Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2023
Comunidad autónoma de
ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez

ebaumatematicas.com

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.

c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.

b) **(1.5 puntos)** Para $a = 1$, halle una matriz X que satisfaga $A\cdot X\cdot B=C$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función f.

c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función $v(t)$ nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo t, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función $v(t)$ se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t)=t^2-5t+6,\ t\in[0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función v.

b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0)=10$, halle la función v.

c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante $t = 2$ y posteriormente las vendió en el instante $t = 4$, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.

b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.

c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.
c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

Solución:

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x-3y=1$

x	$y=\dfrac{1-2x}{-3}$
2	1
5	3

$4x+y=9$

x	$y=9-4x$
0	9
2	1

$x+y=5$

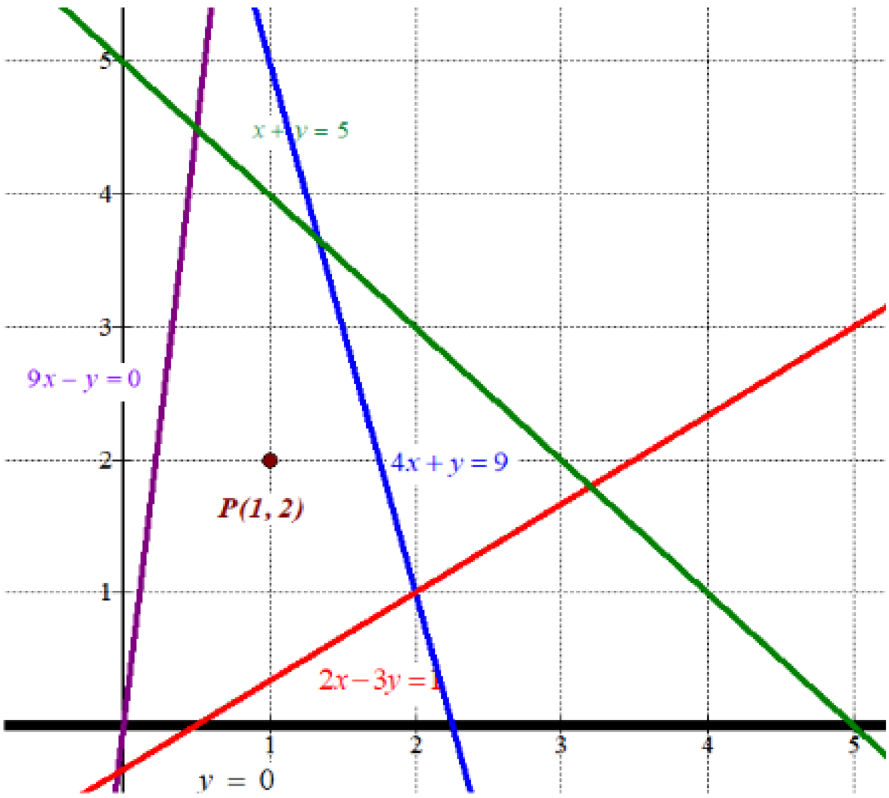
x	$y=5-x$
0	5
5	0

$9x-y=0$

x	$y=9x$
0	0
1	9

$y=0$

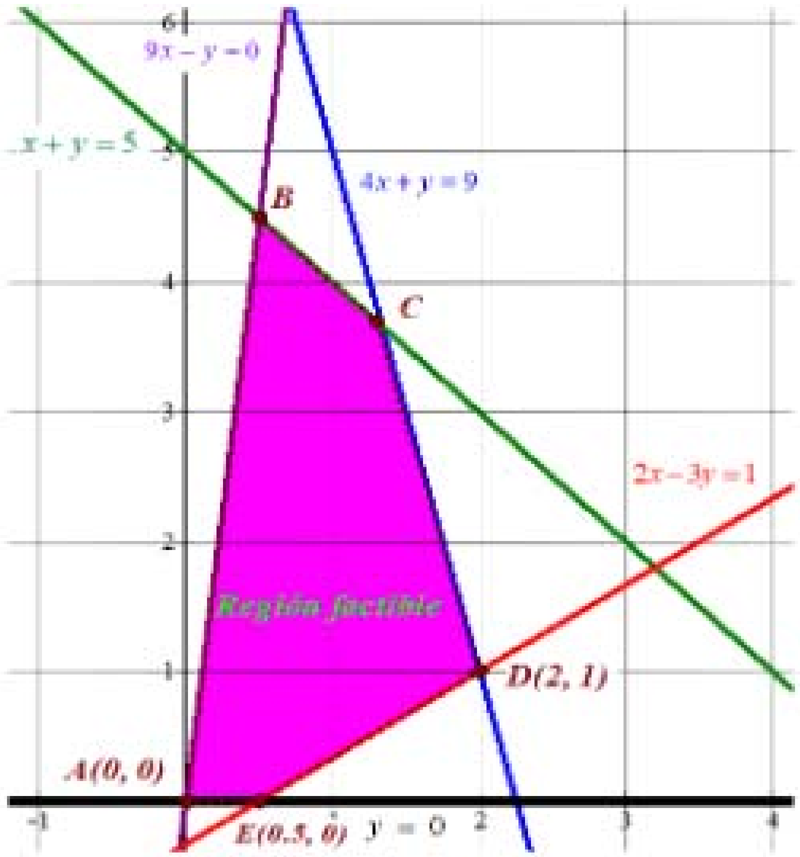
x	$y=0$
0	0
5	0



Como las restricciones son $2x-1\le 3y;\ \ 4x+y\le 9;\ \ x+y\le 5;\ \ 9x\ge y;\ \ y\ge 0$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta roja y el eje de abscisas y por debajo de la azul, verde y la violeta.
Comprobamos que el punto P(1, 2) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$2-3\cdot 2\le 1;\ \ 4+2\le 9;\ \ 1+2\le 5;\ \ 9-2\ge 0;\ \ 2\ge 0$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y C.

$$B \Rightarrow \begin{rcases} x+y=5 \\ 9x-y=0 \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} x=5-y \\ 9x-y=0 \end{rcases} \Rightarrow 9(5-y)-y=0 \Rightarrow 45-9y-y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10y=-45 \Rightarrow y=\frac{45}{10}=4.5 \Rightarrow x=5-4.5=0.5 \Rightarrow \boxed{B(0.5, 4.5)}$$

$$C \Rightarrow \begin{rcases} x+y=5 \\ 4x+y=9 \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} y=5-x \\ 4x+y=9 \end{rcases} \Rightarrow 4x+5-x=9 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)}$$

