

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

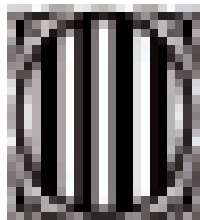
CATALUÑA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Generalitat de Catalunya





EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE
GENERAL
CURSO: 2022–2023
MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Respondeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1. Calculeu els coeficients a , b , c i d de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió $(1, 0)$ és $y = -3x + 3$ i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.

[2,5 punts]

2. Considereu les dues matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Calculeu les matrius $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

[1,5 punts]

- b) Siguin C i D dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan $C \cdot D = C$ i $D \cdot C = D$. Comproveu que les dues matrius, C i D , són idempotents.

[1 punt]

NOTA: Una matriu quadrada s'anomena *idempotent* si coincideix amb el seu quadrat.

3. Sigui $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa

pel punt $A = (0, 3)$.

- a) Calculeu la funció $f(x)$.

[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.
[1 punt]

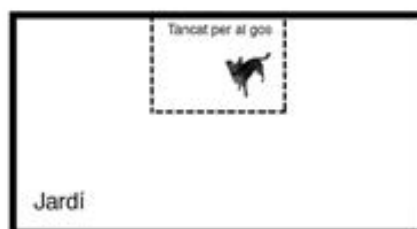
4. Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ :

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ .
[1,25 punts]

b) Per al cas $\lambda = -1$, resoleu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.
[1,25 punts]

5. La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m^2 per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats.



El preu de la tanca que vol fer servir és de $2,5 \text{ €/m}$.

a) Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?
[1,75 punts]

b) Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.
[0,75 punts]

6. Siguin els plans π_1 i π_2 , determinats respectivament per les equacions $\pi_1: x + y = 3$ i $\pi_2: x - z = -2$.

a) Trobeu l'equació general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_3 , que és perpendicular a π_1 i π_2 , i que passa pel punt $P = (4, 1, 2)$.
[0,75 punts]

b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2 . Calculeu l'equació vectorial de la recta r .
[0,75 punts]

c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P .
[1 punt]

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

1. Calculeu els coeficients a , b , c i d de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si sabem que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'inflexió $(1, 0)$ és $y = -3x + 3$ i que la funció té un extrem relatiu en el punt de la gràfica d'abscissa $x = 0$.
[2,5 punts]

Resolució:

Si calculem les funcions derivades successives tenim:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c; \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Si anem traduint en termes de f i f' les condicions de l'enunciat obtenim:

* f passa per $(1,0) \rightarrow f(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$ (equació 1)

* $(1,0)$ és un punt d'inflexió $\rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0$ (equació 2)

* El pendent de la tangent en $x = 1$ és igual a $-3 \rightarrow f'(1) = -3 \rightarrow 3a + 2b + c = -3$ (equació 3)

* f té un extrem en $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$ (equació 4)

Resolent el sistema format per les equacions (1), (2), (3) i (4), obtenim la solució al problema $a = 1, b = -3, c = 0, d = 2$.

Pautes de correcció:

0,5 punts per la traducció de cadascuna de les quatre condicions.

0,5 punts per la resolució final del sistema.

2. Considereu les dues matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculeu les matrius $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

[1,5 punts]

b) Siguin C i D dues matrius quadrades del mateix ordre que satisfan $C \cdot D = C$ i $D \cdot C = D$.
Comproveu que les dues matrius, C i D , són idempotents.

[1 punt]

NOTA: Una matriu quadrada s'anomena *idempotent* si coincideix amb el seu quadrat.

Resolució:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Observació: la resolució es donarà per bona encara que no apareguin els càlculs intermedis.

b) Sabem que (*) $C \cdot D = C$ i (**) $D \cdot C = D$

$$C^2 = C \cdot C \stackrel{(*)}{=} (C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C) \stackrel{(**)}{=} C \cdot D \stackrel{(*)}{=} C$$

$$D^2 = D \cdot D \stackrel{(**)}{=} (D \cdot C) \cdot D = D \cdot (C \cdot D) \stackrel{(*)}{=} D \cdot C \stackrel{(**)}{=} D$$

I, per tant, efectivament les dues matrius C i D són idempotents.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts pel càlcul del producte $A \cdot B$.

