

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2023

Comunidad autónoma de CATALUÑA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Generalitat de Catalunya





EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2022–2023**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

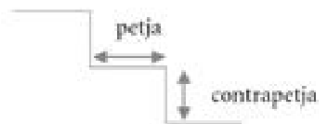
Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

1. El preu d'un vol entre Barcelona i Islàndia és de 500 €. Una companyia aèria té capacitat per a 300 passatgers diaris, però hi ha una determinada època de l'any en què només ven 180 bitllets. Després de fer un estudi de mercat, la companyia s'adona que la relació entre el preu del bitllet i el nombre de passatgers és lineal, de manera que per cada 5 € de descompte en el preu del bitllet aconsegueix dos passatgers més.
 - a) Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte, escribiu la funció que dona els ingressos diaris de la companyia per la venda de bitllets en funció de x .
[1 punt]
 - b) A quin preu cal vendre cada bitllet per a obtenir el màxim d'ingressos? Quins ingressos s'obtindran amb aquest preu?
[1,5 punts]
2. Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.
 - a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.
[1,25 punts]
 - b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?
[1,25 punts]

3. En Robert ha fet tres proves d'una assignatura. Fent la mitjana aritmètica de les notes obtingudes en cadascuna de les tres proves li ha quedat una nota global de 6. En Robert sap que la nota de la tercera prova ha estat igual que la mitjana aritmètica de les notes de les altres dues proves.
- a) Amb aquesta informació, pot saber alguna de les tres notes? En cas afirmatiu, de quina prova i quina seria la nota obtinguda?
[1,25 punts]
- b) La professora li diu que ha estat molt irregular i que si només es tinguessin en compte les notes de les dues darreres proves hauria obtingut una mitjana de 7. Quina nota ha obtingut en cada prova?
[1,25 punts]
4. Una empresa de Menorca vol oferir dos tipus d'activitats: bateigs de submarinisme des d'una barca i excursions en barca per la costa per a banyar-se en cales. El bateig de submarinisme té un preu de 60 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 10 participants i 5 instructors. L'excursió per la costa té un preu de 18 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 25 participants i 2 instructors. L'empresa disposa de 30 embarcacions iguals i de 75 instructors que poden fer sortides de submarinisme o excursions en barca per les cales indistintament. La seva intenció és obtenir el màxim d'ingressos suposant que omplirà totes les embarcacions.
- a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]
- b) Quantes sortides de cada tipus ha d'oferir l'empresa cada dia per a obtenir el màxim d'ingressos? Quants diners ingressarà diàriament?
[1,25 punts]
5. El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular mitjançant la funció $f(t) = 10 \left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 \right)$, en què t és el temps en dies i va des del dia $t = 1$ (dilluns) fins al dia $t = 8$ (dilluns de la setmana següent).
- a) Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100 kg de menjar.
[1 punt]
- b) Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?
[1,5 punts]

6. Quan es dissenyen els esglaons d'una escala hi ha diversos paràmetres que cal tenir en compte, dos dels quals són la *petja* (la part horitzontal de l'esglaó, on es posa el peu) i la *contrapetja* (la part vertical del graó, és a dir, l'alçària).



L'arquitecte francès François Blondel va establir a finals del segle XVII que la relació ideal entre aquestes dues magnituds era que la suma de dues contrapetges més una petja fos igual a 64 cm.

Anomenem y la longitud de la contrapetja i x la longitud de la petja.

- a) Trobeu la funció que permet calcular la longitud ideal de la contrapetja en funció de la longitud de la petja. Quina seria la longitud ideal de la contrapetja si la petja és de 28 cm?
[1 punt]
- b) La normativa actual estableix que en el disseny d'escales d'ús públic cal que la petja sigui com a mínim de 28 cm i que la contrapetja estigui compresa entre 13 i 18,5 cm. A més a més, la suma de dues contrapetges més una petja ha d'estar entre 54 i 70 cm. Escriviu aquestes tres condicions en funció de x i de y . Si volem construir una escala amb esglaons de 40 cm de petja, calculeu entre quins valors ha d'estar compresa la contrapetja per a complir amb la normativa actual.

