

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de CATALUÑA



www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jaime Carrascosa Orozco





EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE
GENERAL

CURSO: 2023–2024

MATERIA: MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Respondeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

1. Considereu la funció $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$, definida per a $x > 0$.

a) Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.

[1 punt]

b) Aquesta funció té asímptotes? Feu un esbós de la seva gràfica.

[1 punt]

c) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

[0,5 punts]

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\},$$

on k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k , i resoleu-lo per a $k = 0$.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k = -1$.

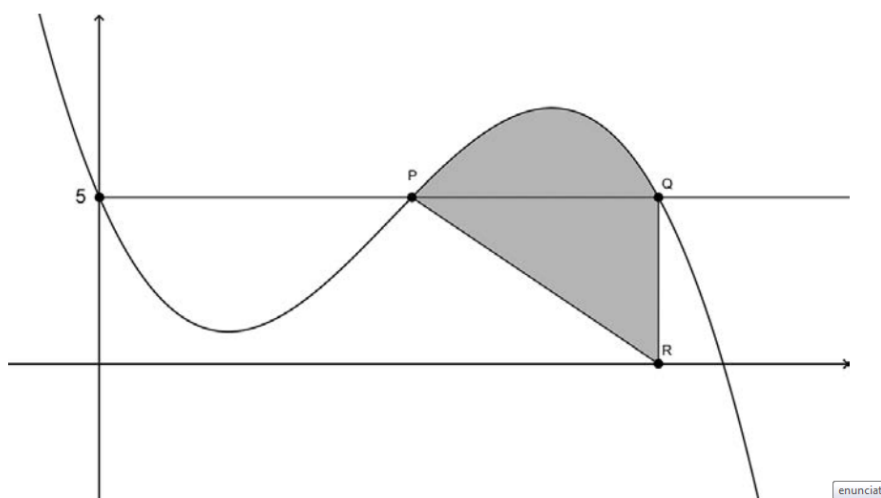
[0,75 punts]

c) Per a $k = -1$, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.

[0,75 punts]

Problema 3:

3. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

- a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P, Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR.

[1,25 punts]

- b) Calculeu la superfície del terreny.

[1,25 punts]

Problema 4:

4. L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa.



- a) A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure la segona).

— Calculeu la probabilitat que la primera bola sigui una A o una E.

[0,5 punts]

— Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin diferents.

[0,75 punts]

- b) L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrere l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar la següent).

— Calculeu la probabilitat que no hagi tret cap A.

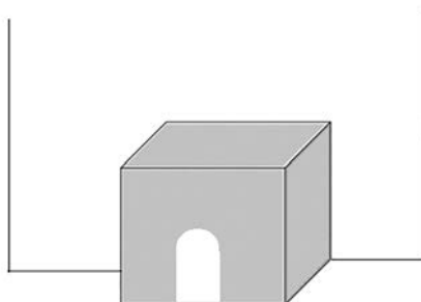
[0,5 punts]

— Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A.

[0,75 punts]

Problema 5:

5. Volem construir un petit cobert de fusta de 6 m^3 de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



- a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35, \text{ on } x \text{ és la fondària del cobert en metres.}$$

[1,25 punts]

- b) Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?
- [1,25 punts]

Problema 6:

6. Considereu els punts $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-3, -2, 3)$.
- a) Calculeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta AB i que passa pel punt mitjà entre A i B . Justifiqueu que aquest pla està format, precisament, pels punts $P = (x, y, z)$ que estan a igual distància de A que de B , és a dir, $d(P, A) = d(P, B)$.
- [1 punt]
- b) Calculeu les distàncies de A i de B al pla π i comproveu que són iguals. És casualitat Raoneu la resposta.
- [0,75 punts]
- c) Sigui $C = (-7, 6, 3)$. El triangle ABC és isòsceles? Calculeu la seva àrea.
- [0,75 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Considereu la funció $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, definida per a $x > 0$.

a) Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.

[1 punt]

b) Aquesta funció té asímptotes? Feu un esbós de la seva gràfica.

[1 punt]

c) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

[0,5 punts]

Solució:

Solució apartat a:

Ens demana un estudi de la monotonía de la funció, per fer-ho necessitem la derivada de la funció, ja que com sabem, pels valors de x en els que $f'(x) < 0$, $f(x)$ és *decreixent*; pels valors en els que $f'(x) > 0$, $f(x)$ és *creixent* i pels valors en els que $f'(x) = 0$, $f(x)$ té un màxim, un mínim o un punt d'inflexió. De manera que en primer lloc calcularem la derivada de la funció i després estudiarem el seu signe.

$$i) \quad f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ii) Per a fer l'estudi del signe de la funció 1er hem de veure quan val zero:

$$2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow -\ln x = -1 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Llavors hem de veure quin signe té la funció als intervals $(0, e)$ i $(e, +\infty)$, substituint un nombre de cada interval a la derivada fem prou:

- $(0, e) \rightarrow x = 1 \rightarrow f'(1) = 2 \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 2 > 0 \rightarrow$ la funció és creixent en $(0, e)$.
- $(e, +\infty) \rightarrow x = e^2 \rightarrow f'(e^2) = 2 \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = 2 \frac{1 - 2}{e^4} = -\frac{2}{e^4} < 0 \rightarrow$ la funció és decreixent en $(e, +\infty)$.
- A més a més podem concloure que en $x = e$ la funció té un màxim, ja que passa de ser creixent a decreixent.

iii) veure quan val zero:

$$2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow -\ln x = -1 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Llavors hem de veure quin signe té la funció als intervals $(0, e)$ i $(e, +\infty)$, substituint un

nombre de cada interval a la derivada fem prou:

- $(0, e) \rightarrow x = 1 \rightarrow f'(1) = 2 \frac{1-\ln 1}{1^2} = 2 > 0 \rightarrow$ la funció és creixent en $(0, e)$.
- $(e, +\infty) \rightarrow x = e^2 \rightarrow f'(1) = 2 \frac{1-\ln e^2}{e^4} = 2 \frac{1-2}{e^4} = -\frac{2}{e^4} < 0 \rightarrow$ la funció és decreixent en $(e, +\infty)$.
- A més a més podem concloure que en $x = e$ la funció té un màxim, ja que passa de ser creixent a decreixent.