0,75 punts pel càlcul del producte $B \cdot A$.

b) 0,5 punts per la comprovació que la matriu C és idempotent.

0,5 punts per la comprovació que la matriu D és idempotent.

3. Sigui $f'(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$ la funció derivada d'una funció derivable $f(x)$ que passa

pel punt $A = (0, 3)$.

a) Calculeu la funció $f(x)$.

[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $f'(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

[1 punt]

Resolució:

$$\text{a) Integrant } f'(x) = \begin{cases} \int (x-1)dx & \text{si } x < 2 \\ \int \frac{1}{x-1}dx & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + k & \text{si } x < 2 \\ \ln|x-1| + k' & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Troblem els valors de les constants k i k' :

- $f(x)$ passa pel punt $A = (0, 3)$, per tant, $\frac{1}{2}0^2 - 0 + k = 3 \rightarrow k = 3$.
- Com que $f(x)$ és derivable, llavors és contínua, així que ho és en el punt d'abscissa 2 i, per tant, els límits laterals de la funció $f(x)$ en 2 han de coincidir:

$$\frac{1}{2}2^2 - 2 + 3 = \ln|2-1| + k'$$

$$k' = 3.$$

Per tant, la funció $f(x)$ serà $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln|x-1| + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Observació: es puntuarà per igual l'expressió $\ln|x-1|$ que l'expressió $\ln(x-1)$.

Apliquem l'equació de la recta tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa a :

$$y - g(a) = g'(a) \cdot (x - a)$$

Ara la funció és f' és $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ i $a = 3$.

Cal trobar $g'(x)$, $g'(3)$ i $g(3)$:

$$g'(x) = f''(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 2 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}, \quad g'(3) = -\frac{1}{4}, \quad g(3) = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$$

4. Sigui el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real λ :

$$\begin{cases} x + 2\lambda y + (2 + \lambda)z = 0 \\ (2 + \lambda)x + y + 2\lambda z = 3 \\ 2\lambda x + (2 + \lambda)y + z = -3 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre λ .

[1,25 punts]

b) Per al cas $\lambda = -1$, resolcu el sistema, interpreteu-lo geomètricament i identifiqueu-ne la solució.

[1,25 punts]

Resolució:

a) Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre λ .

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Calculem el determinant de la matriu del sistema i estudiem per a quins valors el determinant s'anul·la.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} = 9\lambda^3 + 9 = 9(\lambda^3 + 1)$$

Quan resollem l'equació $9(\lambda^3 + 1) = 0$, obtenim $\lambda^3 = -1$ i d'aquí $\lambda = -1$.

Per tant, tenim dos casos a discutir.

CAS I: $\lambda \neq -1$

Com que $|M| \neq 0$, aleshores $\text{Rang } M = 3 = \text{Rang } \overline{M} = \text{Nombre d'incògnites}$.

En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible determinat (SCD) i, per tant, el sistema té una única solució.

CAS II: $\lambda = -1$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

Com que $|M| = 0$, aleshores $\text{Rang } M < 3$, però en tenir $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$, aleshores $\text{Rang } M = 2$.

D'altra banda, si orem l'anterior menor, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 3 - 6 = 0$, per

tant, $\text{Rang } \overline{M} = 2$.

Aleshores, com que $\text{Rang } M = 2 = \text{Rang } \overline{M} < \text{Nombre d'incògnites} = 3$, es tracta d'un sistema compatible indeterminat (SCI) amb 1 (3-2) grau de llibertat.

Observació: de forma alternativa, el primer determinant es podria haver calculat utilitzant les propietats dels determinants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 3+3\lambda & 3+3\lambda & 3+3\lambda \end{vmatrix} = (3+3\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+\lambda)(3\lambda^2 - 3\lambda + 3) = 9(1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$$

(*) Sumant a la tercera fila les dues primeres files.

b)

Estudiem el cas $\lambda = -1$.

