

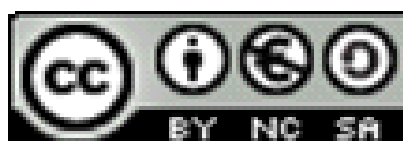
Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022

Comunidad autónoma de **ARAGÓN**



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.ebaumatematicas.com



	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2022–2023 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. TIEMPO: 90 minutos.		
Problema 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones: a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, Calcule X b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema (S) sea compatible y calcule la solución del mismo para m = 3. $(S): \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{cases}$		
Problema 2.- (10 puntos) Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide: a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo? b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.		
Problema 3.- (10 puntos) Sea $P(t) = 1000 \left(15 + \frac{t}{100+t^2} \right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2.000. Se pide: a.- (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo. b.- (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento? c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?		

Problema 4.- (10 puntos)

Sean las funciones: $g(x) = a \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$;

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

b.- (4 puntos) Determine el valor de a para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$, siendo $g(x)$ y $h(x)$ las funciones del enunciado.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1 - 2x)^3 dx$

Problema 5.- (10 puntos)

En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40 %, el 35 % y el 25 % de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80 % del grupo G1, el 60 % del grupo G2 y el 92 % del grupo G3.

Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a.- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.

b.- (2 puntos) No haya superado la asignatura.

c.- (2 puntos) Haya superado la asignatura.

d.- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.

e.- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

Problema 6.- (10 puntos)

Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a.- (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b.- (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95 %.

c.- (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ esté bien planteada, siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}, \text{ Calcule X}$$

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema (S) sea compatible y calcule la solución del mismo para m = 3.

$$(S): \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

El producto AB es posible y se obtiene una matriz 2×2 .

$$A \cdot B$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \rightarrow 2 \times 2$$

Para que sea posible el producto $(A \cdot B) \cdot X$ debe ser $m = 2$, obteniéndose una matriz $2 \times n$, por lo que $n = 1$.

$$(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{2 \cdot m} \times n \rightarrow 2 \times n$$

La matriz X es de dimensiones 2×1 .

Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tenemos la igualdad:

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+1 & -1+6 \\ -24+24+1 & 12-16+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5b \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a+5b=2 \\ a+2b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+5b=2 \\ a=-4-2b \end{cases} \Rightarrow -12-6b+5b=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b = 14 \Rightarrow \boxed{b = -14} \Rightarrow \boxed{a = -4 + 28 = 24} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}}$$

b.- Como es un sistema lineal homogéneo siempre tiene solución (una o infinitas), pues siempre tiene la solución $x = 0; y = 0; z = 0$. Tiene solución para cualquier valor de m .

Lo resolvemos para $m = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} \leftrightarrow \text{Ecuación 1ª} \\ \text{Ecuación 3ª} \leftrightarrow \text{Ecuación 1ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 2x - 5y + 3z = 0 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \\ \hline -3y + z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 3x + 3y + z = 0 \\ -3x + 3y - 3z = 0 \\ \hline 6y - 2z = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 6y - 2z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ 6y - 2z = 0 \\ -6y + 2z = 0 \\ \hline 0 = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ -3y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ z = 3y \end{array} \right\} \Rightarrow x - y + 3y = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2y} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema son: $x = -2\lambda; y = \lambda; z = 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

Problema 2.- (10 puntos)

Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

Solución:

a.- Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava	Ingresos
Nº lotes A (x)	x	$2x$		$90x$
Nº lotes B (y)	y	$5y$	$4y$	$180y$
TOTALES	$x + y$	$2x + 5y$	$4y$	$90x + 180y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x, y) = 90x + 180y$

Las restricciones son:

“Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava” $\rightarrow$
 $x + y \leq 120$; $2x + 5y \leq 390$; $4y \leq 240$

Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0$; $y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 120 \\ 2x + 5y \leq 390 \\ 4y \leq 240 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$$y = 120 - x$$

$$5y = 390 - 2x$$

$$y = 60$$

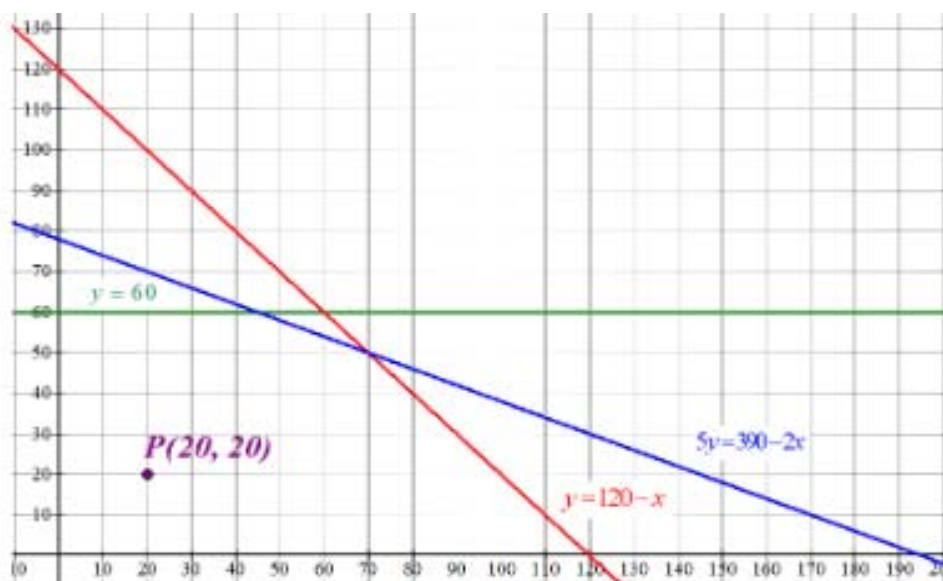
$$x \geq 0; y \geq 0$$

x	$y = 120 - x$
0	120
70	50
120	0

x	$y = \frac{390 - 2x}{5}$
0	78
45	60
70	50

x	$y = 60$
0	60
10	60

Primer cuadrante



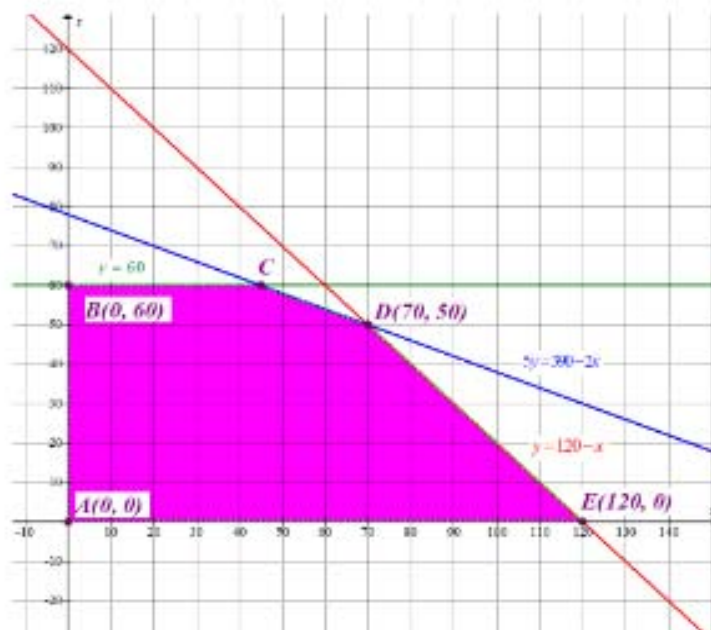
Como las restricciones son
$$\left. \begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$
 la región factible es la región del primer cuadrante

que está por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto $P(20, 20)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 20 \leq 120 - 20 \\ 5 \cdot 20 \leq 390 - 2 \cdot 20 \\ 20 \leq 60 \\ 20 \geq 0; 20 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las rectas azul y verde.

$$\left. \begin{array}{l} y = 60 \\ 5y = 390 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 300 = 390 - 2x \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45 \Rightarrow C(45, 60)$$

Valoramos la función ingresos $I(x, y) = 90x + 180y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

$$A(0, 0) \rightarrow I(0, 0) = 0$$

$$B(0, 60) \rightarrow I(0, 60) = 0 + 180 \cdot 60 = 10800$$

$$C(45, 60) \rightarrow I(45, 60) = 90 \cdot 45 + 180 \cdot 60 = 14850$$

$$D(70, 50) \rightarrow I(70, 50) = 90 \cdot 70 + 180 \cdot 50 = 15300 \text{ ¡Máximo!}$$

$$E(120, 0) \rightarrow I(120, 0) = 90 \cdot 120 + 0 = 10800$$

El valor máximo es 15300 y se obtiene en D(70, 50).