Solució apartat b:

Asímtotes verticals: les trobem en els valors que anul·len el denominador, en aquest cas és en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \rightarrow \text{tenim una asímtota vertical en } x = 0.$$

Asímtotes horitzontals: les trobem al fer el límit quan $x \rightarrow \infty$:

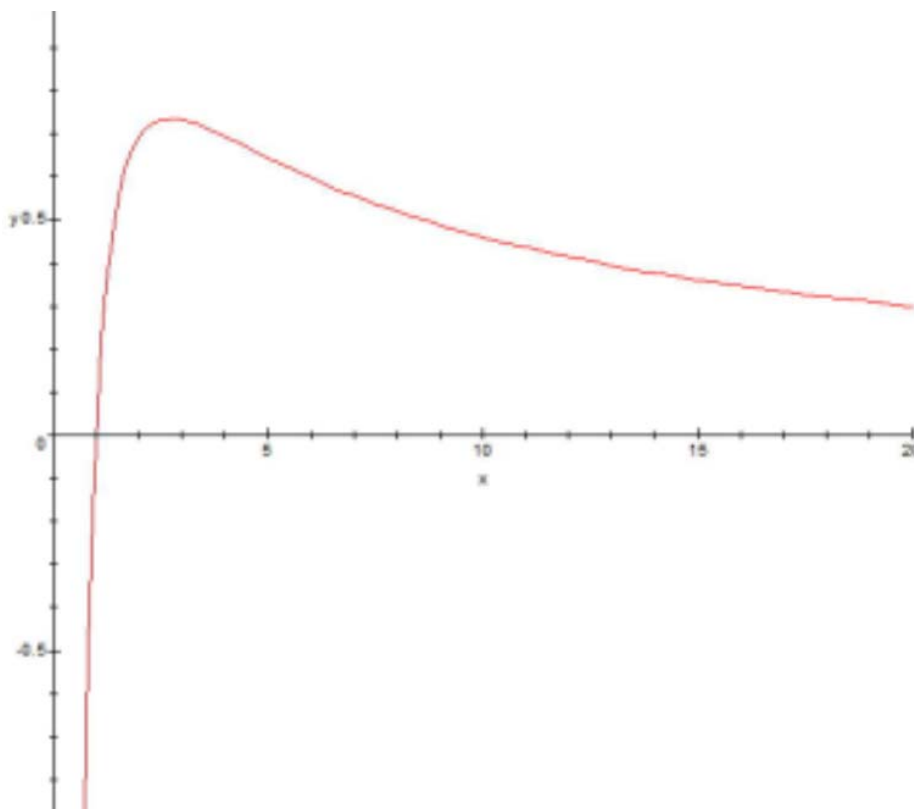
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$

L'Hôpital

(També podríem haver argumentat que com que a l'interval $(e, +\infty)$ la funció és decreixent i no travessa l'eix de les x (ja que la única solució de l'equació $2 \frac{\ln x}{x} = 0$ és $x = 1$) té una asímtota horitzontal).

Asímtotes obliqües: Com que la funció té una asímtota horitzontal, no pot tenir-ne d'obliqües.

Un **esbós de la gràfica** de la funció seria:



Solució apartat c:**Equació de la recta tangent a la funció en $(1, f(1))$:**

L'equació explícita d'una recta qualsevol, ve donada per l'expressió: $y = mx + n$ on m és el pendent de la recta, com que la recta que busquem és tangent a la funció $f(x)$ en $(1, f(1))$, el seu pendent serà la derivada de la funció en 1, es a dir $f'(1)$.

Calculem $f'(1) = 2 \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 2$

De moment tenim que l'equació de la recta serà: $y = 2x + n$, ara, per trobar el valor de n , fem servir el fet de que la recta passa pel punt $(1, f(1)) = (1, 2 \frac{\ln 1}{1}) = (1, 0)$ llavors:

$$y = 2x + n \xrightarrow{\text{passa per } (1,0)} 0 = 2 \cdot 1 + n \rightarrow n = -2.$$

De manera que l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa $x=1$ és:

$$y = 2x - 2$$

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left. \begin{aligned} 4x + 2y - z &= 4 \\ x - y + kz &= 3 \\ 3x + 3y &= 1 \end{aligned} \right\},$$

on k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k , i resoleu-lo per a $k = 0$.

[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k = -1$.

[0,75 punts]

c) Per a $k = -1$, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.

[0,75 punts]

Solució:**Solució apartat a:**

Anomenem $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ a la matriu del sistema i $\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a la matriu ampliada del sistema.