Sabem que es tracta d'un SCI amb un grau de llibertat i el menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar:

$$\begin{cases} x - 2y = -z \\ x + y = 3 + 2z \end{cases}$$

Ara podem resoldre aplicant el mètode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 3+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z+6}{3} = z+2$$

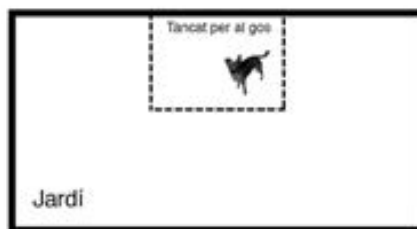
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 3+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+3z}{3} = z+1$$

Solució: $(x = z + 2, y = z + 1, z \text{ paràmetre})$

Interpretació geomètrica: cadascuna de les equacions és un pla a $\mathbb{R}^3$. El fet que la solució tingui un grau de llibertat ens indica que aquests tres plans es tallen en una recta, que és la formada per punts de la forma $(z+2, z+1, z)$.

Com que $(z+2, z+1, z) = (2,1,0) + z(1,1,1)$, la recta intersecció és la que passa pel punt $(2,1,0)$ i té vector director $(1,1,1)$.

5. La Núria té un jardí rectangular i vol fer-hi un tancat (rectangular o quadrat) de 8 m^2 per al seu gos. Ha pensat de posar el tancat tocant al mur del jardí, tal com es mostra a la figura de la dreta, per estalviar-se així un dels quatre costats.



El preu de la tanca que vol fer servir és de $2,5 \text{ €/m}$.

- a) Quines dimensions ha de tenir el tancat perquè el cost sigui mínim? Quin és aquest cost mínim?

[1,75 punts]

- b) Si manteniu la forma rectangular o quadrada del tancat i feu que un dels vèrtexs del jardí coincideixi amb un vèrtex del tancat, quants euros us podeu estalviar? Raoneu com posaríeu el tancat i justifiqueu amb càlculs matemàtics les dimensions de la vostra proposta.

[0,75 punts]

Resolució:

- a) El tancat té forma de rectangle. Anomenem x a la base del rectangle i y a l'altura. Sabem que l'àrea del tancat és 8 m^2 , per tant, podem escriure:

$$x \cdot y = 8$$

Aïllant tenim que $y = \frac{8}{x}$.

El cost del tancat és $C(x, y) = 2,5 \cdot (2y + x)$. Substituint obtenim:

$$C(x) = 2,5 \cdot \left(2 \cdot \frac{8}{x} + x \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{16 + x^2}{x} \right)$$

Per calcular el cost mínim, calcularem els extrems relatius de la funció $C(x)$, a partir de la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (16 + x^2) \cdot 1}{x^2} \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2} \right)$$

$$2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2} \right) = 0$$

$$x = \pm 4$$

Pel context del problema, només té sentit la solució positiva. Per comprovar si en $x = 4$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem el signe:

$$C''(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 16) \cdot 2x}{x^4} \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 32x)}{x^4} \right) = 2,5 \cdot \frac{32}{x^3}$$

Com que $C''(4) > 0$, en $x = 4$ hi ha un mínim.

Per tant, les dimensions del tancat seran de 4 m de base i 2 m d'altura.

El cost serà: $C(4) = 2,5 \cdot \left(\frac{16 + 4^2}{4} \right) = \boxed{20\text{€}}$

b) Per estalviar amb la tanca, podem posar el tancat a una cantonada del jardí:



Ara podem reproduir els càlculs fets a l'apartat a, amb la nova situació.

En aquest cas, el cost del tancat és $C(x, y) = 2,5 \cdot (y + x)$. Com que $y = \frac{8}{x}$:

$$C(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{8}{x} + x \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{8 + x^2}{x} \right)$$

Calculant la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (8 + x^2) \cdot 1}{x^2} \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2} \right)$$

$$2,5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2} \right) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx 2,83$$

Anàlogament, l'única solució que té sentit és la positiva. Per comprovar si en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem que el seu signe és positiu:

$$C''(x) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 8) \cdot 2x}{x^4} \right) = 2,5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 16x)}{x^4} \right) = 2,5 \cdot \frac{16}{x^3}$$

Com que $C''(2\sqrt{2}) > 0$, en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim.