Con 70 lotes A y 50 lotes B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 15300 €.

b.- Calculamos lo que se gasta haciendo 70 lotes A y 50 lotes B.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava
Nº lotes A (70)	70	140	
Nº lotes B (50)	50	250	200
TOTALES	120	390	200

Como dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava se gastan todos los jamones y las botellas de vino y solo sobran 40 botellas de cava.

Problema 3.- (10 puntos)

Sea $P(t) = 1000 \left(15 + \frac{t}{100+t^2} \right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2.000. Se pide:

- a.- (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.
- b.- (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?
- c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

Solución:

a.- Nos piden calcular $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t)$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{t}{100+t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{\frac{t}{t^2}}{\frac{100}{t^2} + \frac{t^2}{t^2}} \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 1000 \left(15 + \frac{\frac{1}{t}}{\frac{100}{t^2} + 1} \right) = 1000 \left(15 + \frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{100}{\infty} + 1} \right) = 1000 \left(15 + \frac{0}{0+1} \right) = 15000 \end{aligned}$$

Cuando transcurran muchos años la tendencia es que el número de habitantes se estabilice en torno a los 15000 habitantes.

b.- Utilizamos la derivada.

$$P(t) = 15000 + \frac{1000t}{100+t^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{1000(100+t^2) - 2t(1000t)}{(100+t^2)^2} = \frac{100000 + 1000t^2 - 2000t^2}{(100+t^2)^2} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} P'(t) &= \frac{100000 - 1000t^2}{(100+t^2)^2} \\ P'(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{100000 - 1000t^2}{(100+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 100000 - 1000t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{100} = \pm 10$$

Nos quedamos solo con el valor positivo $t = 10$.

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(0,10)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$$P'(5) = \frac{100000 - 1000 \cdot 5^2}{(100 + 5^2)^2} = \frac{75000}{125^2} > 0. \text{ La función crece en } (0,10).$$

En el intervalo $(10, +\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale

$$P'(20) = \frac{100000 - 1000 \cdot 20^2}{(100 + 20^2)^2} = \frac{-300000}{250000} < 0. \text{ La función decrece en } (10, +\infty).$$

La población crece desde el año 2000 al año 2010 y decrece del año 2010 en adelante.

La población es máxima en el año 2010 y su población es el valor de $P(10)$.

$$P(10) = 1000 \left(15 + \frac{10}{100 + 10^2} \right) = 15050$$

La población máxima es de 15050 habitantes en el año 2010.

c.- Igualamos la función a 15040.

$$P(t) = 15040 \Rightarrow 1000 \left(15 + \frac{t}{100 + t^2} \right) = 15040 \Rightarrow 15 + \frac{t}{100 + t^2} = \frac{15040}{1000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100 + t^2} = 15.04 - 15 = 0.04 \Rightarrow t = 0.04(100 + t^2) \Rightarrow t = 4 + 0.04t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.04t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-0.04)(-4)}}{2(-0.04)} = \frac{-1 \pm 0.6}{-0.08} = \begin{cases} \frac{-1 + 0.6}{-0.08} = 5 = t \\ \frac{-1 - 0.6}{-0.08} = 20 = t \end{cases}$$

La población es de 15040 en dos momentos: transcurridos 5 y 20 años, es decir, en el año 2005 y en el 2020.

Problema 4.- (10 puntos)

Sean las funciones: $g(x) = a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3$, $h(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$;

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

b.- (4 puntos) Determine el valor de a para que $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$, siendo $g(x)$ y $h(x)$ las funciones del enunciado.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1-2x)^3 dx$

Solución:

$$\text{a.- } \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{1^2+1-2}{1^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$$

$$\text{b.- La función es } f(x) = \begin{cases} a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2+x-2}{x^2-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Para que sea continua deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \{\text{apartado a.-}\} = 3 \\ f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{8} = 3 \Rightarrow \boxed{a = 24}$$

El valor buscado es $a = 24$.

c.- Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (1-2x)^3 dx = \left\{ \begin{aligned} 1-2x &= t \\ -2dx &= dt \rightarrow dx = \frac{1}{-2} dt \end{aligned} \right\} = \int t^3 \frac{1}{-2} dt = \frac{-1}{2} \int t^3 dt = \frac{-1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{-t^4}{8} = \frac{-(1-2x)^4}{8} + K$$

Pasamos a calcular la integral definida pedida.