Discutirem el sistema aplicant el Teorema de Rouché-Fröbenius, que compara el rang de la matriu del sistema amb el rang de la matriu ampliada.

i) Rang de la matriu del sistema segons els valors del paràmetre k :

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de k s'anul·la el determinant de la matriu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 6k - (3 + 12k) = -3 + 6k - 3 - 12k = -6 - 6k$$

$$|A| = 0 \iff -6 - 6k = 0 \iff k = -1$$

llavors:

- Si $k \neq -1$, el determinant de la matriu serà diferent de zero i per tant el rang de la matriu serà 3.
- Si $k = -1$, $|A| = 0$ i per tant $\text{rg}(A) < 3$, anem a veure quin és el rang de la matriu A quan canviem la k per -1 :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ si fem } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6 \neq 0, \text{ llavors podem dir que } \text{rg}(A) = 2.$$

ii) **Rang de la matriu ampliada del sistema segons els valors del paràmetre k :**

- Si $k \neq -1$, com que la matriu $\bar{A}$ és d'ordre 3×4 , $\text{rg}(\bar{A}) \leq 3$, com que la matriu $A \subset \bar{A}$, $\text{rg}(\bar{A}) \geq 3$; per tant $\text{rg}(\bar{A}) = 3$.
- Si $k = -1$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:
Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\begin{aligned} \bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{Intercanviem } F_1 \text{ i } F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=4F_1-F_2 \\ F_3=3F_1-F_3}]{F_2=4F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_3=F_2-F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 2. \end{aligned}$$

iii) **Discussió del sistema amb el T^a de Rouché-Fröbenius:**

- Si $k \neq -1$ tenim que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = n^\circ \text{ d'incògnites} \xrightarrow{\text{T}^a \text{ de Rouché}} \text{SCD}$.
- Si $k = -1$, tenim que $\text{rg}(A) = \text{rg}(\bar{A}) = 2 < 3 = n^\circ \text{ d'incògnites} \xrightarrow{\text{T}^a \text{ de Rouché}} \text{SCI amb 1 grau de llibertat}$.

iv) **Resolució del sistema quan $k = 0$:**

Aplicant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-6} = 0$$

- Si $k \neq -1$ tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = n^{\circ} d'incògnites \xrightarrow{T^a \text{ de Rouché}} SCD$.
- Si $k = -1$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2 < 3 = n^{\circ} d'incògnites \xrightarrow{T^a \text{ de Rouché}} SCI$ amb 1 grau de llibertat.
- La solució del sistema per a $k = 0$ és $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{-4}{3}$, $z = 0$.

Solució apartat b:

Si $k = -1$ podem eliminar la 3ª equació per ser redundant (és la 1ª menys la 2ª) i el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Restant la 1ª equació menys 2ª ena queda: $3x + 3y = 1$, fent $y = t$, ens queda: $3x + 3t = 1 \rightarrow$

$x = \frac{1-3t}{3} = \frac{1}{3} - t$, substituint la x i la y a la segona equació trobem la z : $\frac{1}{3} - t - t - z = 3 \rightarrow$

$\frac{1}{3} - 2t - 3 = z \rightarrow z = -\frac{8}{3} - 2t$, de manera que:

La solució del sistema quan $k = -1$, és $\left(\frac{1}{3} - t, t, -\frac{8}{3} - 2t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Solució apartat c:

Com hem vist quan $k = -1$, la tercera equació és combinació lineal de les dues primeres, de manera que si canviem el seu terme independent (per exemple per un 2) al intentar fer Gauss la tercera fila no marxaria i ens quedaria que la matriu ampliada tindrà grau 3:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Intercanviem } F1 \text{ i } F2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F3=3F1-F3]{F2=4F1-F2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & 7 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F3=F2-F3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow rg(\bar{A}) = 3. \end{aligned}$$

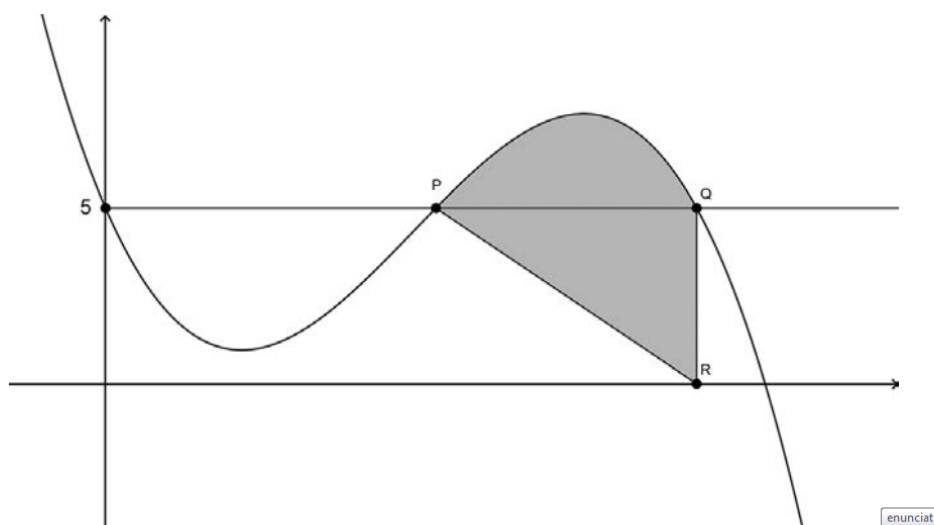
Com que hem canviat el valor del terme independent, no hem canviat els valors de la matriu A de manera que $rang(A) = 2$, amb la qual cosa:

Al canviar el terme independent per 2 tenim que:

$$rg(A) \neq rg(\bar{A}) \xrightarrow{T^a \text{ de Rouché}} SI$$

Problema 3:

3. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

- a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P , Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR .

[1,25 punts]

- b) Calculeu la superfície del terreny.

[1,25 punts]

Solució:**Solució apartat a:**

Com es veu al dibuix $P = (a, 5)$, $Q = (b, 5)$ i $R = (b, 0)$, com que P i Q són punts de la gràfica de $f(x)$, $f(a) = f(b) = 5$ llavors a i b són solucions de l'equació $f(x) = 5$.

Resolem l'equació: $-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(-x^2 + 7x - 6) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 7x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} \frac{-7 + 5}{-2} = 1 \\ \frac{-7 - 5}{-2} = 6 \end{cases} \end{cases}$$

La solució 0, correspon al punt (0,5), de manera que $a = 1$ i $b = 6$.