Los vértices son los puntos: A(0, 0), B(0.5, 4.5), $C\left(\frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$, y D(2,1) y E(0.5, 0).

b) Vemos si cumplen las restricciones.

$$A(2,2) \rightarrow 2\cdot 2-3\cdot 2 \le 1; \;\; ¡¡¡4\cdot 2+2 \le 9!!!; \;\; 2+2 \le 5; \;\; 9\cdot 2-2 \ge 0; \;\; 2 \ge 0$$

El punto A(2, 2) no cumple todas las inecuaciones y no pertenece a la región R.

$$B(1,3.5) \rightarrow 2\cdot 1-3\cdot 3.5 \le 1; \;\; 4\cdot 1+3.5 \le 9; \;\; 1+3.5 \le 5; \;\; 9\cdot 1-3.5 \ge 0; \;\; 3.5 \ge 0$$

El punto B(1, 3.5) cumple todas las inecuaciones y pertenece a la región R.

También se puede comprobar colocando cada uno de los puntos en el dibujo, viendo que el punto A(2, 2) está fuera de la región pintada de rosa y el B(2, 3.5) está dentro.

c) Valoramos la función objetivo $F(x,y)=5x-3y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $F(0,0)=0$

B(0.5, 4.5) → $F(0.5,4.5)=5\cdot 0.5-3\cdot 4.5=-11$ ¡Mínimo!

$C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$ → $F\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)=5\frac{4}{3}-3\frac{11}{3}=\frac{-13}{3}=-4.33$

D(2, 1) → $F(2,1)=5\cdot 2-3\cdot 1=7$ ¡Máximo!

E(0.5, 0) → $F(0.5,0)=5\cdot 0.5-3\cdot 0=2.5$

El máximo valor de la función se alcanza en el punto D(2, 1) y el mínimo en B(0.5, 4.5).

Ejercicio 2.A:

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.
b) **(1.5 puntos)** Para $a = 1$, halle una matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$

Solución:

a) Para que tengan inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-2a=0 \Rightarrow a(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=2} \end{cases}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix}=-2+a$$

$$|B|=0 \Rightarrow -2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Para que tengan inversa las dos matrices A y B debe ser a distinto de 0 y de 2.

b) Para $a = 1$ las dos matrices tienen inversa.
Despejamos X de la ecuación.

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Hallamos la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X.

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2+1-4 & -1-1 \\ -1+4 & 1 \\ 1-2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 1+4 \\ 3+1 & -3-2 \\ -1-1 & 1+2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

Ejercicio 3:

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.

c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

Solución:

a) Puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{P(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to \boxed{P(0,0)} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \to x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{2} = 2 \to \boxed{Q(2,0)} \\ \dfrac{3-1}{2} = 1 \to \boxed{R(1,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son P(0, 0), Q(2, 0) y R(1, 0).

Utilizamos la derivada para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(2)}}{2\cdot 3} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6+\sqrt{12}}{6} = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 1.58 \\ \dfrac{6-\sqrt{12}}{6} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.42 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 2 > 0$. La función crece en $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3-6+2 = -1 < 0$. La función decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 12-12+2 = 2 > 0$.

La función crece en $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty, 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y un mínimo relativo en $x = 1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para estudiar la curvatura utilizamos la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) = 6x-6 \\ f''(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x-6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{6} = 1$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor.

En el intervalo $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0) = 0-6 = -6 < 0$.

La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 1)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2) = 12-6 = 6 > 0$.

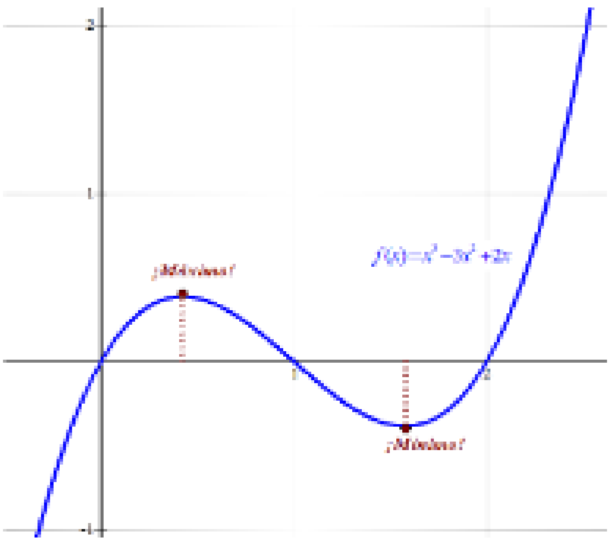
La función es convexa (∪) en $(1, +\infty)$.

La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 1)$ y convexa (∪) en $(1, +\infty)$.

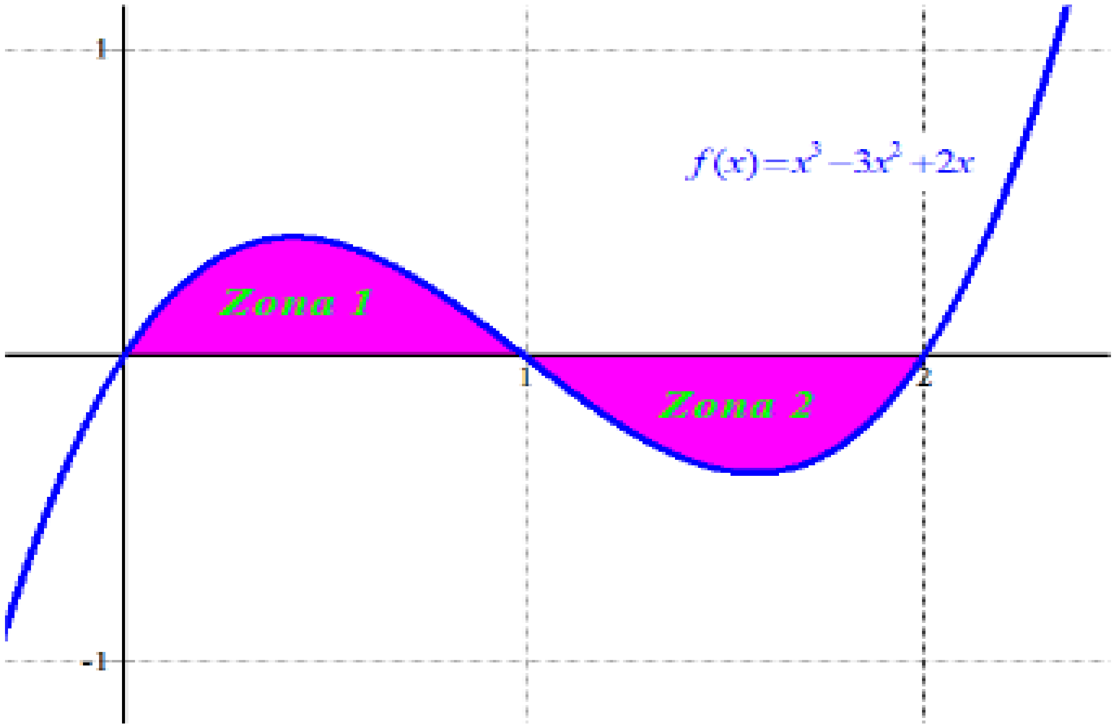
La función presenta un punto de inflexión en $x = 1$.

