Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de CASTILLA LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández y Ana Sacristán Cabo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

cc BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficaS.

Problemas (a elegir tres)

Problema 1:

En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5-k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema para k = 1

Problema 3:

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & si \quad x \leq 1 \\ a + \ln(x) & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que $f(x)$sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

Problema 4:

La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función $T(x)$, donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5.5x - 1.5x^2 & si \quad 0 \leq x < 3 \\ \dfrac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.

b) Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

Problema 5:

El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es σ = 10. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 %?

Problema 6:

En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.

a) Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio.

b) Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Cuestiones (a elegir una)

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A+X) = B - 2X$

Cuestión 2:

Calcular el área encerrada bajo la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ y el eje OX en el intervalo $[-2, -1]$

Cuestión 3:

Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

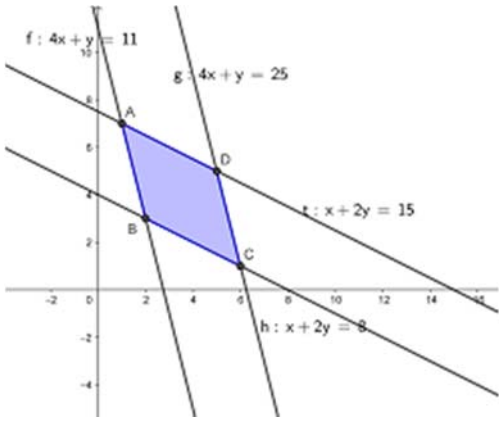
Solución:

Sea x ={número de comprimidos de VITAMIN}; Y={número de comprimidos de MAGNE}

Las inecuaciones que nos proporciona el enunciado son:

$$\begin{cases} 40x+10y \geq 110 \\ 40x+10y \leq 250 \\ 10x+20y \geq 80 \\ 10x+20y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y \geq 11 \\ 4x+y \leq 25 \\ x+2y \geq 8 \\ x+2y \leq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es



Hay que hallar los vértices

$$A\begin{cases} x+2y=15 \\ 4x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x+2y=8 \\ 4x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x+2y=8 \\ 4x+y=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

$$D\begin{cases} x+2y=15 \\ 4x+y=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

La función objetivo es $f(x)=x+y$ (hay que minimizar)

$$A(1,7); f(1,7)=8$$

$$B(2,3); f(2,3) = 5$$

$$C(6,1); f(6,1) = 7$$

$$D(5,5); f(5,5) = 10$$

Por tanto la solución es tomar 2 de VITAMIN Y 3 DE MAGNE

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5-k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema para k = 1

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} & - & \boldsymbol{3y} & + & \boldsymbol{5z} & = & \boldsymbol{0} \\ & & \boldsymbol{ky} & & \boldsymbol{(5-k)z} & = & \boldsymbol{-10} \\ \boldsymbol{x} & - & \boldsymbol{3y} & + & \boldsymbol{kz} & = & \boldsymbol{10} \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{5-k} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{5-k} & \boldsymbol{-10} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{10} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{5-k} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{k} \end{vmatrix} = \boldsymbol{k^2 - 3(5-k) - 5k + 3(5-k) = k(k-5)}$$

Si $k \neq \{0,5\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $k = 0$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-10} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{10} \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ -3 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0$ el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si $k = 5$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-10} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{10} \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 5\end{vmatrix} = 5$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 5 & -10\\ 1 & -3 & 10\end{vmatrix} = 50$ distinto de cero el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

k	$rango\ A$	$rango A^*$	Sistema
$\neq \{0, 5\}$	3	3	Compatible determinado
0	2	2	Compatible indeterminado
5	2	3	Incompatible

b)

Si $k = 1$ el sistema es compatible determinado

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 4 & -10\\ 1 & -3 & 1 & 10\end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix}0 & -3 & 5\\ -10 & 1 & 4\\ 10 & -3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & -10 & 4\\ 1 & 10 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -10\\ 1 & -3 & 10\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}} = -\frac{5}{2}$$

Las soluciones son $x = \frac{25}{2}; y = 0; z = -\frac{5}{2}$

Problema 3:

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x-2 & si \quad x\leq 1\\ a+\ln(x) & si \quad x>1\end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que $f(x)$sea continua en todo su dominio.

b) Para $a\ =\ 1$, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

Solución:

La función es continua si $x\neq 1$ la función es continua, ya que es una función polinómica y la función logarítmica cuando $x>1$.

