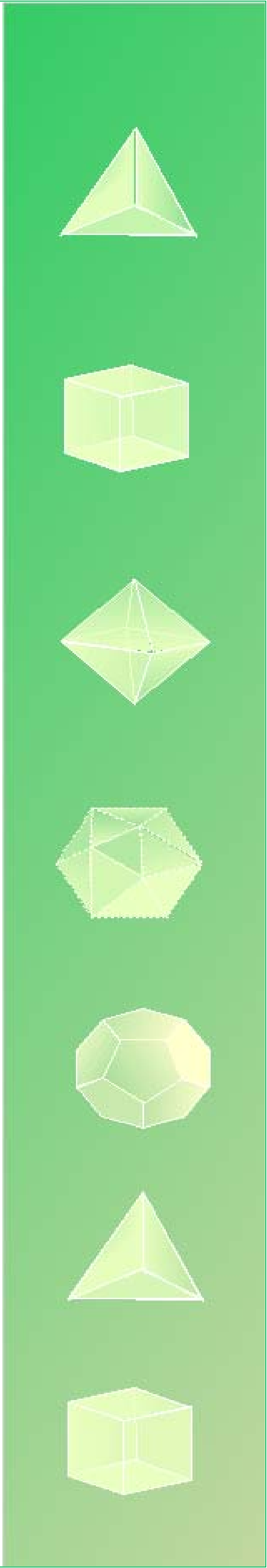


Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Javier Ros Castellón

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de $30000\ m^3$ de agua, de $5500\ kg$ de abono y de $3000\ kg$ de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita $1500\ m^3$ de agua, $110\ kg$ de abono y $80\ kg$ de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de $100\ kg$ de abono y $50\ kg$ de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de $5000\ kg$ en secano y de $10000\ kg$ en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \qquad\qquad g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \quad 0 \le t \le 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \quad 10 < t \le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Compruebe que la función v es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y $140\ km/h$, y rojo para vientos de más de $140\ km/h$. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42% de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32% de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65% de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75% de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20% de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

c) (0.5 puntos) Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

Solución:

a) Una matriz cuadrada A tiene inversa si, y solo si, su determinante es distinto de cero. En nuestro caso,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a-1) - 4(a-3) - a(a-3) - 2 =$$

$$= a^2 - a - 4a + 12 - a^2 + 3a - 2 = -2a + 10$$

Entonces,

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a + 10 = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

Por tanto, la matriz A tiene inversa para $a \neq 5$.

b) Para resolver la ecuación matricial $X \cdot A - B = C \cdot A$ podemos despejar la matriz X de la siguiente forma:

$$X \cdot A - B = C \cdot A \Rightarrow X \cdot A = C \cdot A + B$$

Y multiplicando la ecuación $X \cdot A = C \cdot A + B$ por A^{-1} a la derecha, se obtiene que

$$\boxed{X = (C \cdot A + B) \cdot A^{-1}}$$

Así pues, para el cálculo de X tendremos que obtener previamente las matrices $C \cdot A + B$ y A^{-1} para luego multiplicarlas.

Comencemos por el cálculo de la inversa de A

Como para $a = 1$ la matriz A queda en la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene inversa ya que

$$|A| = -2 \cdot 1 + 10 = -2 + 10 = 8 \neq 0$$

La matriz adjunta de A es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Y, por tanto, obtenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de la matriz $C \cdot A + B$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

y así,

$$C \cdot A + B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X = (C \cdot A + B) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -16 & 12 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz pedida es $X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$

c) Para la obtención de la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación $B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$ recordemos antes lo siguiente:

1) Para sumar dos matrices deben tener las mismas dimensiones.
2) Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda y la matriz resultante tendrá de dimensiones el número de filas de la primera por el número de columnas de la segunda.

Así, el producto $B_{1\times3} \cdot A_{3\times3}$ será una matriz de dimensiones 1×3. Y esta matriz fila, debe tener las mismas dimensiones que la matriz $D \cdot C^t \cdot B$ para que éstas puedan sumarse. Por tanto, si suponemos que la matriz D tiene dimensiones $m \times n$ tendremos que la matriz

$$D_{m\times n} \cdot {C^t}_{3\times1} \cdot B_{1\times3}$$

tendrá dimensiones 1×3 si $n = 3$, para que sea posible el producto $D \cdot C^t \cdot B$, y $m = 1$ para que la matriz resultante tenga dimensiones 1×3 y pueda sumarse a la matriz $B \cdot A$.

En definitiva, la matriz D debe tener dimensiones 1×3.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de $30000\ m^3$ de agua, de $5500\ kg$ de abono y de $3000\ kg$ de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita $1500\ m^3$ de agua, $110\ kg$ de abono y $80\ kg$ de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de $100\ kg$ de abono y $50\ kg$ de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de $5000\ kg$ en secano y de $10000\ kg$ en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada región factible. La solución óptima será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Sea x el número de hectáreas de olivar de secano e y el número de hectáreas de olivar de regadío y dispongamos los datos de nuestro problema en una tabla:

		Agua (m^3)	Abono (kg)	Productos fitosanitarios (kg)	Producción anual (kg)
Hectáreas de secano	x	$-$	$100x$	$50x$	$5000x$
Hectáreas de regadío	y	$1500y$	$110y$	$80y$	$10000y$
		$30000\ m^3$	$5500\ kg$	$3000\ kg$	

Nuestra **función objetivo** a maximizar es la producción anual que puede expresarse como:

$$F(x,y) = 5000x + 1000y$$

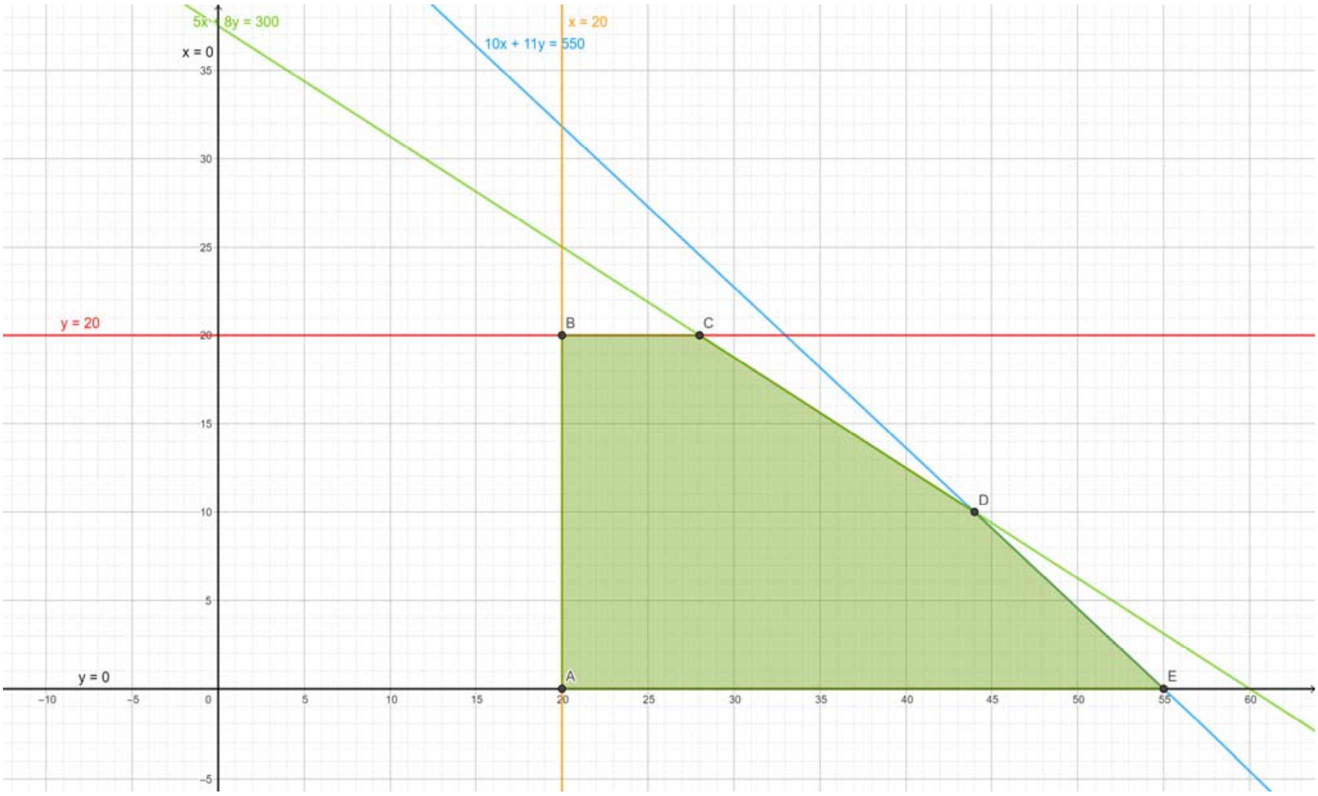
Y las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