[1,5 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

1. El preu d'un vol entre Barcelona i Islàndia és de 500 €. Una companyia aèria té capacitat per a 300 passatgers diaris, però hi ha una determinada època de l'any en què només ven 180 bitllets. Després de fer un estudi de mercat, la companyia s'adona que la relació entre el preu del bitllet i el nombre de passatgers és lineal, de manera que per cada 5 € de descompte en el preu del bitllet aconsegueix dos passatgers més.
 - a) Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte, escriuiu la funció que dona els ingressos diaris de la companyia per la venda de bitllets en funció de x .
[1 punt]
 - b) A quin preu cal vendre cada bitllet per a obtenir el màxim d'ingressos? Quins ingressos s'obtidran amb aquest preu?
[1,5 punts]

Resolució:

- a) Sigui x , el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 5 €. La funció que dona els ingressos per la venda de bitllets és el producte entre el preu del bitllet i el nombre de bitllets venuts:

$$I(x) = (500 - 5x) \cdot (180 + 2x) = -10x^2 + 100x + 90\,000$$

- b) Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:

$$I'(x) = -20x + 100.$$

Iguallem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 5$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 5$ i és negativa per a $x > 5$.

Per tant, el preu del bitllet per maximitzar els ingressos ha de ser de $500 - 5 \cdot 5 = 475$ €. I, amb aquest preu, els ingressos de la companyia per la venda de bitllets seran de $I(x) = 475 \cdot 190 = 90\,250$ €.

Criteris de correcció:

- a) Obtenció de la funció que dona el preu del bitllet en funció de x : 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona el nombre de passatgers en funció de x : 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x : 0,5 punts.
- b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu del bitllet: 0,25 punts. Obtenció dels ingressos màxims: 0,25 punts.

2. Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.
- a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.
[1,25 punts]
- b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?
[1,25 punts]

Resolució:

- a) Cal fer el producte de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} 0,15 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,10 & 0 \\ 0,05 & 0,60 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Per tant, per al curs vinent cal reservar 15 places de nivell principiant, 59 de nivell intermedi i 71 de nivell avançat.

- b) Cal resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Es pot fer per diversos mètodes, per exemple pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & | & 49 \\ 0,3 & 0,6 & | & 51 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 4 & | & 490 \\ 3 & 6 & | & 510 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 12 & | & 1470 \\ 15 & 30 & | & 550 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 15 & 12 & | & 1470 \\ 0 & 18 & | & 1080 \end{pmatrix}$$

I, per tant, $18y = 1080$, és a dir, $y = 60$ i $15x + 12 \cdot 60 = 1470$, d'on s'obté que $15x = 750$, és a dir, $x = 50$. Així doncs, actualment hi ha 50 alumnes matriculats en l'horari de matí i 60 en l'horari de tarda.

Criteris de correcció:

a) Plantejament: 0,5 punts. Producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del resultat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

3. En Robert ha fet tres proves d'una assignatura. Fent la mitjana aritmètica de les notes obtingudes en cadascuna de les tres proves li ha quedat una nota global de 6. En Robert sap que la nota de la tercera prova ha estat igual que la mitjana aritmètica de les notes de les altres dues proves.
- a) Amb aquesta informació, pot saber alguna de les tres notes? En cas afirmatiu, de quina prova i quina seria la nota obtinguda?
[1,25 punts]
- b) La professora li diu que ha estat molt irregular i que si només es tinguessin en compte les notes de les dues darreres proves hauria obtingut una mitjana de 7. Quina nota ha obtingut en cada prova?
[1,25 punts]

Resolució:

- a) Si anomenem respectivament x , y i z els resultats de cadascuna de les tres proves, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \frac{x+y}{2} \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions, i aplicant el mètode de Gauss obtenim:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \end{cases}$$

Obtenim, per tant, el valor de $z = 6$. Així doncs, la nota de la tercera prova ha estat un 6.

- b) Afegint la nova informació, el sistema queda:

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \frac{x+y}{2} \\ \frac{y+z}{2} = 7 \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions i aplicant el mètode de Gauss, ens queda:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \\ y+z=14 \end{cases} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \\ y+z=14 \end{cases}$$

Com que tenim un sistema esglaonat, podem resoldre'l fàcilment i obtenim $z = 6$, $y = 8$ i $x = 4$.

Així doncs, ha obtingut un 4 a la primera prova, un 8 a la segona i un 6 a la tercera.

