MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

Castilla y León

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + \frac{y}{2} + z = 0} \\ \boldsymbol{2ax + y = 0} \\ \boldsymbol{2x + y = 0} \end{cases}$$

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Para $a = 0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto $P = (1,0,-1)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. **(2 puntos)**

E4.- (Geometría)

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases} ,t \in \mathbb{R} \quad y \quad r_2 \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$ son paralelas. **(1 punto)**

b) Para k = 2 ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Determinar el valor de los parámetros A, B y C tales que $f(-1) = 0$, la función f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

E8.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx$. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos: C= "coche", M= "motocicleta", F= "furgoneta" y R = "requiere reparación".
a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores. **(0,2 puntos)**

b) Calcular $P(R \cap F)$, $P(R)$ y $P(C/R)$. **(1,3 puntos)**

c) ¿Son independientes los sucesos C y R? **(0,5 puntos)**

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para $a = 1$. **(0,8 puntos)**

Solución:

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 6a - 4 = -2(a^2 - 3a + 2) = -2(a-2)(a-1)$$

Si a $\neq \{1, 2\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única, que es $x = y = z = 0$.

Si $a = 1$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ es distinto de cero.

Como el sistema es homogéneo, el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que el de la matriz A, por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si $a = 2$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2$ es distinto de cero.

Como el sistema es homogéneo, el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que el de la matriz A, por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

En resumen

a	$rango\ A$	$rango A^*$	Sistema
$\neq \{1, 2\}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
= 1	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**
= 2	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**

b) Para $a = 1$, el sistema es compatible indeterminado

Hacemos $x = t$ y resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y + 2z = -2t \\ y = -2t \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por la regla de Cramer

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2t & 2 \\ -2t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4t}{-2} = -2t\ (obvio)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2t \\ 1 & -2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2} = 0$$

Las soluciones se pueden parametrizar como

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 0 \end{cases}$$

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Para $a = 0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

Solución:

La matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) $|M| = -a^2 + 3a - 2 = -(a-1)(a-2)$

Si $a \neq \{1,2\}$ el rango de la matriz es 3.

Si $a = 1$ la matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ el rango de la matriz es 2

Si $a = 2$ la matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ el rango de la matriz es 2

En resumen

a	$rango\ M$
$\neq \{1,2\}$	**3**
1	**2**
2	**2**

b) Para $a = 0$

$$|M| = -(0-1)(0-2) = -2$$

Como $2PM = M^3$, entonces

$$|2PM| = |M^3| \to 2^3|P||M| = |M|^3 \to 8|P|(-2) = (-2)^3 \to -16|P| = -8 \to |P| = \frac{1}{2}$$

El determinante de *P* es $\frac{1}{2}$

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto P = (1, 0, −1) respecto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. **(2 puntos)**

Solución:

El punto es $P(1,0,-1)$ y la recta es $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

Hay que hallar un plano π perpendicular a r pasando por P. Después hallamos el punto X de corte entre la recta r y el plano π. El punto simétrico P' es tal que X es el punto medio del segmento PP'.

El vector director de la recta es $\vec{v}(1,2,2)$ y un punto es $Q(1,0,0)$

Como $Q \notin r$ hay que hallar un plano perpendicular a r pasando por el punto P

Todos los planos perpendiculares a r son de la forma $x + 2y + 2z + D = 0$. Sustituyendo el punto P, seleccionamos el que pasa por él.

$$1 - 2 + D = 0 \to D = 1$$

El plano es

$$\pi: x + 2y + 2z + 1 = 0$$

El corte, X, de la recta r y el plano π sale de la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \to 1 + t + 4t + 4t + 1 = 0 \to t = -\frac{2}{9} \to X\left(\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right)$$

El punto $P'(a,b,c)$ es tal que

$$\frac{1+a}{2} = \frac{7}{9} \to a = \frac{5}{9}$$
$$\frac{0+b}{2} = -\frac{4}{9} \to b = -\frac{8}{9}$$
$$\frac{-1+c}{2} = -\frac{4}{9} \to b = \frac{1}{9}$$

El punto simétrico es $P'\left(\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right)$

E4.- (Geometría)

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad y \quad r_2 \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

son paralelas. **(1 punto)**

b) Para k = 2 ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

Solución:

Hay que hallar un punto y un vector director de las rectas.

Para hallar un vector director de la recta r_2 utilizamos el producto vectorial de los vectores $(1, 2, 2)$ y $(1, 1, 1)$, que son perpendiculares a los dos planos que definen la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$$

con lo que un vector director de la recta r_2 es $\vec{v}(0,1,-1)$.

Un vector director de la recta r_1 es $\vec{u}(0, k, -2)$.

Para que estas dos rectas sean paralelas es necesario que sus coordenadas sean proporcionales

$$\frac{1}{k} = \frac{-1}{-2} \rightarrow k = 2$$

Además, para $k = 2$ el punto $P(1,0,2)$ pertenece a la recta r_1. Este punto no pertenece a la recta r_2 porque no verifica las ecuaciones de esta recta

$$\begin{cases} 1 + 0 + 2 \cdot 2 \neq -1 \\ 1 + 0 + 2 \neq 2 \end{cases}$$

y por tanto las rectas r_1 y r_2 no son coincidentes.

Las rectas son paralelas para $k = 2$

b) Puesto que para $k = 2$ las rectas son paralelas, hay un plano que las contiene. Si $P(1, 0, 2) \in r_1$ y $Q(5, -3, 0) \in r_2$, el plano vendrá determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}(0, 1, -1)$ y un punto del plano por ejemplo P.

$$\overrightarrow{PQ} = (5, -3, 0) - (1, 0, 2) = (4, -3, -2)$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5x + 4y + 4z - 13 = 0$$

Sí, hay un plano que contiene a las dos rectas paralelas y tiene por ecuación:

$$\mathbf{5x + 4y + 4z - 13 = 0}$$

E5.- (Análisis)

Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Solución:

Sea $f(x)=e^{-x}(x-1)-1=\frac{x-1}{e^x}-1$

Vamos a demostrar que esta función no corta al eje X en ningún punto y por tanto que $e^{-x}(x-1)$ nunca vale 1.

Para ello demostraremos que tiene un solo máximo absoluto. Como este valor es negativo, la función siempre está por debajo del eje X y por tanto nunca vale cero.

La función es continua en todos sus puntos puesto que es cociente de dos funciones continuas ($e^x\ y\ x-1$) donde el denominador (e^x) nunca vale cero.

Hallamos los máximos

$$f'(x)=-e^{-x}(x-1)+e^{-x}=e^{-x}(2-x)$$

$$f'(x)=0 \to x=2$$

Solo hay un extremo en $x=2$

$$f''(x)=-e^{-x}(2-x)-e^{-x}=e^{-x}(x-3)$$

Como

$$f''(2)=e^{-2}(2-3)<0$$

en $P\left(2,\frac{1}{e^2}-1\right)$ hay un máximo. Además $\frac{1}{e^2}-1\sim-0.8647$.

La función tiene un máximo absoluto en el punto $\mathbf{P}\left(\mathbf{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}^{\mathbf{2}}}-\mathbf{1}\right)$ y en ese punto la función está por debajo del eje X. No existe ningún punto *c* tal que $\mathbf{e^{-c}(c-1)-1=0}$ y por tanto:

No hay ningún punto tal que $\mathbf{e^{-c}(c-1)=1}$

E6.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Determinar el valor de los parámetros A, B y C tales que $f(-1) = 0$, la función f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. **(2 puntos)**

Solución:

La función tiene que pasar por el punto (-1,0), tiene un extremos en $x = 0$ y la pendiente de la recta tangente debe ser -3, que es la pendiente de la recta $y + 3x = 0$.

Si $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ y $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(-1) = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 + A - B + C = 0 \\ B = 0 \\ 3 - 2A + B = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

Solución:

Hay que estudiar la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$

Dominio de definición

La función existe para todos los números reales excepto en $x = 0$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales y horizontales

Utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Por tanto no hay asíntota horizontal por la derecha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical en la recta $x = 0$

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

El signo de la primera derivada nos proporciona los intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$\begin{cases} < 0 & si & x < 0 \\ < 0 & si & 0 < x < 1 \\ > 0 & si & x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Decrece & si & x < 0 \\ Decrece & si & 0 < x < 1 \\ Crece & si & x > 1 \end{cases}$$

Extremos relativos

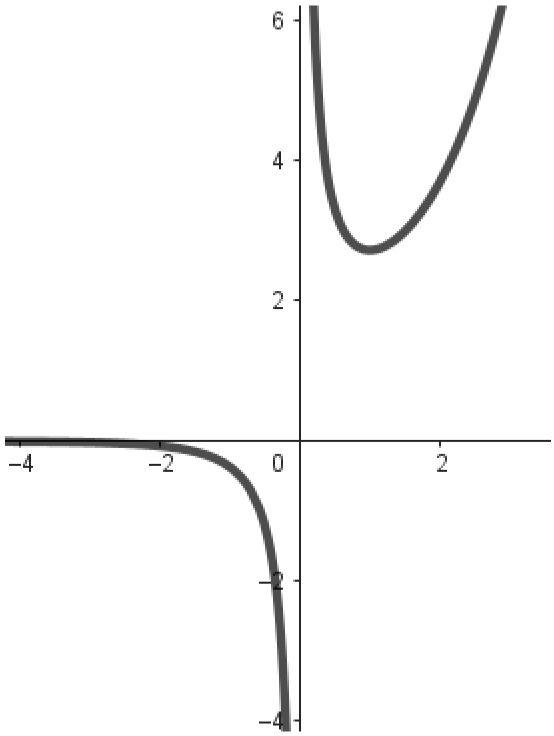
La primera derivada se anula para $x = 1$. Sustituimos en la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{(e^x(x-1) + e^x)x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4}$$

$$f''(1) = \frac{(e \quad (1-1) + e \quad)1^2 - e \quad (1-1)2}{1^4} = e > 0$$

Como en $x = 1$ la primera derivada vale cero y la segunda es positiva, la función tiene un mínimo en el punto $(1, e)$.

La gráfica de la función es



Su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Tiene una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y=0$ y una asíntota vertical en la recta $x=0$.

Decrece en $(-\infty,0)\cup(0,1)$; Crece en $(1,+\infty)$ y tiene un mínimo en el punto $(1,e)$

E8.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)+xe^x}{-\text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^x+xe^x}{-\cos(x)} = -2$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{cos(x)-1} = -2}$$

b)

$$\int e^{-x}(x-1)dx = \begin{bmatrix} u = x-1 \\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -(x-1)e^{-x} - \int -e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-x}(x-1) + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x-1) - e^{-x} + C = -xe^{-x} + C$$

Con lo que

$$\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx = [-xe^{-x}]_0^2 = -2e^{-2}$$

$$\boldsymbol{\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx = -2e^{-2}}$$

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos: C= "coche", M= "motocicleta", F= "furgoneta" y R = "requiere reparación".
a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores. **(0,2 puntos)**

b) Calcular $P(R \cap F)$, $P(R)$ y $P(C/R)$. **(1,3 puntos)**

c) ¿Son independientes los sucesos C y R? **(0,5 puntos)**

Solución:

a) El enunciado proporciona las siguientes probabilidades:

$$\mathbf{p(C) = 0.48}$$
$$\mathbf{p(M) = 0.28}$$
$$\mathbf{p(F) = 0.24}$$
$$\mathbf{p(R/C) = \frac{3}{4}}$$
$$\mathbf{p(R/M) = \frac{1}{2}}$$
$$\mathbf{p(R/F) = \frac{1}{3}}$$

b)

$$p(R \cap F) = p(F)p(R/F) = 0.24 \cdot \frac{1}{3} = 0.08$$

El cálculo de $p(R)$ es una probabilidad total

$$p(R) = p(C)p(R/C) + p(M)p(R/M) + p(F)p(R/F) =$$
$$= 0.48 \cdot \frac{3}{4} + 0.28 \cdot \frac{1}{2} + 0.24 \cdot \frac{1}{3} = 0.58$$

Por el teorema de Bayes:

$$p(C/R) = \frac{p(C)p(R/C)}{p(R)} = \frac{0.48\frac{3}{4}}{0.58} = 0.6207$$

En resumen

$$\mathbf{p(R \cap F) = 0.08; p(R) = 0.58; p(C/R) = 0.6207}$$

c)

Para que dos sucesos sean independientes debe ocurrir que $p(C \cap R) = p(C) \cdot p(R)$

Como

$$p(C \cap R) = p(C) \cdot p\left(\frac{R}{C}\right) = 0.48 \cdot \frac{3}{4} = 0.36$$

$$p(C) \cdot p(R) = 0.48 \cdot 0.58 = 0.2784$$

Como estas dos cantidades no son iguales los sucesos son dependientes

Los dos sucesos son dependientes.

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Solución:

Es una distribución normal N(160, 30)

a) Hay que calcular $p(X < 120)$

$$p(X < 120) = p\left(Z < \frac{120 - 160}{30}\right) = p\left(Z < -\frac{4}{3}\right) = p(Z < -1.33) =$$

$$= p(Z > 1.33) = 1 - p(Z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

La probabilidad de que un habitante de Astorga use el móvil cada días menos de dos horas es 0.0918.

b) Hay que calcular $p(X > 230)$

$$p(X > 230) = p\left(Z > \frac{230 - 160}{30}\right) = p\left(Z > \frac{70}{30}\right) = p(Z > 2.33) =$$

$$= 1 - p(Z \leq 2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$$

En porcentaje 0.99%

El porcentaje de habitantes de Astorga que usa el móvil más de tres horas y 50 minutos es del 0.99%.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** **MEJORA**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. 2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

CONVOCATORIA ORDINARIA MEJORA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ mx + 5y - 4z = -1 \end{cases}$$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$. **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. **(0,8 puntos)**

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula AB. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando $a = 1$. **(1,5 puntos)**

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv 2x + y = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π, que contenga a r. **(1 punto)**

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r? En caso afirmativo calcularlo. **(1 punto)**

Problema 4:

E4.- (Geometría)

a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$r \equiv \begin{cases} x + y - 5z = -3 \\ -2x + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv x + 1 = \frac{y-3}{a} = \frac{z}{2}$ sean paralelas. **(1 punto)**

b) Si $a = 9$, calcular la ecuación del plano que las contiene. **(1 punto)**

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea $f(x) = \begin{cases} xe^x & si \quad x < 0 \\ a \cdot sen(x) + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable en 0. **(2 puntos)**

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2 puntos)**

Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$. **(1 punto)**

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$:

a) Comprobar que sólo se cortan en $x = -1, x = 0$ y x = 1 **(0,5 puntos)**

b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones .
(1,5 puntos)

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores. **(1 punto)**

b) Se consideran los sucesos A y B, con $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A/B)$. **(1 punto)**

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? **(1 punto)**

b) Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

Autor: Francisco Barrientos Fernández
www.apuntesmareaverde.org.es

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA MEJORA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ mx & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{cases}$$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$. (1,2 puntos)

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. (0,8 puntos)

Solución:

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ mx & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ m & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{vmatrix} = 3m - 15 = 3(m-5)$$

Si m $\neq$ 5 el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m = 5$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 5 + 30 + 5 - 45 + 2 = 0$

El rango de la matriz ampliada es también 2, por tanto, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

En resumen

m	$rango\ A$	$rango\ A^*$	Sistema
$\neq 5$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
5	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**

b)

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 5x + 5y - 4z = -1 \end{cases}$$

Como es compatible indeterminado y $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 + z \\ x - y = 3 - 2z \end{cases}$$

actuando z como parámetro.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 2 \\ 3-2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1 - z - 6 + 4z}{-5} = \frac{3z-7}{-5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+z \\ 1 & 3-2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9 - 6z - 1 - z}{-5} = \frac{-7z+8}{-5}$$

Las soluciones pueden parametrizarse como

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t-7}{-5} \\ y = \dfrac{-7t+8}{-5} \\ z = t \end{cases}$$

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula AB. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando $a = 1$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1+2a \\ 1-a & a^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$|AB| = \begin{vmatrix} -1 & 1+2a \\ 1-a & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - a - 1 = \left(a - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

La matriz tiene inversa para $\boldsymbol{a \neq \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$

Para $a = 1$ la matriz es

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = -1$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $\boldsymbol{AB}$ para $\boldsymbol{a = 1}$ es

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Autor: Francisco Barrientos Fernández

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv 2x + y = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π, que contenga a r. **(1 punto)**

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r? En caso afirmativo calcularlo. **(1 punto)**

Solución:

a)

Para hallar el plano perpendicular necesitamos un vector $\vec{v}(2,1,0)$, perpendicular a π, un vector director $\vec{u}(1,-2,0)$ de la recta y un punto $P(0,1,1)$. El plano se construye con los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ y el punto P.

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5z - 5 = 0$$

El plano perpendicular a π que contiene a r tiene por ecuación $z = 1$.

b)

Vamos a ver que los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son perpendiculares, calculando el producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 0$$

Como el producto escalar vale cero, la recta y el plano pueden ser paralelos o la recta estar contenida en el plano.

Además $P \notin \pi$ porque sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación de π, no la satisface

$$2 \cdot 0 + 1 \neq 3$$

por tanto la recta y el plano son paralelos.

Podemos calcular el plano paralelo a π que contiene a r calculando el plano paralelo a π que pasa por P.

Todos los planos paralelos a π son de la forma $2x + y + D = 0$. Sustituyendo las coordenadas del punto P

$$2 \cdot 0 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

El plano es $2x + y - 1 = 0$

El plano paralelo a π que contiene a la recta r es $2x + y - 1 = 0$.

Problema 4:

E4.- (Geometría)

a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2}$ sean paralelas. **(1 punto)**

b) Si a = 9, calcular la ecuación del plano que las contiene. **(1 punto)**

Solución:

Vamos a hallar un punto y un vector director de cada una de las rectas.

Para hallar un vector director $\vec{r}$ de la recta r utilizamos el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}(1,1,-5)\ \ y\ \vec{v}(-2,0,1)$ perpendiculares a los planos que definen la recta

$$\vec{r}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{\imath}+9\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

Por tanto los puntos y vectores que definen las rectas son

$$r\begin{cases} P(0,2,1) \\ \vec{r}(1,9,2) \end{cases};\ \ s\ \begin{cases} Q(-1,3,0) \\ \vec{s}(1,a,2) \end{cases}$$

Para que las rectas sean paralelas o coincidentes la condición necesaria es que sus vectores directores sean proporcionales

$$\frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2}\rightarrow a=9$$

Además sustituyendo las coordenadas del punto $Q \in s$ en las ecuaciones de r, vemos que no las verifica, y por tanto las dos rectas no son coincidentes

$$\begin{cases} -1+3-5\cdot 0 \neq -3 \\ -2(-1)+0 \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto las dos rectas son paralelas.

b) Para $b=9$ hay que hallar el plano que contiene a las dos rectas paralelas. El plano resultará de un punto cualquiera de una de las rectas y los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,3,0)-(0,2,1)=(-1,1,-1)$$

La ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=11x+y-10z+8=0$$

El plano que contiene las dos rectas es 11x+y-10z+8=0

Autor: Francisco Barrientos Fernández
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea $f(x) = \begin{cases} xe^x & si \quad x < 0 \\ a \cdot sen(x) + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable en 0. **(2 puntos)**

Solución:

Las funciones $g(x) = xe^x$ y $h(x) = a \cdot sen(x) + b$ son funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$. Solo queda ver la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} a \cdot sen(x) + b = b$$

$$f(0) = b$$

Para que la función sea continua estos tres valores deben ser iguales. En consecuencia $b = 0$

La derivada de la función es

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + xe^x & si \quad x < 0 \\ a \cdot cos(x) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} (e^x + xe^x) = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} a \cdot cos(x) = a$$

Estos dos valores deben ser iguales por tanto $a = 1$

La función es continua y derivable para $a = 1$ y $b = 0$.

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

Solución:

Dominio de definición

La función existe para todos los números reales.

$$\boldsymbol{Dom\ f} = \mathbb{R}$$

Cortes con los ejes

Sustituyendo $x = 0$

$$x = 0 \rightarrow e^0 = 1$$

Haciendo $y = 0$, no hay ningún valor que haga que e^{x^2} sea 0

El único punto de corte con los ejes es $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < 0 \\ > 0 & si \quad x > 0 \end{cases} \rightarrow f(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < 0 \\ Crece & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Extremos relativos

La primera derivada se anula en $x = 0$

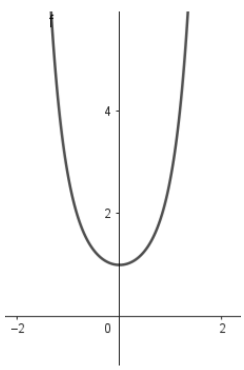
$$f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

Sustituyendo en $x = 0$

$$f''(0) = 2 > 0$$

En el punto $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ hay un mínimo

Gráfica



Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-2xsen(x^2)}{2sen(x)\cos(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-2sen(x^2)-4x^2\cos(x^2)}{2cos^2(\mathrm{x})-2\mathrm{sen}^2(x)} = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)} = 0}$$

b)

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^x \\ du = dx \\ v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = [e - e] - [0 - 1] = 1$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 xe^x dx = 1}$$

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$:

a) Comprobar que sólo se cortan en $x = -1, x = 0$ y $x = 1$ **(0,5 puntos)**

b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones .

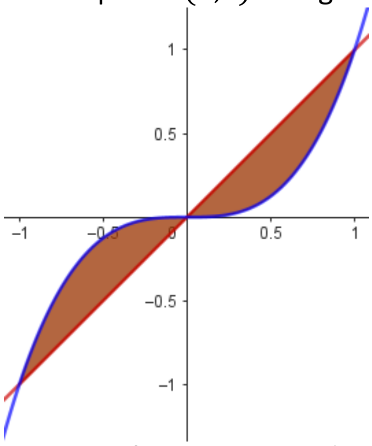
(1,5 puntos)

Solución:

a)
Hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^3 \end{cases} \rightarrow x = x^3 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = -1,0,1$$

Los puntos de corte de las dos funciones son $(-1,-1); (0,0); (1,1)$
b)
$f(x)$ es una función lineal de pendiente 1 que pasa por el origen. La función $g(x)$ es una función siempre creciente con un punto de inflexión en el punto $(0,0)$. Sus gráficas son



$$\int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

El área encerrada entre las dos curva es de $\frac{1}{2}$

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores. **(1 punto)**

b) Se consideran los sucesos A y B, con $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A/B)$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Sean el suceso $F_i = \{transmitir\ con\ errores\ el\ mensaje\ i\}$

Sabemos que $p(F_i) = 0.2; i = 1,2,3$

$$p(al\ menos\ dos\ mensajes\ sean\ tansmitidos\ con\ errores) =$$
$$= p(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + p(F_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3)p(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3)p(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap F_3) =$$
$$= 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.104$$

También podemos hacerlo considerando que es una binomial $B(3; 0.2)$, donde consideramos "éxito" a que el mensaje haya sido transmitido con errores. Hay que calcular $p(X \geq 2)$

$$p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) = \binom{3}{2} 0.2^2 \cdot 0.8 + \binom{3}{3} 0.2^3 = 0.104$$

La probabilidad de que al menos dos mensajes hayan sido transmitidos con errores es 0.104

b)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - p(A \cap B) = \frac{1}{2} \to p(A \cap B) = \frac{1}{30}$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{p(A \cup B) = \frac{1}{30}; p(A/B) = \frac{1}{6}}$$

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? **(1 punto)**

b) Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

Solución:

a) Es una distribución normal $N\left(4, \frac{100}{51}\right)$, y hay que calcular $p(X > 5)$

$$p(X > 5) = p\left(Z > \frac{5-4}{\frac{100}{51}}\right) = p(Z > 0.51) = 1 - p(Z \leq 0.51) = 1 - 0.695 = 0.305$$

El número de opositores que ha obtenido una calificación superior a 5 es de 305

b)

$$p(2 < X < 5) = p(X < 5) - p(X < 2) = p\left(Z \leq \frac{5-4}{\frac{100}{51}}\right) - p\left(Z \leq \frac{2-4}{\frac{100}{51}}\right) =$$

$$= p(Z \leq 0.51) - p(Z \leq -1.02) = p(Z \leq 0.51) - p(Z \geq 1.02) =$$

$$= 0.695 - \left(1 - p(Z \leq 1.02)\right) = 0.65 + 0.8461 - 1 = 0.5411$$

El porcentaje de opositores que formarán la bolsa de empleo es del 54.11%

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- **CALCULADORA**: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1(Álgebra):

a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para λ =1 . **(0,8 puntos)**

Problema 2(Álgebra):

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$. **(2 puntos)**

Problema 3(Geometría):

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1,1,1)$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π . **(1 punto)**

b) Hallar la recta perpendicular a r contenida en π que pasa por P . **(1 punto)**

Problema 4(Geometría):

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1,1,2)$ y $Q = (3,-1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$. **(2 puntos)**

Problema 5(Análisis):

Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$, demostrar que $f(x)$ se anula para algún valor de x y que ese valor es único. **(2 puntos)**

Problema 6(Análisis):

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-a}{bx^2} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$. , ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

Problema 7(Análisis):

Calcular los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$. **(2 puntos)**

Problema 8(Análisis):

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$. **(1 punto)**

Problema 9(Probabilidad y estadística):

Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia <140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV. **(1 punto)**

b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

Problema 10(Probabilidad y extadística):

Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para λ =1 . **(0,8 puntos)**

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 2 = \left(\lambda - \frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(\lambda + \frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right)$$

Si $\lambda \neq \left\{\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $\lambda = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, distinto de cero**,** el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si $\lambda = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, distinto de cero**,** el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{rango\ A}$	$\boldsymbol{rango A^*}$	**Sistema**
$\neq \frac{-5\mp\sqrt{17}}{2}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
$\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$	**2**	**3**	**Incompatible**
$\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$	**2**	**3**	**Incompatible**

b)

Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible determinado

Las matrices son

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{8}=0$$

Las soluciones son $\boldsymbol{x=\frac{1}{2};\, y=\frac{1}{2};\, z=0}$

Problema 2:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$. **(2 puntos)**

Solución:

Como la matriz AB es una matriz 2×2, podemos calcular X

$$AB + CX = D \rightarrow CX = D - AB \rightarrow X = C^{-1}(D - AB)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como el determinante de la matriz es distinto de cero, la matriz tiene inversa

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(D - AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 3:

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1,1,1)$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π . **(1 punto)**

b) Hallar la recta perpendicular a r contenida en π que pasa por P . **(1 punto)**

Solución:

a) **Primera solución**

Un vector director de la recta r es $\vec{u}(1,1,1)$ y un vector perpendicular al plano π es $\vec{v}(1,2,-3)$. El producto escalar de estos dos vectores es:

$\vec{u} \cdot \vec{v} == 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0$

Por tanto la recta es paralela al plano o la recta está contenida en el plano. Como el punto (0,0,0) pertenece a la recta y al plano, la recta está contenida en el plano.

Segunda solución

Analizamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ es distinto de cero, el rango de la matriz A es 2.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. La recta está contenida en el plano.

b) Hay que hallar un plano π ' perpendicular a r pasando por P . La recta resultante de cortar los planos π y π ' es la recta buscada.

Todos los planos perpendiculares a r son de la forma $x + y + z + k = 0$. Sustituyendo las coordenadas de P

$1 + 1 + 1 + k = 0 \implies k = -3$

El plano es $\pi' \equiv x + y + z - 3 = 0$

La recta buscada es

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

El producto vectorial de los vectores $\vec{u}(\ 1,1,1\ )$ y $\vec{v}(\ 1,2,-3\ )$ nos da un vector director de la recta

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$$

La recta en forma continua es

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{1}}$$

Problema 4:

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1,1,2)$ y $Q = (3,-1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$. **(2 puntos)**

Solución:

Para obtener el plano π pedido hay que construirlo con el vector $\overrightarrow{PQ}$, el vector director de la recta r y el punto P .

$\overrightarrow{PQ} = (3,-1,1) - (1,1,2) = (2,-2,-1)$

Un vector director de la recta r es $\vec{u}(1,1,1)$

La ecuación del plano es

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x - 3y + 4z - 4 = 0$$

La ecuación del plano es $-x - 3y + 4z - 4 = 0$

Problema 5:

Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$, demostrar que $f(x)$ se anula para algún valor de x y que ese valor es único. **(2 puntos)**

Solución:

En primer lugar hay que demostrar la existencia de un valor en el que f(x) se anula. Para ello utilizaremos el teorema de Bolzano que dice:

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[\ a, b\ ]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo $(\ a, b\ )$ tal que $f(c) = 0$

En este caso la función es $f(x) = e^x + x^3 - 2$ y la aplicamos en el intervalo $[\ 0{,}1\ ]$

$f(x)$ es contínua en en intervalo $[\ 0{,}1\ ]$ por ser suma de funciones contínuas. Además $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$. Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano, por tanto

$\exists\, c \in (\ 0{,}1\ ) / f(c) = 0$

Ahora hay que demostrar la unicidad.

Hay que ver que la función continua $f(x)$ es siempre creciente.

$f'(x) = e^x + 3x^2$

Esta función es siempre positiva para todo valor de x y por tanto la función es siempre creciente. En consecuencia la función $f(x)$ solo puede tener un valor que haga que $f(x) = 0$.

Problema 6:

Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos(x)-a}{bx^2} & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$. , ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}-\{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

Solución:

Hay que calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-a}{bx^2}$. Este límite, si $a\neq 1$ tiende a $\pm\infty$, porque el numerador es una constante (positiva o negativa) y el denominador tiene a cero. Para que este límite valga 1 (condición para que la función sea continua) solo puede ocurrir si el numerador vale cero. Esto ocurre cuando $a=1$.

Utilizando dos veces la regla de L'Hôpital e igualando a 1, que es el valor de la función en $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{bx^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\mathrm{sen}(x)}{2bx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{2b}=1\Longrightarrow 2b=-1\Longrightarrow b=-\frac{1}{2}$$

Los valores son $a=1$ y $b=-\frac{1}{2}$.

Problema 7:

Calcular los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$. **(2 puntos)**

Solución:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Las condiciones son

$$f'(0) = 0$$

$$f'(2) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} f'(0) = b = 0 \\ f'(2) = 12 + 4a + b = 0 \\ f(1) = 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

La función es $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 + 2}$

Problema 8:

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Dominio

La función existe cuando $x > 0$. Además no existe cuando $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$. **Por tanto su dominio es** $Dom(f) = (0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$.

Asíntotas verticales

En $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2} = -\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x = 0$

En $x = 1$, utilizando la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x-3} = -1$$

No hay asíntota

En $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x = 2$

Asíntotas horizontales

Utilizando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2-3x} = 0$$

Hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

Problema 9:

Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia <140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV. **(1 punto)**

b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

Solución:

a)

Sean los sucesos

C={ ser un coche convencional }

H={ ser un coche híbrido }

E={ ser un coche eléctrico }

X={ ser un coche con potencia <140 CV }

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades:

$p(C) = 0.5; p(H) = 0.3; p(E) = 0.2$

$p(X/C) = 0.7; p(X/H) = 0.8; p(X/E) = 0.85$

de lo que se deduce que

$p(\bar{X}/C) = 0.3; p(\bar{X}/H) = 0.2; p(\bar{X}/E) = 0.15$

Se pide $p(C \cap \bar{X}); p(H \cap \bar{X}); p(E \cap \bar{X})$

$$p(C \cap \bar{X}) = p(C) \cdot p(\bar{X}/C) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$$

$$p(H \cap \bar{X}) = p(H) \cdot p(\bar{X}/H) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$

$$p(E \cap \bar{X}) = p(E) \cdot p(\bar{X}/E) = 0.2 \cdot 0.15 = 0.03$$

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV es 0.15

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea híbrido con potencia ≥ 140 CV es 0.06

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea eléctrico con potencia ≥ 140 CV es 0.03

b)

Hay que calcular $p(C/\bar{X})$ y para ello necesitamos $p(\bar{X})$

$p(\bar{X}) = p(C) \cdot p(\bar{X}/C) + p(H) \cdot p(\bar{X}/H) + p(E) \cdot p(\bar{X}/E) = 0.15 + 0.06 + 0.03 = 0.24$

Hay que calcular $p(\ C/\bar{X}\ )$ utilizamos el teorema de Bayes

$$p(\ C/\ \bar{X}\ ) = \frac{p(C)\cdot p(\bar{X}/C)}{p(\bar{X})} = \frac{0.15}{0.24} = 0.625$$

La probabilidad de que un coche elegido al azar que resulte ser de el menos 140 CV, sea de tipo convencional es de 0.625

Problema 10:

Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Solución:

a) Es una distribución normal $N(160{,}30)$ y hay que calcular $p(X < 120)$

$$p(X < 120) = p\left(Z < \frac{120 - 160}{30}\right) = p(Z < -1.33) = p(Z > 1.33) =$$

$$= 1 - p(Z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas es de 0.0918

b) Hay que calcular $p(X > 230)$

$$p(X > 230) = p\left(Z < \frac{230 - 160}{30}\right) = p(Z > 2.33) =$$

$$= 1 - p(Z \leq 2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$$

El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos es el 0.1%

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a . **(1,2 puntos)**

b) Resolver si $a = 0$. **(0.8 puntos)**

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? **(0,4 puntos)**

b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a . **(0,6 puntos)**

c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} A$ **(1 punto)**

Problema 3:

Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(1, -2{,}2)$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases}$. **(2 puntos)**

Problema 4:

Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + mz = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$. , determinar m para que sean:

a) perpendiculares. **(1 punto)**

b) paralelos. **(1 punto)**

Problema 5:

a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x) - sen(x)}{x \cdot sen(x)}$. **(1punto)**

b) Demostrar que la ecuación $x \cdot sen(x) = 1$ tiene alguna solución. **(1 punto)**

Problema 6:

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx$. **(1 punto)**

Problema 7:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x \leq 0 \\ e^{2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos).**

b) Hallar la recta tangente a la función en $x = 1$. **(0.5 puntos)**

Problema 8:

a) Calcular los valores de a, b y c necesarios para que la función $f(x) = ax^3 \; - bx + c$ presente en el punto (1,2) un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x)dx = 1$. **(1,6 puntos)**

b) ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? **(0,4 puntos)**

Problema 9:

A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A,B,C y D . La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B . La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C . La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D . Calcular la probabilidad de que:

a) gane cada uno de ellos. **(1 punto)**

b) ganen C o D . **(0.5 puntos)**

c) no gane A . **(0.5 puntos)**

Problema 10:

En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.

• Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.

• Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.

Nombrando los sucesos: A={ "ser mujer" },B={ "ser hombre" }M={ "padecer miopía" } .

a) Calcular $P(A)$; $P(M/A)$; $P(B \cap M)$. **(0,5 puntos)**

b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. **(0,5 puntos)**

c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a . **(1,2 puntos)**

b) Resolver si $a = 0$. **(0.8 puntos)**

Solución:

a)

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a+1 & 1 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - a - 1 + a^2(a+1) = a^3 + 2a^2 + a = a(a+1)^2$$

Si $a \neq \{0, -1\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $a = 0$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si $\mathrm{a} = -1$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 =$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

a	$rango\ A$	$rangoA^*$	**Sistema**
$\neq \{0, -1\}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
0	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**
-1	**2**	**3**	**Incompatible**

b)
Si a= 0 el sistema es compatible indeterminado

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, resolvemos el sistema en función de un parámetro:

$$\begin{cases} y = -z \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -z$$

Las soluciones son $\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = -t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases}$

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? **(0,4 puntos)**

b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a . **(0,6 puntos)**

c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} A$ **(1 punto)**

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2$$

La matriz tiene inversa para $a \neq 0$.

b) Si $a \neq 0$ el determinante de la matriz es distinto de cero y el rango de la matriz es 3.

Si $a = 0$ la matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solo hay una línea linealmente independiente, por lo que el rango de la matriz es 1.

b)

$$A^{-1} = \frac{1}{4} A \Rightarrow I = \frac{1}{4} A^2$$

$$\frac{1}{4} A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a^2 & -2a+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & a-2 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} & \frac{4-2a}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a-2}{4} & \frac{a^2}{4} \end{pmatrix}$$

Igualando

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} & \frac{4-2a}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a-2}{4} & \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4} = 1 \\ \frac{4-2a}{4} = 0 \\ \frac{a-2}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2$$

$$\textbf{La matriz es} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(\,1,-2,2\,)$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} 2x-y+z=8 \\ x-y+2z=9 \end{cases}$. **(2 puntos)**

Solución:

Hay que hallar un vector director de la recta r . Lo hacemos hallando el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}\,(\,2,-1,1\,)$ y $\vec{v}\,(\,1,-1,2\,)$ perpendiculares a cada uno de los planos que definen la ecuación.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-\vec{k}$$

Un vector director de la recta es $\vec{w}(\,-1,-3,-1\,)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-2-3t \\ z=2-t \end{cases}$$

La ecuación en forma continua es

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{-1}$$

y en forma implícita es

$$\begin{cases} -3(x-1)=-(y+2) \\ x-1=z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=5 \\ x-z=-1 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta son:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=1-t} \\ \boldsymbol{y=-2-3t} \\ \boldsymbol{z=2-t} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{-1}}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x-y=5} \\ \boldsymbol{x-z=-1} \end{cases}$$

Problema 4:

Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + mz = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$. , determinar m para que sean:

a) perpendiculares. **(1 punto)**

b) paralelos. **(1 punto)**

Solución:

a) Hay que hallar un vector director de la recta r . Utilizamos el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}(2,-1,3)$ y $\vec{v}(1,-1,0)$, cada uno de ellos perpendicular a uno de los planos que definen la recta.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$$

Un vector director de la recta r es $\vec{w}(3,3,-1)$ y un vector perpendicular al plano π es $\vec{x}(3,3,m)$

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares los vectores $\vec{w}$; y $\vec{x}$; deben ser proporcionales.

$\frac{3}{3} = \frac{3}{3} = \frac{m}{-1} \Rightarrow m = -1$

El plano perpendicular a la recta es $3x + 3y - z = 3$

b) Para que la recta y el plano sean paralelos, los vectores $\vec{w}$; y $\vec{x}$; deben ser perpendiculares, y por tanto su producto escalar debe ser cero:

$\vec{w} \cdot \vec{x} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot \mathrm{m} = 0 \Rightarrow \mathrm{m} = 18$; y

El plano paralelo a la recta es $3x + 3y + 18z = 3$

Problema 5:

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x\cdot sen(x)}$. **(1punto)**

b) Demostrar que la ecuación $x \cdot sen\,(x) = 1$ tiene alguna solución. **(1 punto)**

Solución:

a) Utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x\cdot sen(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2(x)}-cos(x)}{sen(x)+x\cdot cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2sen(x)}{cos^3(x)}+sen(x)}{cos(x)+\cos(x)-x\cdot sen(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x\cdot sen(x)} = 0}$$

b)

Sea la función $f(x) = x \cdot sen\,(x) - 1$ en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

El teorema de Bolzano dice:

Si una función f es contínua en un intervalo cerrado $[\,a,b\,]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo $(\,a,b\,)$ tal que $f(c) = 0$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ contínua en } [\,a,b\,] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{ signo } f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \mathrm{c} \in (\,\mathrm{a,b}\,)/\mathrm{f(c)} = 0$$

La función $f(x)$ es una función continua por ser producto de funciones continuas. Además

$f(0) = -1 < 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \cong 0.57 > 0$. El teorema de Bolzano asegura que existe un punto $c \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ en el que la función se anula. y por tanto $c \cdot sen\,(c) - 1 = 0$. De ello se deduce que existe un punto $c \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $c \cdot sen\,(c) = 1$.

NOTA: De hecho hay 4 puntos que cumplen la condición +2.7726...;-2.7726...;-1.1142... y 1.1142...$\in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Problema 6:

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 4x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1) - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2-2x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)^3 - (2-2x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-2(x+1) - 6 + 6x}{(x+1)^4} = \frac{4x-8}{(x+1)^4}$$

La primera derivada se anula en $x = 1$. Sustituimos en la segunda derivada

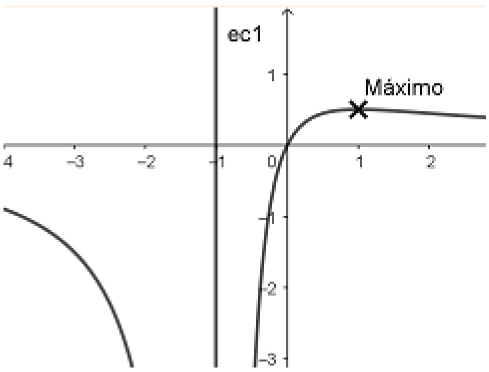
$f''(1) = \frac{-4}{16} < 0$

En el punto $(1, \frac{1}{2})$ hay un máximo.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento hay que ver el signo de la primera derivada

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < -1 \\ > 0 & si \quad -1 < x < 1 \\ < 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La representación gráfica es así:



b)

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{2(x+1)-2}{(x+1)^2}dx = \ln(x+1)^2 - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} = 2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$$

Problema 7:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x \leq 0 \\ e^{2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos).**

b) Hallar la recta tangente a la función en $x = 1$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a)

Para que la función sea continua en $x = 0$ hay que calcular los límites laterales y el valor de la función en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 + ax + b = b$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{2x} = 1$$

$$f(0) = b$$

Para que la función sea continua en $x = 0$ estos tres valores deben coincidir, por tanto $b = 1$

Para que la función sea derivable en x=0 , estos dos valores deben coincidir, por tanto a=2 .

La función es

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & si \quad x < 0 \\ 2e^{2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} 2x + a = a$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2e^{2x} = 2$$

Para que la función sea derivable en $x = 0$, estos dos valores deben coincidir, por tanto $a = 2$.

La función es

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & si \quad x \leq 0 \\ e^{2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Los\ valores\ son\ a = 2\ y\ b = 1}$$

b)

$$f'(x)_{x=1} = [2e^{2x}]_{x=1} = 2e^2$$

$$f(1) = e^2$$

La recta tangente es

$$y - e^2 = 2e^2(x - 1) \Longrightarrow y = 2e^2x - e^2$$

Problema 8:

a) Calcular los valores de a, b y c necesarios para que la función $f(x) = ax^3 - bx + c$ presente en el punto (1,2) un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x)dx = 1$. **(1,6 puntos)**

b) ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? **(0,4 puntos)**

Solución:

a) la derivada de la función es

$f'(x) = 3a\ x\ 2\ - b$

La condiciones sobre la función son:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 2 \\ 3a - b = 0 \\ \int_0^1 (ax^3 - bx + c)dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 3a + c = 2 \\ 3a = b \\ \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2 + 2a \\ 3a = b \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 2 + 2a = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -4 \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

La función es $f(x) = -\frac{4x^3}{3} + 4x - \frac{2}{3}$

Los valores que cumplen las condiciones son $a = -\frac{4}{3}; b = -4; c = -\frac{2}{3}$

b)

En ésta función $f'(1) = 0$. La segunda derivada es $f''(x) = -8x$. Sustituyendo $x = 1$, resulta $f''(1) = -8 < 0$. Por tanto en $x = 1$ hay un máximo, porque la primera derivada en $x = 1$ es cero y la segunda derivada en $x = 1$ es negativa.

Problema 9:

A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A,B,C y D . La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B . La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C . La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D . Calcular la probabilidad de que:

a) gane cada uno de ellos. **(1 punto)**

b) ganen C o D . **(0.5 puntos)**

c) no gane A . **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Si $p(C)$ es la probabilidad de que gane C tenemos:

$$p(A) = p(B) = 3p(C); p(C) = p(D)$$

Como la suma de todas las probabilidades es la probabilidad del suceso seguro

$$p(A) + p(B) + p(C) + p(D) = 1 \implies 3p(C) + 3p(C) + p(C) + p(C) = 1 \Rightarrow p(C) = \frac{1}{8}$$

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{3}{8}\ ; p(B) = \frac{3}{8}\ ; p(C) = \frac{1}{8}\ ; p(D) = \frac{1}{8}}$$

b)

Como solo puede ganar uno de ellos

$$p(\,C \cup D\,) = p(C) + p(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de que gane C o D es $\frac{1}{4}$

c)

$$p(\,\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

La probabilidad de que no gane A es $\frac{5}{8}$

Problema 10:

En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.

• Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.

• Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.

Nombrando los sucesos: A={ "ser mujer" },B={ "ser hombre" }M={ "padecer miopía" } .

a) Calcular $P(A); P(M/A); P(B \cap M)$. **(0,5 puntos)**

b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. **(0,5 puntos)**

c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1 punto)**

Solución:

El enunciado proporciona los siguientes datos de la tabla

	M (ser miope)	$\overline{M}$(no ser miope)	Total
A ser mujer	280		550
B(se hombre)	190		420
Total			

Lo que permite deducir los resultados totales y los que faltan en la tabla

	M (ser miope)	$\overline{M}$(no ser miope)	Total
A ser mujer	280	270	550
B(se hombre)	190	230	420
Total	470	500	970

a) Se pide de entre toda la población (970), la probabilidad de ser mujer (470)

$$p(A) = \frac{470}{970}$$

La probabilidad de que, siendo mujer (550) sea miope (280)

$$p(\,M/A\,) = \frac{280}{550}$$

La probabilidad de ser hombre y miope

$$p(\,B\ \cap\ M\,) = \frac{190}{970}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{470}{970}; P(M/A) = \frac{280}{550}; P(B \cap M) = \frac{190}{970}}$$

b) De toda la población (970), la probabilidad de ser miope (470) es

$$\boldsymbol{p(M) = \frac{470}{970}}$$

c) De entre todos los miopes (470), 280 son mujeres

$$\boldsymbol{p(\,A/M\,) = \frac{280}{470}}$$