Equació de la recta que passa per $P(1,5)$ i $R(6,0)$:

1r calculem el pendent de la recta: $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$

L'equació explícita de la recta tindrà la forma $y = -x + n$, com que passa pel punt (0,6) al substituir-lo a l'equació podem trobar la $n \rightarrow 6 = n$. Llavors l'equació que ens demanen és: $y = -x + 6$

$P = (1, 5)$, $Q = (6, 5)$ i $R = (6, 0)$, L'equació de la recta que passa per P i R és
 $y = -x + 6$

Solució apartat b:

La superfície del terreny és la integral entre $x = 1$ i $x = 6$ de $f(x)$ menys la recta:

$$S = \int_1^6 (f(x) - r(x)) dx = \int_1^6 ((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)) dx =$$

$$\int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - x \right]_1^6 =$$

$$\left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7 \cdot 6^3}{3} - \frac{5 \cdot 6^2}{2} - 6 \right) - \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{7 \cdot 1^3}{3} - \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 1 \right) = \frac{1025}{12} \cong 85,416 \dots u^2$$

La superfície és $\frac{1025}{12} u^2$

Problema 4:

4. L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa.



- a) A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure la segona).
- Calculeu la probabilitat que la primera bola sigui una A o una E.
[0,5 punts]
 - Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin diferents.
[0,75 punts]
- b) L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrere l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar la següent).
- Calculeu la probabilitat que no hagi tret cap A.
[0,5 punts]
 - Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A.
[0,75 punts]

Solució:**Solució apartat a:**

- i) Com que tenim dos A i una E, tenim 3 casos favorables sobre 9 casos possibles, aplicant la fórmula de Laplace, la probabilitat que ens demanen és: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
- ii) En aquest cas és més fàcil calcular la probabilitat de l'esdeveniment complementari i després restar-la de l'1 per a trobar la que ens demanen, és a dir:

$$P(\text{Dues boles diferents}) = 1 - P(\text{dues boles iguals})$$

Dues boles només poden ser iguals si són dues A o dues S:

$$P(\text{Dues A}) = P(\text{Primera A i segona A}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(\text{Dues S})$$

$$\text{Llavors } P(\text{dues boles iguals}) = P(\text{Dues A}) + P(\text{Dues S}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Pet tant: } P(\text{Dues boles diferents}) = 1 - P(\text{dues boles iguals}) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} \cong 0,944 \dots$$

$$\text{Probabilitat d'A o E} = \frac{1}{3}; \text{ probabilitat de que les dues boles siguin diferents} = \frac{17}{18}$$

Solució apartat b:

- i) El nombre de boles A extretes segueix una binomial (o traiem una A o no la traiem)

$$n = 5 \text{ i } p = \frac{2}{9} \text{ llavors } P(\text{cap } A) = (1 - p)^5 = \left(\frac{7}{9}\right)^5 = 0,284 \dots$$

- ii) En aquest cas és més fàcil calcular la probabilitat de l'esdeveniment complementari i després restar-la de l'1 per a trobar la que ens demanen:

Esdeveniment complementari de treure al menys dues A és no treure'n cap o treure'n una:

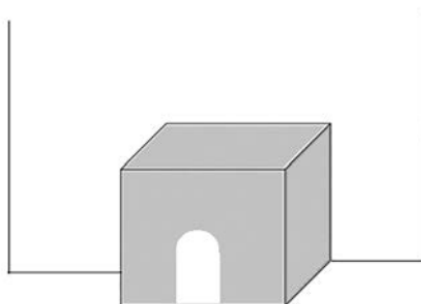
$$P(\text{una } A) = \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{7}{9}\right)^4 \quad \text{i} \quad P(\text{Cap } A) = \left(\frac{7}{9}\right)^5$$

$$\text{Llavors: } P(\text{Almenys } 2 \text{ } A) = 1 - [P(\text{Una } A) + P(\text{Cap } A)] = 1 - \left[\binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{7}{9}\right)^4 + \left(\frac{7}{9}\right)^5 \right] \cong 0,308 \dots$$

$$\mathbf{P(\text{cap } A) = 0,284 \dots \quad \text{i} \quad P(\text{Almenys } 2 \text{ } A) = 0,308 \dots}$$

Problema 5:

5. Volem construir un petit cobert de fusta de 6 m^3 de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



- a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35, \text{ on } x \text{ és la fondària del cobert en metres.}$$

[1,25 punts]

- b) Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?

[1,25 punts]

Solució:**Solució apartat a:**

El cost ve donat per la multiplicació de 30 pels metres quadrats de les 3 parets que hem de construir, més 50 pels metres quadrats del sostre, més el cost de la porta. Si anomenem x a la fondària (com ens diuen) y a la amplària i z a l'altura, la funció quedaria:

$$C(x, y, z) = 30(2xz + yz) + 50xy + 35$$

Parets laterals
Paret frontal
Sostre
Porta

Hem d'escriure la funció del cost de construcció fent servir només la variable fondària del cobert (x) de manera que hem d'escriure les altres dues en funció d'aquesta, si ens fixem en l'enunciat:

Ha de tenir el triple d'amplària que de fondària: $y = 3x$

El cobert ha de tenir 6 m^3 : $x \cdot y \cdot z = 6 \rightarrow x \cdot 3x \cdot z = 6 \rightarrow 3x^2 \cdot z = 6 \rightarrow z = \frac{6}{3x^2} = \frac{2}{x^2}$

Substituint en $C(x, y, z)$ ens queda: $C(x) = 30\left(2x \frac{2}{x^2} + 3x \frac{2}{x^2}\right) + 50x3x + 35 =$

$$30\left(\frac{4}{x} + \frac{6}{x}\right) + 150x^2 + 35 = 30\left(\frac{10}{x}\right) + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35. \text{ Com volíem demostrar.}$$