Criteris de correcció:

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per cada una de les dues equacions. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar el valor correcte de z : 0,25 punts.

b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar els valors correctes de x i y : 0,5 punts.

4. Una empresa de Menorca vol oferir dos tipus d'activitats: bateigs de submarinisme des d'una barca i excursions en barca per la costa per a banyar-se en cales. El bateig de submarinisme té un preu de 60 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 10 participants i 5 instructors. L'excursió per la costa té un preu de 18 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 25 participants i 2 instructors. L'empresa disposa de 30 embarcacions iguals i de 75 instructors que poden fer sortides de submarinisme o excursions en barca per les cales indistintament. La seva intenció és obtenir el màxim d'ingressos suposant que omplirà totes les embarcacions.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.

[1,25 punts]

- b) Quantes sortides de cada tipus ha d'oferir l'empresa cada dia per a obtenir el màxim d'ingressos? Quants diners ingressarà diàriament?

[1,25 punts]

Resolució:

4.

- a) Denotem per x el nombre de barques que faran bateigs de submarinisme i per y el nombre de barques que faran excursions per la costa per banyar-se en cales. Les restriccions provenen de la limitació en el nombre d'instructors i d'embarcacions. El sistema d'inequacions determinat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

La regió factible serà:



I la funció objectiu és: $F(x, y) = 60 \cdot 10x + 18 \cdot 25y = 600x + 450y$

- b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (5, 25)$, $B = (0, 30)$, $C = (0, 0)$ i $D = (15, 0)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$$F(A) = 14\,250, \quad F(B) = 13\,500, \quad F(C) = 0 \quad \text{i} \quad F(D) = 9\,000.$$

Deduïm, per tant, que per obtenir el màxim d'ingressos caldria fer 5 bateigs de submarinisme i 25 excursions per la costa. Amb aquestes sortides ingressarien 14 250 euros diaris.

5. El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular mitjançant la funció $f(t) = 10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right)$, en què t és el temps en dies i va des del dia $t = 1$ (dilluns) fins al dia $t = 8$ (dilluns de la setmana següent).
- a) Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100 kg de menjar.
[1 punt]
- b) Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?
[1,5 punts]

Resolució:

- a) Comencem calculant els quilos de menjar que es van gastar els dos dilluns:

$$f(1) = 10\left(-\frac{1^3}{8} + \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{9 \cdot 1}{2} + 10\right) = \frac{550}{8} = \frac{275}{4} = 68,75 \text{ kg}$$

$$f(8) = 10\left(-\frac{8^3}{8} + \frac{3 \cdot 8^2}{2} - \frac{9 \cdot 8}{2} + 10\right) = 60 \text{ kg}$$

Ara hem de trobar quin dia es van gastar 100 kg de menjar:

$$10\left(-\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10\right) = 100 \rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} + 10 = 10$$

$$\rightarrow -\frac{t^3}{8} + \frac{3t^2}{2} - \frac{9t}{2} = 0 \rightarrow -t^3 + 12t^2 - 36t = 0$$

$$\rightarrow -t(t^2 - 12t + 36) = 0 \rightarrow -t(t - 6)^2 = 0 \rightarrow t = 0 \text{ i } t = 6$$

Com que $t = 0$ no és del domini d'aquesta funció, la solució és $t = 6$, és a dir, el dissabte es van gastar 100 kg de menjar.

- b) Per buscar els extrems relatius de $f(t)$, cal igualar a zero la derivada:

$$f'(t) = 10\left(-\frac{3t^2}{8} + 3t - \frac{9}{2}\right) = 0 \rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \rightarrow$$

$$(t - 6) \cdot (t - 2) = 0 \rightarrow t = 6 \text{ i } t = 2$$

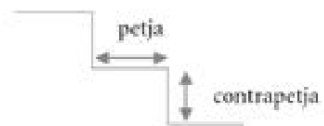
Ara cal comprovar quin és el màxim i quin és el mínim:

	1	(1, 2)	2	(2, 6)	6	(6, 8)	8
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	68,75 kg	Decreix.	Mínim (2, 60)	Creix.	Màxim (6, 100)	Decreix.	60 kg

$$f(2) = 10\left(-\frac{2^3}{8} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} - \frac{9 \cdot 2}{2} + 10\right) = 60 \text{ kg.}$$

Els dies que la despesa en menjar va ser més petita són el dia 2 (dimarts) i el dia 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 60 kg, i el dia que es va gastar més menjar va ser el dia 6 (dissabte), amb 100 kg.