b)

x	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$
0	0
0.42	0.4
1	0
1.58	–0.4
2	0



c) El área de la región la dividimos en dos partes. Calculamos cada una de ellas y luego las sumamos.



$$Área\,1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3-3x^2+2x dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-0^3+0^2\right]=\boxed{\frac{1}{4}\ u^2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^3-3x^2+2x dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]=-\frac{1}{4}$$

$$Área\,2=\left|-\frac{1}{4}\right|=\boxed{\frac{1}{4}\ u^2}$$

El área total es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5\,u^2}$

Ejercicio 4:

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función *v(t)* nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función *v(t)* se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6,\ t \in [0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*.

b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0) = 10$, halle la función *v*.

c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante *t* = *2* y posteriormente las vendió en el instante *t* = *4*, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Estudiamos el signo de la función derivada.

$$\left.\begin{array}{l} v'(t) = t^2 - 5t + 6 \\ v'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = t \in [0,6] \\ \frac{5-1}{2} = 2 = t \in [0,6] \end{cases}$$

En el intervalo $[0,2)$ tomamos *t* = *1* y la derivada vale $v'(1) = 1^2 - 5 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $[0,2)$.

En el intervalo $(2,3)$ tomamos *t* = *2.5* y la derivada vale $v'(2.5) = 2.5^2 - 5 \cdot 2.5 + 6 = -0.25 < 0$. La función decrece en $(2,3)$.

En el intervalo $(3,6]$ tomamos *t* = *4* y la derivada vale $v'(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $(3,6]$.

La función crece en $[0,2) \cup (3,6]$ y decrece en $(2,3)$.

b) La función es la integral de la función.

$$v(t) = \int v'(t)\,dt = \int t^2 - 5t + 6\,dt = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + K$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + K \\ v(0) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = \frac{0^3}{3} - 5\frac{0^2}{2} + 6 \cdot 0 + K \Rightarrow K = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 6t + 10}$$

c) Las ganancias en cada acción son la diferencia entre *v(4)* y *v(2)*.

$$\left.\begin{array}{l} v(4)=\dfrac{4^3}{3}-\dfrac{5}{2}4^2+6\cdot 4+10=\dfrac{46}{3} \\ v(2)=\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\dfrac{44}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow v(4)-v(2)=\frac{46}{3}-\frac{44}{3}=\frac{2}{3}\text{ € / }acción$$

Las ganancias son $3000\cdot\frac{2}{3}=2000$ €.

d) Buscamos el mínimo y máximo absoluto de la función. Para ello valoramos la función en 0, 2, 3 y 6.

$$\left.\begin{array}{l} v(0)=\dfrac{0^3}{3}-\dfrac{5}{2}0^2+6\cdot 0+10=10 \text{ ¡}Mínimo\text{!} \\ v(2)=\dfrac{2^3}{3}-\dfrac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\dfrac{44}{3} \\ v(3)=\dfrac{3^3}{3}-\dfrac{5}{2}3^2+6\cdot 3+10=\dfrac{29}{2} \\ v(6)=\dfrac{6^3}{3}-\dfrac{5}{2}6^2+6\cdot 6+10=28 \text{ ¡}Máximo\text{!} \end{array}\right\}$$

Debería haber comprado en $t = 0$ y haber vendido en $t = 6$. Habría comprado al valor más bajo y hubiese vendido al valor más alto del intervalo [0,6]

BLOQUE C

Ejercicio 5:

EJERCICIO 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

Solución:

a) Si la probabilidad de sacar cara la llamamos p tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(Cara)=p \\ P(Cruz)=1-p \\ P(Cara)=2\cdot P(Cruz) \end{array}\right\} \Rightarrow p=2(1-p) \Rightarrow p=2-2p \Rightarrow 3p=2 \Rightarrow \boxed{p=\frac{2}{3}}$$

La probabilidad de sacar cara es 2/3.

b) Ocurre lo pedido si sale CARA y CRUZ o bien CRUZ y CARA.

$$P(\text{Cara y Cruz})=P(Cara1\,y\,Cruz2)+P(Cruz1\,y\,Cara2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

c) Calculamos la probabilidad del suceso contrario "No sale ninguna cara" = "Salen dos cruces".

$$P(Cruz1\,y\,Cruz2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{Al menos una cara})=1-P(Cruz1\,y\,Cruz2)=1-\frac{1}{9}=\boxed{\frac{8}{9}}$$

d) Llamamos A al suceso "Ha salido al menos una cara" y B al suceso "Han salido dos caras". Nos piden calcular $P(B/A)$.

Sabemos que el suceso $A\cap B$ = "Han salido al menos una cara" y "Han salido dos caras" es el suceso "Han salido dos caras". $A\cap B=B$.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

Ejercicio 6:

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.

b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.

c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

Solución:

Realizamos una tabla de contingencia para ordenar toda la información.

	"Lottery"	No "lottery"	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$		20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$		80
			100

Completamos la tabla.