L'altura del tancat serà $y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Per tant, el tancat tindrà forma quadrada de costat $2\sqrt{2} \approx 2,83$ m.

En aquest cas el preu mínim serà

$$C(2\sqrt{2}) = 2,5 \cdot \left(\frac{8 + (2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} \right) = 2,5 \cdot \frac{16}{\sqrt{8}} = 2,5 \cdot 2\sqrt{8} = 14,14\text{€}$$

Per tant, tindriem un estalvi de $20 - 14,14 = 5,86\text{€}$

6. Siguin els plans π_1 i π_2 , determinats respectivament per les equacions $\pi_1: x+y=3$ i $\pi_2: x-z=-2$.
- a) Trobeu l'equació general ($Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π_3 , que és perpendicular a π_1 i π_2 , i que passa pel punt $P = (4, 1, 2)$.
[0,75 punts]
- b) Sigui r la recta d'intersecció de π_1 i π_2 . Calculeu l'equació vectorial de la recta r .
[0,75 punts]
- c) Calculeu el punt Q de la recta r que és més a prop del punt P .
[1 punt]

Resolució:

a) Com que el pla buscat és perpendicular a π_1 i π_2 , els seus vectors directores seran els vectors normals de π_1 i π_2 : $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ i $\vec{v}_2 = (1, 0, -1)$.

Troblem l'equació general del pla amb vectors directores $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ i que passa pel punt $P = (4, 1, 2)$, en què $X(x, y, z)$ és un punt genèric del pla:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{x - y + z - 5 = 0}$$

b) Busquem la solució del sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ x-z=-2 \end{cases}$. Aïllant obtenim:

$$\begin{aligned} y &= 3 - x \\ z &= 2 + x \end{aligned} \rightarrow \text{Si } x = \lambda, \text{ tenim: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

La recta buscada en forma vectorial és:

$$\boxed{r: (x, y, z) = (0, 3, 2) + \lambda \cdot (1, -1, 1), \lambda \in \mathbb{R}}$$

c)

Troblem l'equació del pla perpendicular a la recta r i que passa pel punt P . Aquest és el pla que ens han demanat en l'apartat a: $x - y + z - 5 = 0$.

En cas que no ens adonem que ja tenim el pla d'un apartat anterior, aquest pla tindrà com a vector normal el vector director de la recta. Per tant, serà de la forma:

$$x - y + z + D = 0.$$

Imposem que P estigui contingut en el pla: $4 - 1 + 2 + D = 0 \rightarrow D = -5$.

Ara hem de calcular el punt de tall de la recta L i el pla:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \text{ i } x - y + z = 5 \rightarrow \lambda - (3 - \lambda) + (2 + \lambda) = 5 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ en les equacions paramètriques de la recta obtenim el punt :

$$\boxed{Q = (2, 1, 4)}.$$

De forma alternativa:

El punt Q és la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r , ja que és el punt que està a menor distància de P .

Sigui Q un punt genèric de la recta r : $Q = (\lambda, 3 - \lambda, 2 + \lambda)$ i $\vec{v} = (1, -1, 1)$ el vector director de L .

Per la condició d'ortogonalitat tenim que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$:

$$(-4 + \lambda, 2 - \lambda, \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0 \rightarrow -4 + \lambda - 2 + \lambda + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ al punt genèric Q obtenim les coordenades del punt: $Q = (2, 1, 4)$.

Pautes de correcció:

- a) 0,25 punts pels vectors directores.
 0,25 punts per indicar com trobar el pla.
 0,25 punts pel càlcul de l'equació.
- b) 0,25 punts per formular la resolució del sistema.
 0,5 punts per trobar l'equació.
- c) 0,25 punts per indicar que el punt buscat és la projecció ortogonal.
 0,25 punts pel punt genèric / per plantejar el sistema entre el pla i la recta.
 0,25 punts pel producte escalar / per resoldre el sistema.
 0,25 punts per trobar el punt.