6. Quan es dissenyen els esglaons d'una escala hi ha diversos paràmetres que cal tenir en compte, dos dels quals són la *petja* (la part horitzontal de l'esglaó, on es posa el peu) i la *contrapetja* (la part vertical del graó, és a dir, l'alçària).



L'arquitecte francès François Blondel va establir a finals del segle XVII que la relació ideal entre aquestes dues magnituds era que la suma de dues contrapetges més una petja fos igual a 64 cm.

Anomenem y la longitud de la contrapetja i x la longitud de la petja.

- a) Trobeu la funció que permet calcular la longitud ideal de la contrapetja en funció de la longitud de la petja. Quina seria la longitud ideal de la contrapetja si la petja és de 28 cm?
- [1 punt]
- b) La normativa actual estableix que en el disseny d'escales d'ús públic cal que la petja sigui com a mínim de 28 cm i que la contrapetja estigui compresa entre 13 i 18,5 cm. A més a més, la suma de dues contrapetges més una petja ha d'estar entre 54 i 70 cm. Escriviu aquestes tres condicions en funció de x i de y . Si volem construir una escala amb esglaons de 40 cm de petja, calculeu entre quins valors ha d'estar compresa la contrapetja per a complir amb la normativa actual.

[1,5 punts]

Resolució:

- a) Sabem que $2y + x = 64$. Per tant, aïllant, obtenim que: $y = \frac{64-x}{2}$

D'altra banda, si $x = 28$, substituïnt obtenim que: $y = \frac{64-28}{2} = 18$ cm

Per tant, la longitud ideal de la contrapetja és de 18 cm.

- b) Les inequacions que estableix la normativa són les següents:

$$\begin{cases} x \geq 28 \\ 13 \leq y \leq 18,5 \\ 54 \leq 2y + x \leq 70 \end{cases}$$

Així doncs, si $x = 40$, es compleix la primera condició. Pel que fa a la tercera, d'una banda tenim que $2y + 40 \leq 70$, que ens dona que $y \leq 15$. D'altra banda, cal que $2y + 40 \geq 54$, que ens dona que $y \geq 7$.

També sabem que cal que $13 \leq y \leq 18,5$. Per tant, ajuntant totes les condicions, sabem que cal que la contrapetja estigui entre 13 i 15 cm.

Criteris de correcció:

a) Escriure la condició en forma d'equació: 0,25 punts. Obtenir y en funció de x : 0, 5 punts. Trobar la longitud de la contrapetja: 0,25 punts.

b) Obtenció de les inequacions: 0,25 punts cadascuna. Treballar bé les desigualtats en el cas concret que $x = 40$: 0, 5 punts. Resultat final: 0,25 punts.



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
(EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2022–2023**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS
SOCIALES II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

- La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.
- Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información. [1 punto]
 - ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades? [1,5 puntos]

Problema 2:

- Un fabricante de vehículos eléctricos ha sacado al mercado un nuevo modelo con tanto éxito que vende todos los que fabrica. El precio de venta de cada coche es de 35.000€. Fabricar un cierto número de coches le supone unos gastos de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en los que x representa el número de vehículos fabricados.
- ¿Entre qué valores debe mantener la producción para no tener pérdidas? [1,25 puntos]
 - ¿Cuántos vehículos debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Qué valor toma ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

Problema 3:

- Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24.000 kg y la de mandarinas, de 12.000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.
- Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
 - Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos. [1,25 puntos]

Problema 4:

4. El número de nuevas personas infectadas por una enfermedad, en miles, es dado por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, t \geq 0$$

donde t representa el tiempo transcurrido, en semanas, desde que se inició la infección.