	"Lottery"	No "lottery"	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$	12	20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$	79.52	80
	8.48	91.52	100

a) Llamamos S al suceso "El correo es spam" y S al suceso "El correo tiene la palabra "lottery". Nos piden calcular $P(S/L)$.

$$P(S/L) = \frac{P(S \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{8}{100}}{\frac{8.48}{100}} = \boxed{\frac{50}{53} = 0.9434}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{S}/\overline{L})$.

$$P(\overline{S}/\overline{L}) = \frac{P(\overline{S} \cap \overline{L})}{P(\overline{L})} = \frac{\frac{79.52}{100}}{\frac{91.52}{100}} = \boxed{\frac{497}{572} = 0.8689}$$

c) Se etiqueta incorrectamente si tiene la palabra "lottery" y no es spam o bien si no aparece la palabra "lottery" y es spam. Calculamos la probabilidad de cada suceso y las sumamos.

$$P(L \cap \overline{S}) + P(\overline{L} \cap S) = \frac{0.48}{100} + \frac{12}{100} = \boxed{\frac{78}{625} = 0.1248}$$

BLOQUE D

Ejercicio 7:

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

Solución:

a) El tamaño de la población es $250+300+400+350=1300$.

Si se eligen 20 de 250 por proporcionalidad se eligen $\frac{20\cdot 1300}{250}=104$ de toda la población.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 300}{250}=24$ del segundo estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 400}{250}=32$ del tercer estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 350}{250}=28$ del cuarto estrato.

b) b1) Si X es la distribución de la calificación es N(6.4, 0.7) entonces $\overline{X_{49}}$ es una distribución normal con la misma media pero con desviación típica $\frac{0.7}{\sqrt{49}}=0.1$.

$\overline{X_{49}}=N(6.4,0.1)$

b2) Nos piden calcular $P\left(6.3\le \overline{X_{49}}\le 6.8\right)$.

$$P\left(6.3\le \overline{X_{49}}\le 6.8\right)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{6.3-6.4}{0.1}\le Z\le \frac{6.8-6.4}{0.1}\right)=$$

$$=P(-1\le Z\le 4)=P(Z\le 4)-P(Z\le -1)=P(Z\le 4)-P(Z\ge 1)=$$

$$=P(Z\le 4)-[1-P(Z\le 1)]=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.99997-[1-0.8413]=\boxed{0.84127}$$

Ejercicio 8.B:

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

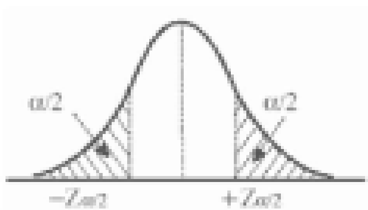
Solución:

Tamaño de la muestra es $n = 400$. $pr = \dfrac{64}{400} = 0.16$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.16 = 0.84$

a) Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \alpha/2 = 0'01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}325}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	[illegible]	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	[illegible]	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	[illegible]	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	[illegible]	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	[illegible]	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	[illegible]	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	[illegible]	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	[illegible]	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	[illegible]	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	[illegible]	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	[illegible]	[illegible]
2,1	0,9821	0,9826	[illegible]	[illegible]
2,2	0,9861	0,9864	[illegible]	[illegible]
2,3	[illegible]	[illegible]	0,9898	0,9901



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} = 0.0426$$

El error máximo cometido es de 0.0426.

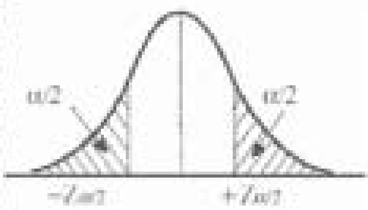
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.16 - 0.0426,\ \ 0.16 + 0.0426) = (0.1174,\ 0.2026)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9750
[illegible]	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	[illegible]



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} = 0.036$$

El error máximo cometido es de 0.036.
El error es menor pues utilizamos un nivel de confianza menor.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) (**1.5 puntos**) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) (**1 punto**) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$$

EJERCICIO 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7; \quad -x + 3y \leq 21; \quad x + 2y \leq 19; \quad x + y \leq 14$$

a) (**1.4 puntos**) Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) (**0.6 puntos**) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) (**0.5 puntos**) ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) (**1 punto**) Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $(-2, -3)$.

b) (**1.5 puntos**) Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) (**0.75 puntos**) Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

b) (**0.5 puntos**) ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?

c) (**0.5 puntos**) ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

d) (**0.75 puntos**) ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000€?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60% procedían de la universidad A, el 30% de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0.4 y para un estudiante de B es 0.5.

a) (**1.5 puntos**) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) (**1 punto**) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7}, \quad P(A^C) = \frac{5}{7}, \quad P(B^C) = \frac{2}{3}$$

a) (**1 punto**) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) (**0.75 puntos**) Calcule $P(A^C \cap B^C)$.

c) (**0.75 puntos**) Calcule $P(B/A^C)$.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) (**1.5 puntos**) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.

b) (**1 punto**) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

EJERCICIO 8

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) (**1 punto**) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8.1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.

b) (**1 punto**) Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) (**0.5 puntos**) Suponiendo $\mu = 7.61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Pruebe que se verifica que $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

b) **(1 punto)** Dada la ecuación matricial $X^tA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

a) Calculamos la matriz $\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2-4A+5I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=I_3$ y por tanto $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

$$A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1/2+1/2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

b) La matriz X es de dimensiones $m\times n$ y por tanto la matriz A^t es de dimensiones $n\times m$:

$$X^tA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$n\times\boxed{m\cdot 3}\times 3\rightarrow n\times 3$$

Para que sea posible el producto X^tA debe ser $m=3$.

El resultado del producto X^tA es una matriz de dimensiones $n\times 3$ y el resultado debe ser de dimensiones 2×3, por lo que $n = 2$.
La matriz X es de dimensiones 3×2.

Resolvemos la ecuación matricial. Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \Rightarrow X^t = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$$X^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2c-e & e \\ b & 2d-f & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=1} \\ 2c-e=2 \rightarrow 2c=2 \rightarrow \boxed{c=1} \\ \boxed{e=0} \\ \boxed{b=3} \\ 2d-f=-1 \rightarrow 2d-1=-1 \rightarrow 2d=0 \rightarrow \boxed{d=0} \\ \boxed{f=1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.
Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Llamamos "x" al número de anillos de tipo 1 e "y" al número de anillos del tipo 2.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio.