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A
LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2022-2023**
MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Siguen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ i la matriu identitat d'ordre dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $(A - 2I)^2 = 3I$.

[0,5 punts]

b) Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu A en funció de les matrius A i I , i comproveu que coincideix amb la matriu B .

[1,25 punts]

c) Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat $A \cdot X = B$.

[0,75 punts]

Problema 2:

2. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 2$.

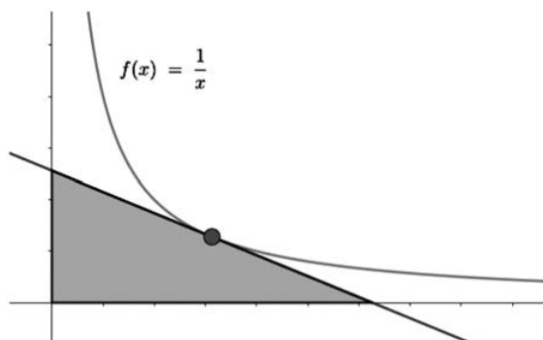
[0,75 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = k$, en què k és un nombre real positiu.

[0,75 punts]

c) Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.

[1 punt]



Problema 3:

3. Sigui el sistema d'equacions lineals
$$\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{cases}$$
, en què m és un nombre real.

- a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m .
[1,25 punts]
- b) Resoleu el sistema, si té solució, per al cas $m = 1$.
[1,25 punts]

Problema 4:

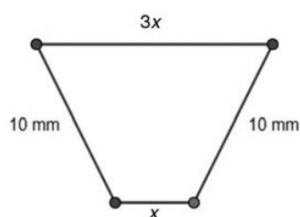
4. Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.
- a) Justifiqueu que $f(x) = 2$ té una solució en l'interval $(-1, 0)$.
[1,25 punts]
- b) Sigui la funció $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $h(x)$.
[1,25 punts]

Problema 5:

5. Siguin r_1 i r_2 les rectes definides per $r_1: x - 1 = y = -z$ i per $r_2: x = y = z$, respectivament.
- a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment les rectes r_1 i r_2 .
[1,75 punts]
- b) Calculeu la distància entre r_1 i r_2 .
[0,75 punts]

Problema 6:

6. Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:



- a) Expressau l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.
[0,5 punts]
- b) Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea màxima.
[2 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Siguen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ i la matriu identitat d'ordre dos $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Comproveu que $(A - 2I)^2 = 3I$.

[0,5 punts]

b) Utilitzant la igualtat de l'apartat anterior, trobeu la matriu inversa de la matriu A en funció de les matrius A i I , i comproveu que coincideix amb la matriu B .

[1,25 punts]

c) Calculeu la matriu X que satisfà la igualtat $A \cdot X = B$.

[0,75 punts]

1. Resolució:

$$a) (A - 2I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I$$

$$b) (A - 2I)^2 = 3I \Leftrightarrow A^2 - 4A + 4I = 3I \Leftrightarrow A^2 - 4A = -I \Leftrightarrow 4A - A^2 = I \text{ i traient}$$

$$\text{factor comú d'A: } (4I - A) \cdot A = I \Leftrightarrow \boxed{A^{-1} = 4I - A}$$

$$A^{-1} = 4I - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = B$$

c) De $A \cdot X = B$, aïllant la matriu, multiplicant per la inversa d' A per l'esquerra:

$$A^{-1} \cdot (AX) = A^{-1} \cdot B, \text{ com } A^{-1} \cdot A = I, (A^{-1} \cdot A)X = B \cdot I \Leftrightarrow \boxed{X = B}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$$

Problema 2:

2. Sigui la funció $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = 2$.

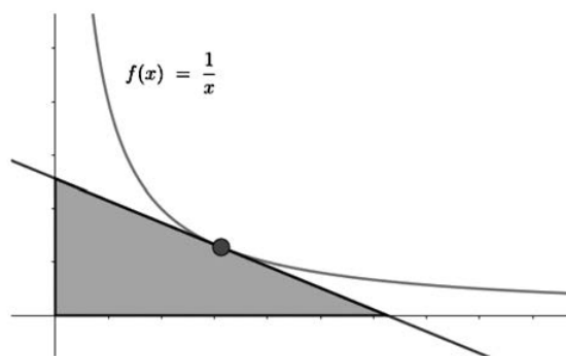
[0,75 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = k$, en què k és un nombre real positiu.