Solució apartat b:

Per a buscar el mínim de la funció $C(x)$ calculem la seva derivada i resollem l'equació $C'(x) = 0$:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

$$\frac{-300}{x^2} + 300x = 0 \rightarrow -300 + 300x^3 = 0 \rightarrow 300x^3 = 300 \rightarrow x^3 = \frac{300}{300} = 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Ara podem afirmar que $C(x)$ en $x = 1$ té un punt singular, per a comprovar que efectivament és un mínim ho farem amb el mètode de la segona derivada:

$$C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300 \quad i \quad C''(1) = 900 > 0 \rightarrow C(x) \text{ té un mínim en } x = 1.$$

$$\text{Si } x = 1, \quad y = 3x \rightarrow y = 3 \quad i \quad z = \frac{2}{x^2} \rightarrow z = 2.$$

$$\text{Per a aquestes dimensions el cost és de: } C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485 \text{ €}$$

Per tenir un cost mínim, les dimensions han de ser: 1m de fondària, 3 metres d'amplada i 2 metres d'alçada. El cost del cobert per a aquestes dimensions és de 485€.

Problema 6:

6. Considereu els punts $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-3, -2, 3)$.
- a) Calculeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta AB i que passa pel punt mitjà entre A i B . Justifiqueu que aquest pla està format, precisament, pels punts $P = (x, y, z)$ que estan a igual distància de A que de B , és a dir, $d(P, A) = d(P, B)$.
[1 punt]
- b) Calculeu les distàncies de A i de B al pla π i comproveu que són iguals. És casualitat. Raoneu la resposta.
[0,75 punts]
- c) Sigui $C = (-7, 6, 3)$. El triangle ABC és isòsceles? Calculeu la seva àrea.
[0,75 punts]

Solución:**Solució apartat a:**

El pla que ens demanen és perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0)$ dividint totes les components entre -4 ens queda el vector $(1, 1, 0)$ que té la mateixa direcció que $\overrightarrow{AB}$.

Sabem que a l'equació general del pla, $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C) és un vector perpendicular al pla, de manera que l'equació del pla que ens demanen tindrà la forma: $x + y + 0z + D = 0$.

A més a més sabem que passa pel punt mitjà entre A i $B = M = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(-2, 0, 6) = (-1, 0, 3)$, llavors aquest punt ha de complir l'equació del pla i substituint-lo trobem la D : $-1 + D = 0 \rightarrow D = 1$.

L'equació del pla demanat és:

$$\pi: x + y + 1 = 0$$

Per a comprovar que el pla està format pels punts que equidisten dels punts A i B , trobarem l'equació del lloc geomètric dels punts que equidisten d' A i B i veurem que coincideix amb l'equació del pla:

Si $P = (x, y, z)$ és un punt qualsevol:

$$d(P, A) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2}$$

$$d(P, B) = \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2}$$

$$d(P, A) = d(P, B) \rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2} = \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2} \rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \rightarrow$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y \rightarrow -8x - 8y - 8 = 0; \text{ Simplificant dividint els termes entre } -8:$$

$$x + y + 1 = 0, \text{ que és l'equació del pla } \pi.$$

Solució apartat b:

Fent servir la fórmula pel càlcul de la distància d'un punt a un pla, tenim:

$$d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} u$$

$$d(B, \pi) = \frac{|-3 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} u$$

No és casualitat ja que com hem vist anteriorment tots els punts del pla π equidisten dels punts A i B de manera que la mínima de les distàncies d'un punt de π al punt A ($d(A, \pi)$) serà la mateixa que la mínima de les distàncies d'un punt de π al punt B ($d(B, \pi)$).

$$d(A, \pi) = d(B, \pi) = 2\sqrt{2} u$$

Solució apartat c:

El punt $C = (-7, 6, 3)$ compleix l'equació del pla π , ja que, $-7 + 6 + 1 = 0$, de manera que pertany al pla π i per tant equidista d'A i de B, amb la qual cosa el triangle ABC té almenys 2 costats iguals i és isòsceles.

Per a calcular la seva àrea necessitem la base, que és la distància d'A a B, i la seva altura que és la distància del punt mig entre A i B i el punt C:

$$d(A, B) = \sqrt{(1 + 3)^2 + (2 + 2)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$d(M, C) = \sqrt{(-1 + 7)^2 + (0 - 6)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\text{Àrea} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24 u^2$$

L'àrea demanada és de $24 u^2$



Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA
UNIVERSIDAD (EBAU) FASE
GENERAL
CURSO: 2023–2024
MATEMÁTICAS II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

- Considerem la funció polinòmica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.
 - Justifiqueu que la seva gràfica talla l'eix de les abscisses en un punt de l'interval $[-2, 0]$. Doneu un interval de longitud 0,5 on es trobi aquest punt de tall.
[1,25 punts]
 - Estudieu les zones de creixement i de decreixement, i els màxims i els mínims de $y = f(x)$. Quants punts de tall té exactament la gràfica d'aquesta funció amb l'eix de les abscisses? Justifiqueu la resposta.
[1,25 punts]

Problema 2:

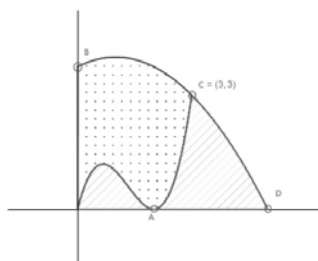
- Considerem el sistema d'equacions següent, on m és un paràmetre real:

$$\begin{cases} x - 3y + mz = -2 \\ x + my + 2z = 3 \\ x + y + 2z = m \end{cases}$$

