MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f: (0, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = Lx$, donde L denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1, 0)$ y $B(e, 1)$.

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

Problema 2:

2º) Considera la función continua f definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos x - a \cdot sen\, x}{x^3} & si \;\; x < 0 \\ b \cdot \cos x - 1 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

Calcula los valores de a y b.

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Considera la función f, definida por $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x \neq -1$ y $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(0, 1)$.

Problema 4:

4º) Halla la función $f: R \to R$ tal que $f''(x) = x \cdot \cos x$ y cuya gráfica pasa por los puntos $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $B(\pi, 2\pi)$.

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcula A^{2024}.

$b)$ Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Problema 6:

6º) Considera el sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$.

$a)$ Discute el sistema según los valores de k.

$b)$ Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Problema 7:

BLOQUE D

7º) $a)$ Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.

$b)$ Halla el único punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

Problema 8:

8º) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

$a)$ Estudia la posición relativa de r y s.

$b)$ Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidiste de ambas rectas.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f:(0,+\infty)\to R$ definida por $f(x)=Lx$, donde L denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

Solución:

a)

Los puntos $A(1,0), B(e,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(e,1)-(1,0)]=(e-1,1)$.

La pendiente del vector $\overrightarrow{AB}$ es $m=\frac{1}{e-1}$.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow m=f'(x)\Rightarrow\frac{1}{e-1}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=e-1.\qquad f(x)=L(e-1).$

El único punto que cumple la condición pedida es: $\underline{P[e-1,L(e-1)]}$.

b)

La pendiente de la recta normal a la gráfica de una función en un punto es inversa y de signo contrario al valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$m'=\frac{1}{m}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x.\qquad$ Para el punto $A(1,0)\Rightarrow m'=1$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto $A(1,0)$ con $m'=1$ es:

$y-0=1\cdot(x-1)=x-1$.

$\underline{La\ recta\ normal\ pedida\ es\ n\equiv x-y-1=0}$.

Problema 2:

2º) Considera la función continua f definida por: $f(x)=\begin{cases}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3} & si\ \ x<0\\ b\cdot\cos x-1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$.

Calcula los valores de a y b.

Solución:

La función f es continua en R, excepto para $x=0$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3}=-\frac{1}{3}\ (*)\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(b\cdot\cos x-1)=b-1=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow-\frac{1}{3}=b-1;\ b=1-\frac{1}{3}\Rightarrow \underline{b=\frac{2}{3}}.$$

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3}=\frac{0\cdot\cos 0-a\cdot sen\,0}{0^3}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot\cos x-x\cdot sen\,x-a\cdot\cos x}{3x^2}=\frac{\cos 0-0\cdot sen\,0-a\cdot\cos 0}{3\cdot 0^2}=\frac{1-0-a}{0}\Rightarrow$ Tiene que ser, necesariamente, $\underline{a=1}$; en caso contrario el límite sería infinito y la función no sería continua.

El valor del límite es el siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\cdot sen\,x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot sen\,x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{sen\,0}{0}=-\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=-\frac{1}{3}.$$

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Considera la función f, definida por $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1$ y $x\neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(0,1)$.

Solución:

$$\boldsymbol{F(x)}=\int f(x)dx=\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\int\left(x+\frac{x+2}{x^2-1}\right)dx=$$

$$=\int x\cdot dx+\int\frac{x+2}{x^2-1}\cdot dx=\frac{x^2}{2}+A=I. \quad (*)$$

$$A=\int\frac{x+2}{x^2-1}\cdot dx\Rightarrow\frac{x}{x^2-1}=\frac{M}{x+1}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+N}{(x+1)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+N)}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} M+N=1 \\ -M+N=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2N=3;\ \ N=\frac{3}{2};\ \ M+\frac{3}{2}=1\ \Rightarrow M=-\frac{1}{2}.$$

$$A=\int\frac{x}{x^2-1}\cdot dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot L|x+1|+\frac{3}{2}\cdot L|x-1|C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=L\sqrt{\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|}+C.$$

Sustituyendo el valor de A obtenido en (*):

$$F(x)=\int\frac{x^3+2}{x^2-1}\cdot dx=\frac{x^2}{2}+L\sqrt{\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|}+C.$$

Por contener $F(x)$ al punto $P(0,1)$ es $F(0)=1$.

$$F(0)=1\Rightarrow\frac{0^2}{2}+L\sqrt{\left|\frac{(0-1)^3}{0+1}\right|}+C=1;\ \ 0+L1+C=1\Rightarrow C=1.$$

$$\underline{F(x)=\frac{x^2}{2}+L\sqrt{\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|}+1.}$$

Problema 4:

4º) Halla la función $f: R \to R$ tal que $f''(x) = x \cdot \cos x$ y cuya gráfica pasa por los puntos $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $B(\pi, 2\pi)$.