[0,75 punts]

c) Comproveu que, tal com es pot veure en la figura de sota, la recta de l'apartat b determina un triangle d'àrea constant amb els semieixos positius de coordenades. Calculeu aquesta àrea.

[1 punt]

**2. Resolució:**

a) $f(x) = 1/x$ $f'(x) = -1/x^2$,

Punt per on passa la recta, $(2, f(2)) = (2, 1/2)$

Pendent de la recta $= f'(2) = -1/4$

$$y - \frac{1}{2} = \left(\frac{-1}{4}\right) \cdot (x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Per tant, la recta tangent és $y = \frac{-1}{4}x + 1$

b) $f(x) = 1/x$ $f'(x) = -1/x^2$

Punt per on passa la recta, $(k, f(k)) = (k, 1/k)$

Pendent de la recta $= f'(k) = -1/k^2$

$$y - \frac{1}{k} = \left(\frac{-1}{k^2}\right) \cdot (x - k) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$$

Per tant, la recta tangent és $y = \frac{-1}{k^2}x + \frac{2}{k}$.

c) Calculem el punt de tall de la recta tangent $y = \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2}$ amb l'eix d'abscisses:

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{Tall amb l'eix d'abscisses} = (2k, 0)$$

Punt de tall de la recta tangent $y = \frac{-x}{k^2} + \frac{2}{k}$ amb l'eix d'ordenades:

$$\begin{cases} y &= \frac{2}{k} - \frac{x}{k^2} \\ x &= 0 \end{cases} \quad \text{Tall amb l'eix d'ordenades} = \left(0, \frac{2}{k}\right)$$

$$\text{Àrea del triangle} = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot \frac{2}{k} = 2 \text{ u}^2$$

El triangle té àrea constant igual a 2 unitats de superfície, per a qualsevol valor del paràmetre k .

Problema 3:

3. Sigui el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ my + z = 2 - x \\ mz + 3 = 3x + y \end{cases}$, en què m és un nombre real.

a) Discutiu el sistema segons els valors del paràmetre m .

[1,25 punts]

b) Resoleu el sistema, si té solució, per al cas $m = 1$.

[1,25 punts]

3. Resolució:

- a) El sistema en la forma normal és $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + my + z = 2 \\ 3x + y - mz = 3 \end{cases}$. Calculem el determinant de la matriu dels coeficients:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 3 & 1 & -m \end{vmatrix} = (-2m^2 - 1 + 3) - (-3m - m + 2) = -2m^2 + 4m = 2m(2 - m)$$

$|A| = 0 \rightarrow m = 0$ i $m = 2$, són els valors a tenir en compte en la discussió.

Tenim tres casos a discutir:

- Si $m \neq 0$ i $m \neq 2$, com el $\text{rang}(A) = 3$ [$|A| \neq 0$] = $\text{rang}(A^*)$ = nombre d'incògnites, tenim un **SCD** (Sistema Compatible Determinat).
Solució única.

- Si $m = 0$, per Gauss obtenim:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) < 3$ = nombre d'incògnites.

Per tant, es tracta d'un SCI (Sistema Compatible Indeterminat) amb $(3 - 2 = 1)$ un grau de llibertat. Infinites solucions que depenen d'un paràmetre.