	Minutos	Nº piedras de mayor calidad	Nº de piedras de menor calidad	Valor de la venta
Nº anillos tipo 1 (x)	20x	x	2x	21x
Nº anillos tipo 2 (y)	50y	3y	y	50y
	$20x+50y$	$x+3y$	$2x+y$	$21x+50y$

Deseamos maximizar la función "Valor de la venta" que viene expresada por $V(x,y)=21x+50y$

Las restricciones del problema son:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$
Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad → $x+3y\leq 200;\ 2x+y\leq 150$.
Quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana → $20x+50y\geq 1900$.
"Deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana" → $x\geq 20$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 20x+50y\geq 1900 \\ x\geq 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 2x+5y\geq 190 \\ x\geq 20 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=150$

x	$y=150-2x$
0	150
50	50
70	10

$x+3y=200$

x	$y=\dfrac{200-x}{3}$
0	200 / 3
20	60
50	50

$2x+5y=190$

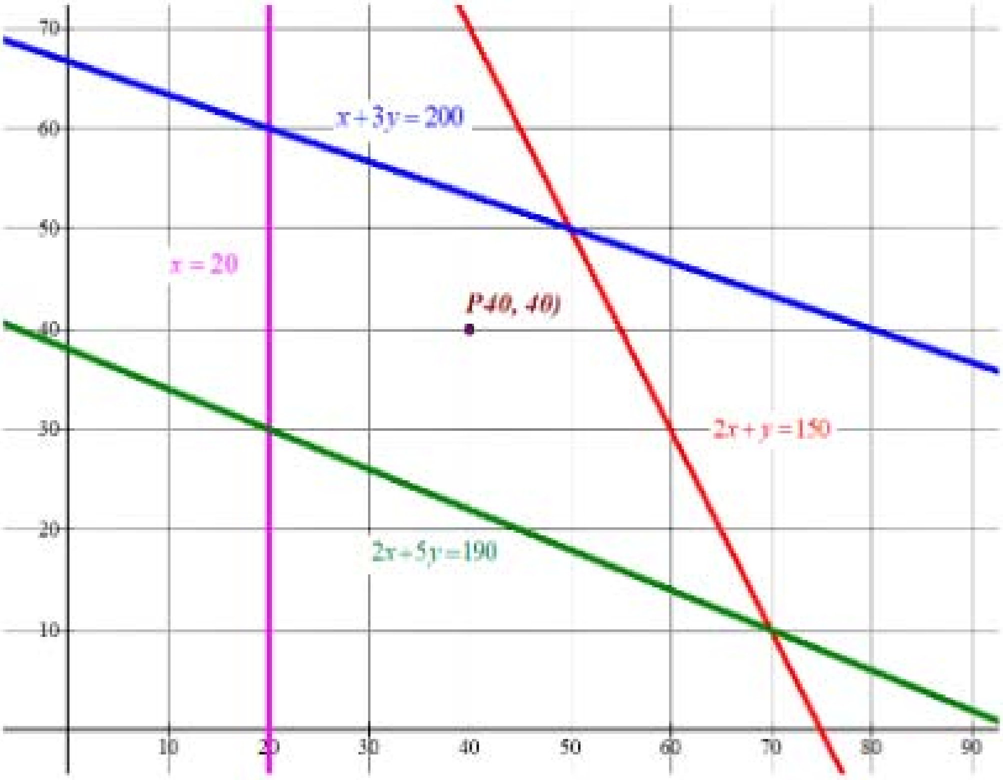
x	$y=\dfrac{190-2x}{5}$
0	38
20	30
70	10

$x=20$

$x=20$	y
20	20
20	60

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

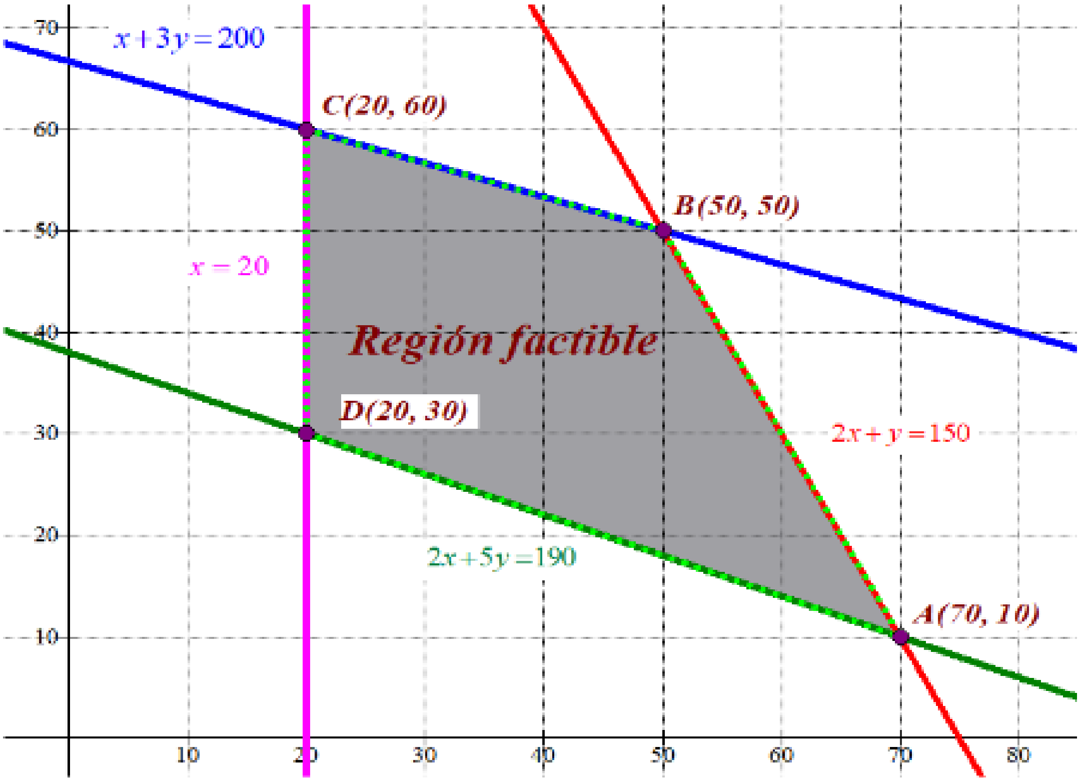


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 2x+5y\geq 190 \\ x\geq 20 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta verde, por debajo de la azul y roja y a la derecha de la recta vertical de color rosa.