$$\int_0^2 (1-2x)^3 dx = \left[\frac{-(1-2x)^4}{8} \right]_0^2 = \left[\frac{-(1-4)^4}{8} \right] - \left[\frac{-(1-0)^4}{8} \right] = \frac{-81}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{-10}$$

Problema 5.- (10 puntos)

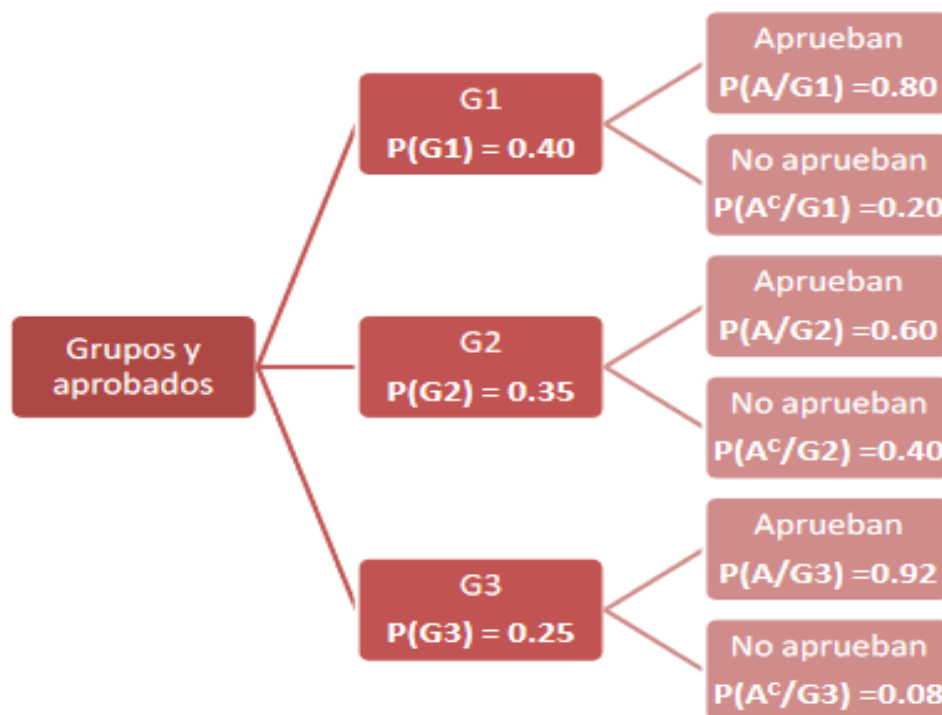
En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40 %, el 35 % y el 25 % de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80 % del grupo G1, el 60 % del grupo G2 y el 92 % del grupo G3.

Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.
- (2 puntos) No haya superado la asignatura.
- (2 puntos) Haya superado la asignatura.
- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.
- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



- a.- Nos piden calcular $P(A \cap G3)$.

$$P(A \cap G3) = P(G3) \cdot P(A / G3) = 0.25 \cdot 0.92 = \boxed{0.23}$$

- b.- Nos piden calcular $P(A^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned} P(A^c) &= P(G1) \cdot P(A^c / G1) + P(G2) \cdot P(A^c / G2) + P(G3) \cdot P(A^c / G3) = \\ &= 0.40 \cdot 0.20 + 0.35 \cdot 0.40 + 0.25 \cdot 0.08 = \boxed{0.24} \end{aligned}$$

c.- Nos piden calcular $P(A)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.24 = \boxed{0.76}$$

d.- Nos piden calcular $P(A^c \cap G1^c)$.

$$P(A^c \cap G1^c) = P((A \cup G1)^c) = 1 - P(A \cup G1) = 1 - [P(A) + P(G1) - P(A \cap G1)] =$$

$$= 1 - [P(A) + P(G1) - P(G1)(A/G1)] = 1 - [0.76 + 0.40 - 0.40 \cdot 0.80] = \boxed{0.16}$$

e.- Nos piden calcular $P(G3/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G3/A) = \frac{P(G3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(G3)P(A/G3)}{P(A)} = \frac{0.25 \cdot 0.92}{0.76} = \boxed{\frac{23}{76} = 0.3026}$$

Problema 6.- (10 puntos)

Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a.- (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b.- (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95 %.

c.- (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Solución:

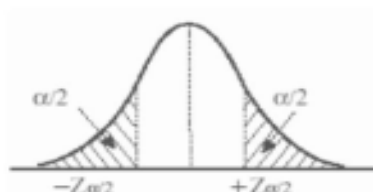
Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar medido en horas.

$$X = N(\mu, 2)$$

a.-

Para un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$$



El tamaño de la muestra es $n = 64$. La media es 10. La desviación típica es $\sigma = 2$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 0,49$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (10 - 0,49, 10 + 0,49) = (9,51, 10,49)$$

b.-

Para un nivel de confianza del 95% $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1,96$

Igualemos el error a 0.75 y hallamos n en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,75 = 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0,75\sqrt{n} = 1,96 \cdot 2 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 2}{0,75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1,96 \cdot 2}{0,75} \right)^2 = 27,318$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea menor de 0.75 es de 28 hogares.

c.- El error debe ser la mitad de la amplitud del Intervalo de confianza, es decir:

$$Error = \frac{10.7555 - 9.8444}{2} = 0.45555 \text{ horas.}$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.45555 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.45555 \cdot 9}{2} = 2.049975 = 2.05$$

Buscamos en la tabla la probabilidad obtenida y tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9798 \Rightarrow 1 - 0.9798 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.9798) = 0.0404 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.9596 = 0.96$$

El nivel de confianza es del 96 %.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.1
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.64
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.67
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.71
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.74
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.77
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.80
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.83
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.85
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.91
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.94
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.95
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.96
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9677	0.96
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.97
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.98
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.98
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9877	0.98

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2022–2023 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo. TIEMPO: 90 minutos.		
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones: a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial. b.- (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$ 2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos? 3.- (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas. a.- (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? b.- (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$? 4.- (10 puntos) Dada $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$. a.- (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo. b.- (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$		

5.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A \cap \bar{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

6.- (10 puntos) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.

a.- (5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (4 puntos) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c.- (1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado b.- si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y la ecuación

matricial $XB + A = C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (5 puntos) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$\begin{matrix} XB & + & A & = & C \\ m \times \boxed{n} \times 3 & + & 2 \times 3 & \rightarrow & 2 \times 3 \end{matrix}$$

El producto XB es posible cuando $n = 3$ obteniéndose una matriz $m \times 3$.

Para que sea posible la suma $XB + A$ la matriz debe ser de dimensiones 2×3 , por lo que m debe ser 2.

La matriz X es de dimensiones 2×3 .

Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$XB + A = C \Rightarrow XB = C - A \Rightarrow X = (C - A)B^{-1}$$

Comprobamos que la matriz B es invertible y calculamos su inversa.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{\text{Adj}(B^T)}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos a la obtención de la matriz X .

$$X = (C - A)B^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0-2 & 0+0+1 & -6+0+5 \\ -1+0-4 & 0+0+2 & 2+0+10 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

b.- Obtenemos la expresión matricial del sistema.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_B \Rightarrow AX = B$$

La ecuación matricial se resuelve despejando $X \rightarrow AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$.

Hallamos la inversa de la matriz A y calculamos la expresión de X.

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x + 3y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}_B \Rightarrow AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 15 + 9 + 9 + 5 - 6 = 0$$

No existe la inversa de A. El sistema no es compatible determinado.
Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 3 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \\ -3 \quad 3 \quad -3 \quad -3 \\ \hline 0 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 2 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 2 \quad -5 \quad 3 \quad 1 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad -3 \quad 1 \quad -1 \rightarrow \text{Nueva Fila 1}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 6 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad -6 \quad 2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ -3y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ z = -1 + 3y \end{array} \right\} \Rightarrow x - y - 1 + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 - 2y \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

2.- (10 puntos) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, A y B. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante A cuesta 4 € y uno del B cuesta 6 €. Un saco del fertilizante A contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del B contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

a.- Llamamos x = número de sacos A, y = número de sacos B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº unidades de nitrógeno	Nº unidades de fósforo	Nº unidades de potasio	Coste
Nº sacos A (x)	$3x$	$5x$	x	$4x$
Nº sacos B (y)	$2y$	$2y$	$2y$	$6y$
TOTALES	$3x+2y$	$5x+2y$	$x+2y$	$4x+6y$

Queremos minimizar los costes: $C(x, y) = 4x + 6y$

Las restricciones son:

“Debe comprar como máximo 100 sacos” $\rightarrow x + y \leq 100$

“Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio” $\rightarrow 3x + 2y \geq 180; 5x + 2y \geq 200; x + 2y \geq 80$