- Discutiu el sistema segons el valor del paràmetre m .
[1,25 punts]
- Trobeu la solució del sistema per a $m = 0$.
[0,5 punts]
- Per a $m = 2$, doneu una solució (x, y, z) del sistema que, a més a més, compleixi $x = 5y$.
[0,75 punts]

Problema 3:

- La classe de l'Elia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l'institut:



La corba que passa pel punt A és $y = f(x)$, amb $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, i la que passa pels punts B, C = (3, 3) i D és $y = g(x)$, amb $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

- Calculeu les coordenades dels punts A, B i D.
[0,75 punts]

- b) Calculeu l'àrea de la zona puntejada.
[1,25 punts]
- c) Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip és $\frac{175}{12} \text{ m}^2$, de quin color necessitaran més pintura?
[0,5 punts]

Problema 4:

4. S'estima que el 20 % dels habitants d'una regió pateix algun tipus d'arritmia. Per a diagnosticar-la, hi ha la possibilitat de col·locar al pacient un monitor Holter, que detecta l'arritmia en un 95 % dels casos de persones que la pateixen, però que també dona falsos positius, per motius elèctrics, en persones que no pateixen aritmies en un 0,5 % dels casos.
- a) Si escollim 4 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que almenys una d'elles pateixi aritmies?
[0,75 punts]
- b) Quina és la probabilitat que una persona escollida a l'atzar obtingui un diagnòstic positiu d'arritmia?
[0,75 punts]
- c) Si una persona obté un diagnòstic negatiu a la prova del Holter, quina és la probabilitat que realment pateixi aritmies?
[1 punt]

Problema 5:

5. Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb $x > 0$ i $y > 0$, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ i (x, y) .
- a) Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té $x = \frac{1}{2}$ és el d'àrea màxima.
Quin és el valor d'aquesta àrea?
[1,5 punts]
- b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses.
[1 punt]

Problema 6:

6. Considereu el punt $P = (1, 3, 0)$ i el pla π d'equació $x + 2y - 2z = -7$.
- a) Sigui r la recta que és perpendicular a π i passa per P . Calculeu el punt d'intersecció de π amb r .
[1 punt]
- b) Calculeu la distància d del punt P al pla π .
[0,5 punts]
- c) Calculeu l'equació d'un altre pla π' que sigui paral·lel a π i que també estigui a distància d de P .
[1 punt]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.
 - a) Justifiqueu que la seva gràfica talla l'eix de les abscisses en un punt de l'interval $[-2, 0]$. Doneu un interval de longitud 0,5 on es trobi aquest punt de tall.
[1,25 punts]
 - b) Estudieu les zones de creixement i de decreixement, i els màxims i els mínims de $y = f(x)$. Quants punts de tall té exactament la gràfica d'aquesta funció amb l'eix de les abscisses? Justifiqueu la resposta.
[1,25 punts]

Solución:

(a) La funció $f(x)$ és polinòmica i, per tant, contínua en tots els reals. Com que

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^{13} + 5 \cdot (-2)^3 + 2 < 0,$$

$$f(0) = 3 \cdot (0)^{13} + 5 \cdot (0)^3 + 2 > 0.$$

podem aplicar el Teorema de Bolzano i la funció $f(x)$ s'anul·la forçosament en algun punt de l'interval $[-2, 0]$. Per trobar un interval de longitud 0.5 només cal templejar uns quants intervals més petits; com que

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^{13} + 5 \cdot (-1)^3 + 2 = -6 < 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, 0]$. I, finalment, com que

$$f(-0.5) = 3 \cdot (-0.5)^{13} + 5 \cdot (-0.5)^3 + 2 = 1.374 \dots > 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, -0.5]$.

(b) Per analitzar el creixement i decreixement de la funció $f(x)$, calculem la seva derivada $f'(x) = 39x^{12} + 15x^2$: com que tots els exponents són parells, $f'(x)$ mai és negativa i, per tant, la funció f mai decreix. En particular, no té cap màxim ni mínim. Per altra banda, la funció, que és polinòmica, no té asímptotes ni discontinuïtats. En definitiva, la seva gràfica només pot tenir un únic punt de tall amb l'eix d'abscisses que es troba, com hem dit, a l'interval $[-1, -0.5]$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per justificar que es pot aplicar el Teorema de Bolzano, 0.5 per veure que hi ha una arrel a l'interval $[-2, 0]$ i 0.5 per afinar fins a un interval de cinc dècimes d'amplada. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.25 per deduir que es tracta d'una funció creixent, 0.25 per dir que no té màxims ni mínims, i 0.5 per justificar que hi ha una única arrel.

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions següent, on m és un paràmetre real:

$$\begin{cases} x - 3y + mz = -2 \\ x + my + 2z = 3 \\ x + y + 2z = m \end{cases}$$

- a) Discuti el sistema segons el valor del paràmetre m .
[1,25 punts]
- b) Trobeu la solució del sistema per a $m = 0$.
[0,5 punts]
- c) Per a $m = 2$, doneu una solució (x, y, z) del sistema que, a més a més, compleixi $x = 5y$.
[0,75 punts]

Solució:

2.

(a) El determinant de la matriu de coeficients del sistema és

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + m - 6 - m^2 - 2 + 6 = -m^2 + 3m - 2,$$

que és 0 quan $m = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = 1, 2$. Si m no és ni 1 ni 2, el rang de la matriu de coeficients és 3, per tant el de l'ampliada també, i es tracta d'un sistema compatible determinat.

En el cas $m = 1$, el rang de la matriu de coeficients és 2 (ja que, per exemple, el menor superior esquerra és no nul) i el de l'ampliada és 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 9 + 2 - 3 + 3 = -8 \neq 0.$$

Per tant, es tracta d'un sistema incompatible. (Alternativament observem que les dues darreres equacions són contradictòries en aquest cas: $x + y + 2z = 3$ i $x + y + 2z = 1$.)