- a) ¿Cuántos enfermos se infectarán en la semana 1 y cuántos en la semana 2? ¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer? [1 punto]
 b) ¿En qué instante se produce el número máximo de infectados por esta enfermedad? ¿Cuál es ese número? [1,5 puntos]

Problema 5:

5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$. [1 punto]
 b) Para $a = -1$, calcule A^2 , A^3 , y A^4 . Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23} . [1,5 puntos]

Problema 6:

6. Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4×3 , es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20% de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.
 a) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4×3 ? [1,5 puntos]
 b) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m - 1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1. [1 punto]

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.
- a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información. [1 punto]
- b) ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades? [1,5 puntos]

Resolució:

SÈRIE 2

1.

- a) Si anomenem x el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic, y el nombre de persones que han practicat caiac i z el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 45 \\40x + 20y + 60z &= 1700 \\x &= 3y\end{aligned}$$

- b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 45 \\ 2x + y + 3z = 85 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 45 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

Per tant, tenim que $5z = 25$, és a dir, $z = 5$, $y - 5 = 5$, per tant $y = 10$ i, finalment, $x + 10 + 5 = 45$, és a dir, $x = 30$.

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

Criteris de correcció:

- a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.
- b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.

Problema 2:

2. Un fabricante de vehículos eléctricos ha sacado al mercado un nuevo modelo con tanto éxito que vende todos los que fabrica. El precio de venta de cada coche es de 35.000€. Fabricar un cierto número de coches le supone unos gastos de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en los que x representa el número de vehículos fabricados.
- a) ¿Entre qué valores debe mantener la producción para no tener pérdidas? [1,25 puntos]
- a) ¿Cuántos vehículos debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Qué valor toma ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

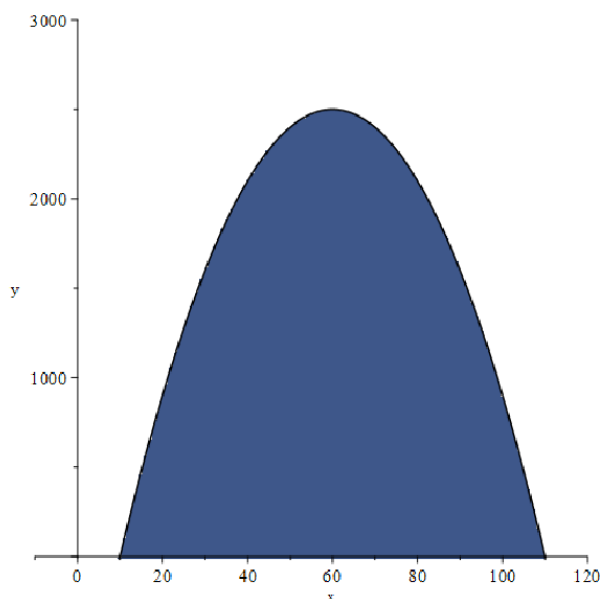
Resolució:**2.**

- a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:

$$-x^2 + 120x - 1100 \geq 0$$



Comencem resolent l'equació $-x^2 + 120x - 1100 = 0$, que té per solucions $x = 10$ i $x = 110$. Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és $x \in [10, 110]$. Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

- b) Per a obtenir el màxim igulem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x + 120 \\ -2x + 120 &= 0 \\ x &= 60\end{aligned}$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

	$[0,60)$	60	$(60,110]$
$f'(x)$	Positiu	Zero	Negatiu
$f(x)$	Creixent	Màxim	Decreixent

Per tant, cal fabricar 60 vehicles i el benefici obtingut serà de $f(60) = 2500$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar la funció que dona els beneficis: 0,5 punts. Resoldre l'equació: 0,5 punts. Justificar que la solució està entre 10 i 100: 0,25 punts.

b) Calcular la derivada: 0,5 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts.

Problema 3:

3. Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24.000 kg y la de mandarinas, de 12.000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.
- a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]
- b) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos. [1,25 puntos]

Resolució:**3.**

- a) Denotem per x el nombre de caixes tipus A i per y el nombre de caixes tipus B. El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \end{cases}$$

Els ingressos per la venda d'una caixa del tipus A és: $8 \cdot 0,60 + 2 \cdot 0,70 = 6,2$ €, i els ingressos per la venda d'una caixa del tipus B és: $5 \cdot 0,60 + 5 \cdot 0,70 = 6,5$ €.

