|=\begin{vmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\1&1&1-m\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{ccc}\text{Fila 3ª} - \text{Fila 2ª}\\1&1&1-m\\-1&-1+m&-1\\\hline 0&m&-m\end{array}\right\}=\begin{vmatrix}1-m&1&1\\1&1-m&1\\0&m&-m\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{ccc}\text{Fila 2ª} - \text{Fila 1ª}\\1&1-m&1\\-1+m&-1&-1\\\hline m&-m&0\end{array}\right\}=\begin{vmatrix}1-m&1&1\\m&-m&0\\0&m&-m\end{vmatrix}=m^2(1-m)+0+m^2-0+m^2-0=$$

$$=m^2(1-m)+2m^2=m^2(1-m+2)=m^2(3-m)$$

$$|A-mI|=0\Rightarrow m^2(3-m)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\3-m=0\to m=3\end{cases}$$

La matriz $A-mI$ no tiene inversa cuando m = *0* o m = *3*.

b) Para que $A-xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A-I)$ debe cumplirse que su producto es la matriz identidad.

$$\frac{1}{x}(A-I)=\frac{1}{x}\left(\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$A-xI=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{x}(A-I)(A-xI)=I\Rightarrow\frac{1}{x}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-x&1&1\\1&1-x&1\\1&1&1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}\begin{pmatrix}1+1&1-x+1&1+1-x\\1-x+1&1+1&1+1-x\\1-x+1&1+1-x&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}\begin{pmatrix}2&2-x&2-x\\2-x&2&2-x\\2-x&2-x&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2-x&2-x\\2-x&2&2-x\\2-x&2-x&2\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2&2-x&2-x\\2-x&2&2-x\\2-x&2-x&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}\Rightarrow\left|\begin{matrix}2=x\\2-x=0\end{matrix}\right.\Rightarrow\boxed{x=2}$$

El valor buscado es $x = 2$.

EJERCICIO 6 (2.5 puntos)
El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Llamamos "x" el gasto en refrescos sin impuestos, "y" al gasto en cerveza sin impuestos y "z" al gasto en vino sin impuestos.

El gasto total es de un importe de 500 euros sin incluir impuestos → $x+y+z=500$.

El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos → $z=x+y-60$

Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros → Los impuestos son 592.4 – 500 = 92.4 € → $0.06\cdot x+0.12\cdot y+0.30\cdot z=92.4$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ z=x+y-60 \\ 0.06\cdot x+0.12\cdot y+0.30\cdot z=92.4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ z=x+y-60 \\ 6\cdot x+12\cdot y+30\cdot z=9240 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=500 \\ z-y+60=x \\ x+2y+5z=1540 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z-y+60+y+z=500 \\ z-y+60+2y+5z=1540 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z=440 \rightarrow \boxed{z=220} \\ y+6z=1480 \end{array}\right\} \Rightarrow y+6\cdot 220=1480 \Rightarrow$$

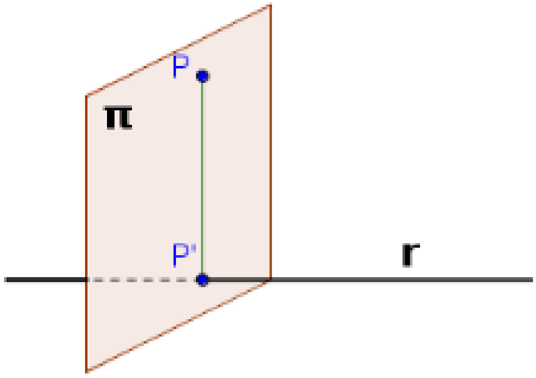
$$\Rightarrow \boxed{y=1480-1320=160} \Rightarrow \boxed{x=220-160+60=120}$$

Sin incluir impuestos se ha gastado 120 euros en refrescos, 160 en cerveza y 220 en vino. Incluyendo impuestos el gasto es de 120 · 1.06 = 127.2 € en refrescos, 160 · 1.12 = 179.2 € en cerveza y 220. 1.30 = 286 € en vino.