Comprobamos que el punto P(40, 40) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40\geq 0;\ 40\geq 0 \\ 2\cdot 40+40\leq 150 \\ 40+3\cdot 40\leq 200 \\ 2\cdot 40+5\cdot 40\geq 190 \\ 40\geq 20 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $V(x,y)=21x+50y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(70, 10) → $V(70,10)=21\cdot 70+50\cdot 10=1970$

B(20, 30) → $V(20,30)=420+1500=1920$

C(20, 60) → $V(20,60)=420+3000=3420$

D(50, 50) → $V(50,50)=21\cdot 50+50\cdot 50=3550$ ¡Máximo!

El máximo valor de la función es 3550 y se alcanza en el punto D(50, 50).
Fabricando 50 anillos de cada tipo obtenemos unas ventas máximas semanales por valor de 3550 euros.

BLOQUE B

EJERCICIO 3
El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=5-2x$ donde x está expresado en metros.
a) **(1 punto)** Represente gráficamente la zona deteriorada.
b) **(1.5 puntos)** Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)^2 \\ g(x)=5-2x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2=5-2x \Rightarrow x^2-2x+1=5-2x \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow f(2)=(2-1)^2=1 \rightarrow \boxed{A(2,1)} \\ x=-2 \rightarrow f(-2)=(-2-1)^2=9 \rightarrow \boxed{B(-2,9)} \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$ es una parábola con vértice en $x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$. Hacemos una tabla de valores para representarla.

La gráfica de la función $g(x)=5-2x$ es una recta. Hacemos una tabla de valores para representarla.

x	$y=(x-1)^2$
-2	9
-1	4
0	1
1	0
2	1

x	$y=5-2x$
-2	9
2	1

b) Hallamos el valor del área de la región coloreada de rosa.

$$\int_{-2}^{2} 5-2x-\left(x^2-2x+1\right)dx = \int_{-2}^{2} 5-2x-x^2+2x-1dx = \int_{-2}^{2} -x^2+4dx =$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \left[-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+4(-2)\right] = -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = 16-\frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.67\,m^2}$$

Si se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido (a m^2) se aprovecha las dos terceras partes ($\frac{2}{3}a$) que deben servir para cubrir $\frac{32}{3}$ m^2.

$$\frac{2a}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow 2a = 32 \Rightarrow a = 16\,m^2.$$

Hay que comprar 16 metros cuadrados de plástico, que a 15 euros por metro cuadrado nos costará $15 \cdot 16 = 240$ euros.

EJERCICIO 4

Sea la función $f(t)=\frac{12t-24}{t+3}$; $t\geq 0$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de *f*.

b) Si la función *f* representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde *t* indica los años de vida de la empresa:

b1) **(0.5 puntos)** ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

b2) **(0.5 puntos)** A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

a)

Puntos de corte con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\frac{12t-24}{t+3} \\ t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{12\cdot 0-24}{0+3}=-8\Rightarrow \boxed{P(0,-8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\frac{12t-24}{t+3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12t-24}{t+3}=0\Rightarrow 12t-24=0\Rightarrow 12t=24\Rightarrow t=2\Rightarrow \boxed{Q(2,0)}$$

Asíntotas

El denominador de la función se anula para $t = -3$ que no pertenece al dominio de definición de la función: Dominio = $[0,+\infty)$

Asíntotas verticales. $x=a$

No tiene

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{12t-24}{t+3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{12t}{t}-\frac{24}{t}}{\frac{t}{t}+\frac{3}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{12-\frac{24}{t}}{1+\frac{3}{t}}=\frac{12-\frac{24}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=\frac{12-0}{1-0}=12$$

La recta $y = 12$ es asíntota horizontal cuando $t\to+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Monotonía de la función.

Estudiamos el signo de la función derivada.

$$f(t)=\frac{12t-24}{t+3}\Rightarrow f'(t)=\frac{12(t+3)-1\cdot(12t-24)}{(t+3)^2}=\frac{12t+36-12t+24}{(t+3)^2}=\frac{60}{(t+3)^2}$$

La derivada siempre es positiva, por lo que la función crece en todo su dominio.

Curvatura de la función.

Estudiamos el signo de la segunda derivada.

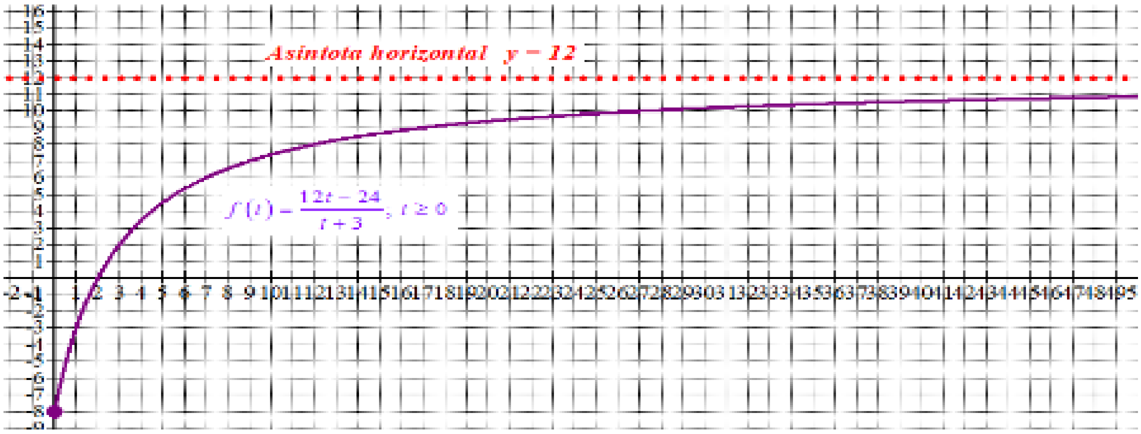
$$f'(t)=\frac{60}{(t+3)^2}\Rightarrow f''(t)=\frac{0-60\cdot 2(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120}{(t+3)^3}$$

La segunda derivada cambia de signo en $t=-3$ que no pertenece al dominio ($t\geq 0$). La segunda derivada mantiene su signo constante. Como $f''(1)=\frac{-120}{(1+3)^3}=\frac{-120}{64}<0$ la función siempre es cóncava (∩).