Solución:

$$f'(x) = \int x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ \cos x \cdot dx = dv \to v = sen\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot dx \Rightarrow f'(x) = x \cdot sen\ x + \cos x + C_1.$$

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x \cdot sen\ x + \cos x + C_1) \cdot dx =$$

$$= \int x \cdot sen\ x \cdot dx + \int \cos x \cdot dx + \int C_1 \cdot dx \Rightarrow f(x) = A + sen\ x + C_1 x. \quad (*)$$

$$A = \int x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \to v = -\cos x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx \Rightarrow A = -x \cdot \cos x + sen\ x + C_2.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A:

$$f(x) = -x \cdot \cos x + sen\ x + C_2 + sen\ x + C_1 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot sen\ x - x \cdot \cos x + C_1 x + C_2.$$

Por pasar por $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(0) = \frac{\pi}{2}$:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 \cdot sen\ 0 - 0 \cdot \cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{2}.$$

La función resulta: $f(x) = 2 \cdot sen\ x - x \cdot \cos x + C_1 x + \frac{\pi}{2}$.

Por pasar por $A(\pi, 2\pi) \Rightarrow f(\pi) = 2\pi$:

$$f(\pi) = 2\pi \Rightarrow 2 \cdot sen\ \pi - \pi \cdot \cos \pi + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi;$$

$$2 \cdot sen\ \pi - \pi \cdot \cos \pi + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi; \;\; 2 \cdot 0 - \pi \cdot (-1) + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi;$$

$$\pi + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi; \;\; 1 + C_1 + \frac{1}{2} = 2; \;\; C_1 = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = 2 \cdot sen\ x - x \cdot \cos x + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot sen\ x - 2x \cdot \cos x + x + \pi)}.$$

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^{2024}.

b) Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Solución:

b) Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{8} & \frac{n}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2024}{8} & \frac{2024}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A^2 \cdot X \cdot A + I = O; \;\; A^2 \cdot X \cdot A = O - I = -I;$$

$$(A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = O - I = -(A^2)^{-1} \cdot I \cdot A^{-1}; \;\; I \cdot X \cdot I = -(A^2)^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = -(A^2)^{-1} \cdot A^{-1}. \quad (*)$$

Las inversas de A^{-1} y $(A^2)^{-1}$ se obtienen por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - \tfrac{1}{8}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - \tfrac{1}{8}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A^2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - \tfrac{1}{4}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \to F_1 - \tfrac{1}{4}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A^{-1} y $(A^2)^{-1}$:

$$X = -(A^2)^{-1} \cdot A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

6º) Considera el sistema $\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+y+z=k. \\ x+(k-1)y+z=0 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de k.

b) Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix}=(k-1)^2+1-1-(k-1)-(k-1)=0;$$

$$k^2-2k+1-2k+2=0; \;\; k^2-4k+3=0; \;\; k=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=$$

$$=2\pm 1 \Rightarrow k_1=1; \;\; k_2=3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} k\neq 1 \\ k\neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow \;\; Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ k=3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4+3-1=6\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ k=3 \Rightarrow Rang\ M=2; \;\; Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $k = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$, cuya solución es la siguiente:

$$\underline{Solución: x = 1 - \lambda, y = 1 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R}.$$

Existe la solución en la que $y = 0$; basta con hacer $\lambda = 0$:

$$\underline{Solución: x = 1,\ \ y = 1, z = 0}.$$

Problema 7:

BLOQUE D

7º) $a)$ Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.

$b)$ Halla el único punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$.

Solución:

$a)$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow z=-1+\lambda;\;\; x=2+2y-z=$$

$$=2+2\lambda+1-\lambda \Rightarrow x=3+\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}.$$

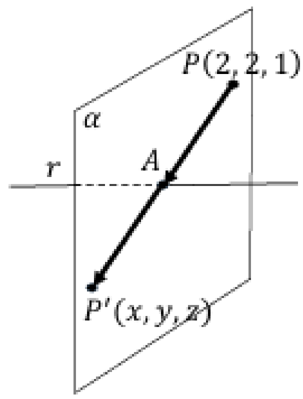
Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x+y+z+D=0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $P(2,2,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \beta \equiv x+y+z+D=0 \\ P(2,2,1) \end{array} \right\} \Rightarrow 2+2+1+D=0;\; D=-5;\;\; \alpha \equiv x+y+z-5=0.$$

El punto A intersección de r y α es el siguiente:



$$\left. \begin{array}{r} \alpha \equiv x+y+z=5 \\ r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 3+\lambda+\lambda-1+\lambda=5;$$

$$3\lambda+2=5;\;\; 3\lambda=3 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ y=1 \\ z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(4,1,0).$$

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AP'} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=[(4,1,0)-(2,2,1)]=(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OA}=[(x,y,z)-(4,1,0)]=(x-4,y-1,z) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

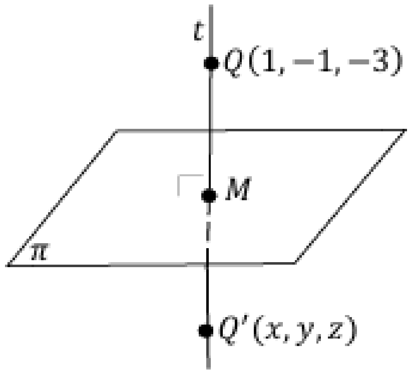
$$(2,-1,-1)=(x-4,y-1,z) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-4=2 \rightarrow x=6 \\ y-1=-1 \rightarrow y=0 \\ z=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P'(6,0,-1)}.$$

$b)$

La recta t que pasa por $Q(1,-1,-3)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,-2,1)$.

La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es $\Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:



$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x-2y+z+6=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(1+\lambda)-2\cdot(-1-2\lambda)+(-3+\lambda)+6=0;$

$1+\lambda+2+4\lambda-3+\lambda+6=0;\ \ 6\lambda=-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-1=0 \\ y=-1+2=1 \\ z=-3-1=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow M(0,1,-4)$. Debe cumplirse que $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{MQ'}$.

$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ}=[(0,1,-4)-(1,-1,-3)]=(-1,2,-1).$

$\overrightarrow{MQ'}=\overrightarrow{OQ'}-\overrightarrow{OM}=[(x,y,z)-(0,1,-4)]=(x,y-1,z+4).$

$$(-1,2,-1)=(x,y-1,z+4) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y-1=2 \rightarrow y=3 \\ z+4=-1 \rightarrow z=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P'(-1,3,-5)}.$$

Problema 8:

8º) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidiste de ambas rectas.

Solución:

a)

La expresión de r y s dadas por unas ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow z = 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \mu \Rightarrow x = -7 - \mu \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -7 - \mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 0, 2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-7, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-7, 0, 0) - (0, 0, 0)] = (-7, 0, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

b)

El vector normal del plano π pedido es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k - 2i = -2i - 2j + k \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1).$$

El plano π es de la forma $\pi \equiv 2x + 2y - z + D = 0$.

Por ser π paralelo a las rectas, la distancia del plano a cada una de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de las rectas.

Teniendo en cuente lo anterior y por ser equidistante de las rectas se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} d(\pi, r) = d(\pi, P) \\ d(\pi, s) = d(\pi, Q) \end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi, r) = d(\pi, s) \Rightarrow d(\pi, P) = d(\pi, Q).$$

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z + D = 0$ y a los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(-7, 0, 0)$:

$$d(\pi, A) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|D|}{\sqrt{9}} = \frac{|D|}{3}.$$

$$d(\pi, B) = \frac{|2 \cdot (-7) + 2 \cdot 0 - 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-14 + D|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-14 + D|}{\sqrt{9}} = \frac{|-14 + D|}{3}.$$

$$d(\pi, A) = d(\pi, B) \Rightarrow \frac{|D|}{3} = \frac{|-14 + D|}{3}; \ \ |D| = |-14 + D| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} D = -14 + D \\ D = 14 - D \end{array}\right\}$. La solución de la primera ecuación carece de sentido lógico, por lo cual:

$$D = 14 - D; \ \ 2D = 14 \Rightarrow D = 7.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x + 2y - z + 7 = 0}.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = a + b \cdot \cos x + c \cdot sen\, x$. Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Problema 2:

2º) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Sean $f, g: R \to R$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) Halla los puntos de intersección de f y g. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

Problema 4:

4º) Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx$.

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1.

Problema 6:

6º) Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2.200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1.250 euros.

a) ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?

b) Si añadimos que el precio de un perfume C es $2/5$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Problema 7:

BLOQUE D

7º) Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in R$.

a) Estudia la posición relativa de π y r.

b) Calcula la ecuación de la recta s contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r.

Problema 8:

8º) Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = a + b \cdot \cos x + c \cdot sen\, x$. Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = -b \cdot sen\, x + c \cdot \cos x.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b \cdot sen\, \frac{\pi}{2} + c \cdot \cos\frac{\pi}{2} = -b \cdot 1 + c \cdot 0 = -b.$$

La pendiente de la recta $y = 1$ es $m = 0$.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = m \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}.$$

El punto de corte de la función y la recta $y = x - 1$ es $P(0, -1)$, lo cual significa que $f(0) = -1$.

$$f(0) = -1 \Rightarrow f(0) = a + b \cdot \cos 0 + c \cdot sen\ 0 = -1;\ \ a + b \cdot 1 + c \cdot 0 = -1;$$

$$a + b = -1;\ \ a + 0 = -1 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

Para determinar el valor de c, conocidas a y b, se tiene en cuenta que:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow -1 + 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + c \cdot sen\ \frac{\pi}{2} = 1;\ -1 + 0 + c \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{c = 2}.$$

Problema 2:

2º) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

a)

La función $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en R.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot \left[1 - 2x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2 + x) \Rightarrow f'(x) = (-2x^2 + x + 1) \cdot e^{-x^2}.$$

$$e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2} = 0;\ -2x^2 + x + 1 = 0;\ 2x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1.$$

Como quiera que la función está definida y es continua en su dominio, que es R, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en los siguientes intervalos: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$f'(0) = (-2 \cdot 0^2 + 0 + 1) \cdot e^{-0^2} = 1 \cdot 1 = 1 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)}.$$

b)

De los periodos de crecimiento y decrecimiento y de la continuidad de la función se deducen los máximos y mínimos relativos, no obstante, se obtienen analíticamente.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = (-4x+1)\cdot e^{-x^2} + (-2x^2+x+1)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} =$$

$$= e^{-x^2}\cdot[(-4x+1)+(4x^3-2x^2-2x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = (4x^3-2x^2-6x+1)\cdot e^{-x^2}.$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left[4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right]\cdot e^{-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+3+1\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3}} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -\frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{e}} \Rightarrow Mínimo: A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt[4]{e}}\right).$$

$$f''(1) = (4\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 1)\cdot e^{-1^2} = (-2)\cdot e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-1^2} = \frac{1}{2e} \Rightarrow Máximo: B\left(1, \frac{1}{2e}\right).$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-x^2}\right] = \left(-\infty-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-(-\infty)^2} = -\infty\cdot e^{-\infty} =$$

$$= \frac{-\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-x^2}\right] = \left(\infty-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\infty^2} = \infty\cdot e^{-\infty} = \frac{\infty}{e^{\infty}} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{El\ máximo\ y\ mínimo\ hallados\ lo\ son\ absolutos.}$$

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Sean $f, g: R \to R$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) Halla los puntos de intersección de f y g. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

a)

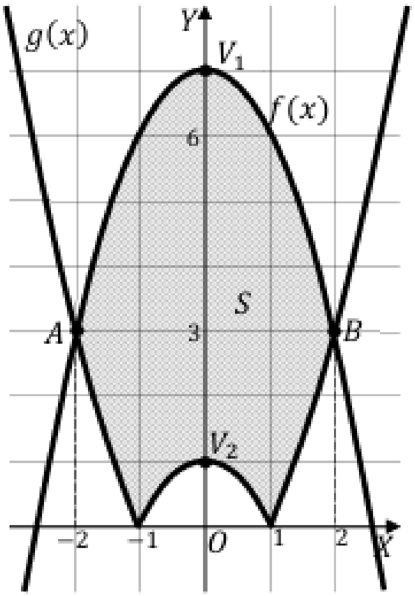
Sabiendo que $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} -x^2 + 1 & si\ x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 & si\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$, los puntos de intersección de $f(x)$ y $g(x)$ son los siguientes:

$x \in [-1, 1] \Rightarrow -x^2 + 7 = -x^2 + 1 \Rightarrow x \notin R.$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow -x^2 + 7 =$

$= x^2 - 1;\ \ 2x^2 - 8 = 0;\ \ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \to A(-2, 3) \\ x_2 = 2 \to B(2, 3) \end{cases}.$



La función $f(x) = -x^2 + 7$, que es par por ser $f(-x) = f(x)$, es también una parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el punto $V_1(0, 7)$.