- Si $m = 2$, per Gauss obtenim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \leftrightarrow f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2f_1 - f_2 \\ 3f_1 - f_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A^*) = 3 \Rightarrow$ **SI** (Sistema Incompatible). No hi ha solució.

b) Si $m = 1$, quan substituïm en el sistema obtenim:

A^*

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & : & 1 \\ 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 3 & 1 & -1 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 2 & 1 & -1 & : & 1 \\ 3 & 1 & -1 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 3 & : & 3 \\ 0 & 2 & 4 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 3 & : & 3 \\ 0 & 0 & -2 & : & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 3 \\ 2z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 2 \\ y + 3 \cdot \frac{3}{2} = 3 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = -3/2 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}}$$

Problema 4:

4. Sigui la funció $f(x)$ definida per $f(x) = -3x + e^{2x^3-1}$.
- a) Justifiqueu que $f(x) = 2$ té una solució en l'interval $(-1, 0)$.
[1,25 punts]
- b) Sigui la funció $h(x) = -3x^2 + e^{2x^3-1}$. Calculeu l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $h(x)$.
[1,25 punts]

4. Resolució:

a) Que l'equació $f(x) = 2$ tingui alguna solució és equivalent que la funció $g(x) = f(x) - 2$ tingui algun zero.

La funció $g(x)$ és una funció contínua a l'interval $[-1, 0]$, ja que és suma de dues funcions contínues (una funció polinòmica -exactament una funció lineal- i una funció exponencial).

D'altra banda podem comprovar que

$$g(-1) \cdot g(0) = (3 + e^{-3} - 2)(0 + e^{-1} - 2) = (1 + e^{-3})(e^{-1} - 2) < 0,$$

per tant podem aplicar el teorema de Bolzano i afirmar que la funció té un zero a l'interval $(-1, 0)$.

b) Calculem els punts de tall entre les dues funcions:

$$f(x) = h(x)$$

$$-3x + e^{2x^3-1} = -3x^2 + e^{2x^3-1}$$

$$-3x = -3x^2$$

$$-3x + 3x^2 = 3x(x - 1) = 0$$

Hi ha, per tant, dues solucions: $x = 0$ i $x = 1$.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 (h(x) - f(x)) \, dx \right| = \left| \int_0^1 ((-3x^2 + e^{2x^3-1}) - (-3x + e^{2x^3-1})) \, dx \right| = \\ &= \left| \int_0^1 (-3x^2 + 3x) \, dx \right| = \left| \left[-x^3 + \frac{3x^2}{2} \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{2} \right|. \end{aligned}$$

Observació: També es pot comprovar que la funció $h(x)$ està per sobre de la funció $f(x)$ a l'interval $(0, 1)$ i calcular directament l'àrea amb $A = \int_0^1 (h(x) - f(x)) \, dx$.

Problema 5:

5. Siguin r_1 i r_2 les rectes definides per $r_1: x-1=y=-z$ i per $r_2: x=y=z$, respectivament.
- a) Calculeu l'equació paramètrica de la recta que talla perpendicularment les rectes r_1 i r_2 .
[1,75 punts]
- b) Calculeu la distància entre r_1 i r_2 .
[0,75 punts]

5. Resolució:

- a) A partir de les equacions contínues de l'enunciat podem escriure les rectes r_1 i r_2 en forma vectorial i paramètrica:

$$\begin{aligned} r_1: (x, y, z) &= (1, 0, 0) + \lambda (1, 1, -1) = (1 + \lambda, \lambda, -\lambda) \\ r_2: (x, y, z) &= (0, 0, 0) + \mu (1, 1, 1) = (\mu, \mu, \mu) \end{aligned}$$

Un vector qualsevol $\overrightarrow{A_1A_2}$ format en prendre $A_1 \in r_1$, $A_2 \in r_2$ vindrà expressat en termes de $\overrightarrow{A_1A_2} = (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda)$ amb $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

La recta que passi per A_1 i A_2 tallarà r_1 i r_2 perpendicularment si el vector $\overrightarrow{A_1A_2}$ és perpendicular als vectors directors de cada recta, és a dir si es compleixen les condicions següents:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1A_2} \perp (1, 1, -1) &\rightarrow (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda) \cdot (1, 1, -1) = 0 \\ \overrightarrow{A_1A_2} \perp (1, 1, 1) &\rightarrow (\mu - \lambda - 1, \mu - \lambda, \mu + \lambda) \cdot (1, 1, 1) = 0. \end{aligned}$$