EJERCICIO 7 (2.5 puntos)
Considera los planos $\pi_1 \equiv x-y+z=0$ y $\pi_2 \equiv x+y=2$.
a) **[1,5 puntos]** Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto P(2, 6, –2).
b) **[1 punto]** Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

a) Obtenemos la ecuación de la recta

$$\left.\begin{matrix}\pi_1 \equiv x-y+z=0\\ \pi_2 \equiv x+y=2\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x-y+z=0\\ x=2-y\end{matrix}\right\} \Rightarrow 2-y-y+z=0 \Rightarrow z=-2-2y \Rightarrow r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases}$$



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P.
Dicho plano tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases} \Rightarrow \overline{v_r}=(-1,1,-2)$$

$$\left.\begin{matrix}\overline{n}=\overline{v_r}=(-1,1,-2)\\ P(2,6,-2)\in\pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}\pi:-x+y-2z+D=0\\ P(2,6,-2)\in\pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow -2+6-2(-2)+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-8 \Rightarrow \pi:-x+y-2z-8=0$$

Determinamos el punto P´ de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{matrix}\pi:-x+y-2z-8=0\\ r:\begin{cases}x=2-\lambda\\ y=\lambda\\ z=-2-2\lambda\end{cases}\end{matrix}\right\} \Rightarrow -(2-\lambda)+\lambda-2(-2-2\lambda)-8=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+\lambda+\lambda+4+4\lambda-8=0 \Rightarrow 6\lambda=6 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases}x=2-1=1\\ y=1\\ z=-2-2=-4\end{cases} \Rightarrow P'(1,1,-4)$$

La distancia de P a la recta r es la distancia de P a P´.

$$\overline{PP'} = (1,1,-4)-(2,6,-2) = (-1,-5,-2)$$

$$d(P,r) = d(P,P') = \left|\overline{PP'}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(-2)^2} = \boxed{\sqrt{30} \simeq 5.47\,u}$$

b) El ángulo que forman π_1 y π_2 es el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-y+z=0 \\ \pi_2 \equiv x+y=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{n_1} = (1,-1,1) \\ \overline{n_2} = (1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right) = \frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}$$

$$\cos\left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right) = \frac{(1,-1,1)(1,1,0)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1-1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\overline{n_1},\overline{n_2}\right) = \arccos(0) = 90^{\circ}$$

Los planos π_1 y π_2 son perpendiculares.

EJERCICIO 8 (2.5 puntos)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos A(0, 2, –2), $B(3,\ 2,\ 1)$ y C(2, 3, 2) con los planos cartesianos.

Hallamos la ecuación del plano determinado por los puntos A(0, 2, –2), $B(3,\ 2,\ 1)$ y C(2, 3, 2).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3,2,1)-(0,2,-2)=(3,0,3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(2,3,2)-(0,2,-2)=(2,1,4)\\ B(3,2,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-3 & y-2 & z-1\\ 3 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(y-2)+3(z-1)-12(y-2)-3(x-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y-12+3z-3-12y+24-3x+9=0\Rightarrow -3x-6y+3z+18=0\Rightarrow \boxed{\pi: x+2y-z-6=0}$$

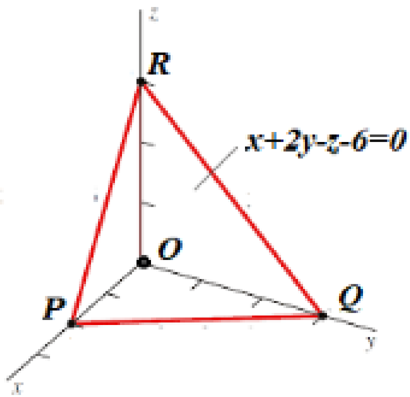
Hallamos los puntos de corte del plano con los planos coordenados.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+2y-z-6=0\\ OX\to\begin{cases}y=0\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow x-6=0\Rightarrow x=6\Rightarrow P(6,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+2y-z-6=0\\ OY\to\begin{cases}x=0\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2y-6=0\Rightarrow y=3\Rightarrow Q(0,3,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+2y-z-6=0\\ OZ\to\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow -z-6=0\Rightarrow z=-6\Rightarrow R(0,0,-6)$$

El volumen del tetraedro definido por el origen O(0, 0,0) y los puntos P, Q y R es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{OR}$.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OP}=(6,0,0)-(0,0,0)=(6,0,0)\\ \overrightarrow{OQ}=(0,3,0)-(0,0,0)=(0,3,0)\\ \overrightarrow{OR}=(0,0,-6)-(0,0,0)=(0,0,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}\right]=\begin{vmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&-6\end{vmatrix}=-108$$

$$Volumen\ OPQR=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OR}\right]\right|}{6}=\frac{108}{6}=\boxed{18\ u^3}$$

El volumen del tetraedro es de $18\ u^3$.