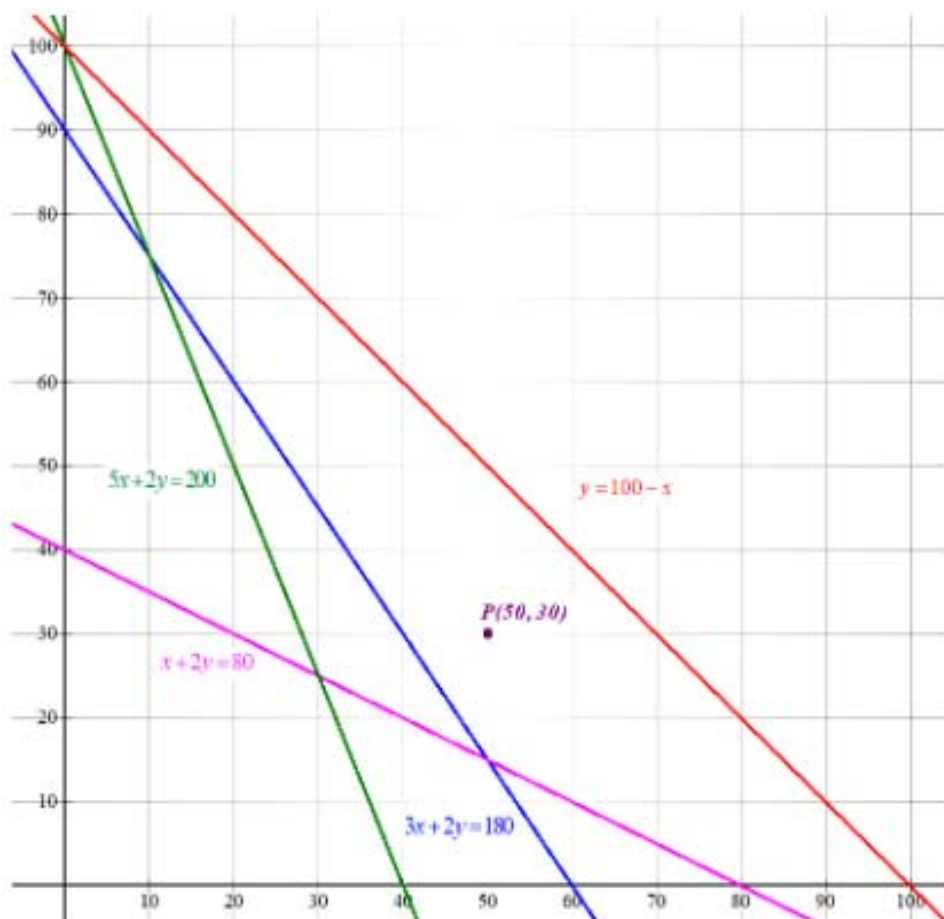
Las cantidades deben ser positivas $\rightarrow x \geq 0; y \geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$y = 100 - x$		$3x + 2y = 180$		$5x + 2y = 200$		$x + 2y = 80$		$x \geq 0; y \geq 0$
x	$y = 100 - x$	x	$y = \frac{180 - 3x}{2}$	x	$y = \frac{200 - 5x}{2}$	x	$y = \frac{80 - x}{2}$	
0	120	0	78	0	60	0	60	Primer cuadrante
70	50	45	60	10	60	10	60	
120	0	70	50					



$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ Como las restricciones son } \left. \begin{array}{l} x + y \leq 100 \\ 3x + 2y \geq 180 \\ x + 2y \geq 80 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ la región factible es la región del primer cuadrante}$$

que está por debajo de la recta roja y por encima de las rectas azul, rosa y verde.
Comprobamos que el punto $P(50, 30)$ perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left. \begin{array}{l} 50 + 30 \leq 100 \\ 3 \cdot 50 + 2 \cdot 30 \geq 180 \\ 5 \cdot 50 + 2 \cdot 30 \geq 200 \\ 50 + 2 \cdot 30 \geq 80 \\ 50 \geq 0; 30 \geq 0 \end{array} \right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función costes $C(x, y) = 4x + 6y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

$$A(100, 0) \rightarrow C(100, 0) = 400$$

$$B(80, 0) \rightarrow C(80, 0) = 320$$

$$C(50, 15) \rightarrow C(50, 15) = 200 + 90 = 290 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$D(10, 75) \rightarrow C(10, 75) = 40 + 450 = 490$$

$$E(0, 100) \rightarrow C(0, 100) = 600$$

El valor mínimo es 290 y se obtiene en el punto $C(50, 15)$.

Con 50 sacos A y 15 sacos B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un mínimo coste de 290 €.

3.- (10 puntos) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (5 puntos) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (5 puntos) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$?

a.- Los ingresos son $I(x) = 400x$, por lo que la función beneficios es:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 400x - (x^2 + 80x + 10.000) = -x^2 + 320x - 10000$$

Utilizamos la derivada para hallar sus puntos críticos.

$$B(x) = -x^2 + 320x - 10000 \Rightarrow B'(x) = -2x + 320$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 320 = 0 \Rightarrow 2x = 320 \Rightarrow x = \frac{320}{2} = 160$$

Comprobamos si el punto crítico obtenido es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada.

$$B'(x) = -2x + 320 \Rightarrow B''(x) = -2 \Rightarrow B''(160) = -2 < 0 \Rightarrow x = 160 \text{ es máximo}$$

El beneficio es máximo con 160 unidades producidas y vendidas.

$$B(160) = -160^2 + 320 \cdot 160 - 10000 = 15600$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 15600 €.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 80x + 10.000}{x} = x + 80 + \frac{10000}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} CM'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2} \\ CM'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{10000}{x^2} \Rightarrow x^2 = 10000 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{10000} = +100}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda en $x = 100$.

$$CM'(x) = 1 - \frac{10000}{x^2} = 1 - 10000x^{-2} \Rightarrow CM''(x) = -(-2)10000x^{-3} = \frac{20000}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM''(100) = \frac{20000}{100^3} > 0 \Rightarrow \boxed{x = 100 \text{ es mínimo}}$$

El coste medio se minimiza en un nivel de producción de 100 unidades.

4.- (10 puntos) Dada $f(x) = \frac{mx^3 - 1}{x^2}$.

a.- (6 puntos) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- (4 puntos) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x) dx = 4$

a.- Para que la función tenga un extremo relativo en $x = -1$ la derivada debe anularse $\rightarrow f'(-1) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(3mx^2)x^2 - 2x(mx^3 - 1)}{x^4} = \frac{3mx^4 - 2mx^4 + 2x}{x^4} = \frac{mx^4 + 2x}{x^4} = \frac{mx^3 + 2}{x^3}$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow \frac{m(-1)^3 + 2}{(-1)^3} = 0 \Rightarrow \frac{-m + 2}{-1} = 0 \Rightarrow -m + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

El valor del parámetro es $m = 2$.

La función queda $f(x) = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$.

Para decidir si es máximo o mínimo calculamos el signo de la derivada segunda en $x = -1$.

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{6x^2x^3 - 3x^2(2x^3 + 2)}{(x^3)^2} = \frac{6x^5 - 6x^5 - 6x^2}{x^6} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^4}$$

$$f''(-1) = \frac{-6}{(-1)^4} = -6 < 0 \Rightarrow \boxed{x = -1 \text{ es máximo relativo}}$$

En $x = -1$ hay un máximo relativo.

b.- Calculamos la integral indefinida.

$$\int f(x) dx = \int \frac{mx^3 - 1}{x^2} dx = \int \frac{mx^3}{x^2} - \frac{1}{x^2} dx = \int mx - x^{-2} dx = m \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{m}{2} x^2 + \frac{1}{x}$$

Lo aplicamos a lo pedido.

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[\frac{m}{2} x^2 + \frac{1}{x} \right]_1^2 = \left[\frac{m}{2} 2^2 + \frac{1}{2} \right] - \left[\frac{m}{2} 1^2 + \frac{1}{1} \right] = 2m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m - 1 = \frac{3}{2} m - \frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 f(x) dx = 4 \Rightarrow \frac{3}{2} m - \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow 3m - 1 = 8 \Rightarrow 3m = 9 \Rightarrow \boxed{m = 3}$$

El valor del parámetro es $m = 3$.