Per tant, la funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les caixes, és:

$$F(x, y) = 6,2x + 6,5y$$

- b) Els vèrtexs de la regió factible són: (0,0), (3000,0), (2000,1600) i (0,2400). Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

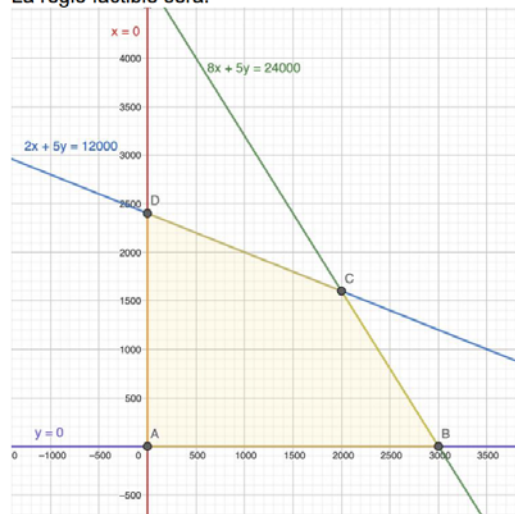
$$F(0,0) = 0$$

$$F(3000,0) = 18600$$

$$F(2000,1600) = 22800$$

$$F(0,2400) = 15600$$

La regió factible serà:



Per tant, els ingressos màxims s'obtenen venent 2.000 caixes del tipus A i 1.600 caixes del tipus B i són de 22.800 €.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.

Problema 4:

4. El número de nuevas personas infectadas por una enfermedad, en miles, es dado por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4}, t \geq 0$$

donde t representa el tiempo transcurrido, en semanas, desde que se inició la infección.

- a) ¿Cuántos enfermos se infectarán en la semana 1 y cuántos en la semana 2? ¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer? [1 punto]
 b) ¿En qué instante se produce el número máximo de infectados por esta enfermedad? ¿Cuál es ese número? [1,5 puntos]

Resolució:

4.

- a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10 \text{ milers d'infectats i}$$

$$f(2) = \frac{30 \cdot 2}{4-4+4} = 15 \text{ milers d'infectats.}$$

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

- b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igulem a zero obtenim com a possibles extrems $t = -2$ (que no té sentit en el context del problema, ja que $t \geq 0$) i $t = 2$.

Com que $f'(1) > 0$, $f'(3) < 0$ deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a $t = 2$ i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de $f(2) = 15$ milers de persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun.
 Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.

Problema 5:

5. Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

- a) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$. [1 punto]
 b) Para $a = -1$, calcule A^2 , A^3 , y A^4 . Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23} . [1,5 puntos]

Resolució:

5.

- a) Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igulem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 2a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1 + 2a = 1$ i per tant $a = 0$.

- b) Per a $a = -1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.

D'altra banda,

$$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$$

Criteris de correcció:

- a) Càlcul A^2 : 0,5 punts. Trobar el valor de a : 0,5 punts.

- b) Càlcul de A^2 , A^3 i A^4 : 0,5 punts en total. Deducir el valor de A^{-1} : 0,5 punts. Deducir el valor de A^{23} : 0,5 punts.

Problema 6:

6. Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4×3 , es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20% de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.
- a) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4×3 ? [1,5 puntos]
- b) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m - 1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1. [1 punto]

Resolució:**6.**

- a) Amb l'oferta 4×3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$$0,70 \cdot 3 = 2,10 \text{ euros.}$$

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$$0,70 \cdot 4 = 2,80 \text{ euros}$$

I ara restem al resultat un 20%

$$2,80 \text{ euros} - 0,20 \cdot 2,80 \text{ euros} = 2,24 \text{ euros}$$

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara x el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2,80 \text{ euros} - 2,80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2,10 \text{ euros}$$

$$2,80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2,10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4x3.

- b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta $m \times (m - 1)$ igualem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0,70 \cdot m - 0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0,70 \cdot (m - 1)$$

$$0,70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0,70 \cdot m - 0,70$$

$$-0,70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0,70$$

Aïllant la x obtenim $x = \frac{100}{m}$ que és el percentatge que buscàvem.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu amb l'oferta 4x3: 0,25 punts. Càlcul del preu amb l'oferta del 20%: 0,25 punts. Plantejament de l'equació per a trobar el percentatge: 0,5 punts. Resolució de l'equació i trobar el percentatge que iguala l'oferta: 0,5 punts.

b) Plantejament de la nova equació: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts.