

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ARAGÓN



www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa



 Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2023–2024 MATERIA: MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. <u>Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos.</u>		
Problema 1: Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$ (a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a. (b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY. Problema 2: Calcula justificadamente el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)]$ Problema 3: (a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función $f(x) = ax + b \sin(x) \cos(x) + c$ sea una primitiva de $g(x) = \sin^2(x)$ <i>Nota: Recuerda que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$</i> (b) (0,8 puntos) Sabiendo que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, demuestra que $\cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ Problema 4: Demuestra que entre todos los rectángulos de perímetro P, el de mayor área es el cuadrado Problema 5: Dadas las siguientes matrices : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A^T \cdot B + I_2$ donde A^T es la matriz traspuesta de A, e I_2 es la matriz unidad de orden 2. (a) (0,8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n \in \mathbb{N}$. (b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C \cdot X = 5 (A^T \cdot B)$		

Problema 6:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro,

- (a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$
- (b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $AX = 0$ cuando $m = 6$

Problema 7

Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 e. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 e. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Problema 8:

Dados los puntos $P_1(-2, 1, 1)$, $P_2(0, a, -2)$, $P_3(-1, 1, -1)$ y $P_4(1, 3, -3)$, se pide:

- (a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen $1/3$.
- (b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Problema 9

Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

- (a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?
- (b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Problema 10

Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

- (a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.
- (b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

- (a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a .
 (b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

Solución:

- (a) Las funciones $f_1(x) = e^{2x} - 1$ y $f_2(x) = x$ son continuas en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Para que f también lo sea en $x = 0$, debe cumplir la definición de continuidad

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $f(0) = a$

La función f es continua en $x = 0 \Leftrightarrow a = 0$

- (b) Las funciones $f_1(x) = e^{2x} - 1$ y $f_2(x) = x$ son derivables en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

$$\text{Además } f'(x) = \frac{2xe^{2x} - (e^{2x}-1)}{x^2} = \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{x^2}$$

Si $a = 1$, f existe pero no es continua en 0 y por tanto f tampoco es derivable en $x = 0$.

Sí lo es en $x = 1$ y la recta tangente en este punto tiene como pendiente $f'(1)$

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot e^2 - e^2 + 1}{1^2} = e^2 + 1$$

Por otro lado, para $a = 1$ y $x = 1$, $f(1) = \frac{e^2-1}{1} = e^2 - 1$,

El punto de tangencia es entonces $(1, e^2 - 1)$

Y la recta tangente en este punto tiene por ecuación

$$y - (e^2 - 1) = (e^2 + 1)(x - 1) \Leftrightarrow y = (e^2 + 1)x - 2$$

Corte con OX

$$\begin{cases} y = (e^2 + 1)x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (e^2 + 1)x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{e^2 + 1}$$

El punto de corte con OX es $\left(\frac{2}{e^2+1}, 0\right)$

Corte con OY

$$\begin{cases} y = (e^2 + 1)x - 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

El punto de corte con OY es $(0, -2)$

Problema 2:

Calcula justificadamente el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)]$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)] &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)][\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)]}{[\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[(\sqrt{x^2 + 5})^2 - (x + 2)^2]}{[\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)]} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x^2 + 5 - (x^2 + 4x + 4)]}{\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 1}{\sqrt{x^2 + 5} + (x + 2)} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4x}{x} + \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}} + \left(\frac{x}{x} + \frac{2}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{5}{x^2}} + \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{-4 + \frac{1}{\infty}}{\sqrt{1 + \frac{5}{\infty}} + \left(1 + \frac{2}{\infty}\right)} = \frac{-4}{2} = -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{x^2 + 5} - (x + 2)] = -2$$

Problema 3:

- (a) (1,2 puntos) Calcula
- a, b
- y
- $c \in \mathbb{R}$
- tales que la función

$$f(x) = ax + b \operatorname{sen}(x) \cos(x) + c$$

sea una primitiva de $g(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

Nota: Recuerda que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$

- (b) (0,8 puntos) Sabiendo que
- $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$
- , demuestra que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

Solución:

- (a)
- f
- Es una primitiva de
- g
- en
- $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a + b [\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)] = a + b[1 - 2\operatorname{sen}^2(x)] = (a + b) - 2b\operatorname{sen}^2(x) \\ f'(x) &= g(x) = \operatorname{sen}^2(x) \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2}$$

f Es una primitiva de g en $\mathbb{R} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2}$ y c es un número real cualquiera

$$\begin{aligned} (b) \quad \cos(2x) &= \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(2x)} = \sqrt{1 - 4\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)} = \sqrt{1 - 4\operatorname{sen}^2(x)(1 - \operatorname{sen}^2(x))} = \\ &= \sqrt{1 - 4\operatorname{sen}^2(x) + 4\operatorname{sen}^4(x)} = \sqrt{[1 - 2\operatorname{sen}^2(x)]^2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \\ &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \end{aligned}$$

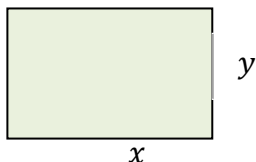
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$$

Problema 4:

Demuestra que entre todos los rectángulos de perímetro P , el de mayor área es el cuadrado

Solución:

Consideremos un rectángulo de perímetro P y dimensiones x, y



$$P = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{P - 2x}{2}$$

$$\text{Área} = A = xy = x \frac{P - 2x}{2} = \frac{1}{2}(Px - 2x^2)$$

La función área es una función polinómica y por tanto derivable. Para localizar su máximo, buscamos los valores que anulan la derivada

$$A' = \frac{1}{2}(P - 4x) \quad A'' = \frac{1}{2}(-4) = -2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$A' = 0 \Rightarrow P - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}$$

Como $A''\left(\frac{P}{4}\right) < 0$, la función área tiene un máximo en $x = \frac{P}{4}$.

$$\text{Para este valor } y = \frac{P - 2\frac{P}{4}}{2} = \frac{\frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4} = x \Rightarrow$$

El rectángulo de área máxima y perímetro P es un cuadrado de $\frac{P}{4}$ unidades de lado

Problema 5:

Dadas las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, C = A^T \cdot B + I_2$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A , e I_2 es la matriz unidad de orden 2.

(a) (0,8 puntos) Calcula C^{2n} , con $n \in \mathbb{N}$.

(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C \cdot X = 5 (A^T \cdot B)$

Solución:

$$C = A^T \cdot B + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad \text{Para } n = 1: \quad C^{2 \cdot 1} = C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5^1 I_2$$

$$C^{2 \cdot 2} = C^4 = C^2 \cdot C^2 = (5 I_2) \cdot (5 I_2) = (5 \cdot 5)(I_2 \cdot I_2) = 5^2 I_2$$

$$C^{2 \cdot 3} = C^6 = C^2 \cdot C^4 = (5 I_2) \cdot (5^2 I_2) = (5 \cdot 5^2)(I_2 \cdot I_2) = 5^3 I_2$$

Supongamos cierto para n : $C^{2n} = 5^n I_2$, veamos que se conserva el modelo para $n + 1$

$$C^{2(n+1)} = C^{2n+2} = C^{2n} \cdot C^2 = (5^n I_2)(5 I_2) = (5^n \cdot 5)(I_2 \cdot I_2) = 5^{n+1} I_2$$

$$\text{Luego } \forall n \in \mathbb{N} \quad C^{2n} = 5^n I_2 = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad C \cdot X = 5 (A^T \cdot B) \quad \Rightarrow \quad C \cdot C \cdot X = C \cdot [5 (A^T \cdot B)] \Rightarrow$$

Multiplicamos por C a la izquierda

$$\Rightarrow \quad C^2 \cdot X = 5 C(A^T \cdot B) \Rightarrow \quad (5 I_2)X = (5 C) \cdot (A^T \cdot B) \Rightarrow$$

Propiedades producto por escalar

$$\Rightarrow \quad 5(I_2 X) = 5 (C \cdot A^T \cdot B) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}(5X) = \frac{1}{5}[5 (C \cdot A^T \cdot B)] \Rightarrow$$

Asociatividad mixta Asociativa producto *Multiplicando por 1/5*

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{5}5\right)X = \left(\frac{1}{5}5\right)(C \cdot A^T \cdot B) \quad \Rightarrow \quad X = C \cdot A^T \cdot B = C \cdot (A^T \cdot B)$$

Asociatividad mixta *Asociativa producto*

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = C \cdot A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro,

- (a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$
 (b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $AX = 0$ cuando $m = 6$

Solución:

$$(a) |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{vmatrix} = 12(m+6) - 6(m-6) + 48 - 48 - 12(m+6) + 6(m-6) = 0$$

El único menor de orden máximo (3) de la matriz A es determinante de A y $|A| = 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{rango } A \leq 2 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix} = \underbrace{\text{rango}}_{\substack{F2' = F2 + 2F1 \\ F3' = F3 - F1}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

- Si $m = -2$

Solo existen menores de orden 1 distintos de 0, por ejemplo $|2| = 2 \neq 0$,

$$\Rightarrow \text{rango } A = 1$$

- Si $m \neq -2$

Existen menores de orden 2 no nulos, así $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & m+2 \end{vmatrix} = 4m + 4 \neq 0$ si $m \neq -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{rango } A = 2$$

$$\text{rango } A = 1 \text{ si } m = -2 \text{ y } \text{rango } A = 2 \text{ si } m \neq -2$$

- (b) No se especifica el tamaño de la matriz X ni de la matriz nula. Para que el producto sea posible, deben tener 3 filas.

- Si $X, O \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Estaríamos ante un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas equivalente a

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 8z = 0 \end{cases} \text{ que tiene infinitas soluciones dadas por}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{2}{3}\alpha \\ z = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Si $X, O \in \mathcal{M}_{3 \times k}(\mathbb{R})$ con $k \neq 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & \dots & x_{2k} \\ x_{31} & \dots & x_{3k} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3 \times k}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3 \times k}(\mathbb{R})} \sim$$

$$\sim \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3 \times k}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & \dots & x_{2k} \\ x_{31} & \dots & x_{3k} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_{1j} - 3x_{2j} + 4x_{3j} = 0 \\ 8x_{3j} = 0 \end{cases} j = 1, 2, \dots, k$$

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ son parámetros reales cualesquiera, la solución general sería:

$$\begin{cases} x_{1j} = \alpha_j \\ x_{2j} = \frac{2}{3}\alpha_j \\ x_{3j} = 0 \end{cases} j = 1, \dots, k$$

Problema 7

Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 e. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 e. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Solución:

Precio producto A sin IVA: x , precio producto B sin IVA: y , precio producto C sin IVA: z

Planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 483 \\ \frac{4}{100}100x + \frac{10}{100}10y + \frac{21}{100}100z = 1954 \\ z = 4x + 8y \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} x + 2y + 5z = 483 \\ 4x + y + 21z = 1954 \\ 4x + 8y - z = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son: _

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 21 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 4 & 1 & 21 & 1954 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 21 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 168 + 160 - 20 - 168 + 8 = 147 \neq 0$$

Es un sistema de Cramer. Obtenemos la solución utilizando su regla:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 483 & 2 & 5 \\ 1954 & 1 & 21 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{441}{147} = 3 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 483 & 5 \\ 4 & 1954 & 21 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1470}{147} = 10 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 483 \\ 4 & 1 & 1954 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{13524}{147} = 92$$

Estos son los precios sin IVA. Sumando el correspondiente a cada producto, damos la solución

$$A: 3 + 0,04 \cdot 3 = 3,12 \text{ €} \quad B: 10 + 0,1 \cdot 10 = 11 \text{ €} \quad C: 92 + 0,21 \cdot 92 = 111,32 \text{ €}$$

El precio a la venta del producto A es de 3,12 €, el precio del producto B es de 11 € y el del producto C de 111,32 €

Problema 8:

Dados los puntos $P_1(-2, 1, 1)$, $P_2(0, a, -2)$, $P_3(-1, 1, -1)$ y $P_4(1, 3, -3)$, se pide:

- (a) (1,2 puntos) Calcula los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 tenga volumen $1/3$.
 (b) (0,8 puntos) Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Solución:

(a) El volumen del tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 es $1/6$ del valor absoluto del producto mixto de los vectores con origen común (P_1 por ejemplo) determinados por estos puntos

$$V = \frac{1}{6} | [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] |$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2, a-1, -3) \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (1, 0, -2) \quad \overrightarrow{P_1P_4} = (3, 2, -4)$$

$$V = \frac{1}{6} | [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] | = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} | (-6(a-1) - 6 + 8 + 4(a-1)) | = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \frac{|-2a+4|}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow |-2a+4| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+4 = 2 \Rightarrow a = 1 \\ -2a+4 = -2 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

El volumen del tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 es $\frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 1$ o bien $a = 3$

(b) P_1, P_2, P_3 y P_4 son coplanarios $\Leftrightarrow$ el tetraedro que determinan tiene volumen 0 $\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} | [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}] | = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2a+4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

P_1, P_2, P_3 y P_4 son coplanarios si $a = 2$

Problema 9

Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?, ¿y de alumnos?

(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:

Sean los sucesos:

M = “La persona elegida al azar es mujer”

H = “La persona elegida al azar es hombre”

A = “La persona elegida al azar aprueba en primera convocatoria”

(a) $P(\text{La persona elegida al azar ha aprobado en primera convocatoria} / \text{la persona es mujer}) = P(A/M)$

$$P(A/M) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{28/99}{54/99} = \frac{28}{54} = \frac{14}{27} = 0,5185 \Rightarrow$$

Porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria = 51,85%

Análogamente

$$P(A/H) = \frac{P(H \cap A)}{P(H)} = \frac{21/99}{45/99} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} = 0,4667 \Rightarrow$$

Porcentaje de alumnos que aprueban la asignatura en primera convocatoria = 46,67%

Los porcentajes de alumnas y alumnos que aprueban en primera convocatoria son 51,85% y 46,67% respectivamente.

(b) Nos piden la probabilidad del suceso $P(M/A)$

Dado que M y H constituyen un sistema completo de sucesos, utilizamos el teorema de Bayes:

$$P(M/A) = \frac{P(A/M)P(M)}{P(A/M)P(M) + P(A/H)P(H)} = \frac{\frac{28}{54} \cdot \frac{54}{99}}{\frac{28}{54} \cdot \frac{54}{99} + \frac{21}{45} \cdot \frac{45}{99}} = \frac{28}{28 + 21} = \frac{28}{49} = 0.5714$$

La probabilidad de que una persona, elegida al azar, y que ha aprobado en primera convocatoria, sea mujer es $\frac{8}{13} = 0.5714$

Problema 10

Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

Solución:

Sean los sucesos:

A_1 = "Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en avión"

A_2 = "Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en tren"

A_3 = "Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en autobús"

A_4 = "Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en barco"

B = "Un turista, elegido al azar, ha visitado Aragón"

$$P(A_1) = \frac{55}{100} = 0,55 \quad P(A_2) = \frac{30}{100} = 0,3 \quad P(A_3) = \frac{10}{100} = 0,1 \quad P(A_4) = \frac{5}{100} = 0,05$$

(a) $P(\text{"un turista seleccionado al azar, haya visitado Aragón"}) = P(B)$

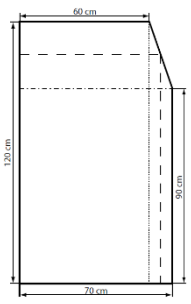
$$P(B) = P(B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) = \\ = \frac{50}{100} \cdot \frac{55}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{30}{100} + \frac{100}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{20}{100} \cdot \frac{5}{100} = 0,5 \cdot 0,55 + 0,6 \cdot 0,3 + 0,10 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,565$$

La probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón es de 0,565

(b) Nos piden la probabilidad del suceso $(A_3 \cup A_2)/B$

$$P[(A_3 \cup A_2)/B] = \frac{P[(A_3 \cup A_2) \cap B]}{P(B)} = \frac{P(A_3 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{100}{100} \cdot \frac{10}{100} + \frac{60}{100} \cdot \frac{30}{100}}{0,565} = \frac{0,28}{0,565} = \\ = 0,4956$$

La probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren es de 0,4956

 Universidad Zaragoza	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: 2023–2024 MATEMÁTICAS II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.		
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA Problema 1: Dada la siguiente función $f(x) = \begin{cases} a - \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - b \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$ (c) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a, b. (d) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula el valor de b para que en el punto con $x = \frac{\pi}{2}$, la función tenga como recta tangente recta tangente a la curva en $y = \frac{\pi}{2}x$. Problema 2: Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo, caso de existir $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3) + 2}{3 - (x^2 - 4)\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2) + (\cos x)^2 + \log(x+5)}}$ Problema 3: Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = x + 6 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Problema 4: En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado? 		

Problema 5:

De una matriz B se sabe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B$$

donde I_3 es la matriz unidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B

Problema 6:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ $m \in \mathbb{R}$.

(c) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$

(d) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $AX = B$ cuando $m = 2$

Problema 7

En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1 , M_2 y M_3 , a partir de tres principios activos, A_1 , A_2 y A_3 , distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento.

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
Para 1g de M_1	10	10	20
Para 1 g de M_2	10	20	30
Para 1 g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1 , 90 gramos del activo A_2 , y 160 gramos del activo A_3 . Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1 , M_2 y M_3 ? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Problema 8

Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases} \quad \text{y además pasa por el punto } (3, 2, 1).$$

Problema 9

Sean $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(2, 2, 2)$ tres puntos en el espacio y $\vec{v}_1$ el vector que va de A a B ; $\vec{v}_2$ el vector que va de B a C y $\vec{v}_3$ el vector que va de C a A .

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B , C .

Problema 10

El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EBAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.

(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?

(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} a - \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - b \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- (a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a, b .
 (b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula el valor de b para que en el punto con $x = \frac{\pi}{2}$, la función tenga como recta tangente $y = \frac{\pi}{2}x$.

Solución:

- (a) Las funciones $f_1(x) = a - \cos x$ y $f_2(x) = x^2 - b \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ son continuas en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Veamos para qué valores de a, b , f es continua en $x = 0$.

Calculamos los límites laterales y el valor de la función en 0

$$\dot{\lim}_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)?$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a - \cos x) = a - 1 = f(0)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - b \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = -b \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -b$

f es continua en $x = 0 \Leftrightarrow a - 1 = -b$

Si $b = 1 - a$, la función f es continua en $\mathbb{R}$ y si $b \neq 1 - a$, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En este último caso, $x = 0$ es una discontinuidad inevitable de salto finito

- (b) f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es ;

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ 2x - b \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La pendiente de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$, es $f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2 \frac{\pi}{2} - b \cos \pi = \pi + b$

El punto de tangencia es $\left(\frac{\pi}{2}, f \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4} \right)$

la recta tangente en este punto es $y - \frac{\pi^2}{4} = (\pi + b) \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow y = (\pi + b)x - (\pi + b) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$

Queremos que coincida con $y = \frac{\pi}{2}x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi + b = \frac{\pi}{2} \\ -(\pi + b) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4} = (\pi + b) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi + b}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{4} - \pi = b \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = b \end{cases}$$

Para el valor de $a = 1$, la recta tangente es $y = \frac{\pi}{2}x$. si el valor de b es $-\frac{\pi}{2}$

Problema 2:

Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo, caso de existir

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3) + 2}{3 - (x^2 - 4)\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2) + (\cos x)^2 + \log(x+5)}}$$

Solución:

Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$ y por tanto en cualquier entorno de $x = 2$. Existe su límite en cualquier valor real y coincide con el valor numérico en el punto hacia el que tiende x . Ocurre lo mismo con las funciones seno y coseno. La función $y = \log(x+5)$ existe y es continua en $(-5, \infty)$ Y consecuentemente en $x = 2$. Coincide también el límite, si $x \rightarrow 2$, con el valor numérico

Podríamos tener problemas si el radicando de $\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2) + (\cos x)^2 + \log(x+5)}$ fuese negativo pero su valor numérico en 2 es $\operatorname{sen}8 + (\cos 2)^2 + \log 7 = 1,9 > 0$ y es continua en su dominio (que contiene a 2) $\Rightarrow \exists (2 - \alpha, 2 + \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ en el que la función $\operatorname{sen}(2x^2) + (\cos x)^2 + \log(x+5)$ es positiva (*teorema de conservación del signo*), por tanto existe el límite si $x \rightarrow 2$ de $\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2) + (\cos x)^2 + \log(x+5)}$

Como conclusión, el límite planteado es el límite de una operación con funciones continuas que no presenta ningún problema “cerca” de 2 y que, por otra parte, no da lugar a ninguna indeterminación. No tenemos más que sustituir x por 2 para obtener su valor:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3) + 2}{3 - (x^2 - 4)\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2) + (\cos x)^2 + \log(x+5)}} &= \frac{(2-2) \cdot (3 \cdot 2^5 + 5 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 + 3) + 2}{3 - (2^2 - 4)\sqrt{\operatorname{sen}8 + (\cos 2)^2 + \log 7}} = \\ &= \frac{0 + 2}{3 - 0 \cdot \sqrt{\operatorname{sen}8 + (\cos 2)^2 + \log 7}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3) + 2}{3 - (x^2 - 4)\sqrt{\operatorname{sen}(2x^2) + (\cos x)^2 + \log(x+5)}} = \frac{2}{3}$$

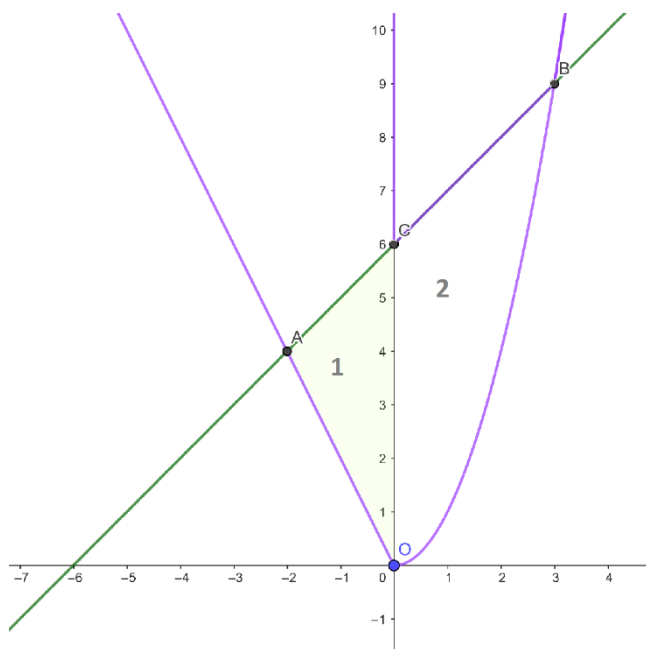
Problema 3:

Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x + 6 \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Representamos gráficamente las dos funciones. El área que queda comprendida entre ambas tiene dos zonas diferenciadas 1 y 2. La gráfica de la función f va siempre por encima de la gráfica de g



Determinamos algebraicamente las abscisas de los puntos de corte entre las dos gráficas

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow x + 6 = -2x \Rightarrow x = -2$$