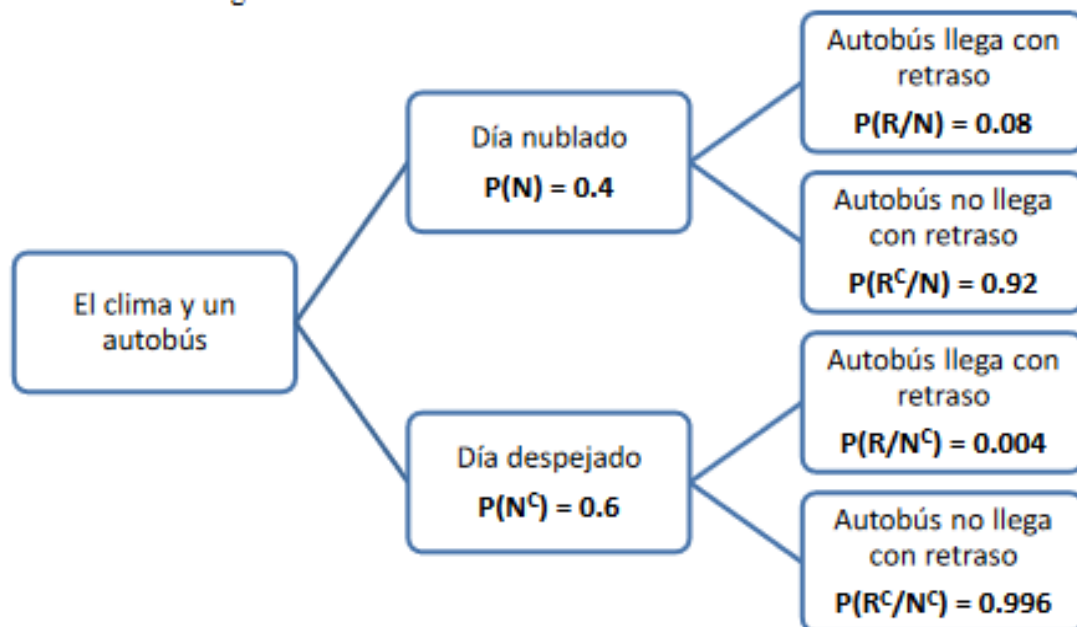
5.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (6 puntos) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (4 puntos) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ y $P(A \cup B) = 3/4$. Calcule $P(A \cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A \cap \bar{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

a.- La probabilidad de que un día sea nublado es $8/20 = 0.4$ y de que sea despejado es 0.6. Llamamos N al suceso "Día nublado" y R al suceso "el autobús llega con retraso".

Realizamos un diagrama de árbol.



Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(N)P(R/N) + P(N^c)P(R/N^c) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.08 + 0.6 \cdot 0.004 = \boxed{0.0344}
 \end{aligned}$$

b.- Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos.

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{3}{4} &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4} = 0.25}
 \end{aligned}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{8}{20} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

Calculamos $P(A \cap \bar{B})$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow \frac{3}{8} = \frac{1}{4} + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{8} = 0.125}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap B) = \frac{1}{4} = 0.25 \\ P(A)P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64} = 0.234375 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

6.- (10 puntos) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.

a.- (5 puntos) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (4 puntos) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c.- (1 punto) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado b.- si hay motivos para dudar de su afirmación.

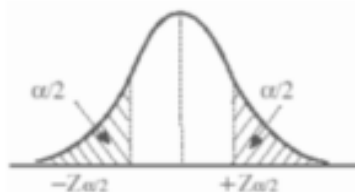
Sea X la variable aleatoria que mide el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles.

$$X = N(\mu, 3000)$$

- a. Si la amplitud del intervalo no es superior a 2000 € entonces el error no debe ser superior a $2000/2 = 1000$ €.

Para un nivel de confianza del 96%

$$1 - \alpha = 0,96 \rightarrow \alpha = 0,04 \rightarrow \alpha/2 = 0,02 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,98 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.055$$



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000 = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000\sqrt{n} = 2.055 \cdot 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.055 \cdot 3000}{1000} \Rightarrow n = \left(\frac{2.055 \cdot 3000}{1000} \right)^2 = \boxed{38.007}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo es de 39 hogares españoles.

- b.- Para un nivel de confianza del 96% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.055$. $n = 60$. $\bar{x} = 17000$.

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{3000}{\sqrt{60}} = 795.9$$

El intervalo de confianza es:

$$(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error) = (17000 - 795.9, 17000 + 795.9) = (16204.1, 17795.9)$$

- c.- Como 20000 no pertenece al intervalo de confianza hallado con un nivel de confianza del 96% podemos afirmar que es dudosa su afirmación.