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$t\geq 0$

t	$y=\frac{12t-24}{t+3}$
0	−8
1	−3
2	0
3	2
7	6
17	9



b)

b1) La función toma valores negativos entre $t=0$ y $t=2$, lo que significa que tiene pérdidas desde el inicio ($t=0$) hasta el segundo año ($t=2$). Deja de tener pérdidas a partir del año segundo.

b2) A medida que pasan los años (t crece y tiende a $+\infty$) la función se acerca al valor 12, pero no lo sobrepasa (asíntota horizontal $y=12$), por lo que el tope de beneficios es de 12 millones de euros.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

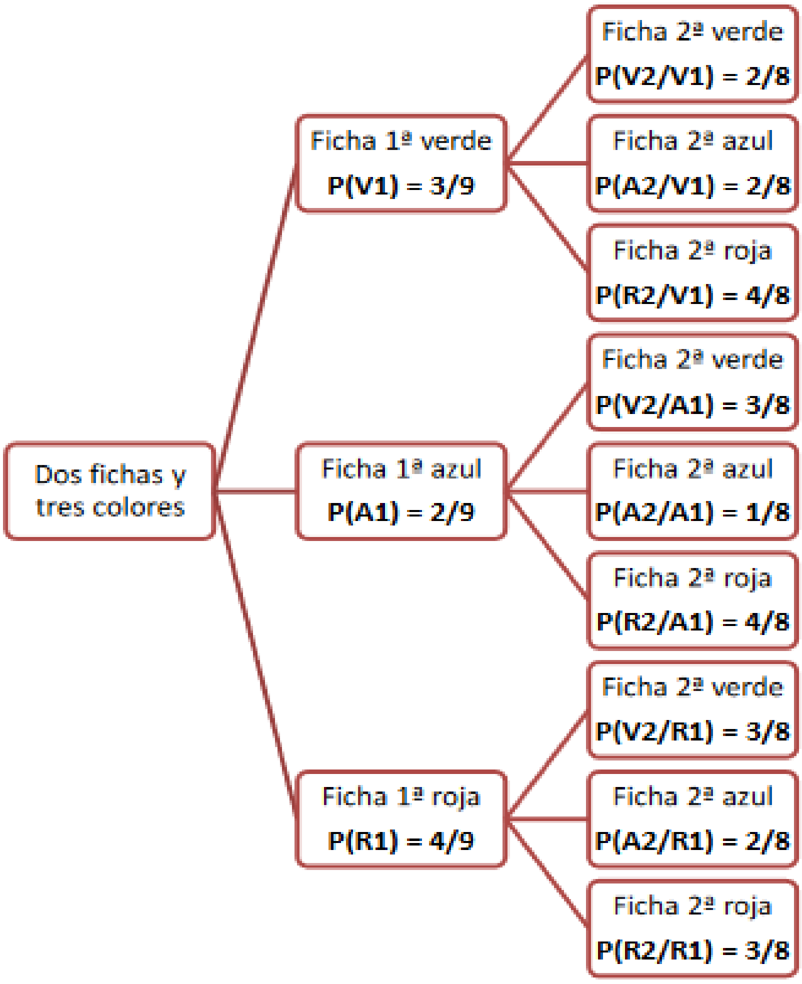
Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) **(1 punto)** Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Si un jugador consigue el primer o segundo premio significa que saca dos fichas azules o dos fichas verdes. Llamamos a este suceso A.

$$P(A) = P(A1 \cap A2) + P(V1 \cap V2) =$$

$$= P(A1)P(A2/A1) + P(V1)P(V2/V1) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{8}{72} = \boxed{\frac{1}{9} \simeq 0.111}$$

b) Para que un jugador gane el tercer premio debe sacar una ficha azul y otra de color diferente.

Debe sacar una azul y otra verde o una azul y otra roja, en cualquier orden. Llamamos a este suceso B.

$$P(B)=P(A1\cap V2)+P(V1\cap A2)+P(A1\cap R2)+P(R1\cap A2)=$$

$$=P(A1)P(V2/A1)+P(V1)P(A2/V1)+P(A1)P(R2/A1)+P(R1)P(A2/R1)=$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{28}{72}=\boxed{\frac{7}{18}=0.39}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A\cup B)=\frac{P(B\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}A\cap B=\varnothing\\P(A\cap B)=0\end{array}\right\}=\frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{9}+\frac{7}{18}-0}=\boxed{\frac{7}{9}=0.778}$$

EJERCICIO 6

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$ y $P(A/B)=0.6$. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** $P(A\cup B)$

b) **(0.75 puntos)** $P(A-B)+P(B-A)$

c) **(0.75 puntos)** $P(B/A^C)$

d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes, ¿Son incompatibles?

a)

$$P(A/B)=0.6\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.6\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{0.3}=0.6\Rightarrow P(A\cap B)=0.18$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.3-0.18=\boxed{0.72}$$

b)

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)\Rightarrow 0.6=0.18+P(A\cap B^C)\Rightarrow P(A\cap B^C)=0.6-0.18=0.42$$

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^C)\Rightarrow 0.3=0.18+P(B\cap A^C)\Rightarrow P(B\cap A^C)=0.3-0.18=0.12$$

$$P(A-B)+P(B-A)=0.42+0.12=\boxed{0.54}$$

c)

$$P(B/A^C)=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{0.12}{1-0.6}=\boxed{0.3}$$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.18 \\ P(A)P(B)=0.6\cdot 0.3=0.18 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.18=P(A)P(B)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

Para que los sucesos A y B sean incompatibles debe cumplirse que $P(A\cap B)=0$. Pero la probabilidad de la intersección la hemos obtenido y vale 0.18 ≠ 0. Los sucesos no son incompatibles.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $\{9,11,13,18,20\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

a) El tamaño de la población es 25 + 75 + 50 = 150.

Si se eligen 30 de 150 la proporción es 1 de cada 5.

Con esa proporción elegimos $\frac{25}{5}=5$ juveniles.

Con esa proporción elegimos $\frac{75}{5}=15$ adultos.

Con esa proporción elegimos $\frac{50}{5}=10$ seniors.