En el cas $m = 2$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també és 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

(b) Si $m = 0$ és un sistema compatible determinat i té per solució

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 + 4 + 18}{0 + 0 - 6 - 0 - 2 + 6} = \frac{22}{-2} = -11,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 0 - 4 - 0 - 0 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 - 2 - 9 - 0 - 3 - 0}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7.$$

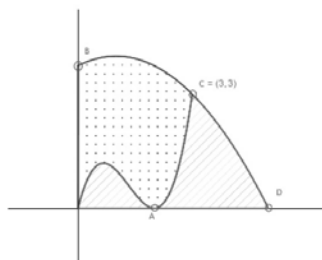
(c) Per $m = 2$ sabem que el sistema és equivalent a les dues equacions $x - 3y + 2z = -2$, i $y = 1$, i és compatible indeterminat. Imposant, a més a més, la condició extra $x = 5y$, tenim $x = 5$ i, de la primera equació, $2z = -2 - x + 3y = -2 - 5 + 3 = -4$, és a dir, $z = -2$. Així la solució demanada és $(x, y, z) = (5, 1, -2)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul del determinant, 0.25 per trobar els valors crítics de m , i 0.25 per l'estudi de cadascun dels tres casos. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la solució. (c) Compteu 0.25 per saber combinar el sistema amb la condició extra, i 0.5 pel càlcul de la solució demanada.

Comentaris: El sistema es pot discutir i es pot resoldre de maneres alternatives. Compteu-ho bé en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui convenientment justificat.

Problema 3:

3. La classe de l'Èlia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l'institut:



La corba que passa pel punt A és $y = f(x)$, amb $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, i la que passa pels punts B , $C = (3, 3)$ i D és $y = g(x)$, amb $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

- a) Calculeu les coordenades dels punts A , B i D .
[0,75 punts]
- b) Calculeu l'àrea de la zona puntejada.
[1,25 punts]
- c) Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip és $\frac{175}{12} \text{ m}^2$, de quin color necessitaran més pintura?
[0,5 punts]

Solució:

3.

- (a) El punt A és un punt de tall de $y = f(x)$ amb l'eix OX :

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \rightarrow x(x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 2.$$

Per tant, el punt A té per coordenades $A = (2, 0)$. El punt D és un punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix OX :

$$-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-15)}}{2} = -3, 5.$$

Descartem la solució negativa i podem afirmar, per tant, que el punt D té coordenades $D = (5, 0)$. Finalment, el punt B és el punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix OY , com que

$$g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{15}{4},$$

es tracta del punt $B = \left(0, \frac{15}{4}\right)$. Les coordenades del punt C ja ens les dóna l'enunciat, $C = (3, f(3)) = (3, g(3)) = (3, 3)$.

- (b) La zona puntejada és l'àrea compresa entre $g(x)$ i $f(x)$ des de $x = 0$ fins a $x = 3$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^3 \left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x) \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15}{4} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} [-x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 15x]_0^3 = 9 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

- (c) Sabent que l'àrea total del logotip és de $\frac{175}{12} = 14.583 \dots \text{ u}^2$, la zona ratllada tindrà àrea $14.583 \dots - 9 = 5.583 \dots \text{ u}^2$. Per tant, per pintar el logotip de la manera que volen, els caldrà més pintura blava que vermella.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul de cadascun dels tres punts demanats. (b) Compteu 0.5 pel plantejament de l'àrea de la zona puntejada (amb els límits d'integració correctament col·locats), 0.5 per la primitiva, i 0.25 pel càlcul final. (c) 0.5 per la resposta correcta.

Problema 4:

4. S'estima que el 20 % dels habitants d'una regió pateix algun tipus d'arritmia. Per a diagnosticar-la, hi ha la possibilitat de col·locar al pacient un monitor Holter, que detecta l'arritmia en un 95 % dels casos de persones que la pateixen, però que també dona falsos positius, per motius elèctrics, en persones que no pateixen arrítmies en un 0,5 % dels casos.
- a) Si escollim 4 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que almenys una d'elles pateixi arrítmies?
[0,75 punts]
- b) Quina és la probabilitat que una persona escollida a l'atzar obtingui un diagnòstic positiu d'arritmia?
[0,75 punts]
- c) Si una persona obté un diagnòstic negatiu a la prova del Holter, quina és la probabilitat que realment pateixi arrítmies?
[1 punt]

Solució:**4.**

(a) Sigui A l'esdeveniment "patir arrítmia". De l'enunciat sabem que $P(A) = 0.2$. D'entre les 4 escollides, el nombre de persones N que pateix arrítmies segueix una distribució binomial amb paràmetres $n = 4$ i $p = 0.2$. Passant al complementari, obtenim

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 0.5904.$$

(b) Sigui H l'esdeveniment "obtenir diagnòstic positiu d'arritmia a la prova del Holter". Siguin $\bar{A}$ i $\bar{H}$ els esdeveniments complementaris a A i a H , respectivament. Aleshores, de les dades de l'enunciat deduïm:

$$P(\bar{A}) = 0.8, \quad P(H | A) = 0.95 \quad \text{i} \quad P(H | \bar{A}) = 0.005.$$

Podem aplicar la fórmula de la probabilitat total:

$$P(H) = P(H | A) \cdot P(A) + P(H | \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.95 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.194.$$

(c) Per calcular la probabilitat condicionada que se'ns demana, farem servir la fórmula de Bayes:

$$P(\bar{A} | \bar{H}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{H} | \bar{A})}{1 - P(H)} = \frac{0.2 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.194} = 0.012 \dots$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 pel plantejament i 0.25 pel càlcul. (b) Compteu 0.5 pel plantejament amb la fórmula de les probabilitats totals (o un arbre de decisió) i 0.25 pel càlcul. (c) Compteu 0.5 pel plantejament de la fórmula de Bayes (o de la probabilitat condicionada), i 0.5 pel càlcul.