Efectuant els dos productes escalars les condicions anteriors es converteixen en el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} \mu - 3\lambda - 1 &= 0 \\ 3\mu - \lambda - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Si a la segona equació li restem 3 vegades la primera obtenim $8\lambda = -2$ i per tant $\lambda = -\frac{1}{4}$, i quan substituïm en la primera obtenim $\mu = 1 + 3\lambda = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
Així els punts respectius de cada recta són: $A_1 = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ i $A_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

La recta que uneix aquests punts és la perpendicular que talla totes dues rectes i tindrà vector director $\overrightarrow{A_1A_2} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \approx (-1, 1, 0)$ i equació vectorial

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + \alpha (-1, 1, 0)$$

I, per tant, l'equació paramètrica serà

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{4} - \alpha, \frac{1}{4} + \alpha, \frac{1}{4}\right), \text{ amb } \alpha \in \mathbb{R}$$

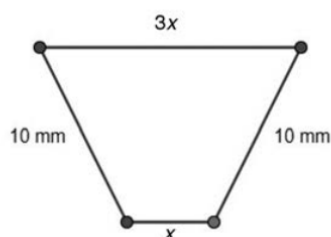
b) Aplicant l'apartat anterior tenim que

$$d(r_1, r_2) = d(A_1, A_2) = \|\overrightarrow{A_1 A_2}\| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} u}.$$

Observació: Amb independència de l'apartat a) aquest apartat b) es pot resoldre aplicant sigui la fórmula general per a la distància entre dues rectes o bé via la distància entre una recta i llur projecció perpendicular sobre l'altra.

Problema 6:

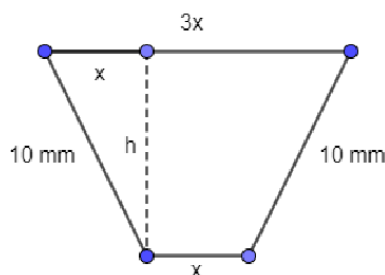
6. Volem construir una peça metàl·lica que tingui per secció un trapezi isòsceles amb la base superior tres vegades més llarga que la base inferior. Els altres costats del trapezi fan 10 mm, tal com podeu observar en la figura següent:



- a) Expresseu l'altura del trapezi en funció de la longitud x de la base inferior.
[0,5 punts]
- b) Calculeu la longitud de la base inferior del trapezi de manera que l'àrea de la peça sigui màxima i trobeu el valor d'aquesta àrea màxima.
[2 punts]

6. Resolució:

- a) A partir de la situació exposada tenim el gràfic següent:



Pel teorema de Pitàgores s'obté que $x^2 + h^2 = 10^2$, i per tant $\boxed{h = \sqrt{100 - x^2}}$

- b) L'àrea del trapezi és $A(x) = (x + 3x)/2 \cdot h = 2x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

Per a trobar els candidats a valors que fan màxima aquesta àrea calcularem la funció derivada $A'(x)$ i obtindrem les solucions de l'equació $A'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 A'(x) &= 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{100 - x^2}} (-2x) \\
 &= 2 \cdot \sqrt{100 - x^2} + \frac{-2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{2(100 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}} \\
 &= \frac{4(50 - x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}
 \end{aligned}$$

Per tant tindrem $A'(x) = 0$ quan $50 - x^2 = 0$, és a dir $x^2 = 50$ i $x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2} \approx \pm 7'07$

A partir del context de l'enunciat, l'únic candidat és el valor positiu $x = \sqrt{50} = 7'07$ mm. Ara cal comprovar que amb aquest valor l'àrea sigui màxima. Això es comprova veient que per valors propers l'àrea és més petita:

$$A(7) = 99'980$$

$$A(\sqrt{50}) = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{100 - 50} = 2 \cdot \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} = 100$$

$$A(7'1) = 99.9966$$

Per tant, el valor de la base petita que fa l'àrea màxima és de $5\sqrt{2} = 7'07$ mm i el valor de l'àrea és 100 mm^2

Observació: Per a la comprovació de la condició de màxim es podria també fer servir, alternativament, el comprovar que la derivada segona de la funció àrea és negativa per al valor $x = \sqrt{50}$.