$$\left.\begin{array}{c} 1500y \leq 30000 \\ 100x + 110y \leq 5500 \\ 50x + 80y \leq 3000 \\ x \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

que pueden expresarse como

$$\left.\begin{array}{c} y \leq 20 \\ 10x + 11y \leq 550 \\ 5x + 8y \leq 300 \\ x \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

El recinto definido por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos: $A(20,0)$, $B(20,20)$, $C(28,20)$, $D(44,10)$ y $E(55,0)$.

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes[1]. Así, por ejemplo, el punto $D(44,10)$ se obtiene como intersección de las rectas $10x + 11y = 550$, $5x + 8y = 300$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D	Vértice E
$\left.\begin{array}{l} x = 20 \\ y = 0 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} x = 20 \\ y = 20 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y = 300 \\ y = 20 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y = 300 \\ 10x + 11y = 550 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l} 10x + 11y = 550 \\ y = 0 \end{array}\right\}$
$A(20,0)$	$B(20,20)$	$C(28,20)$	$D(44,10)$	$E(55,0)$

Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice del recinto[2], por lo que evaluamos la función objetivo $F(x, y) = 5000x + 1000y$ en cada uno de ellos.

$$F(A) = F(20,0) = 5000 \cdot 20 + 1000 \cdot 0 = 100\,000\ kg$$
$$F(B) = F(20,20) = 5000 \cdot 20 + 1000 \cdot 20 = 300\,000\ kg$$
$$F(C) = F(28,20) = 5000 \cdot 28 + 1000 \cdot 20 = 340\,000\ kg$$
$$F(D) = F(44,10) = 5000 \cdot 44 + 1000 \cdot 10 = 320\,000\ kg$$
$$F(E) = F(55,0) = 5000 \cdot 55 + 1000 \cdot 0 = 275\,000\ kg$$

Por tanto, tendría que dedicar 28 hectáreas de olivar de secano y 20 hectáreas de olivar de regadío para obtener una producción máxima anual de $340\,000\ kg$.

[1] Basta con resolver los distintos sistemas de ecuaciones.
[2] Si hay una única solución óptima estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces las soluciones optimas se encontrarán en un lado de la región factible.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \qquad g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$.

Solución:

a) Calculemos las derivadas pedidas:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = 3(x^2+2)^2 \cdot 2x \cdot e^{-2x} + (x^2+2)^3 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} =$$

$$= 6x(x^2+2)^2 \cdot e^{-2x} - 2(x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} =$$

$$= 2(x^2+2)^2 \cdot e^{-2x} \cdot [3x - (x^2+2)] =$$

$$= 2(x^2+2)^2 \cdot e^{-2x} \cdot (3x - x^2 - 2) =$$

$$= -2(x^2-3x+2) \cdot (x^2+2)^2 \cdot e^{-2x}$$

$$g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{-3x^2}{1-x^3} \cdot (1-2x^2)^2 - 2(1-2x^2) \cdot (-4x) \cdot \ln(1-x^3)}{[(1-2x^2)^2]^2} =$$

$$= \frac{\frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2)^2}{1-x^3} + 8x(1-2x^2) \cdot \ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^4} =$$

$$= \frac{\frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2)^2 + 8x(1-x^3) \cdot (1-2x^2) \cdot \ln(1-x^3)}{1-x^3}}{(1-2x^2)^4} =$$

$$= \frac{\frac{(1-2x^2) \cdot [-3x^2 \cdot (1-2x^2) + 8x(1-x^3) \cdot \ln(1-x^3)]}{1-x^3}}{(1-2x^2)^4}$$

$$=$$

$$= \frac{\frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2) + 8x(1-x^3) \cdot \ln(1-x^3)}{1-x^3}}{(1-2x^2)^3} =$$

$$= \frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2) + 8x(1-x^3) \cdot \ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^3 \cdot (1-x^3)}$$

b) Para que la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$ sea horizontal debe tener pendiente cero, es decir, la derivada de la función en $x = 1$ debe valer 0 por lo que ha de ser $h'(1) = 0$.

Por tanto, como

$$h'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

entonces

$$h'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3 = 3 + 2a + 3 = 2a + 6 = 0 \Rightarrow a = -3$$

Así la función queda en la forma $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + b$.

Además, como la función debe pasar por el punto $P(1,2)$, debe ser $h(1) = 2$ de donde:

$$h(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow 1 - 3 + 3 + b = 2 \Rightarrow 1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

luego los valores buscados son $a = -3$ y $b = 1$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \quad 0 \leq t \leq 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \quad 10 < t \leq 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Compruebe que la función v es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y $140\,km/h$, y rojo para vientos de más de $140\,km/h$. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

Solución:

a) El dominio de la función es el intervalo $[0,24]$. Cada uno de los trozos que forman parte de la función $v(t)$ es un polinomio y, por tanto, la función será continua y derivable en esos intervalos, $[0.10)$ y $(10,24]$. Debemos comprobar la continuidad y derivabilidad en el punto $t = 10$ ya que es el punto en el que la función cambia de expresión.

Continuidad en $t = 10$

$$v(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 60 = 80$$

$$\lim_{t \to 10^-} v(t) = \lim_{t \to 10^-} (t^2 - 8t + 60) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 60 = 80$$

$$\lim_{t \to 10^+} v(t) = \lim_{t \to 10^+} (-t^2 + 32t - 140) = -10^2 + 32 \cdot 10 - 140 = 80$$

Por tanto, la función $v(t)$ es continua en $t = 10$ y concluimos así que la función es continua en todo su dominio $[0,24]$.

Pasemos a estudiar la derivabilidad de la función $v(t)$.

