Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora:

Milagros Latasa Asso

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema1. ***(10 puntos)***

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $A\,X + 3B = \ C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Resuelva la ecuación matricial despejando previamente $.X$

b.- (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?.

Problema2. ***(10 puntos)***

Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- *(8 puntos*) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- *(2 puntos*) Considerando la región factible del apartado a.- y una nueva función objetivo dada por: $max\ f(x\,,y) = 30\ \ x +\ b\,y$ donde b es un valor desconocido. Razone que (40, 40) no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con (20, 20) .

Problema 3. ***(10 puntos)***

Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50,\ 0 \le x \le 8$

a.- *(4 puntos)* Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$cuando $x \in [\,0,8\,]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- *(3 puntos*) ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? . Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$ ·

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x)dx$.

Problema 4

(10 puntos)

La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10+2t}t$ € siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a.- (*3 puntos*) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (*4 puntos*) Calcule $V'(t)$y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a.- para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$sea igual a 125 €.

c.- (*3 puntos*) ¿ Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175? .

Problema 5

(10 puntos)

Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

a.- *(3 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?

b.- *(4 puntos*) Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?

c.- *(3 puntos*) Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

Problema 6

(10 puntos)

En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

a.- *(5 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.

b.- *(2 puntos*) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado a.-, ¿es razonable tal afirmación?

c.- *(3 puntos*) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema1

(10 puntos)

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $A\,X+3B=\;C$ esté bien planteada, siendo $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

Resuelva la ecuación matricial despejando previamente $.X$

b.- (*5 puntos*) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?.

Solución

a.- Para poder realizar el producto $A\,X$, X debe tener 2 filas

Para poder sumar $A\,X$, $3B$ y C, deben tener la misma dimensión, es decir, dos filas y 3 columnas

La matriz producto $A\,X$ tiene tantas filas como A y tantas columnas como X y $A\,X\in\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$

Por las tres condiciones anteriores deducimos que $X\in\mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Rightarrow\exists A^{-1}=\frac{1}{|A|}(adj\;A)^t=-1\,.\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$A\,X+3B=\;C\Rightarrow AX=C-3B\Rightarrow X=A^{-1}(C-3B)$$

$$X=A^{-1}(C-3B)=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}.\left[\begin{pmatrix}2&0&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&3&0\\3&0&-3\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5&-3&2\\-4&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&2&2\\14&-5&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}-9&2&2\\14&-5&0\end{pmatrix}}$$

b.- Sean x =nº participaciones de 5 €, y =nº participaciones de 10 €, z =nº participaciones de 25 €,

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=430\\5x+10y+25z=7100\\2y=z\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\left.\begin{array}{r}x+y+z=430\\5x+10y+25z=7100\\2y-z=0\end{array}\right\}$$

En forma matricial: $\begin{pmatrix}1&1&1\\5&10&25\\0&2&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}430\\7100\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\5&10&25\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}430\\7100\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\5&10&25\\0&2&-1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&5\\0&2&-1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&2&-1\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&-9\end{vmatrix}=5.(-9)=-45$$

$$\text{Adj}\begin{pmatrix}1&1&1\\5&10&25\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}10&25\\2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}5&25\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}5&10\\0&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&1\\10&25\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\5&25\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\5&10\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60&5&10\\3&-1&-2\\15&-20&5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\5&10&25\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t==\frac{1}{-45}\begin{pmatrix}-60&3&15\\5&-1&-20\\10&-2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{60}{45}&\frac{-3}{45}&\frac{-15}{45}\\\frac{-5}{45}&\frac{1}{45}&\frac{20}{45}\\\frac{-10}{45}&\frac{2}{45}&\frac{-5}{45}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\5&10&25\\0&2&-1\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}430\\7100\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{-45}\begin{pmatrix}-60&3&15\\5&-1&-20\\10&-2&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}430\\7100\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{-45}\begin{pmatrix}-4500\\-4950\\-9900\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\110\\220\end{pmatrix}$$

Esta matriz columna nos muestra el nº de participaciones de cada clase que se han vendido. Si ahora disponemos en una matriz fila las ganancias por participación , el producto de ambas nos proporciona la ganancia total obtenida:

$$G=\begin{pmatrix}100\\110\\220\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2{,}5&5\end{pmatrix}=100+2{,}5.110+5.220=1475\ €$$

Se venden 100 participaciones de 5 €, 110 de 10 € y 220 de 20 €.

La ganancia total obtenida es de 1475 €

Problema2

(10 puntos)

Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- (*8 puntos*) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- (*2 puntos*) Considerando la región factible del apartado a.- y una nueva función objetivo dada por: $max\, f(x, y) = 30\ x + \ b\, y$ donde b es un valor desconocido. Razone que (40, 40) no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con (20, 20)

Solución

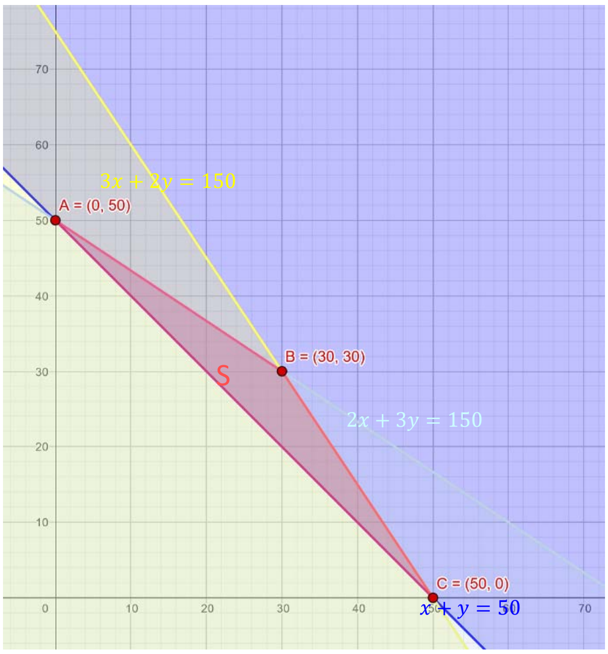
a.- Se trata de un problema de programación lineal. Definimos variables y función objetivo:

Sean $x =$ nº de unidades tipo A producidas $\quad y =$ nº de unidades tipo B producidas

La función objetivo es

$$z = B(x, y) = 30x + 40y$$

Pretendemos maximizar z que está sometida a las restricciones:



$$\begin{cases} I_1: \quad x \ + \ y \geq 50 \\ I_2: \quad 3x + 2y \leq 150 \\ I_3: \ 2x \ + \ 3y \ \leq 150 \\ I_4: \ x \geq 0 \\ I_5: \ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible S es el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones. Lo obtenemos gráficamente.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x + y = 50$ que pasa por los puntos (0, 50) y (50, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(0 + 0 \geq 50 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 <u>contiene</u> a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $3x + 2y = 150$ que pasa por (0, 50) y (75, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_2 $(3.0 + 2.0 \ \leq 150) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 <u>contiene</u> a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $2x + 3y = 150$ que pasa por los puntos (0, 50) y (75, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(4.0+2.0 \leq 72)\Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La intersección de los semiplanos I_4 , I_5 es el primer cuadrante. Buscamos la intersección con los otros tres. Es el triángulo ABC. Busquemos las coordenadas de sus vértices:

$$A \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 150 \\ x + y = 50 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 150 \\ -3x - 3y = -150 \end{cases} \sim \begin{cases} -x = 0 \\ y = \frac{150}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad A = (0, 50)$$

$$B \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 150 \\ 3x + 2y = 150 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + 9y = 450 \\ -6x - 4y = -300 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{-3y+150}{2} \\ 5y = 150 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{-90+150}{2} \\ y = 30 \end{cases} \Rightarrow B = (30, 30)$$

$$C \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 150 \\ x + y = 50 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 2y = 150 \\ -3x - 3y = -150 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{150}{3} \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (50, 0)$$

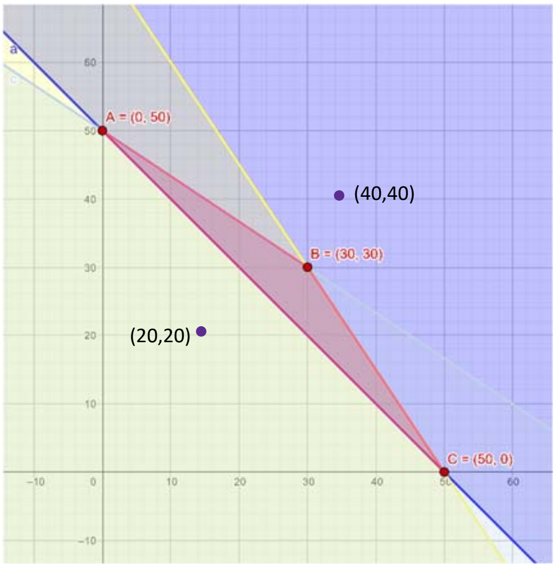
Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Evaluamos la función objetivo en ellos

$$z(A) = 30.0 \ + 40.50 = 2000$$

$$z(B) = 30.30 + 40.30 = 2100$$

$$z(C) = 30.50 + 40.0 \ = 1500$$

La solución óptima se obtiene si se producen 30 unidades del producto A y 30 unidades del producto B. En este caso la ganancia total obtenida es de 2100€.



b.- Si la región factible es la misma que en apartado anterior, ni (40, 40) ni (20, 20) están dentro de la región factible ya que no cumplen todas las inecuaciones de S

- (40, 40) no cumple la inecuación I_2: 3.40+2.40 =200 $\ngeq$ 150, ni tampoco , I_3: 2.40+3.40$\ngeq$ 150.
- (20, 20) no cumple la inecuación I_1: 20+20$\nleq$ 50.

(40, 40) y (20, 20) están fuera de la región factible

Problema 3

Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50,\ 0 \leq x \leq 8$

a.- *(4 puntos)* Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$cuando $x \in [\,0, 8\,]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- *(3 puntos)* ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? . Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$ ·

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x)dx$.

Solución

a. $f'(x)= 3x^2 - 18x + 40, \quad 0 \leq x \leq 8$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{18 \pm \sqrt{324-480}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{-156}}{6}$ no existe⇒ f'tiene signo constante en $[0,8]$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,8]$ (por ejemplo $f'(1) = 25$) $\Rightarrow f$ es creciente en $[0,8] \Rightarrow$

$\Rightarrow 50 = f(0) \leq f(x) \leq f(8) = 306 \quad \forall x \in [0,8]$

f alcanza el mínimo en $x = 0$ y es $f(0) = 50$

f alcanza el máximo en $x = 8$ y es $f(8) = 306$

Ambos son extremos absolutos

f alcanza el mínimo absoluto en $x = 0$ y es $f(0) = 50$

f alcanza el máximo absoluto en $x = 8$ y es $f(8) = 306$

f no tiene extremos relativos

b.- $f''(x)= 6x - 18, \quad 0 \leq x \leq 8$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{18}{6} = 3$$

	$0 \leq x < 3$	$x = 3$	$3 < x \leq 8$
Signo f''	Negativo	0	Positivo
Curvatura de f	Cóncava hacia abajo∩	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba∪

f presenta un cambio de curvatura en $x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3, f(3)) = (3,\ 116)$ es un punto de inflexión de f.

El punto $(3,\ 116)$ es un punto de inflexión de f.

c.- $\int_1^3 f(x)dx. = \int_1^3 (x^3 - 9x^2 + 40x + 50)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{40x^2}{2} + 50x\right]_1^3 =$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 20x^2 + 50x\right]_1^3 = \left(\frac{81}{4} - 3.27 + 20.9 + 50.3\right) - \left(\frac{1}{4} - 3 + 20 + 50\right) = 202$$

$$\boldsymbol{\int_1^3 f(x)dx == 202}$$

Problema 4

La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10+2t}$ € siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a.- (*3 puntos*) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (*4 puntos*) Calcule $V'(t)$y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a.- para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$sea igual a 125 €.

c.- (*3 puntos*) ¿ Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175? .

Solución

a.- Como V no existe en $t = 0$, su valor inicial es $\lim\limits_{t\to 0} V(t)$

$$\lim_{t\to 0} V(t) = \lim_{t\to 0}\left(200 - \frac{100t}{10+2t}\right) = 200$$

Su valor en un horizonte infinito de tiempo será $\lim\limits_{t\to\infty} V(t)$

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty}\left(200 - \frac{100t}{10+2t}\right) = 200 - \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(200 - \frac{\frac{100t}{t}}{\frac{10}{t}+\frac{2t}{t}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(200 - \frac{100}{\frac{10}{t}+2}\right) = 200 - \frac{100}{\frac{10}{\infty}+2} = 200 - \frac{100}{0+2} = 150$$

El valor inicial de V es $\lim\limits_{t\to 0} V(t) = 200$ y su valor en un horizonte infinito de tiempo $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = 150$.

b.- $$V'(t) = -\frac{100(10+2t)-100t\,.2}{(10+2t)^2} = -\frac{1000}{(10+2t)^2}$$

$$V'(t) = -\frac{1000}{(10+2t)^2} < 0 \quad \forall t \in (0,\infty) \quad \Rightarrow V \text{ es decreciente } \forall t \in (0,\infty)$$

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = 150 \text{ y } V \text{ decreciente } \forall t \in (0,\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} V(t) \geq V(t) \geq \lim_{t\to\infty} V(t) \quad \forall t \in (0,\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 \geq V(t) \geq 150 > 125 \qquad \forall x \in (0,\infty)$$

$V(t)$ es decreciente y $V(t) \gneqq 125 \quad \forall t \in (0,\infty)$

c.- $$V(t) = 175 \Rightarrow 200 - \frac{100t}{10+2t} = 175 \Rightarrow \frac{200(10+2t)-100t}{10+2t} = \frac{175(10+2t)}{10+2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200(10+2t) - 100t = 175\,(10+2t) \Rightarrow 2000 + 400t - 100t = 1750 + 350t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 250 = 50t \Rightarrow t = 50$$

El dispositivo tendrá un valor de 175 € cuando pasen 5 años

Problema 5

(10 puntos)

Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

a.- *(3 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?

b.- *(4 puntos)* Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?

c.- *(3 puntos)* Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

Solución

El experimento aleatorio *"observar la respuesta de una pregunta al azar y ver si es correcta"* es una prueba con solo dos resultados posibles (de Bernoulli), identificables con *"éxito"y "fracaso*.

Sea *"éxito" = "La contestación a la pregunta es correcta"*

$$P(\text{"éxito"}) = p = 0{,}7 \qquad P(\text{"}fracaso\text{"}) = q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Contestar todo el examen equivale a repetir 4 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos" = "número de respuestas correctas en el examen",* es una variable binomial

$$X = B(4,\ 0{,}7) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot (0{,}7)^k \cdot (0{,}3)^{4-k}$$

a. $P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (0{,}7)^4 \cdot (0{,}3)^0 = 1\,.\,0{,}2401\,.\,1 = 0{,}2401$

La probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas $0,2401$

b. $P(\text{""}Juan\ apruebe\text{" "}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$

$$= 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot (0{,}7)^0 \cdot (0{,}3)^4 + \binom{4}{1} \cdot (0{,}7)^1 \cdot (0{,}3)^3\right] = 1 - [1\,.\,1\,.\,0{,}0081 + 4\,.\,0{,}7\,.\,0{,}027] =$$

$$= 1 - 0{,}0831 = 0{,}9163$$

La probabilidad de que Juan apruebe el examen es 0,9163

c. $P(Juan\ conteste\ correctamente\ a\ todas\ las\ preguntas/Juan\ ha\ aprobado\ el\ examen) =$

$$= P((X = 4)/(X \geq 2)) = \frac{P[(X=4)\ \cap\ (X\geq 2)]}{P(X\geq 2)} = \frac{P(X=4)}{P(X\geq 2)} = \frac{0{,}2401}{0{,}9163} = 0{,}2620$$

La probabilidad de que Juan haya contestado correctamente todas las preguntas , si ha aprobado el examen es de $0,2620$

Problema 6

(10 puntos)

En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

a.- (*5 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.

b.- (*2 puntos*) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado a.-, ¿es razonable tal afirmación?

c.- (*3 puntos*) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

Solución

a. Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 98%:

$$1-\alpha = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 0{,}02 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}99$$

El valor más cercano en la tabla es 0,9901 correspondiente a $z\alpha/_2 = 2{,}33$

Teniendo en cuenta la muestra conocida $p_r = \frac{120}{200} = 0{,}6$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por $\left(p_r - z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right)$

En este caso

$$\left(p_r - z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0.6 - 2{,}33 \sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0.4}{200}},\ 0.6 + 2{,}33 \sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0.4}{200}}\right) =$$

$$= \left(0.6 - 2{,}33 \sqrt{0{,}0012} \quad , \ 0.6 + 2{,}33 \sqrt{0{,}0012}\right) = (0{,}5193 \quad , \ 0{,}6807)$$

Intervalo de confianza pedido es $\mathbf{(0{,}5193 \quad , \ 0{,}6807)}$

b.

No, no es razonable. Se puede afirmar con una confianza del 98 % que la porcentaje de votantes estará entre el 51,93 % y el 68;07 %

c. Sea $Ai \quad i = 1{,}2{,}3$ el suceso "el votante elegido al azar en el lugar i vota a Rupérez"

Teniendo en cuenta que la elección se realiza con reemplazamiento, los tres sucesos son independientes y también sus contrarios

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{62}{100} = 0{,}62 \qquad P(A_1{}^c) = P(A_2{}^c) = P(A_3{}^c) = \frac{38}{100} = 0{,}38$$

Nos piden $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^C \underbrace{=}_{Leyes\ de\ Morgan} 1 - P({A_1}^c \cap {A_2}^c \cap {A_3}^c) =$

$\underbrace{=}_{A_i^c independientes} 1 - \left(P({A_1}^c).P({A_2}^c).P({A_3}^c)\right) = 1 - 0{,}38\ .0{,}38\ .0{,}38 = 0{,}945128$

La probabilidad de que al menos uno de tres votantes elegidos al azar con reemplazamiento, haya votado por Rupérez., es de 0,9451

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1: (10 puntos)

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

Problema 2: (10 puntos)

Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

Problema 3: (10 puntos)

El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ siendo $t \in [0.62]$ el número de años transcurridos desde 1932

Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

Problema 4:

(10 puntos)

Sea $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & si \quad x < 2 \\ 1 & si \ x = 2 \\ x - \sqrt{x^2 - 2x} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x)dx$

c.-(4 puntos) Calcule $\lim_{x \to \infty} f(x)$

Problema 5:

(10 puntos)

En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

Problema 6:

(10 puntos)

Responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X? Calcule $P(X = 2)$.

b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.

b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?

b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

10 puntos)

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

Solución

a. $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow A - I$ admite imnvera

$$AX - IX = B \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{P\ distributiva \\ .\ respecto +}} (A - I)\,.X = B \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{Multiplicando\ por \\ (A-I)^{-1} a\ la\ izda}} (A - I)^{-1}(A - I)\,.X = (A - I)^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\,.X = (A - I)^{-1}B \Rightarrow \quad \boldsymbol{X = (A - I)^{-1}B}$$

$$adj\,(A - I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|}[adj\,(A - I)]^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

b.- Sean: $x =$nº unidades vendidas en tienda física, $y =$ nº unidades vendidas online,

$z =$ nº unidades vendidas en tienda de segunda mano

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ y = 5x \\ 5z = 800 + 10x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} 10x & + 6y & + 5z & = 1600 \\ -5x & + y & & = 0 \\ -10x & & + 5z & = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} -5x & + y & & = 0 \\ 10x & + 6y & + 5z & = 1600 \\ -10x & & + 5z & = 800 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes y ampliada del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 5 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 5 & 1600 \\ -10 & 0 & 5 & 800 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz ampliada con el fin de obtener un sistema equivalente triangular

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 5 & 1600 \\ -10 & 0 & 5 & 800 \end{pmatrix} \underbrace{\approx}_{\substack{F2'=F2+2F1 \\ F3'=F3-2F1}} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1600 \\ 0 & -2 & 5 & 800 \end{pmatrix} \underbrace{\approx}_{\substack{Intercambio \\ F2'\ y\ F3'}} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 800 \\ 0 & 8 & 5 & 1600 \end{pmatrix} \approx$$

$$\underbrace{\approx}_{F3''=F2'+4F3'} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 800 \\ 0 & 0 & 25 & 4800 \end{pmatrix}$$

$rangoA = rango\bar{A} = 3 =$nº incógnitas$\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Resolvemos el sistema equivalente triangular asociado a la última matriz obtenida

$$\left.\begin{array}{r} -5x + y \qquad = 0 \\ -2y + \quad 5z = 800 \\ 25z = 4800 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \frac{4800}{25} = 192, \quad y = \frac{5z - 800}{2} = 80, \quad x = \frac{y}{5} = 16$$

Se han vendido 16 unidades en tienda física, 80 unidades online y 192 en tiendas de segunda mano

Problema 2:

(10 puntos)

Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

Solución

a.- Coste de 8 partidos y 8 conciertos= 8. 60 + 8. 40 = 800€ <1000€

Sí podría asistir a 8 partidos y 8 conciertos y no gastaría todo su presupuesto, le sobrarían 200€

b.- Definimos variables y función objetivo:

Sean $x =$ nº de partidos a los que asiste Javier $\quad y =$ nº de conciertos a los que asiste Javier

La función objetivo es

$$z = M(x, y) = x + y$$

Pretendemos maximizar z que está sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} I_1: \ 60x + 40y \le 1000 \\ I_2: \ x \ge y \\ I_3: \ x \le 14 \\ I_4: \ x \ge 0 \\ I_5: \ y \ge 0 \end{cases} \approx \begin{cases} I_1: \ 3x + 2y \le 50 \\ I_2: \ x \ge y \\ I_3: \ x \le 14 \\ I_4: \ x \ge 0 \\ I_5: \ y \ge 0 \end{cases}$$

La región factible S es el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones. Lo obtenemos gráficamente.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $3x + 2y = 50$ que pasa por los puntos (10, 10) y (0, 25). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(3.0 + 2.0 \le 50 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 <u>contiene</u> a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $x - y = 0$ que pasa por (0, 0) y (20, 20). El punto P (10, 0) cumple la inecuación I_2 $(10 \ge 0) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 <u>contiene</u> a P.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x = 14$ que es la paralela al eje OY trazada desde $(14{,}0)$. El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(0 \leq 14) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La intersección de los semiplanos I_4 , I_5 es el primer cuadrante. En la figura 1 vemos la intersección con los otros tres.

Calculamos analítica y gráficamente las coordenadas de los vértices distintos de O:

$$A \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ x = y \end{cases} \sim \begin{cases} 5x = 50 \\ x = y \end{cases} \sim \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (10, 10)$$

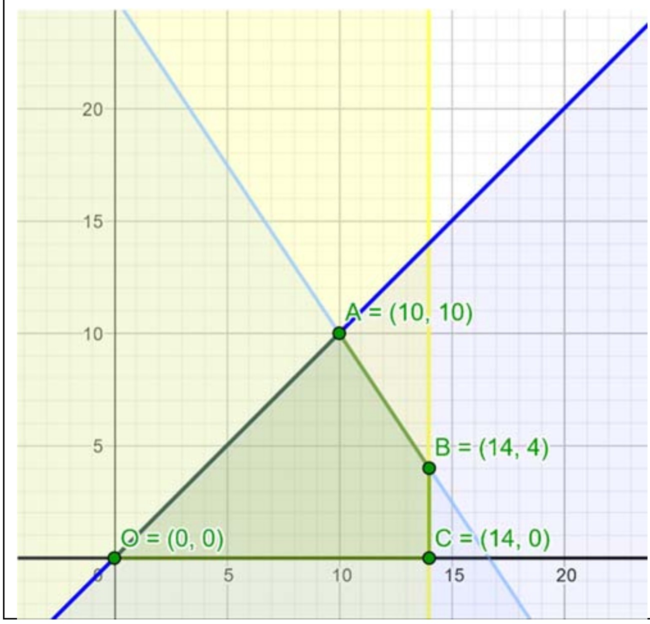
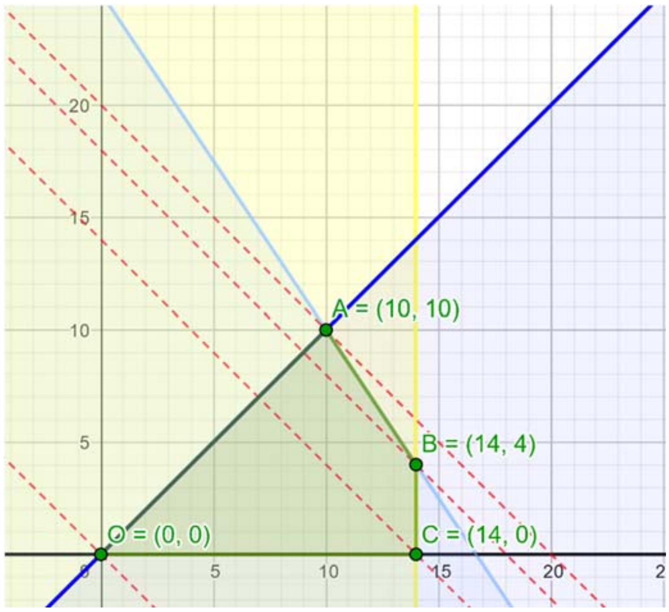
$$B \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ x = 14 \end{cases} \sim \begin{cases} 42 + 2y = 50 \\ x = 14 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 4 \\ x = 14 \end{cases} \Rightarrow B = (14, 4)$$

$$C \equiv \begin{cases} x = 14 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (14, 0)$$

El polígono OABC es la región factible y por el teorema fundamental de la programación lineal, la solución del problema se encuentra en uno de los vértices de la misma. Evaluamos la función objetivo en ellos. También podemos trazar las paralelas a $z = 0$ desde cada uno de los vértices y elegir como solución el vértice correspondiente a la paralela con mayor ordenada en el origen (figura2)

$$z(A) = 10 + 10 = 20 \qquad z(B) = 14 + 4 = 18 \quad z(C) = 14 + 0 \ = 14 \qquad z(O) = 0 + 0 = 0$$

La solución óptima se obtiene en A.

FIGURA 1	FIGURA 2
	

Javier maximiza el número de salidas si acude a 10 partidos y 10 conciertos

Problema 3:

(10 puntos)

El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función

$$IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$$

siendo $t \in [0.62]$ el número de años transcurridos desde 1932. Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

Solución

a.- Sea $f(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ función polinómica definida en $\mathbb{R}$. La función $IPR(t)$ es una restricción de f al intervalo $[0.62]$.

$$f'(t) = -3t^2 + 54t + 480 = IPR'(t) \qquad \forall t \in [0{,}62]$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 108t + 480 = 0 \Rightarrow t = \frac{-108 \pm \sqrt{108^2 + 5760}}{-6} = \frac{-108 \pm 132}{-6} = \begin{matrix} 40 \\ -4 \end{matrix}$$

$IPR'(t)$ tiene la misma expresión que $f'(t)$ pero solo existe en $[0.62]$ por lo que el único valor en el que se producen cambios de signo en la derivada de IPR' es en 40

	$0 \le t < 40$	$t = 40$	$40 < t \le 62$
Signo IPR'	Positivo	0	Negativo
Monotonía de IPR	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

El índice de progreso creció desde 1932 hasta 1972 y decreció desde 1972 hasta 1994

b.- El máximo puede alcanzarse en uno de los extremos del intervalo o en el máximo relativo. El mínimo se alcanza en un extremo del intervalo. Evaluamos la función en $t = 0$, $t = 40$, $t = 62$

$$IPR(0) = -0^3 + 54\,.\,0^2 + 480.0 + 6000 = 6000$$

$$IPR(40) = -40^3 + 54.\,40^2 + 480.40 + 6000 = 47600$$

$$IPR(62) = -62^3 + 54.\,62^2 + 480.62 + 6000 = 5008$$

El máximo absoluto se alcanza en $x = 40$ y el mínimo absoluto en $x = 62$

El máximo índice de progreso se registró en 1972 y fue 47600 . El mínimo en 1994 y fue 5008

c.-
$$f''(t) = -6t + 54 = IPR''(t) \qquad \forall t \in [0{,}62]$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 54 = 0 \Rightarrow t = 9$$

La segunda derivada de IPR: IPR''cambia de signo en $t = 9$

	$0 \leq t < 9$	$t = 9$	$9 < t \leq 62$
Signo IPR''	Positivo	0	Negativo
Curvatura de IPR	Cóncava hacia arriba ∪	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo

IPR es cóncava hacia arriba (∪) si $0 \leq t < 9$, cóncava hacia abajo (∩) si $9 < t \leq 62$.

$(9,,13965)$ es un punto de inflexión

Problema 4:

(10 puntos)

Sea $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-x} & si \quad x<2\\ 1 & si\ x=2\\ x-\sqrt{x^2-2x} & si \quad x>2\end{cases}$$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x)dx$

c.-(4 puntos) Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Solución

a. La función $f_1(x)=\frac{1}{2-x}$ es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ $\Rightarrow f$ es continua en $(-\infty,2)$

$f_2(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$ es continua en $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ $\Rightarrow f$ es continua en $(2,\infty)$

Veamos si se cumple la definición de continuidad en $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=2$$

Luego f presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=2$

f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=2$

b.-

$$*:\quad u=2-x \qquad du=(-1)dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}\right)dx=-\int_0^1\left(\frac{-1}{2-x}\right)dx\underbrace{=}_{*}$$

$$\underbrace{=}_{*}-\int_0^1\frac{du}{u}=-[Ln|u|]_0^1=-[Ln|2-x|]_0^1=-[Ln|1|-Ln|2|]=Ln\,2$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx=Ln\,2}$$

c.- $$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{(x^2-2x)}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\left(\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{\infty}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x)=1}$$

Problema 5:

(10 puntos)

En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

Solución

Sean: A_1="la persona elegida es menor de 30 años"

A_2="la persona elegida tiene una edad comprendida entre 30 y 65 años"

A_3="la persona elegida es mayor de 65 años"

B="la persona elegida tiene teléfono móvil"

Según la información que se desprende del enunciado:

$$P(A_1)=\frac{30}{100}=0{,}3 \qquad P(A_2)=\frac{50}{100}=0{,}5 \qquad P(A_3)=\frac{20}{100}=0{,}2$$

$$P(B/A_1)=\frac{70}{100}=0{,}7 \qquad P(B/A_2)=\frac{95}{100}=0{,}95 \qquad P(B/A_3)=\frac{50}{100}=0{,}5$$

a.- $$P(A_3\cap B)=P(B/A_3).P(A_3)=0{,}5\,.\,0{,}2=0{,}1$$

La probabilidad de que la persona elegida al azar, tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.es 0,1

b.- $$P(A_3/B)=\frac{P(A_3\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A_3).P(A_3)}{P(B/A_1).P(A_1)+P(B/A_2).P(A_2)+P(B/A_3).P(A_3)}=\frac{0{,}1}{0{,}7\,.0{,}3+0{,}95\,.0{,}5+0{,}5\,.0{,}2}=0{,}1273$$

La probabilidad de que la persona elegida al azar que ha resultado tener teléfono móvil, tenga más de 65 años es 0,1273

c.- Si se elige una persona de cada grupo- $(B/A_1),(B/A_2)$ y (B/A_3) son sucesos independientes

$$P[(B/A_1)\cap(B/A_2)\cap(B/A_3)]=P(B/A_1)\,.\,P(B/A_2)\,.\,P(B/A_3)=0{,}7\,.\,0{,}95\,.\,0{,}5=0{,}3325$$

La probabilidad de que las tres personas elegidas al azar, una de cada grupo, tengan teléfono móvil es 0,3325

Problema 6:

(10 puntos)

Responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X? Calcule $P(X=2)$.

b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.

b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?

b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

Solución

El experimento aleatorio *"observar la persona elegida y ver si es hombre"* es una prueba con solo dos resultados posibles (de Bernoulli), identificables con "*éxito*"y "*fracaso*.

Sea "*éxito" = "La persona elegida es hombre"*

$$P(\text{éxito}) = p = \frac{48}{100} = 0{,}48 \qquad P("fracaso") = q = \frac{52}{100} = 0{,}52$$

Se repite 4 veces este experimento con reemplazamiento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos" = "número de hombres elegidos",* es una variable binomial

$$X = B(4,\ 0{,}48) \text{ con función de probabilidad } P(X=k) = \binom{4}{k}\cdot(0{,}48)^k\cdot(0{,}52)^{4-k}$$

a. $P(X=2) = \binom{4}{2}\cdot(0{,}48)^2\cdot(0{,}52)^2 = \frac{4!}{2!.2!}\,.\,0{,}2304\,.\,0{,}2704 = 0{,}3738$

b. No disponemos de ninguna muestra y por tanto de ninguna proporción previa, así que suponemos $p_r = 1 - p_r = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Calculamos el valor crítico para una confianza del 95%

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

Este valor corresponde a $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para una proporción es $\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}},\, p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right)$.

Su amplitud es $2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}$

b1.- Debe ser

$$2z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} = 2\,.\,1{,}96\,.\sqrt{\frac{0{,}5\,.\,0{,}5}{n}} \le 0{,}08 \Rightarrow. \sqrt{\frac{0{,}5\,.\,0{,}5}{n}} \le \frac{0{,}08}{3{,}92} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0{,}5\,.\,0{,}5}{n} \le \left(\frac{0{,}08}{3{,}92}\right)^2 \Rightarrow 0{,}25\,.\,15{,}3664 \le 0{,}0064\,.\,n \Rightarrow n \ge \frac{3{,}8416}{0{,}0064} = 600{,}25$$

La muestra debe ser de 601 personas como mínimo

b2.- En este caso $p_r = \frac{80}{120} = 0{,}67 \quad 1 - p_r = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$

Como no nos dicen otra cosa, entendemos que el nivel de confianza es del 95% y, por tanto el valor crítico es el mismo que en el apartado anterior

El radio del intervalo de confianza pedido es

$$R = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}67\,.\,0{,}33\,.}{120}} = 1{,}96\,.\,0{,}0429 = 0{,}084084$$

$$(p_r - R,\ \ p_r + \ \mathrm{R}) = (0{,}67 - 0{,}084084,\quad 0{,}67 + 0{,}084084\,) = (0{,}585916,\quad 0{,}754084\,)$$

Intervalo de confianza: $(\mathbf{0{,}585916},\quad \mathbf{0{,}754084}\,)$

Podemos afirmar con una confianza del 95% que la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender está comprendida entre en 58,5916 % y el 75,4084 %.