Entonces el área 1 es

$$\int_{-2}^0 (x + 6 + 2x) dx = \int_{-2}^0 (3x + 6) dx = \left[\frac{3x^2}{2} + 6x \right]_{-2}^0 = 0 - (6 - 12) = 6$$

$$\text{Si } x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{3}{-2}$$

El valor -2, no es válido ya que $x \geq 0$

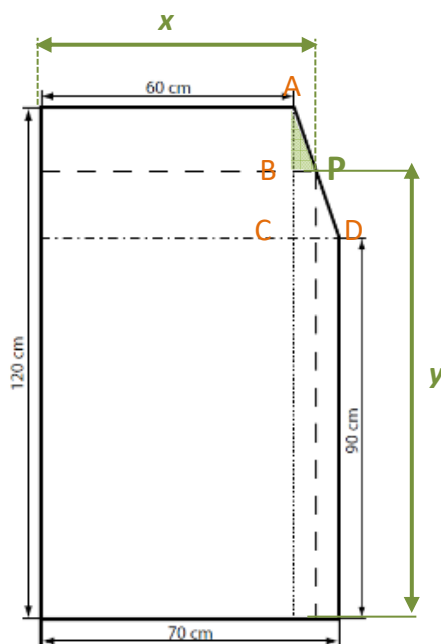
$$\text{El área 2 es } \int_0^3 (x + 6 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3} - 0 = \frac{27}{2}$$

$$\text{Luego, el área encerrada entre las gráficas de las funciones } f \text{ y } g \text{ es } \text{Área1} + \text{Área2} = 6 + \frac{27}{2} = \frac{39}{2} u^2$$

El área encerrada entre las gráficas de las funciones f y g es $\frac{39}{2} u^2$

Problema 4:

En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?

Solución:

Sea P un punto cualquiera sobre el corte realizado y sean x, y las longitudes de los cortes horizontal y vertical definidos por el punto P.

Tendremos en cuenta que

$$60 \leq x \leq 70 \quad 90 \leq y \leq 120$$

Los triángulos ABP y ACD están en posición de Tales. Podemos establecer entonces la siguiente proporción entre las longitudes de sus lados:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{BP}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{120 - y}{120 - 90} = \frac{x - 60}{70 - 60} \Rightarrow \frac{120 - y}{30} = \frac{x - 60}{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{120 - y}{3} = x - 60 \Rightarrow 120 - y = 3x - 180 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = 300 - 3x \end{aligned}$$

Queremos que el área del rectángulo recortado sea máxima en el intervalo $[60, 70]$

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot (300 - 3x) = 300x - 3x^2$$

$$A'(x) = 300 - 6x \quad A'(x) = 300 - 6x = 0 \Rightarrow x = 50 \notin [60, 70]$$

$A'(x)$ tiene signo constante en $[60, 70]$ y es negativo por lo que A es una función estrictamente decreciente en este intervalo, es decir:

$$A(60) \geq A(x) \geq A(70) \quad \forall x \in [60, 70]$$

Y por lo tanto el máximo se alcanza si $x = 60$ para lo cual $y = 300 - 3 \cdot 60 = 120$

Las dimensiones del cristal cortado deben ser de 60 cm de ancho y 120 cm de alto

Problema 5:

De una matriz B se sabe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B$$

donde I_3 es la matriz unidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B

Solución:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 \Rightarrow \\ & \stackrel{\substack{\text{P.distributiva del producto} \\ \text{de matrices respecto de la suma}}}{\Rightarrow} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \right] \cdot B = I_3 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 \end{aligned}$$

Tomando determinantes en la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} & \text{Det} \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix} \cdot \text{Det } B = \text{Det } I_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{vmatrix} \cdot \text{Det } B = 1 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \text{Det } B = 1 \Rightarrow -11 \text{ Det } B = 1 \Rightarrow \text{Det } B = -\frac{1}{11} \neq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow B \text{ es una matriz regular.} \end{aligned}$$

Según hemos deducido antes existe una matriz $\begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$ (la llamamos ya B^{-1}) que multiplicada por B da la identidad $\Rightarrow$ La matriz B tiene inversa y es B^{-1} .

Nota: solo hemos probado que B^{-1} es inversa a la izquierda de B pero, si existe B^{-1} tal que $B^{-1}B = I$ y C fuera la inversa de B a la derecha:

$$B \cdot C = I_3 \stackrel{\substack{\text{Multiplicando por } B^{-1} \\ \text{a la izquierda}}}{\Rightarrow} B^{-1}B \cdot C = B^{-1} \cdot I_3 \Rightarrow (B^{-1}B)C = B^{-1} \Rightarrow I_3 \cdot C = B^{-1} \Rightarrow C = B^{-1}$$

$$\text{La matriz } B \text{ tiene inversa y } B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$$

Problema 6:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ $m \in \mathbb{R}$.

- (a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$
 (b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $AX = B$ cuando $m=2$

Solución:

- (a) El único menor de orden máximo (3) de la matriz A es determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{vmatrix} \stackrel{\substack{F2' = F2 - F1 \\ F3' = F3 - 4F1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & 2m-4 \end{vmatrix} = (m-1) \cdot (2m-4)$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m-1 = 0 \text{ o bien } 2m-4 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ o } m = 2$$

- Si $m \neq 1, m \neq 2 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rango } A = 3$
- Si $m = 1$

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ ya que el menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si $m = 2$

$$\text{rango } A = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ ya que el menor } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

rango $A = 3$ si $m \neq 1, m \neq 2$ y rango $A = 2$ si $m = 1$ o $m = 2$

- (b) X debe ser una matriz perteneciente a $\mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, pongamos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\text{El sistema sería en este caso } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \underbrace{\text{rango}}_{\substack{F2' = F2 - F1 \\ F3' = F3 - 4F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\text{rango } A = \text{rango } \bar{A} = 2 < n^\circ \text{ de incógnitas} \Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado

El sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} \text{ cuya solución general viene dada por } \begin{cases} x = 3 - 2 + \lambda - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{Y operando } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$AX = B$, cuando $m=2$, tiene infinitas soluciones dadas por

$$x = 1, y = 2 - \lambda, z = \lambda \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Problema 7

En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1 , M_2 y M_3 , a partir de tres principios activos, A_1 , A_2 y A_3 , distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento.

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
Para 1 g de M_1	10	10	20
Para 1 g de M_2	10	20	30
Para 1 g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1 , 90 gramos del activo A_2 , y 160 gramos del activo A_3 . Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1 , M_2 y M_3 ? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Solución:

Nº gramos de M_1 : x , Nº gramos de M_2 : y , Nº gramos de M_3 : z

Planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0,01x + 0,01y + 0,02z = 70 \\ 0,01x + 0,02y + 0,03z = 90 \\ 0,02x + 0,03y + 0,05z = 160 \end{cases} \quad \text{equivalente a} \quad \begin{cases} x + y + 2z = 7000 \\ x + 2y + 3z = 9000 \\ 2x + 3y + 5z = 16000 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son: _

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 1 & 2 & 3 & 9000 \\ 2 & 3 & 5 & 16000 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 6 + 6 - 8 - 9 - 5 = 0$$

No es un sistema compatible determinado

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 1 & 2 & 3 & 9000 \\ 2 & 3 & 5 & 16000 \end{pmatrix} \underset{\substack{F2' = F2 - F1 \\ F3' = F3 - 2F1}}{\text{rango}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \end{pmatrix} \sim \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

El planteamiento da lugar a un sistema equivalente al siguiente de 2 ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 7000 \\ y + z = 2000 \end{cases}$$

Que es compatible indeterminado por ser $\text{rango } A = \text{rango } \bar{A} = 2 < n^\circ \text{ incógnitas}$.

Existen, por tanto, infinitas soluciones dadas por:

$$\begin{cases} x = 7000 - 2000 + \lambda - 2\lambda \\ y = 2000 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5000 - \lambda \\ y = 2000 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Existen varias posibilidades para utilizar todas las cantidades de principios activos antes de vacaciones. Basta elegir valores para el parámetro λ (preferentemente enteras positivas para facilitar la ejecución real) que den lugar a soluciones positivas de x, y, z .

Si, por ejemplo preparamos $4g = 4000mg$ de M_1 , $2g = 2000mg$ de M_2 y $1g = 1000mg$ de M_3 , solución que obtenemos para $\lambda = 1000$, no sobraría ningún principio activo,

Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible

Existen varias formas de hacerlo, por ejemplo, si se fabrican:

$4g = 4000mg$ de M_1 , $2g = 2000mg$ de M_2 y $1g = 1000mg$ de M_3

Problema 8:

Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases} \text{ y además pasa por el punto } (3, 2, 1) \dots$$

Solución:

Sea $\vec{v}$ el vector director de la recta

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$$

$\vec{v}$ es paralelo al producto vectorial de los vectores asociados a los planos que la definen:

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3)$$

$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \parallel (0, 1, 1) \Rightarrow$ Podemos tomar $(0, 1, 1)$ como vector director de la recta y por tanto como asociado al plano perpendicular a la misma

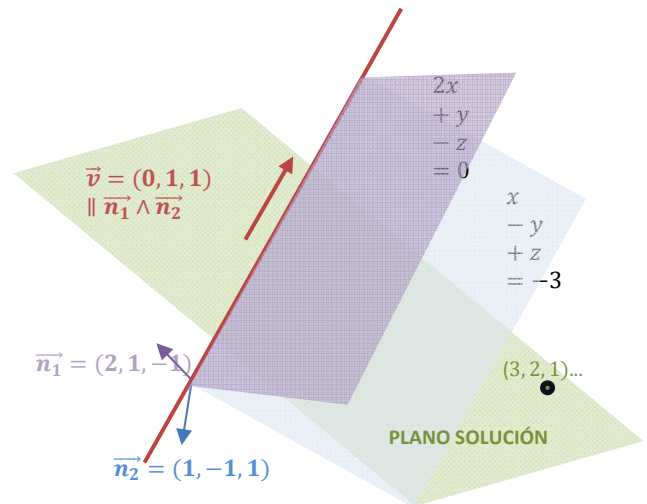
Si π es el plano que buscamos, su ecuación general es:

$$y + z + D = 0$$

$$(3, 2, 1) \in \pi \Rightarrow 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3..$$