La composición de la muestra es 5 juveniles, 15 adultos y 10 seniors.

b) Las muestras posibles mediante muestreo aleatorio simple son:

M1 = {9,9} M2 = {9,11}, M3 = {9,13}, M4 = {9,18}, M5 = {9,20},
M6 = {11,9}, M7 = {11,11}, M8 = {11,13}, M9 = {11,18}, M10 = {11,20},
M11 = {13,9}, M12 = {13,11}, M13 = {13,13}, M14 = {13,18}, M15 = {13,20},
M16 = {18,9}, M17 = {18,11}, M18 = {18,13}, M19 = {18,18}, M20 = {18,20}
, M21 = {20,9}, M22 = {20,11}, M23 = {20,13}, M24 = {20,18}, M25 = {20,20},

Las medias muestrales de cada una son:

$$\overline{x_1}=\frac{9+9}{2}=9\ ;\ \overline{x_2}=\frac{9+11}{2}=10;\ \overline{x_3}=\frac{9+13}{2}=11;\ \overline{x_4}=\frac{9+18}{2}=13.5;\ \overline{x_5}=\frac{9+20}{2}=14.5$$

$$\overline{x_6}=\frac{11+9}{2}=10\ ;\ \overline{x_7}=\frac{11+11}{2}=11;\ \overline{x_8}=\frac{11+13}{2}=12;\ \overline{x_9}=\frac{11+18}{2}=14.5;\ \overline{x_{10}}=\frac{11+20}{2}=15.5$$

$$\overline{x_{11}}=\frac{13+9}{2}=11\ ;\ \overline{x_{12}}=\frac{13+11}{2}=12;\ \overline{x_{13}}=\frac{13+13}{2}=13;\ \overline{x_{14}}=\frac{13+18}{2}=15.5;\ \overline{x_{15}}=\frac{13+20}{2}=16.5$$

$$\overline{x_{16}}=\frac{18+9}{2}=13.5\ ;\ \overline{x_{17}}=\frac{18+11}{2}=14.5;\ \overline{x_{18}}=\frac{18+13}{2}=15.5;\ \overline{x_{19}}=\frac{18+18}{2}=18;$$
$$\overline{x_{20}}=\frac{18+20}{2}=19$$

$$\overline{x_{21}}=\frac{20+9}{2}=14.5\ ;\ \overline{x_{22}}=\frac{20+11}{2}=15.5;\ \overline{x_{23}}=\frac{20+13}{2}=16.5;\ \overline{x_{24}}=\frac{20+18}{2}=19;$$
$$\overline{x_{25}}=\frac{20+20}{2}=20$$

Hacemos una tabla de frecuencias de las medias muestrales.

$\overline{x_i}$	9	10	11	12	13	13.5	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	1	2	3	2	1	2	4	4	2	1	2	1

La media de las medias muestrales.

$$\overline{x} = \frac{\overline{x_1} \cdot f_1 + \overline{x_2} \cdot f_2 + \overline{x_3} \cdot f_3 + \overline{x_4} \cdot f_4 + \ldots + \overline{x_{23}} \cdot f_{23} + \overline{x_{24}} \cdot f_{24} + \overline{x_{25}} \cdot f_{25}}{25} =$$

$$= \frac{9 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 13 \cdot 1 + 13.5 \cdot 2 + 14.5 \cdot 4 + 15.5 \cdot 4 + 16.5 \cdot 2 + 18 \cdot 1 + 19 \cdot 2 + 20 \cdot 1}{10} = 14.2$$

Ya sabíamos que la media de las medias muestrales coincide con la media de la población:

$$\mu = \frac{9 + 11 + 13 + 18 + 20}{5} = \frac{71}{5} = 14.2$$

Calculamos la varianza. Para ello hacemos una tabla.

$\overline{x_i}$	9	10	11	12	13	13.5	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	1	2	3	2	1	2	4	4	2	1	2	1
$\left(\overline{x_i} - \overline{x}\right)^2$	27.04	17.64	10.24	4.84	1.44	0.49	0.09	1.69	5.29	14.44	23.04	33.64

$$Varianza = \frac{\left(\overline{x_1} - \overline{x}\right)^2 \cdot f_1 + \left(\overline{x_2} - \overline{x}\right)^2 \cdot f_2 + \ldots + \left(\overline{x_{24}} - \overline{x}\right)^2 \cdot f_{24} + \left(\overline{x_{25}} - \overline{x}\right)^2 \cdot f_{25}}{10} =$$

$$= \frac{27.04 \cdot 1 + 17.64 \cdot 2 + 10.24 \cdot 3 + 4.84 \cdot 2 + 1.44 \cdot 1 + 0.49 \cdot 2 + 0.09 \cdot 4 + 1.69 \cdot 4 + 5.29 \cdot 2 + 14.44 \cdot 1 + 23.04 \cdot 2 + 33.64 \cdot 1}{25} = \boxed{8.68}$$

EJERCICIO 8

En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

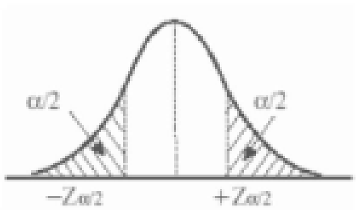
b) **(1.25 puntos)** Para un nivel de confianza del 92% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2%?

Tamaño de la muestra es $n = 500$. $pr = \frac{325}{500} = 0.65$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.65 = 0.35$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2,17}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850
[illegible]	[illegible]	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{500}} = 0.0463$$

El error máximo cometido es de 0.0463.

El intervalo de confianza para la proporción de casas afectadas por la erupción es:

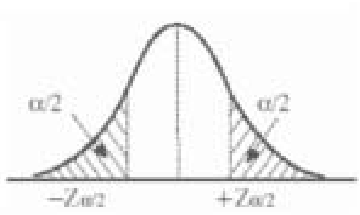
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.65 - 0.0463,\quad 0.65 + 0.0463) = (0.6037,\ 0.6963)$$

Un porcentaje de casas afectadas por el volcán del 64 % significa una proporción de 0.64 que pertenece al intervalo de confianza obtenido, por lo que se pude admitir este porcentaje.

b) $pr = \frac{325}{500} = 0.65$. Con un nivel de confianza del 92 % tenemos

$1 - \alpha = 0,92 \rightarrow \alpha = 0,08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	[illegible]
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9599
1,8	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	[illegible]



Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de n para un error de 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.75} = \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2 = \frac{0.65 \cdot 0.35}{n} \Rightarrow \frac{0.65 \cdot 0.35}{\left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2} = n \Rightarrow n = 1741.8$$

El tamaño de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de estimación sea del 2% es de 1742 casas.