La derivada de la función es:

$$v'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & si \quad 0 \leq t < 10 \\ -t + 32 & si \quad 10 < t \leq 24 \end{cases}$$

Derivabilidad en $t = 10$

$$v'(10^-) = \lim_{t \to 10^-} v'(t) = \lim_{t \to 10^-} (2t - 8) = 2 \cdot 10 - 8 = 12$$

$$v'(10^+) = \lim_{t\to 10^+} v'(t) = \lim_{t\to 10^+}(-2t+32) = -2\cdot 10+32 = 12$$

Como $v'(10^-) = v'(10^+)$ la función $v(t)$ es derivable en $t = 10$ y, por lo expuesto anteriormente, será derivable en todo su dominio $[0,24]$.

En definitiva, la función $v(t)$ es continua y derivable en todo su dominio $[0,24]$.

b) Para la obtención de la monotonía utilizaremos la función derivada $v'(t)$ y estudiaremos sus cambios de signo en su dominio $[0,24]$.

$$v'(t) = \begin{cases} 2t-8 & si \quad 0\le t\le 10 \\ -t+32 & si \quad 10\le t\le 24 \end{cases}$$

Si $0\le t\le 10$, entonces $2t-8=0 \Leftrightarrow t=4$
Si $10\le 10\le 24$, entonces $-2t+32=0 \Leftrightarrow t=16$

Por tanto,

	[0,4)	(4,10)	(10,16)	(16,24]
Signo de v'	$-$	$+$	$+$	$-$
	Decreciente ↘	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘

Así, los extremos relativos de la función se encuentran en $t = 4$, mínimo relativo; y en $t = 16$ el máximo relativo.

Para la obtención de los extremos absolutos evaluaremos la función $v(t)$ en esos extremos relativos y en los extremos del intervalo.

$$v(0) = 0^2 - 8\cdot 0 + 60 = 60$$
$$v(4) = 4^2 - 8\cdot 4 + 60 = 16 - 32 + 60 = 44$$
$$v(10) = 10^2 - 8\cdot 10 + 60 = 100 - 80 + 60 = 80$$
$$v(16) = -16^2 + 32\cdot 16 - 140 = -256 + 512 - 140 = 116$$
$$v(24) = -24^2 + 32\cdot 24 - 140 = -576 + 768 - 140 = 52$$

Por tanto, la velocidad máxima del viento es de $116\ km/h$ a las $16\ horas$ y la mínima es de $44\ km/h$ y se alcanza a las $4\ horas$.

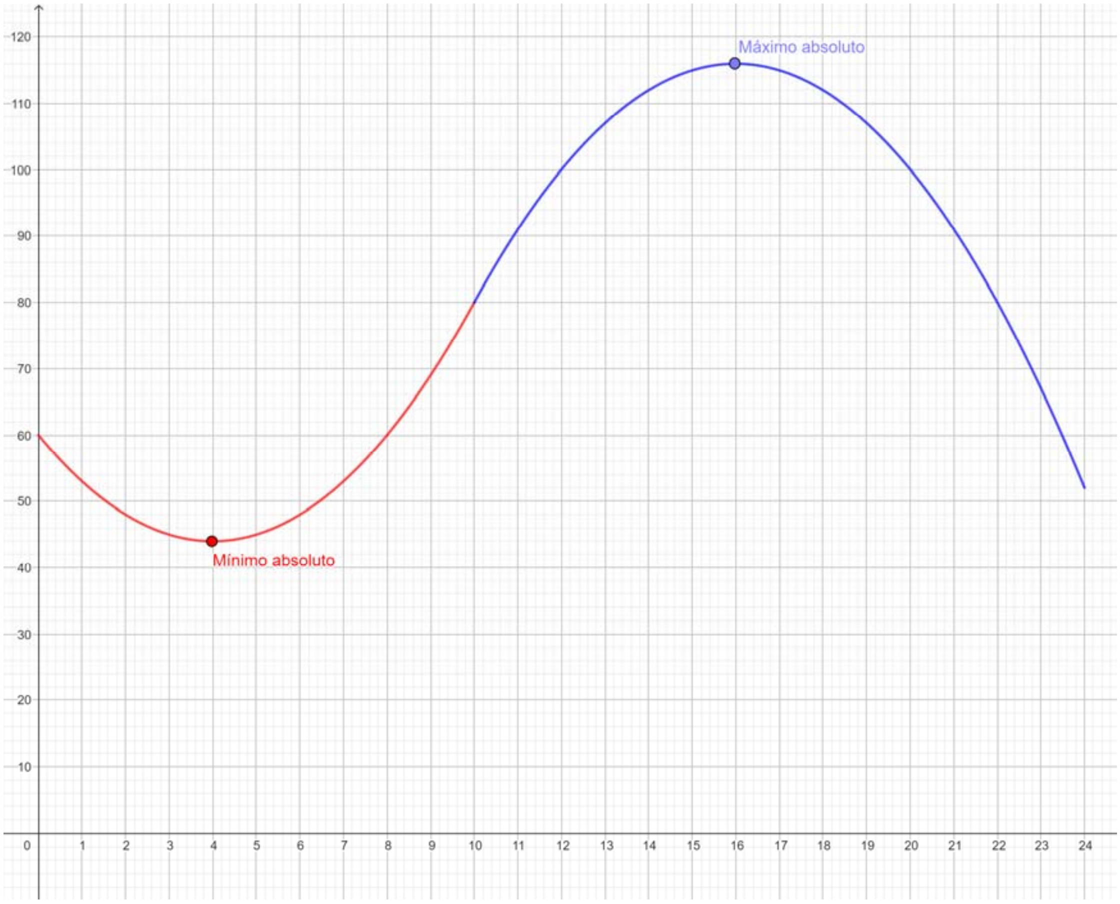
La gráfica de la función quedaría de la siguiente forma *(Ver siguiente página)*:

c) Basta observar la gráfica para ver que el viento está entre los $100\ km/h$ y los $140\ km/h$ entre las 12:00 y las 20:00 horas, periodo en el que la Agencia Estatal de Meteorología debe emitir aviso de alerta por viento de color naranja. No habrá ninguna alerta roja ya que en ningún momento se superan los $140\ km/h$.

Analíticamente, podemos calcular los puntos en los que el viento alcanza los $100\ km/h$ de la siguiente forma:

$$v(t) = -t^2 + 32t - 140 = 100 \Rightarrow t^2 - 32t + 240 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} t = 12 \\ t = 20 \end{cases}$$

En conclusión, habrá alerta naranja entre las 12:00 y las 20:00 horas. En cualquier otro momento la velocidad del viento será inferior a $100\ km/h$ por lo que no se emitirá alerta roja.



BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

Solución:

Con los datos del problema podemos construir la siguiente tabla de contingencia.

	Conductores jóvenes	Conductores sénior	
Vehículos nuevos			19
Vehículos viejos	21		
	29		54

Esta tabla puede completarse fácilmente de la siguiente manera:

	Conductores jóvenes	Conductores sénior	
Vehículos nuevos	8	11	19
Vehículos viejos	21	14	35
	29	25	54

a) Dado que hay 14 siniestros con conductores sénior y vehículo viejo de los 54 siniestros total, aplicando la regla de Laplace podemos concluir que la probabilidad de que el conductor sea sénior y el vehículo viejo es de $\frac{14}{54} = 7/27 \cong 0.26$

b) Ya que sabemos que el vehículo es viejo tenemos 35 siniestros de los cuales en 21 el conductor es joven, por tanto, la probabilidad de que el conductor sea joven sabiendo que el vehículo es viejo será de $\frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0.6$

c) De la tabla se deduce claramente que el menor número de siniestros se produce cuando el conductor es joven y el vehículo es nuevo, con lo que la afirmación formulada es falsa.

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42% de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32% de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65% de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75% de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20% de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

Solución:

Sean los sucesos:

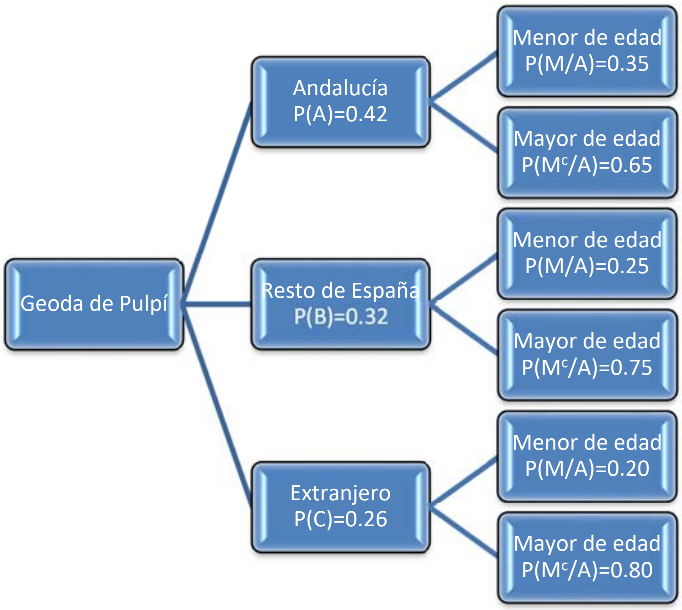
A: "El turista procede de Andalucía"

B: "El turista procede de otras comunidades autónomas"

C: "El turista procede del extranjero"

M: "Ser menor de edad" ($M^c = \overline{M}$: "Ser mayor de edad")

Podemos representar el problema con un diagrama en árbol de la siguiente forma:



a) Para calcular la probabilidad de que sea mayor de edad, $M^c = \overline{M}$, aplicaremos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M^c) = P(A) \cdot P(M^c/A) + P(B) \cdot P(M^c/B) + P(C) \cdot P(M^c/C) =$$
$$= 0.42 \cdot 0.65 + 0.32 \cdot 0.75 + 0.26 \cdot 0.80 = 0.721$$

Así, la probabilidad de que el turista sea mayor de edad es 0.721

b) La probabilidad de que proceda de Andalucía y sea menor de edad puede calcularse como:

$$P(A \cap M) = P(A) \cdot P(M/A) = 0.42 \cdot 0.35 = 0.147$$

c) Para calcular la probabilidad de que sea extranjero sabiendo que es menor de edad utilizaremos el teorema de Bayes.

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C) \cdot P(M/C)}{1 - P(M^c)} = \frac{0.26 \cdot 0.20}{1 - 0.721} = \frac{0.052}{0.279} = 0.1864$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

Solución:

a) Antes de responder recordemos que el **muestreo aleatorio estratificado** es un método de selección de muestras que se usa cuando la población que queremos estudiar está dividida en diferentes grupos o **estratos**. Cada estrato es un grupo homogéneo en algún aspecto importante para el estudio. El objetivo es que cada uno de estos estratos esté representado en la muestra de manera proporcional a su tamaño en la población total.

Por ejemplo, si tenemos una población dividida en cuatro estratos (E_1, E_2, E_3 y E_4), y sabemos el tamaño de cada uno de ellos, el **muestreo con afijación proporcional** selecciona una cantidad de individuos de cada estrato de forma proporcional a su peso en la población total.

En nuestro caso tenemos dos muestras con la siguiente información inicial:

	E_1	E_2	E_3	E_4
Muestra 1	25	30		
Muestra 2			80	100
	500		400	

En la primera muestra, en el estrato 1, se seleccionan 25 individuos de 500. Como en el estrato 2 se deben seleccionar en la misma proporción, entonces con una simple regla de tres:

$$\left.\begin{array}{ccc} 25 & \longrightarrow & 500 \\ 30 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 500}{25} = 600$$

Luego en el estrato 2 debe haber 600 individuos.

De forma análoga, si nos fijamos en la segunda muestra estrato 3, podemos plantear la siguiente regla de tres.

$$\left.\begin{array}{ccc} 80 & \longrightarrow & 400 \\ 100 & \longrightarrow & y \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{100 \cdot 400}{80} = 500$$

Por lo que en el estrato 4 habrá 500 individuos.
Finalmente, para obtener el número de individuos de cada muestra en cada uno de los estratos basta ir haciendo sucesivas reglas de tres y se obtiene:

	E_1	E_2	E_3	E_4
Muestra 1	25	30	20	25
Muestra 2	100	120	80	100
	500	600	400	500

b) Según el Teorema Central del Límite, dada una variable aleatoria X de una población de media μ y desviación típica σ, se verifica que:
1) La distribución de medias muestrales de tamaño n tiene media μ y desviación típica $\sigma/\sqrt{n}$.
2) La distribución de medias muestrales se aproxima a una normal a medida que crece el tamaño de la muestra n.

En nuestro caso nos preguntan por la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales de las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple de la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$.

Como sabemos por el Teorema Central del Límite que la media de la distribución de las medias muestrales de tamaño $n = 2$, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es $\bar{X} = \mu$, entonces:

$$\bar{X} = \mu = \frac{-3 - 1 + 2 + 5 + 7}{5} = 2$$

La varianza de la distribución de las medias muestrales viene dada por $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por tanto, calcularemos previamente la varianza poblacional.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \mu^2 = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2}{5} - 2^2 = \frac{88}{5} - 4 = 13.6$$

Así, la varianza de la distribución de las medias muestrales será:

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{13.6}{2} = 6.8$$

EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

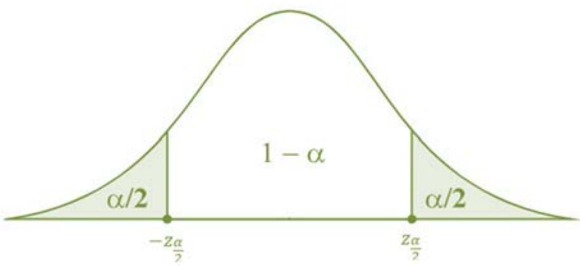
c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(-z_{\alpha/2}\leq\mathcal{Z}\leq z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$



El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E}=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

a) En nuestro caso, el tamaño de la muestra es $n = 2500$ y la proporción muestral es $\hat{p} = \frac{1825}{2500} = 0.73$. Además, el nivel de confianza es $1 - \alpha = 95\% = 0.95$, luego $z_{\alpha/2} = 1.96$ ya que:

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Por tanto,

$$I.C.(p) \quad = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$= \left(0.73 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{2500}}; 0.73 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{2500}}\right) =$$

$$= (0.73 - 0.0174;\ 0.73 + 0.0174) =$$

$$= (0.7126;\ 0.7474)$$

Así, el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible es $I.C.(p) = (0.7126;\ 0.7474)$.

b) Con un nivel de confianza del 97% tenemos que:

$$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \alpha/2 = 0.015 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

Como el error máximo admisible viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Según los datos del enunciado, tendremos que:

$$0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{n}}$$

De donde,

$$0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.1971}{n}} \Rightarrow (0.01)^2 = \left(2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.1971}{n}}\right)^2$$

Y despejando n, obtenemos que

$$(0.01)^2 = (2.17)^2 \cdot \frac{0.1971}{n} \Rightarrow n = (2.17)^2 \cdot \frac{0.1971}{(0.01)^2} \Rightarrow n = 9281.24$$

Así, el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar para que, al estimar la proporción de la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible, el error cometido sea inferior al 1%, es de 9282 individuos.

c) La amplitud del intervalo de confianza viene dada por el error

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Así, al disminuir el tamaño de la muestra (n) aumentará el error y, por tanto, la amplitud del intervalo.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES

e) Duración: 1 hora y 30 minutos.
f) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
g) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
h) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x - 6}{2 - x}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
b) **(0.75 puntos)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
c) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & si\ x < 4 \\ 2x - 5 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) **(1 punto)** Represente la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas x = 3, x = 5 y el eje de abscisas. Calcule su área.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos "tener coche" y "no tener moto"? ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?
b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?
c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.

(1.25 puntos) Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JULIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

Solución:

Antes de nada, despejaremos la matriz X de la ecuación matricial:

$$A^2 \cdot X + A^4 = A \quad \Rightarrow \quad A^2 \cdot X = A - A^4$$

$$A \cdot A \cdot X = A - A^4$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A - A^4)$$

$$A \cdot X = A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot A^4$$

$$A \cdot X = I - A^3$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (I - A^3)$$

$$X = A^{-1} \cdot I - A^{-1} \cdot A^3$$

$$\boxed{X = A^{-1} - A^2}$$

Por tanto, deberemos calcular las matrices A^{-1} y A^2 para la obtención de la matriz X.

Para el cálculo de la matriz inversa de A, lo primero será obtener su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0$$

Al ser $|A| \neq 0$, la matriz A tendrá inversa que vendrá dada por $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$.

Como la matriz adjunta de A es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$X = A^{-1} - A^2 = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8/9 & 2/9 & -40/9 \\ 40/9 & -10/9 & 2/9 \\ 38/9 & 40/9 & -8/9 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{40}{9} \\ \frac{40}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{38}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del ejercicio en la siguiente tabla:

		Coste de emisión	Audiencia
Número de anuncios por radio	x	$2400x$	$34000x$
Número de anuncios por televisión	y	$3600y$	$72000y$

Nuestra **función objetivo** a maximizar es:

$$F(x,y) = 34000x + 72000y$$

Las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

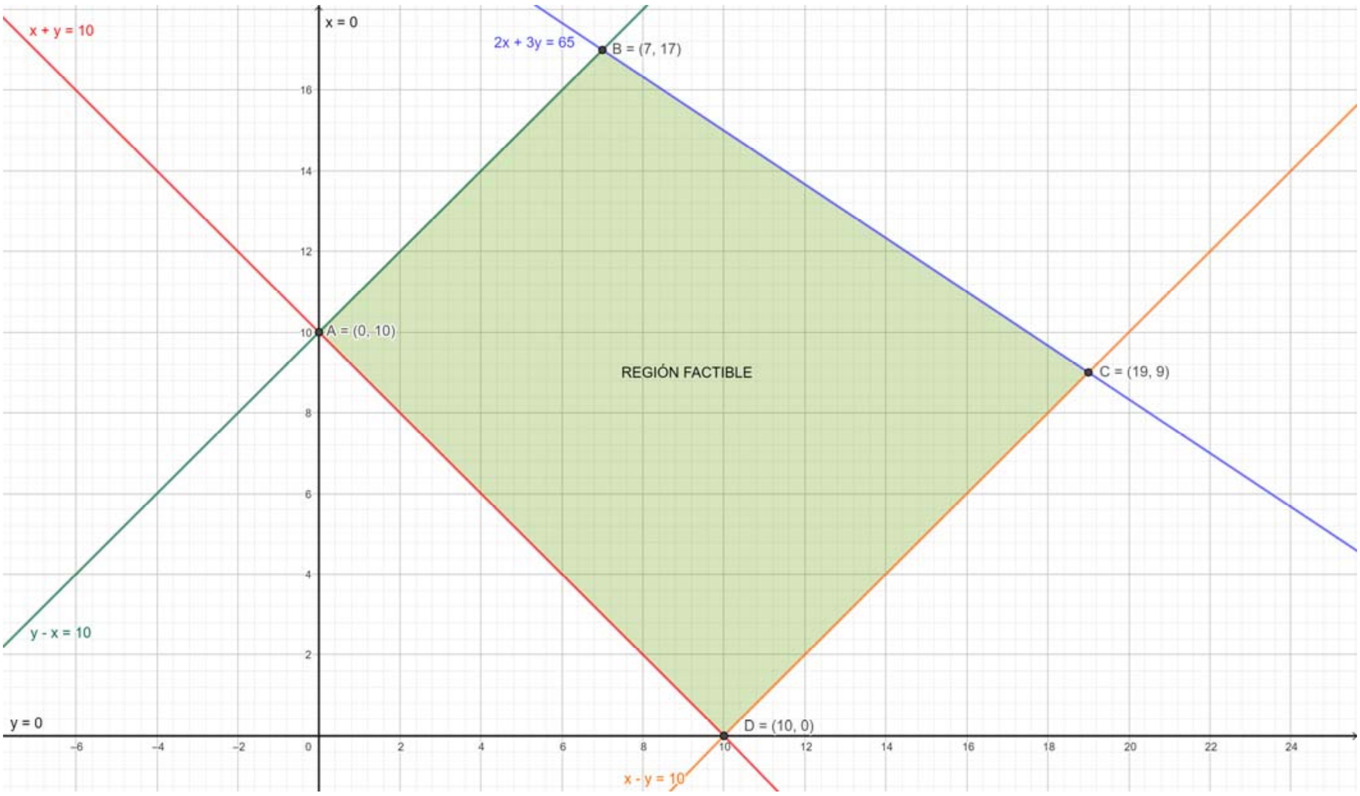
$$\left.\begin{array}{c} 2400x + 3600y \leq 78000 \\ x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 24x + 36y \leq 780 \\ x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + 3y \leq 65 \\ x - y \leq 10 \\ y - x \leq 10 \\ x + y \geq 10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

El recinto delimitado por las restricciones es el que aparece en la siguiente página.

Los vértices del recinto son los puntos: $A(0,10)$, $B(7,17)$, $C(19,9)$ y $D(10,0)$.

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $B(7,17)$ se obtiene como intersección de las rectas $2x+3y=65$, $y-x=10$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ y-x=10 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} y-x=10 \\ 2x+3y=65 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=65 \\ x-y=10 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} x+y=10 \\ x-y=10 \end{array}\right\}$
$A(0,10)$	$B(7,17)$	$C(19,9)$	$D(10,0)$



Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice del recinto[3], por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y)=34000x+72000y$ en cada uno de ellos.

[3] Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

$F(A) = F(0{,}10) = 34000 \cdot 0 + 72000 \cdot 10 = 720\,000$

$F(B) = F(7{,}17) = 34000 \cdot 7 + 72000 \cdot 17 = 1\,462\,000$

$F(C) = F(19{,}9) = 34000 \cdot 19 + 72000 \cdot 9 = 1\,294\,000$

$F(D) = F(10{,}0) = 34000 \cdot 10 + 72000 \cdot 0 = 340\,000$

Por tanto, la máxima audiencia se consigue en el vértice $B(7{,}17)$ y es de $1\,462\,000$ personas, así habría que contratar la emisión de 7 anuncios por radio y 17 por televisión.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
b) **(0.75 puntos)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
c) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

Solución:

a) El dominio de la función $f(x)$ estará formado por todos los valores reales tales que no se anule el denominador. Como $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$, podemos concluir que $Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$.

La función es continua/derivable en todo su dominio, $\mathbb{R} - \{2\}$, por ser cociente de polinomios (continuos/derivables en todo $\mathbb{R}$) y no se anula el denominador.

<u>Asíntota vertical</u>

Tenemos como candidato a asíntota vertical $x = 2$. Como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-6}{2-x} = \frac{2\cdot 2-6}{2-2^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-6}{2-x} = \frac{2\cdot 2-6}{2-2^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Podemos asegurar que la función presenta una asíntota vertical en $x = 2$.

<u>Asíntota horizontal</u>

Para el cálculo de la asíntota horizontal hallaremos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Si se obtiene una constante ésta será la asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-6}{2-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

Luego la función tiene una asíntota horizontal en $y = -2$.

<u>Asíntota oblicua</u>

Al tener asíntota horizontal no existe asíntota oblicua.

b) Para el estudio de la monotonía (crecimiento/decrecimiento) y extremos deberemos obtener previamente la función derivada y calcular los puntos críticos (valores en los que ésta se anula).

$$f'(x)=\frac{2(2-x)-(2x-6)\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4-2x+2x-6}{(2-x)^2}=\frac{-2}{(2-x)^2}$$

Como la función derivada no se anula para ningún valor y, además, siempre es negativa, la función $f(x)$ siempre será decreciente en su dominio $\mathbb{R}-\{2\}$ y, por tanto, no posee extremos relativos.

c) Puntos de corte con el eje Y

$$x=0\Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-6}{2-0}=\frac{-6}{2}=-3$$

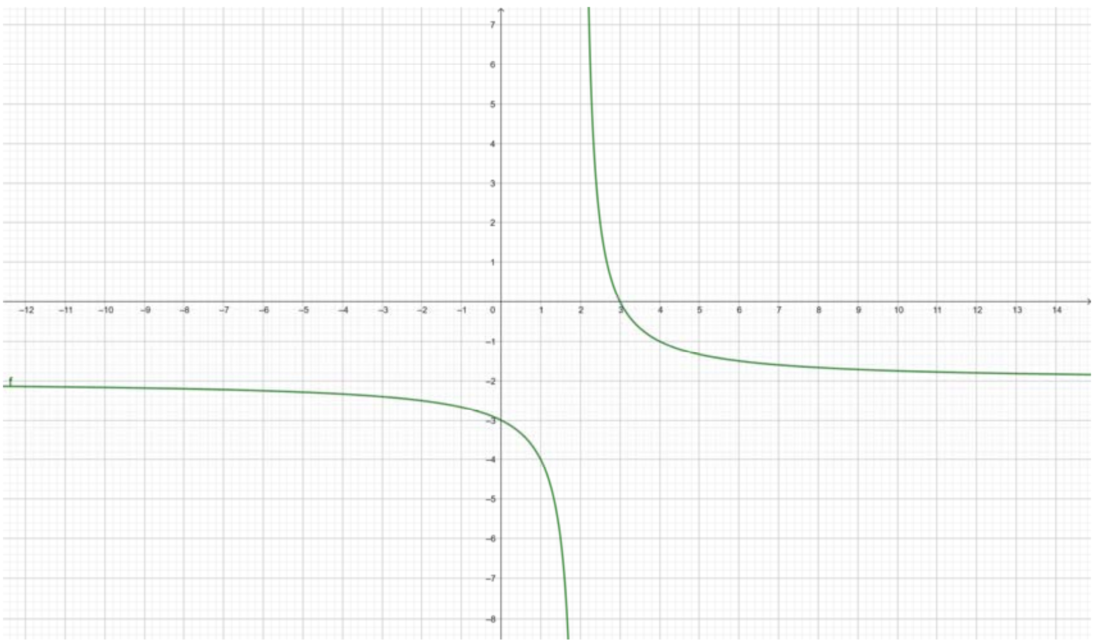
Tenemos, por tanto, el punto de corte con el eje Y en $A(0,-3)$.

Punto de corte con el eje X

$$y=0\Rightarrow\frac{2x-6}{2-x}=0\Rightarrow 2x-6=0\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$$

Y así, el punto $B(3{,}0)$ será el punto de corte con el eje X.

Teniendo en cuenta los puntos de corte A(0,-3) y B(3,0) así como toda la información obtenida en los apartados anteriores (asíntotas, monotonía…) podemos obtener la siguiente gráfica de la función $f(x)$.



EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & si\ x < 4 \\ 2x - 5 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) **(1 punto)** Represente la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas x = 3, x = 5 y el eje de abscisas. Calcule su área.

Solución:

a) Para $x < 4$ la función $f(x)$ es continua y derivable por ser una función polinómica.
De igual forma, para $x > 4$ la función $f(x)$ es continua y derivable por ser una función polinómica.

Falta estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 4$.

Continuidad en $x = 4$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (-x^2 + 4x + 3) = -4^2 + 4 \cdot 4 + 3 = -16 + 16 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (2x - 5) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$$

Como $f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 4$.

En definitiva, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad en $x = 4$

Para el estudio de la derivabilidad en $x = 4$ comprobaremos si las derivadas laterales en dicho punto coinciden.

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & si\ x < 4 \\ 2 & si\ x > 4 \end{cases}$$

Calculemos las derivadas laterales.

$$f'(4^-) = \lim_{x \to 4^-} f'(x) = \lim_{x \to 4^-} (-2x + 4) = -2 \cdot 4 + 4 = -8 + 4 = -4$$

$$f'(4^+) = \lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} 2 = 2$$

Al ser $f'(4^-) \neq f'(4^+)$ la función $f(x)$ no es derivable en $x = 4$.

En definitiva, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$.

b) Calcularemos los puntos críticos de la función $f(x)$, es decir, los valores para los que se anula su función derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+4 & si\ x < 4 \\ 2 & si\ x > 4 \end{cases}$$

Para $x < 4$, $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Para $x > 4$, $f'(x) = 2 \neq 0$.

Tenemos así que $x = 2$ es un punto de posible cambio en el signo de la derivada de f(x).

Para el estudio de la monotonía de la función $f(x)$, en aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positivo, la función será creciente; y en los que tenga signo negativo, decreciente.

	$(-\infty, 2)$	$(2,4)$	$(4, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

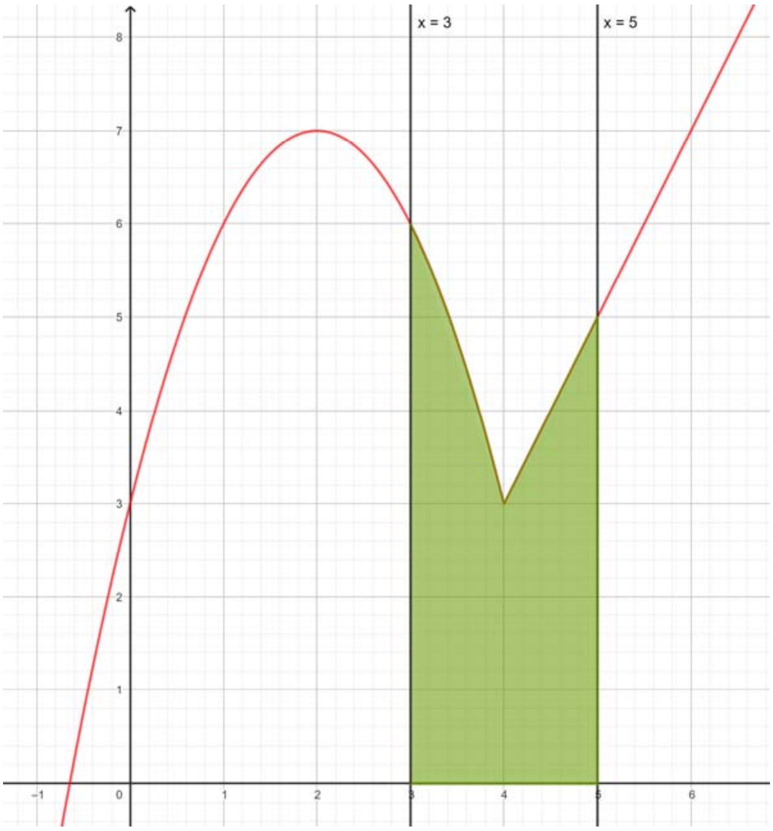
La función $f(x)$ presenta, por tanto, un máximo relativo en $x = 2$ y u mínimo relativo en $x = 4$.

c) Hallemos los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje X

Si $x < 4$, $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{7} \approx -0.65 \in (-\infty, 4) \\ x = 2 + \sqrt{7} \approx \ \ 4.65 \notin (-\infty, 4) \end{cases}$

Si $x > 4$, $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \notin (4, +\infty)$

El gráfico de la región pedida es el siguiente:



La función $f(x)$ cambia de criterio en $x = 4$ y el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función, las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas será la suma de dos integrales definidas:

$$A = \int_3^4 (-x^2 + 4x + 3)dx + \int_4^5 (2x - 5)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_3^4 + \left[\frac{2x^2}{2} - 5x\right]_4^5 =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right]_3^4 + [x^2 - 5x]_4^5 =$$

$$= \left[-\frac{4^3}{3} + 4 \cdot \frac{4^2}{2} + 3 \cdot 4\right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right] + [5^2 - 5 \cdot 5] - [4^2 - 5 \cdot 4] =$$

$$= -\frac{64}{3} + \frac{64}{2} + 12 + \frac{27}{3} - 18 - 9 + 25 - 25 - 16 + 20 =$$

$$= \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3} \cong 8.67u^2$$

El área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas tiene un valor aproximado de 8.67 unidades cuadradas.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos "tener coche" y "no tener moto"? ¿Son incompatibles?

Solución:

Sean los sucesos:

M: "el habitante tiene moto"

C: "el habitante tiene coche"

Según el enunciado de nuestro ejercicio sabemos que:

$$p(\bar{C} \cap \bar{M}) = 0.07 \qquad p(M/C) = 0.36 \qquad p(\bar{M}/\bar{C}) = 0.28$$

Aplicando las leyes de Morgan sabemos que $\bar{C} \cap \bar{M} = \overline{C \cup M}$, por lo que:

$$p(\bar{C} \cap \bar{M}) = p(\overline{C \cup M}) = 1 - p(C \cup M) = 0.07 \Rightarrow \boxed{p(C \cup M) = 0.93}$$

Además, aplicando el teorema de Bayes a $p(\bar{M}/\bar{C}) = 0.28$ obtenemos que:

$$p(\bar{M}/\bar{C}) = \frac{p(\bar{M} \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = 0.28 \Rightarrow \frac{0.07}{p(\bar{C})} = 0.28 \Rightarrow p(\bar{C}) = \frac{0.07}{0.28} = 0.25$$

Y así, $p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - 0.25 = 0.75 \Rightarrow \boxed{p(C) = 0.75}$

Procediendo de manera similar con $p(M/C) = 0.36$ obtenemos que:

$$p(M/C) = \frac{p(M \cap C)}{p(C)} = 0.36 \Rightarrow \frac{p(M \cap C)}{0.75} = 0.36 \Rightarrow \boxed{p(M \cap C) = 0.27}$$

Utilizando la fórmula de la unión de sucesos,

$$p(C \cup M) = p(C) + p(M) - p(C \cap M) \Rightarrow 0.93 = 0.75 + p(M) - 0.27 \Rightarrow \boxed{p(M) = 0.45}$$

Estamos ya en condiciones de contestar a los distintos apartados.

a) Probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos
Para que solo tenga uno de los dos vehículos puede ocurrir dos situaciones: que tenga moto y no tenga coche, o que tenga coche y no tenga moto. Este suceso puede expresarse como:

$$(M \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{M}) = (M - C) \cup (C - M)$$

que son claramente incompatibles por lo que:

$$p[(M \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{M})] = p[(M - C) \cup (C - M)] = p(M - C) + p(C - M)$$

Como

$$p(M - C) = p(M) - p(M \cap C) = 0.45 - 0.27 = 0.18$$

$$p(C - M) = p(C) - p(M \cap C) = 0.75 - 0.27 = 0.48$$

Llegamos a que la probabilidad pedida es:

$$p[(M - C) \cup (C - M)] = p(M - C) + p(C - M) = 0.18 + 0.48 = 0.66$$

b) La probabilidad de que tenga alguno de los dos vehículos puede expresarse como $p(M \cup C)$ que, según los datos aportados por el enunciado hemos visto que era 0.93 ya que:

Aplicando las leyes de Morgan sabemos que $\bar{C} \cap \bar{M} = \overline{C \cup M}$, por lo que:

$$p(\bar{C} \cap \bar{M}) = p(\overline{C \cup M}) = 1 - p(C \cup M) = 0.07 \Rightarrow \boxed{p(C \cup M) = 0.93}$$

c) Para el cálculo de la probabilidad de que, si tiene coche, no tenga moto podemos proceder de la siguiente forma:

$$p(\bar{M}/C) = \frac{p(\bar{M} \cap C)}{p(C)} = \frac{0.48}{0.75} = 0.64$$

d) Para que los sucesos C: "tener coche" y $\overline{M}$: "no tener moto" sean independientes ha de verificarse que $p(C \cap \overline{M}) = p(C) \cdot p(\overline{M})$

Como

$$p(C \cap \overline{M}) = 0.48$$
$$p(C) \cdot p(\overline{M}) = 0.75 \cdot 0.55 = 0.4125$$

Resulta que $p(C \cap \overline{M}) \neq p(C) \cdot p(\overline{M})$ y, por tanto, los sucesos C y $\overline{M}$ no son independientes.

Para el estudio de la incompatibilidad de los sucesos C y $\overline{M}$ recordemos que serán incompatibles si la probabilidad de su intersección es cero, es decir, si $p(C \cap \overline{M}) = 0$.

Como $p(C \cap \overline{M}) = 0.48 \neq 0$ concluimos que los sucesos C y $\overline{M}$ no son incompatibles.

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

Solución:

Sean los sucesos:

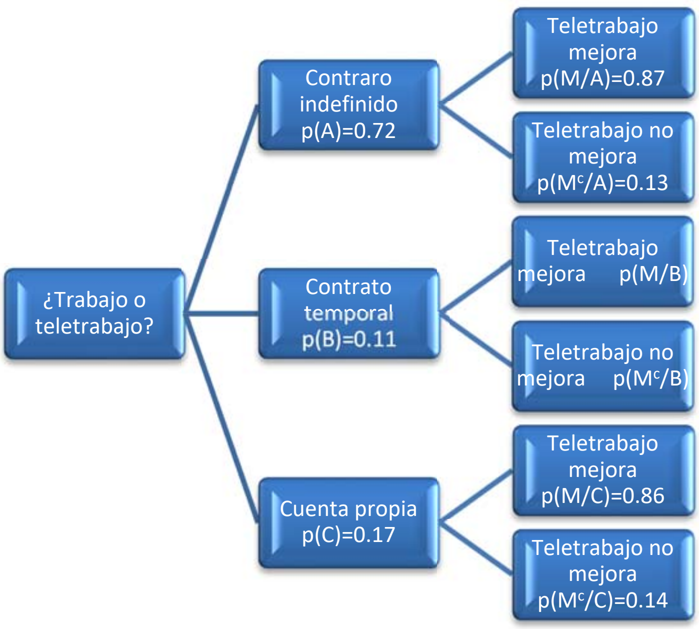
A: “trabaja por cuenta ajena con contrato indefinido”

B: “trabaja por cuenta ajena con contrato temporal”

C: “trabaja por cuenta propia”

M: “piensa que el teletrabajo mejora la conciliación familiar”

Con los datos del enunciado podemos construir el siguiente diagrama en árbol.



Como el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar, $p(\overline{M}) = 12.51\% = 0.1251$, tenemos que la probabilidad de que el trabajador opine que el teletrabajo mejora la conciliación familiar es $p(M) = 1 - p(\overline{M}) = 1 - 0.1251 = 0.8749$

a) En este primer apartado se nos pide que obtengamos la probabilidad de que el trabajador opine que el teletrabajo sí mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal, es decir, nos piden, $p(M/B)$.

Por el teorema de la probabilidad total sabemos que:

$$p(M) = p(A) \cdot P(M/A) + p(B) \cdot P(M/B) + p(C) \cdot P(M/C)$$

Por tanto,

$$0.8749 = 0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot p(M/B) + 0.17 \cdot 0.86 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{p(M/B) = 0.93}$$

b) Se nos pide la probabilidad de que el trabajador no esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar, $p(\bar{C}/M)$. Por el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} p(\bar{C}/M) &= \frac{p(\bar{C} \cap M)}{p(M)} = \frac{p(A \cap M) + p(B \cap M)}{p(M)} = \\ &= \frac{p(A) \cdot p(M/A) + p(B) \cdot p(M/B)}{p(M)} = \\ &= \frac{0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot 0.93}{0.8749} = \frac{0.7287}{0.8749} \approx 0.8329 \end{aligned}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?
b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?
c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

Solución:

Sea X la variable "altura de un cierto tipo de plantas de maíz", entonces $X \sim \mathcal{N}(145,22)$.

a) Se nos pide que calculemos $p(135 \le X \le 155)$

$$
\begin{aligned}
p(135 \le X \le 155) &= p\left(\frac{135-145}{22} \le \frac{X-145}{22} \le \frac{155-145}{22}\right) = \\
&= p\left(\frac{-10}{22} \le Z \le \frac{10}{22}\right) = \\
&= p(-0.455 \le Z \le 0.455) = \\
&= p(Z \le 0.455) - p(Z \le -0.455) = \\
&= p(Z \le 0.455) - [1 - p(Z \ge 0.455)] = \\
&= p(Z \le 0.455) - 1 + p(Z \le 0.455) = \\
&= 2 \cdot p(Z \le 0.455) - 1 = \\
&= 2 \cdot \frac{0.6736 + 0.6772}{2} - 1 \cong 0.3508 = 35.08\%
\end{aligned}
$$

El porcentaje de plantas que tiene una altura comprendida entre $135\ cm$ y $155\ cm$ es del 35.08%.

b) Como estamos ante una distribución normal y sabemos que es simétrica respecto a su media, la altura que debe tener como mínimo una planta para estar entre el 50% de las más altas es precisamente su media, 145 centímetros.

c) Sabemos que dada una distribución normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la distribución de medias muestrales $\bar{X}$ se distribuye normalmente con parámetros $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

Así, en nuestro caso la distribución de medias muestrales de tamaño 16 sigue una distribución normal con la misma media que la distribución (145 cm) y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{22}{\sqrt{16}} = 5.5$, es decir, $\bar{X} \sim N(145{,}5.5)$.

En este apartado se nos pide $p(140 \leq \bar{X} \leq 151)$ que calculamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
p(140 \leq \bar{X} \leq 151) &= p\left(\frac{140-145}{5.5} \leq \frac{\bar{X}-145}{5.5} \leq \frac{151-145}{5.5}\right) = \\
&= p(-0.91 \leq Z \leq 1.09) = \\
&= p(Z \leq 1.09) - p(Z \leq -0.91) = \\
&= p(Z \leq 1.09) - [1 - p(Z \leq 0.91)] = \\
&= p(Z \leq 1.09) - 1 + p(Z \leq 0.91) = \\
&= 0.8621 - 1 + 0.8186 = 0.6807
\end{aligned}
$$

Por tanto, la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre $140\ cm$ y $151\ cm$ es de 0.6807.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

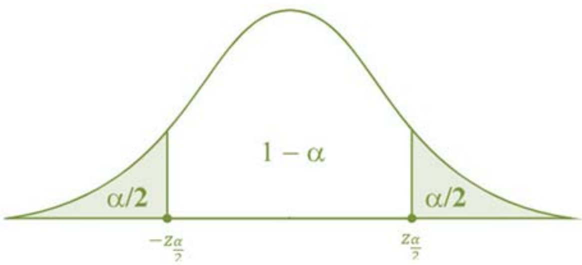
b) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.
c) **(1.25 puntos)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(-z_{\alpha/2} \leq \mathcal{Z} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$



El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

En nuestro caso particular, tenemos una muestra de tamaño $n = 300$ y proporción muestral

$$\hat{p} = \frac{12}{300} = 0.04$$

a) Como el nivel de confianza es del 97% tenemos que:

$$1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

El error viene dado por la expresión:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{300}} = 0.0245$$

Luego el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota viene dado por:

$$I.C.(\hat{p}) = (\hat{p}-\varepsilon, \hat{p}+\varepsilon) = (0.04-0.0245, 0.04+0.0245) = (0.0155, 0.0645)$$

b) Si el nivel de confianza pasa a ser del 95% tenemos que:

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Si el error máximo es del 2%, manteniendo la misma proporción muestral con un niel de confianza del 95%, como

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \Rightarrow \quad 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{n}}$$

$$\frac{0.02}{1.96} = \sqrt{\frac{0.0384}{n}}$$

$$\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 = \frac{0.0384}{n}$$

$$n = \frac{0.0384}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} = 368.8$$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2% es de 369 viajeros.