Luego

$$\pi \equiv y + z - 3 = 0$$



Problema 9

Sean $A(1, 2, 3)$, $B(1, 0, -1)$ y $C(2, 2, 2)$ tres puntos en el espacio y $\vec{v}_1$ el vector que va de A a B ; $\vec{v}_2$ el vector que va de B a C y $\vec{v}_3$ el vector que va de C a A .

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A , B , C .

Solución

(a) $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] \neq 0$

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (0, -2, -4) \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{BC} = (1, 2, 3) \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{CA} = (-1, 0, 1)$$

$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ y } \vec{v}_3 \text{ son linealmente dependientes}$$

(Nota: Podíamos haber demostrado también que existe una combinación lineal de los tres vectores que es el vector nulo sin que sean 0 todos los coeficientes:

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow \alpha(0, -2, -4) + \beta(1, 2, 3) + \gamma(-1, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \\ -4\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta \in \mathbb{R} \\ \gamma = \beta \end{cases}, \quad \text{representan las infinitas soluciones del sistema.}$$

Por ejemplo la solución $\alpha = \beta = \gamma = 1$ da lugar a la combinación $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$ que muestra la dependencia lineal de los tres vectores)

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente dependientes

$$(b) \text{Área triángulo } ABC = \frac{1}{2} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, -4) \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, -4, 2) \Rightarrow |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Área triángulo } ABC = \frac{1}{2} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} (2\sqrt{6}) u^2 = \sqrt{6} u^2$$

El área del triángulo ABC es $\sqrt{6} u^2$

Problema 10

El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EVAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.

(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?

(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan una nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan una nota inferior a 5?

Solución:

El experimento aleatorio “seleccionar un examen al azar y observar si tiene una nota mayor o igual que 5” es una prueba con solo dos resultados posibles (de Bernoulli), identificables con “éxito” y “fracaso”.

Sea “éxito” = “el examen elegido al azar tiene una nota mayor o igual que 5”

$$P(\text{éxito}) = p = \frac{84}{100} = 0,84 \quad P(\text{fracaso}) = q = 1 - 0,84 = 0,16$$

Se repite 15 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria $X = \text{“nº de éxitos”} = \text{“número de exámenes que tienen una nota mayor o igual que 5”}$, es una variable binomial

$$X = B(15, 0,84) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{15}{k} \cdot (0,84)^k \cdot (0,16)^{15-k}$$

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P(\text{“exactamente 2 tengan una nota inferior a 5”}) &= P(\text{“exactamente 13 tengan una nota superior a 5”}) = \\ &= P(X = 13) = \binom{15}{13} \cdot (0,84)^{13} \cdot (0,16)^2 = \binom{15}{2} \cdot (0,84)^{13} \cdot (0,16)^2 = \\ &= \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} 0,1037 \cdot 0,0256 \approx 0,2787 \end{aligned}$$

La probabilidad de que exactamente 2 exámenes tengan una nota inferior a 5 es de 0,2787

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad P(\text{“menos de 2 tengan una nota inferior a 5”}) &= P(\text{“más de 13 tengan una nota superior a 5”}) = \\ &= P(X \geq 14) = P(X = 14) + P(X = 15) = \binom{15}{14} \cdot (0,84)^{14} \cdot (0,16)^1 + \binom{15}{15} \cdot \\ &\quad (0,84)^{15} \cdot (0,16)^0 = \frac{15!}{14! \cdot 1!} 0,087 \cdot 0,16 + 1 \cdot 0,0731 \cdot 1 = 0,2819 \\ &\bullet \quad P(\text{“más de 2 tengan una nota inferior a 5”}) = P(\text{“menos de 13 tengan una nota superior a 5”}) = \\ &= P(X < 13) = 1 - P(X \geq 13) = 1 - [P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)] = \\ &= 1 - \binom{15}{13} \cdot (0,84)^{13} \cdot (0,16)^2 - \binom{15}{14} \cdot (0,84)^{14} \cdot (0,16)^1 - \binom{15}{15} \cdot (0,84)^{15} \cdot (0,16)^0 = \\ &= 1 - \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} 0,1037 \cdot 0,0256 - \frac{15!}{14! \cdot 1!} 0,087 \cdot 0,16 - 1 \cdot 0,0731 \cdot 1 = 0,4394 \end{aligned}$$

Es más probable que más de dos exámenes tengan una nota inferior a 5