La función $g(x) = |x^2 - 1|$, que también es par, en el intervalo $[-1, 1]$ es la parábola $g(x) = -x^2 + 1$, que es cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el punto $V_2(0, 1)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura, teniendo en cuenta la simetría de ambas funciones con respecto al eje de ordenadas, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \left\{ \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_1^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left\{ \int_0^1 [(-x^2 + 7) - (-x^2 + 1)] \cdot dx + \int_1^2 [(-x^2 + 7) - (x^2 - 1)] \cdot dx \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left[\int_0^1 6 \cdot dx + \int_1^2 (-2x^2 + 8) \cdot dx\right] = 2 \cdot \left\{[6x]_0^1 + \left[\frac{-2x^3}{3} + 8x\right]_1^2\right\} =$$

$$= 2 \cdot \left\{[(6 \cdot 1) - 0] + \left[\left(\frac{-2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2\right) - \left(\frac{-2 \cdot 1^3}{3} + 8 \cdot 1\right)\right]\right\} =$$

$$= 2 \cdot \left(6 - \frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8\right) = 2 \cdot \left(14 - \frac{14}{3}\right) = 2 \cdot \frac{42-14}{3} = 2 \cdot \frac{28}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{56}{3}\, u^2 \cong 18{,}67\, u^2.}$$

Problema 4:

4º) Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx$.

Solución:

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida.

$$I = \int e^x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = e^x \rightarrow du = e^x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \rightarrow v = sen\, x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot e^x dx = e^x \cdot sen\, x - \int e^x \cdot sen\, x \cdot dx =$$

$$= e^x \cdot sen\, x - A = I. \qquad (*)$$

$$A = \int e^x \cdot \text{sen}\, x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = e^x \rightarrow du = e^x \cdot dx \\ dv = sen\, x \cdot dx \rightarrow v = -cos\, x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x \cdot (-\cos x) - \int -cos\, x \cdot e^x \cdot dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= -e^x \cdot \cos x + I = A.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A obtenido:

$$I = e^x \cdot sen\, x - (-e^x \cdot \cos x + I) =$$

$$= e^x \cdot sen\, x + e^x \cdot cos\, x - I; \;\; 2I = e^x \cdot (sen\, x + \cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{e^x}{2} \cdot (sen\, x + \cos x) + C.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx = \left[\frac{e^x}{2} \cdot (sen\, x + \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \cdot \left(sen\, \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\frac{e^0}{2} \cdot (sen\, 0 + \cos 0)\right] = \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \cdot (1+0)\right] - \left[\frac{e^0}{2} \cdot (0+1)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{e^\pi}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\sqrt{e^\pi}-1}{2}}.$$

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1.

Solución:

a)

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $X^t = \begin{pmatrix} a & c \\ d & d \end{pmatrix}$.

$$XA = -AX^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = -a \\ b = c \\ d = -d \end{Bmatrix} \Rightarrow a = d = 0;\ \ b = c.$$

Las matrices X son de la forma $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \forall b \in R$.

Como tiene que cumplirse $X^2 = I$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = I;\ \ \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b^2 = 1;\ \ b = \pm 1.$$

$$\underline{Las\ matrices\ pedidas\ son\ X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ y\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b)

Sea la matriz $Y = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \Rightarrow q = -m \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix}$.

$$YA = AY \Rightarrow \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -m & n \\ -p & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & -n \\ p & -m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} n = -n \\ -p = p \end{Bmatrix} \Rightarrow n = p = 0.$$

Las matrices Y son de la forma $Y = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}, \forall m \in R$.

$$|Y| = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{vmatrix} = -1;\ -m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = 1;\ \ m = \pm 1$$

$$\underline{Las\ matrices\ pedidas\ son\ Y_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ e\ Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

6º) Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2.200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1.250 euros.

a) ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?

b) Si añadimos que el precio de un perfume C es $2/5$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Solución:

----

a)

Sean x, y, z el precio los perfumes de los tipos A, B y C que vende el proveedor a sus comerciantes, respectivamente.