A l'apartat (a) seria també correcte el càlcul (més llarg) de la probabilitat que N sigui 1,2,3,4, és a dir, $P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)$, amb la binomial. Compteu la màxima puntuació si el fan així de manera correcta i argumentada.

Problema 5:

5. Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb $x > 0$ i $y > 0$, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ i (x, y) .

a) Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té $x = \frac{1}{2}$ és el d'àrea màxima.

Quin és el valor d'aquesta àrea?

[1,5 punts]

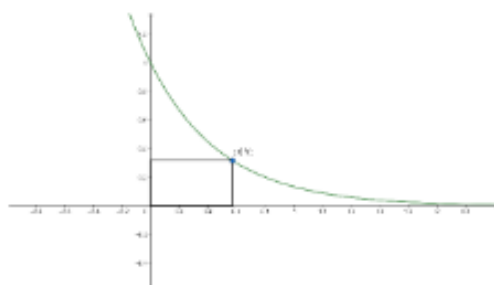
- b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses.

[1 punt]

Solució:

5.

(a) La gràfica de la funció $y = e^{-2x}$ està esbossada en el dibuix següent, juntament amb un dels rectangles descrits a l'enunciat:



Com que un qualsevol d'aquests rectangles mesura x de base i e^{-2x} d'alçada, la seva àrea és $A(x) = xe^{-2x}$. Busquem els extrems relatius d'aquesta funció:

$$A'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2) = e^{-2x}(1 - 2x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

A partir del signe de la funció derivada es veu clarament que $A(x)$ és creixent per a $x < \frac{1}{2}$ i decreixent per a $x > \frac{1}{2}$. Per tant, el punt $x = \frac{1}{2}$ és un màxim absolut de $A(x)$. Així,

el rectangle d'àrea màxima correspon al de costats $x = \frac{1}{2}$ i $y = e^{-2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{e}$, i té àrea

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}.$$

(b) La derivada d'aquesta funció és $y' = -2e^{-2x}$. El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 0 és $y'(0) = -2e^0 = -2$. Com que $y(0) = e^0 = 1$, la recta tangent serà la d'equació $y - 1 = -2(x - 0)$, és a dir, $y = -2x + 1$. El punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses és $x = \frac{1}{2}$, és a dir, el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per escriure la funció àrea, 0.25 per derivar-la, 0.25 per trobar el punt crític, 0.5 per justificar que es tracta d'un màxim, i 0.25 per calcular l'àrea màxima. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.5 per l'equació de la recta tangent, i 0.25 pel punt de tall.

Comentaris: La justificació del màxim es pot fer també via derivada segona. Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, en la mesura que siguin correctes i estiguin ben explicades.

Problema 6:

6. Considereu el punt $P = (1, 3, 0)$ i el pla π d'equació $x + 2y - 2z = -7$.
- a) Sigui r la recta que és perpendicular a π i passa per P . Calculeu el punt d'intersecció de π amb r .
[1 punt]
- b) Calculeu la distància d del punt P al pla π .
[0,5 punts]
- c) Calculeu l'equació d'un altre pla π' que sigui paral·lel a π i que també estigui a distància d de P .
[1 punt]

Solució:

6.

(a) Per ser perpendicular a π , la recta r tindrà com a vector director $\vec{v} = (1, 2, -2)$. I, com que ha de passar per $P = (1, 3, 0)$, es tracta de la recta $(x, y, z) = (1, 3, 0) + \lambda(1, 2, -2) = (1 + \lambda, 3 + 2\lambda, -2\lambda)$. Imposant l'equació del pla π , obtenim

$$1 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) = -7,$$

$$9\lambda + 7 = -7,$$

és a dir, $\lambda = -\frac{14}{9}$. Això correspon al punt $Q = \left(1 - \frac{14}{9}, 3 - \frac{28}{9}, \frac{28}{9}\right) = \left(\frac{-5}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{28}{9}\right)$.

(b) Com que el punt Q que hem calculat és la projecció ortogonal de P sobre el pla π , la distància demanada és

$$d(P, \pi) = d(P, Q) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{28}{9} - 0\right)^2} = \frac{1}{9} \sqrt{14^2 + 28^2 + 28^2} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}.$$

Alternativament, la podem calcular amb la fórmula de la distància punt-pla:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3}.$$

(c) Per ser paral·lel, π' haurà de tenir equació de la forma $x + 2y - 2z = D$. I imposant que la distància a $P = (1, 3, 0)$ també sigui de $\frac{14}{3}$ obtenim

$$\frac{14}{3} = d(P, \pi') = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|7 - D|}{3},$$

és a dir, $|7 - D| = 14$, $7 - D = \pm 14$, $D = 7 \mp 14 = \begin{Bmatrix} -7 \\ 21 \end{Bmatrix}$. El valor $D = -7$ correspon al pla π que ja coneixem, i l'altre pla π' demanat serà el d'equació $x + 2y - 2z = 21$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 per la parametrització de la recta r , 0.25 per imposar l'equació del pla π , i 0.25 pel càlcul final. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la distància (per qualsevol dels dos mètodes). (c) Compteu 0.5 per imposar l'equació (amb el valor absolut tractat correctament), i 0.5 per aïllar D i donar la resposta.

Comentaris: L'apartat (a) es pot fer també trobant primer l'equació cartesiana de la recta r i després fent el sistema d'equacions amb el pla π . Compteu-ho bé, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben explicat.