Llamando β a la cantidad a pagar por 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C, el sistema de ecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 20x+30y+15z=2.200 \\ 15x+10y+10z=1.250 \\ 25x+10y+16z=\beta \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+6y+3z=440 \\ 3x+2y+2z=250 \\ 25x+10y+16z=\beta \end{array}\right\}.$$

El sistema tiene que ser compatible determinado, por lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de ambas matrices tienen que ser iguales e igual al número de incógnitas, es decir: tres. Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 440 \\ 3 & 2 & 2 & 250 \\ 25 & 10 & 16 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 190 \\ 3 & 2 & 2 & 250 \\ 25 & 10 & 16 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 25F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 190 \\ 0 & -10 & -1 & -320 \\ 0 & -90 & -9 & \beta - 4.750 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 9F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 190 \\ 0 & -10 & -1 & -320 \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1.870 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 1.870.$$

$\underline{Por\ 25\ perfumes\ A, 10\ B\ y\ 16\ C\ tendremos\ que\ pagar\ 1.870\ euros}.$

b)

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 4x+6y+3z=440 \\ 3x+2y+2z=250 \end{array}\right\}$, siendo $z=\frac{2}{5}x$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+6y+3\cdot\frac{2x}{5}=440 \\ 3x+2y+2\cdot\frac{2x}{5}=250 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 20x+30y+6x=2.200 \\ 15x+10y+4x=1.250 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 26x+30y=2.200 \\ 19x+10y=1.250 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} -26x-30y=-2.200 \\ 57x+30y=3.750 \end{array}\right\} \Rightarrow 31x=1.550;\ \ x=\frac{1.550}{31}=50 \rightarrow z=\frac{2}{5}\cdot 50=20.$$

$$19\cdot 50+10y=1.250;\ \ 10y=1.250-950;\ \ 10y=300;\ \ y=30.$$

$$\underline{El\ perfume\ A\ vale\ 50\ euros;\ el\ B, 30\ euros\ y\ el\ C, 20\ euros}.$$

Problema 7:

BLOQUE D

7º) Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in R$.

a) Estudia la posición relativa de π y r.

b) Calcula la ecuación de la recta s contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r.

Solución:

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 0)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 1) = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \vec{n}$.

La recta r y el plano π son paralelos. Para saber si el plano contiene o no a la recta consideramos el punto $P(1, 0, 1) \in r$ y determinamos si está o no contenido en el plano.

El punto $P(1, 0, 1)$ está contenido en el plano π cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0 \\ P(1, 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2 \cdot 0 + 1 - 2 = 0;\ 0 = 0 \Rightarrow P \in \pi.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi}.$$

b)

El haz de planos μ perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\mu \equiv 2x + y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz μ, el plano δ que contiene al punto $P(2, -1, 3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \mu \equiv 2x + y + D = 0 \\ P(2, -1, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 1 + D = 0;\ 4 - 1 + D = 0;\ 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \delta \equiv 2x + y - 3 = 0$.

La recta s pedida es la que determinan los planos π y δ:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}}.$$

Problema 8:

8º) Considera los puntos $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

Solución:

Los puntos del plano OXZ son de la forma $C(x,0,z)$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(0-4)^2+(2-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20}.$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(x-4)^2+(0-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2-8x+16+z^2}.$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+4+z^2}.$$

$$|\overline{PA}| = |\overline{QA}| = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{x^2-8x+16+z^2} = \sqrt{x^2+4+z^2} = \sqrt{20};$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2-8x+16+z^2=20 \\ x^2+4+z^2=20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x^2-8x+z^2=4 \\ x^2+z^2=16 \end{array}\right\} \Rightarrow 16-8x=4;\ 8x=12;$$

$$2x=3 \Rightarrow x=\tfrac{3}{2}. \qquad \left(\tfrac{3}{2}\right)^2+z^2=16;\ \tfrac{9}{4}+z^2=16;\ 9+4z^2=64;\ 4z^2=55;$$

$z^2=\frac{55}{4} \Rightarrow z_1=-\frac{\sqrt{55}}{2}, z_2=\frac{\sqrt{55}}{2}$. Los puntos que cumplen lo pedido son:

$$\underline{C_1\left(\tfrac{3}{2},0,-\tfrac{\sqrt{55}}{2}\right)\ y\ C_2\left(\tfrac{3}{2},0,\tfrac{\sqrt{55}}{2}\right)}.$$