En $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2+x-2=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} a+\ln(x)=a$$

$$f(1)=0$$

La función para ser continua tiene que tener estos tres valores iguales, por tanto $a=0$

La función es continua en $\mathbb{R}$ si $a=1$

b) Si $a=1$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+x-2 & si \quad x\leq 1\\ 1+\ln(x) & si \quad x>1\end{cases}$$

Corte con los ejes

Si $x=0, y=-2$

Si $y=0; x^2+x-2=0\Longrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-2\end{cases}$

$$1+\ln x=0\Longrightarrow \ln(x)=-1\Longrightarrow x=\frac{1}{e}$$

Este punto queda fuera del dominio de definición de la función.

Los puntos de corte son (0,-2);(1,0);(-2,0)

Monotonía y extremos relativos

Para la función $g(x)=x^2+x-2$

$$g'(x)=2x+1$$

$$g''(x)=2$$

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$g''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

En el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ hay un máximo

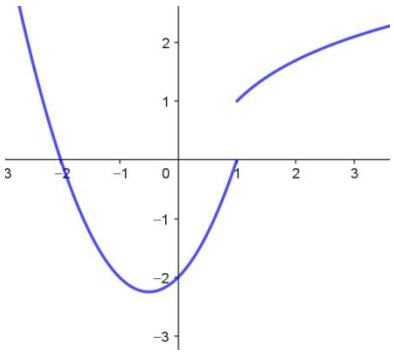
Para la función $h(x) = 1 + \ln(x)$

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

Esta función no se anula. Por tanto no hay máximos ni mínimos en la función $h(x)$.

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < -\frac{1}{2} \\ > 0 & si \quad -\frac{1}{2} < x < 1 \\ > 0 & si \quad x > 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < -\frac{1}{2} \\ Crece & si \quad -\frac{1}{2} < x < 1 \\ Crece & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La función es:



Problema 4:

La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función $T(x)$, donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5.5x - 1.5x^2 & si \quad 0 \leq x < 3 \\ \dfrac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.

b) Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

Solución:

La función $T(x)$ es continua para los valores del intervalo $(0, +\infty), \forall x \neq 3$

En $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^-} T(x) = \lim_{x \to 3^-} 22 + 5.5x - 1.5x^2 = 25$$

$$\lim_{x \to 3^+} T(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = 25$$

$$T(3) = 25$$

Como estos tres valores son iguales la función es continua

La función es continua

b)

Para el año 2024, la x vale 4

$$T(4) = \frac{52 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 23}{2 \cdot 4^2 + 2} = 25.5º$$

A largo plazo

$$\lim_{x \to +\infty} T(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{52 + \frac{3}{x} + \frac{23}{x^2}}{2 + \frac{2}{x^2}} = \frac{52}{2} = 26$$

Se prevé que la temperatura a lo largo de los años tienda a los 26º

Problema 5:

El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es σ = 10. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

La distribución de la población es $N(16,10)$, con $n = 625$ que se corresponde con una distribución muestral de medias $N\left(16, \frac{10}{\sqrt{625}}\right) = N(16,0.4)$

Llamemos $X = \{número\ de\ viajes\}$

El nivel de confianza es $N_c = 0.96$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.04$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.02$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.05$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C96\%} = (16 - 2.05 \cdot 0.4; 16 + 2.05 \cdot 0.4) = (15.18; 16.82)$$

El intervalo de confianza para el número de viajes es $(15.18; 16.82)$

b)

En este caso buscamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para el nivel de confianza del 90%.

El nivel de confianza es $N_c = 0.90$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.1$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.05$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

El error en la estimación es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso

$$E = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{500}} = 0.7357$$

El error máximo de estimación admisible es 0.7357

Problema 6:

En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.

a) Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio.

b) Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Solución:

Sean los sucesos

$$A = \{ser\ chica\}$$
$$O = \{ser\ chico\}$$

$$M = \{estar\ matriculado\ en\ la\ asignatura\}$$
$$\bar{M} = \{no\ estar\ matriculado\ en\ la\ asignatura\}$$

El enunciado proporciona los siguientes datos

$$p(A) = \frac{150}{225} = \frac{2}{3}; p(O) = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$$
$$p(M/A) = 0.44; p(M/O) = 0.5$$

de lo que deducimos

$$p(\bar{M}/A) = 0.56; p(\bar{M}/O) = 0.5$$

a) Hay que calcular $p(\bar{M})$

$$p(\bar{M}) = p(A) \cdot p(\bar{M}/A) + p(O) \cdot p(\bar{M}/O) = \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 0.56 = 0.3533$$

b) Hay que calcular $p(A/M)$.

$$p(A/M) = \frac{p(A) \cdot p(M/A)}{p(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.5}{1 - 0.3533} = 0.2577$$

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar no esté matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio es 0.3533.

La probabilidad de que un estudiante que está matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio sea chica es 0.2577

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A+X)=B-2X$

Solución:

$$C(A+X)=B-2X \Longrightarrow CA+CX+2X=B \Longrightarrow (C+2I)X=B-CA \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X=(C+2I)^{-1}(B-CA)$$

Cuestión 2:

Calcular el área encerrada bajo la curva $f(x)=x^3+3x^2-2$ y el eje OX en el intervalo $[-2,-1]$

Solución:

Hay que hallar los puntos de corte con los ejes.

$$x^3+3x^2-2=0 \Longrightarrow (x+1)(x^2+2x-2)=(x+1)\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)=0$$

Los puntos de corte son $x=1; x\cong -1.73; x\cong 0.73$

El área es

$$\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2-2)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}-2x\right]_{-2}^{-1}=\left(\frac{1}{4}-1+2\right)-(4-8+4)=\frac{5}{4}$$

Cuestión 3:

Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas.

Solución:

Si C es salir cara y X es salir cruz, notamos el suceso CXC como salir cara en la primera tirada, cruz en la segunda y cara en la tercera.

Las posibilidades son:

Secuencia fe tiradas	
CCC	Dos caras seguidas
CCX	Dos caras seguidas
CXC	
CXX	
XCC	Dos caras seguidas
XCX	
XXC	
XXX	

Por tanto $p(dos\ caras\ seguidas)=\frac{3}{8}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CONVOCATORIA DE JUNIO MEJORA

Problema 1:

Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota.

Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

Problema 2:

Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Problema 3:

La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x)=\begin{cases}-0.16x^2+1.6x+3.64 & si \quad 0\le x<7\\ \dfrac{3x+49}{x+3} & si \quad 7\le x\le 12\end{cases}$$

a) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

b) Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

BY NC SA

Problema 4:

Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

a) ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?

b) Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.

c) Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

Problema 5:

Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

Problema 6:

De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

a) Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?

b) Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Cuestión 1:

Sea M la matriz fila de dimensión 1×3: $M = (1\ 2\ m)$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^T = 9$, siendo M^T la matriz traspuesta de M.

Cuestión 2:

Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Cuestión 3:

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8, P(\bar{A}) = 0.3$, donde $\bar{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A/B)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO MEJORA

Problema 1:

Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota.

Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

Solución:

Sean $x = número\ de\ ganados; y = número\ de\ empatados; z = número\ de\ perdidos$

Las ecuaciones plantadas en el enunciado son:

$$\begin{cases} x + y + z = 38 \\ 3x + y = 86 \\ 3y + z = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 38 \\ 3x + y = 86 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 38 \\ 3 & 1 & 0 & 86 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

El rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-208}{-8} = 26$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-64}{-8} = 8$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{-8} = 4$$

El ganador del campeonato ganó 26 partidos, empató 8 y perdió 4

Problema 2:

Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

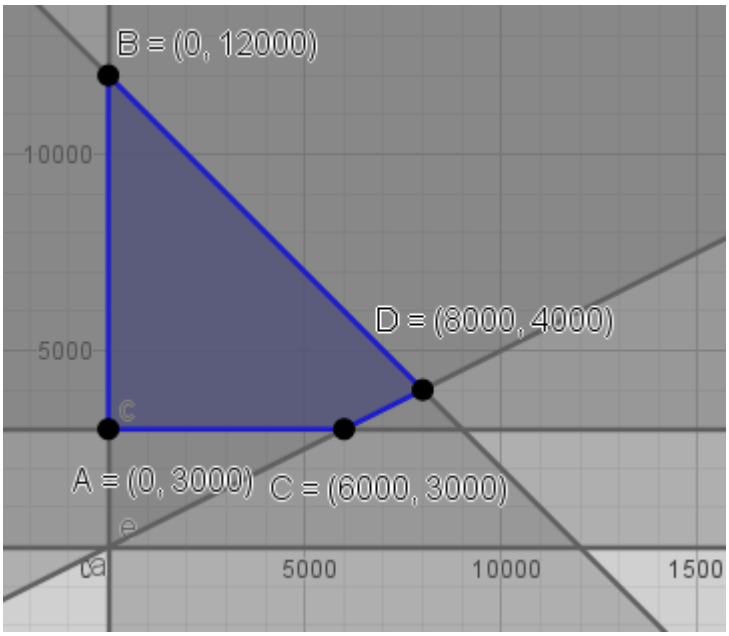
Solución:

Sea $x = dinero\ invertido\ en\ artículos\ del\ tipo\ A$ y $y = dinero\ invertido\ en\ artículos\ del\ tipo\ B$. Las relaciones del enunciado son

$$\begin{cases} x + y \leq 12000 \\ y \geq 3000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo a maximizar es

$$B(x, y) = 0.1x + 0.05y$$



Los puntos de corte son

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = 3000 \end{cases} \Longrightarrow C(6000{,}3000)$$

$$\begin{cases} x + y = 12000 \\ x = 2y \end{cases} \Longrightarrow D(8000{,}4000)$$

Los otros dos puntos que delimitan la región factible son $A(0{,}3000)$ y $B(0{,}12000)$

$$A: B(0{,}3000) = 0.1 \cdot 0 + 0.05 \cdot 3000 = 150$$

$$B: B(0{,}12000) = 0.1 \cdot 0 + 0.05 \cdot 12000 = 600$$

$$C: B(6000{,}3000) = 0.1 \cdot 6000 + 0.05 \cdot 3000 = 750$$

$$D: B(8000{,}4000) = 0.1 \cdot 8000 + 0.05 \cdot 4000 = 1000$$

El beneficio máximo se obtiene invirtiendo $8000€$ en artículos del tipo A y 4000€ del tipo B, y este beneficio es de 1000€

Problema 3:

La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x)=\begin{cases}-0.16x^2+1.6x+3.64 & si \quad 0\le x<7\\ \dfrac{3x+49}{x+3} & si \quad 7\le x\le 12\end{cases}$$

a) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

b) Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

Solución:

a) El dominio de definición es el intervalo $[0,12]$. Si $x\neq 7$, la función f es continua porque es una función polinómica (siempre continua) o una función racional, cuyo denominador no se anula en la zona de definición y por tanto es continua. Solo queda ver lo que ocurre con la continuidad en $x=7$

En $x=7$

$$\lim_{x\to 7^-} f(x)=\lim_{x\to 7^-}(-0.16x^2+1.6x+3.64)=7$$

$$\lim_{x\to 7^+} f(x)=\lim_{x\to 7^+}\frac{3x+49}{x+3}=7$$

$$f(7)=7$$

La función f es continua en el intervalo $[0,12]$

b) Derivamos la función

$$f'(x)=\begin{cases}-0.32x+1.6 & si \quad 0\le x<7\\ \dfrac{3(x+3)-(3x+49)}{(x+3)^2} & si \quad 7<x\le 12\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f'(x)=\begin{cases}-0.32x+1.6 & si \quad 0\le x<7\\ \dfrac{-40}{(x+3)^2} & si \quad 7<x\le 12\end{cases}$$

Hallamos los valores de x que anulan cada trozo. Para $g(x)=-0.16x^2+1.6x+3.64$

$$g'(x)-0.32x+1.6=0\Longrightarrow x=5$$

Como $g''(x)=-0.32$ y $g''(5)=-0.32<0$ hay un máximo local en $x=5$

La función $h(x)=\frac{-40}{(x+3)^2}$ no anula para ningún valor, luego no tiene máximos ni mínimos.

Los valores en los extremos de los intervalos son

$f(0)=3.64$ $\quad$ $f(5)=7.64$ $\quad$ $f(7)=7$ $\quad$ $f(12)=5.67$

El máximo valor se alcanza en el máximo local $(5,7.64)$ y el mínimo valor en $(0,3.64)$

Problema 4:

Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

a) ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?

b) Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.

c) Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

Solución:

a) Para hallar la cantidad de masa necesaria para lograr 50€ de beneficio

$$-x^2 + 25x - 100 = 50 \Longrightarrow x^2 - 25x + 150 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 15 \end{cases}$$

El beneficio de 50€ se alcanza con 10 kg o con 15 kg de masa

b)

Para que el beneficio sea máximo

$$f'(x) = -2x + 25$$

$$f''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2x + 25 = 0 \Longrightarrow x = 12.5$$

$$f''(12.5) = -2 < 0$$

En $x = 12.5$ la función tiene un máximo.

Con 12.5 kg de masa se alcanza el beneficio máximo.

c)

La representación gráfica de la función es una parábola convexa ∩ . Hay que ver donde se anula la función:

$$f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 25x - 100 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 20 \end{cases}$$

Para no tener pérdidas se han de vender entre 5 y 20 kg de masa.

Problema 5:

Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

Solución:

Tenemos una muestra con $n = 400$ que se corresponde con una distribución muestral de medias $N\left(75, \frac{9}{\sqrt{400}}\right) = N(, 0.45)$

Llamemos $X = \{número\ de\ pulsaciones\ por\ minuto\}$

El nivel de confianza es $N_c = 0.95$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.05$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.025$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C95\%} = (75 - 1.96 \cdot 0.45; 75 + 1.96 \cdot 0.45) = (74.118, 75.882)$$

El intervalo de confianza para el número de pulsaciones por minuto es $(74.118, 75.882)$

b)

Si el nivel de confianza es $N_c = 0.99$, hallamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para determinar el error máximo admitido y a partir de él el tamaño de la muestra.

El nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.01$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.005$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

El error en la estimación es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso

$$0.88 = 2.575 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 693.54$$

El tamaño mínimo es de 694 personas

Problema 6:

De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

a) Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?

b) Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Sean los sucesos

V={ser varón}

M={ser mujer}

HCS={estudiar Humanidades y Ciencias Sociales}

CT={estudiar Ciencias y Tecnología}

A={Estudiar artes}

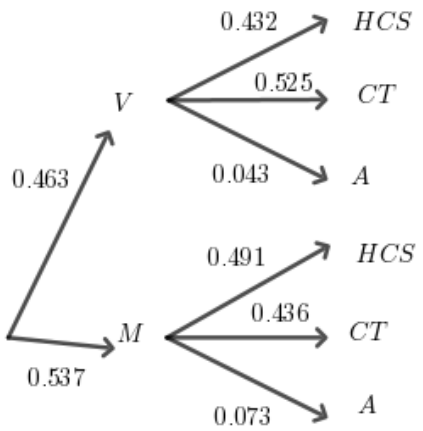
Las probabilidades del enunciado son:

$$p(M) = 0.537 \Longrightarrow p(V) = 0.463$$

$$p(HVS/V) = 0.432; p(CT/V) = 0.525; p(A/V) = 0.043$$

$$P(HCS/M) = 0.491; P(CT/M) = 0.436; P(A/M) = 0.073$$

que se pueden esquematizar en este diagrama en árbol:



a) Hay que calcular $p(CT)$

$$p(CT) = p(V) \cdot p(CT/V) + p(M) \cdot p(CT/M) = 0.463 \cdot 0.525 + 0.537 \cdot 0.436 = 0.477$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar estudie una modalidad de Ciencias y Tecnología es 0.477

b) Hay que calcular $p(A/M)$.

$$p(M/CT) = \frac{p(M) \cdot p(CT/M)}{p(CT)} = \frac{0.537 \cdot 0.436}{0.477} = 0.4908$$

La probabilidad de que una persona que cursa el bachillerato de Ciencia y Tecnología sea mujer es de 0.4908

Cuestión 1:

Sea M la matriz fila de dimensión 1×3: $M = (1\ 2\ m)$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^T = 9$, siendo M^T la matriz traspuesta de M.

Solución:

Como $M^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix}$ y

$$M \cdot M^T = (1 \quad 2 \quad m)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix} = 1 + 4 + m^2 = 9 \Longrightarrow m = \pm 2$$

El valor de m es +2 o -2

Cuestión 2:

Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

La representación gráfica de la función es una parábola cóncava $(\cup)$ cuya coordenada x del vértice es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

El vértice es el punto$(3,0)$, que es el único punto donde la parábola corta al eje X

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 6x + 9)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{8}{3} - 12 + 18\right] - \left[-\frac{1}{3} - 3 - 9\right] = 21$$

Cuestión 3:

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8, P(\bar{A}) = 0.3$, donde $\bar{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A/B)$

Solución:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) =$$

$$= 0.8 - 0.7 + 0.2 = 0.3$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{p(A/B) = \frac{2}{3}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problemas (a elegir 3)

Problema 1:

Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

a) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2, -8)$.

b) Si $a = 0$ y $b = -11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4,5]$

Problema 4:

Una empresa tiene un gran servidor web cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. (2 puntos)

b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? (1 punto)

Problema 5:

El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

a) La probabilidad de que el test resulte positivo.

b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

Problema 6:

Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.

a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?

b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ.

Cuestiones (a elegir una)

Cuestión 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.. Si B^t es la matriz traspuesta de B, determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t) \cdot X = C$.

Cuestión 2:

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3}{x(x^2-1)}$?. Justificar la respuesta.

Cuestión 3:

Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

Solución:

Sea

$x = \{número\ de\ alumnos\ matriculados\ en\ A1\}$

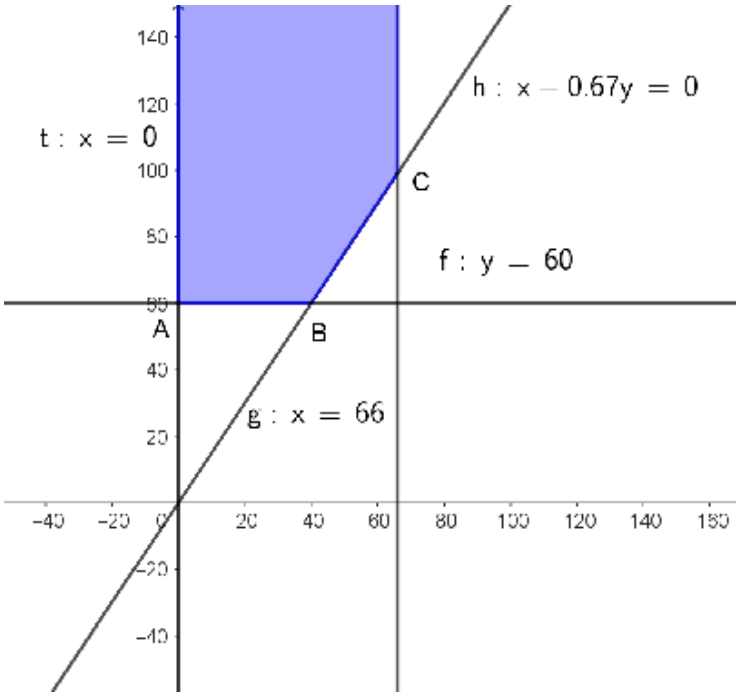
$y = \{número\ de\ alumnos\ matriculados\ en\ A2\}$

El sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} x \leq 66 \\ y \geq 60 \\ x \leq \frac{2}{3}y \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo es $B(x, y) = 145x + 150y$ que hay que maximizar

La representación gráfica proporciona una región con 3 vértices



$A\begin{cases} y = 60 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow A(0,60)$

$B\begin{cases} y = 60 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow B(40,60)$

$C\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x = 66 \end{cases} \Longrightarrow C(66,99)$

Los valores de la función objetivo correspondientes a cada uno de los vértices son

$A: B(0.60) = 145 \cdot 0 + 150 \cdot 60 = 9000€)$

$B: B(40.60) = 145 \cdot 40 + 150 \cdot 60 = 14800€)$

$C: B(66.99) = 145 \cdot 66 + 150 \cdot 99 = 24420€)$

El máximo beneficio se alcanza con 66 alumnos matriculados en A! y 99 alumnos matriculados en A2 y es de 24420€

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x & - & y & + & az & = & 3 \\ x & + & 5y & - & 2az & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-2a} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-2a} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{-2a} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{-5 + 6a + 2a - 15a + 4a - 1 = -6 - 3a}$$

Si a $\neq -2$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si a $= -2$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A^*} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -38 \neq 0$ el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

a	$rango\ A$	$rango A^*$	Sistema
$\neq -2$	3	3	Compatible determinado
-2	2	3	Incompatible

b)

Si $a = -1$ el sistema es compatible determinado

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{27}{3} = 9$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{20}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{38}{3}$$

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

a) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2, -8)$.

b) Si $a = 0$ y $b = -11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4,5]$

Solución:

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + b$$
$$f''(x) = 6ax + 6$$

Las condiciones son

$$\begin{cases} f(2) = -8 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 12 + 2b - 4 = -8 \\ 12a + 12 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 2b = -16 \\ 12a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -6 \end{cases}$$

La función sería $f(x) = -0.5x^3 + 3x^2 - 6x - 4$. Pero para $x = 2$ la segunda derivada es

$$f''(2) = -3 \cdot 2 + 6 = 0$$

El punto $(2, -8)$ no es un extremo sino un punto de inflexión. Por tanto:

No hay valores de a, b que hagan que (2, -8) sea un extremo

b)

La función es $f(x) = 3x^2 - 11x - 4$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 4)$$

La función corta al eje OX en los puntos $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 4$.

El área es

$$\int_4^5 (3x^2 - 11x - 4)dx = \left[x^3 - \frac{11x^2}{2} - 4x\right]_4^5 =$$
$$= 5^3 - \frac{11}{2} \cdot 25 - 20 - \left(4^3 - \frac{11 \cdot 16}{2} - 16\right) = \frac{15}{2}$$

El área encerrada entre la gráfica y el eje OX en el intervalo $[4, 5]$ vale $\frac{15}{2}$.

Problema 4:

Una empresa tiene un gran servidor web cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. (2 puntos)

b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? (1 punto)

Solución:

a) Hay que recordar que la función solo está definida para $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2) - 3x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & si \quad 0 < x < 1 \\ < 0 & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)\begin{cases} Crece & si \quad 0 < x < 1 \\ Decrece & si \quad x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ la primera derivada vale cero. Hay que sustituir en la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{-6x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x(3-3x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^3 - 18x}{(1+x^2)^3}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 18\frac{1}{3}}{\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^3} = \frac{-\frac{52}{9}}{\left(1+\frac{1}{9}\right)^3} < 0$$

En $x = 1$ hay un máximo

$$f(1) = 8.5 + \frac{3 \cdot 1}{1+1^2} = 10$$

La máxima velocidad es de 10 Gbits/s y se alcanza con $x = 1$ terabites

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(8.5 + \frac{3x}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(8.5 + \frac{3\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\right) = 8.5$$

El límite de velocidad es 8.5 Gbits/s

Problema 5:

El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

a) La probabilidad de que el test resulte positivo.

b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

Solución:

Sean los sucesos

$E = \{padecer\ la\ enfermedad\}$

$\bar{E} = \{no\ padecer\ la\ enfermedad\}$

$P = \{resultar\ positivo\ en\ el\ test\}$

$\bar{P} = \{resultar\ negativo\ en\ el\ test\}$

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades

$$p(E) = 0.1$$
$$p(P/E) = 0.97$$
$$p(P/\bar{E}) = 0.01$$

De donde deducimos

$$p(\bar{E} = 0.9$$
$$p(\bar{P}/E) = 0.03$$
$$p(\bar{P}/\bar{E}) = 0.99$$

a) Hay que hallar $p(P)$

$$p(P) = p(E) \cdot p(P/E) + p(\bar{E}) \cdot p(P/\bar{E}) = 0.1 \cdot 0{,}97 + 0.9 \cdot 0.01 = 0.106$$

La probabilidad de que el test resulte positivo es 0.106

b) Hay que calcular $p(E/\bar{P})$.

$$p(E/\bar{P}) = \frac{p(E) \cdot p(\bar{P}/E)}{p(\bar{P})} = \frac{0.1 \cdot 0.03}{1 - 0.106} = 0.00336$$

Si el test resulta negativo la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad es 0.00336

Problema 6:

Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.

a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?

b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ.

Solución:

La distribución de la población es $N(24; 2.25)$, con $n = 36$ que se corresponde con una distribución muestral de medias $N\left(24, \frac{2.25}{\sqrt{36}}\right) = N(24, 0.375)$

$$p(X > 25.125) = p\left(Z > \frac{25.125 - 24}{0.375}\right) = p(Z > 3) = 1 - p(Z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

La probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 es 0.0013

b)

La media muestral es de 25.65 y la desviación típica asociada a la distribución muestral es de $\sigma = \frac{2.25}{\sqrt{15}} = 0.581$

Llamemos $X = \{número\ de\ sacos\}$, nuestra distribución es $N(25.65; 0.581)$

El nivel de confianza es $N_c = 0.97$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.03$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.015$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.015 = 0.985 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C97\%} = (25.65 - 2.17 \cdot 0.581; 25.65 + 2.17 \cdot 0.581)$$
$$= (24.389; 26.911)$$

El intervalo de confianza para el número de sacos es $(24.389; 26.911)$

Cuestión 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.. Si B^t es la matriz traspuesta de B, determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t) \cdot X = C$.

Solución:

A tiene dimensión 2x3; B tiene dimensión 3x2 y C tiene dimensión 2x1. Si X tiene dimensión mxn, B^t tiene dimensión 2x3. La suma $A + B^t$ tiene dimensión 2x3. El producto de esta matriz por X tiene dimensión $(2x3)(mxn) = 2x1$ de donde m=3 y n=1

X tiene dimensión 3x1

Cuestión 2:

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3}{x(x^2-1)}$?. Justificar la respuesta.

Solución:

Es una función racional. Hay que quitar del dominio los valores que anulan el denominador.

$$x(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Cuestión 3:

Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Solución:

El primer número puede ser cualquiera y el segundo y tercer dígito debe ser el 5. por tanto

$$p(terminado\ en\ 55) = 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

La probabilidad de que el número termine en 55 es $\frac{1}{100}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Una empresa constructora obtiene una licencia del ayuntamiento para construir dos tipos de apartamentos: T2 (de 2 habitaciones) y T3 (de 3 habitaciones). Cada apartamento T2 se venderá por 150 000 euros y cada apartamento T3 por 250 000 euros. La licencia del ayuntamiento obliga a cumplir una serie de condiciones: el número de apartamentos T2 construidos no puede exceder al doble de apartamentos T3, el número de apartamentos T3 no puede sobrepasar al triple de apartamentos T2 y, como máximo, se pueden construir 60 apartamentos en total.

Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de apartamentos de cada tipo que debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio con su venta y cuál será ese beneficio.

Problema 2:

Una sociedad invierte el capital de sus inversores en tres tipos de productos financieros (acciones, bonos y depósitos). Trascurrido un año, las acciones han tenido un beneficio del 4 %, mientras que los bonos y los depósitos han tenido una pérdida del 5 % y del 2 % respectivamente, y como consecuencia, los 3 millones de euros invertidos se convierten en 2934300 euros. En bonos se ha invertido un 40 % más que entre los otros dos productos juntos. Calcular el capital invertido en cada uno de los tres productos.

Problema 3:

Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + x & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f\ (x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f\ (x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$.

Problema 4:

El valor de un gramo de oro, en euros, ha variado en el último mes según la función P(t) donde t representa el tiempo medido en días:

$$P(t) = 0.04t^3 - 1.98t^2 + 24t + 58;\ si\ 0 \leq t \leq 30$$

a) Estudiar cómo crece y decrece el precio del oro a lo largo del mes.

b) Averiguar los días en los cuales el precio del oro es máximo y mínimo y el valor del gramo de oro en esos días.

BY NC SA

Problema 5:

El 55 % de la población activa de cierto país está formada por hombres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 25 % de las mujeres están en paro.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro.

c) Calcular la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre.

Problema 6:

La longitud de unas barras de metal para la construcción de plataformas metálicas se distribuye normalmente con una desviación típica de 1.8 milímetros. Para determinar los límites entre los que se encuentra la longitud media de las barras se toma una muestra de 25 de estas barras, obteniéndose su media muestral que es de 195 milímetros.

a) ¿Entre qué valores se encuentra la verdadera longitud media, con un nivel de confianza del 90 %?

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de barras de metal para alcanzar, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo de 0.5 milímetros en la estimación de μ?

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $AX + B = C - 3X$.

Cuestión 2:

Hallar las asíntotas, si las hubiera, de la función:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3}$$

Cuestión 3:

La precipitación anual en una localidad de Castilla y León sigue una distribución normal de media 632 milímetros y desviación típica 48 milímetros. Hallar la probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Una empresa constructora obtiene una licencia del ayuntamiento para construir dos tipos de apartamentos: T2 (de 2 habitaciones) y T3 (de 3 habitaciones). Cada apartamento T2 se venderá por 150 000 euros y cada apartamento T3 por 250 000 euros. La licencia del ayuntamiento obliga a cumplir una serie de condiciones: el número de apartamentos T2 construidos no puede exceder al doble de apartamentos T3, el número de apartamentos T3 no puede sobrepasar al triple de apartamentos T2 y, como máximo, se pueden construir 60 apartamentos en total.

Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de apartamentos de cada tipo que debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio con su venta y cuál será ese beneficio.

Solución:

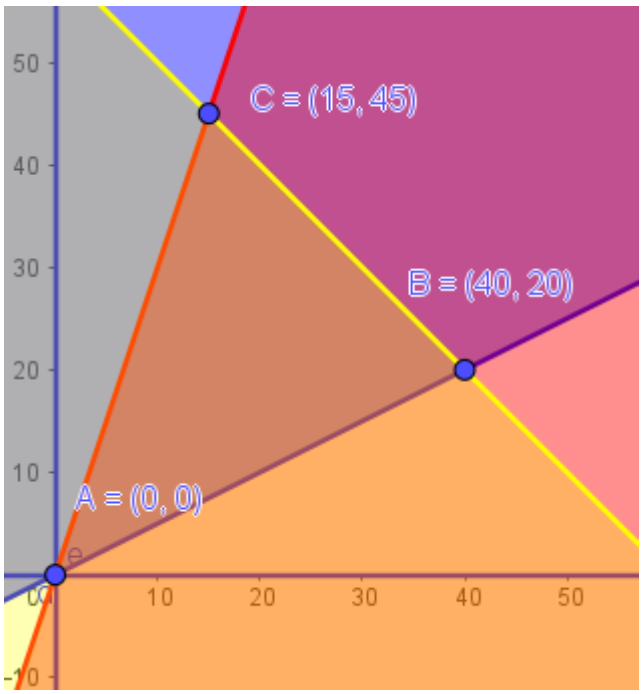
Sea $x = \{número\ de\ apartamentos\ T2\}; y = \{número\ de\ apartamentos\ T3\}$

Las condiciones del enunciado son las siguientes:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ y \leq 3x \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a maximizar es $B(x, y) = 150000x + 250000y$

La región factible es:



Los vértices resultan de las soluciones de los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x = 2y \end{cases} \Longrightarrow B(40,20)$$

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ y = 3x \end{cases} \Longrightarrow C(15,45)$$

Los valores de la función objetivo correspondientes a las coordenadas de los vértices son:

$$B(0,0) = 0$$

$$B(40,20) = 40 \cdot 150000 + 20 \cdot 250000 = 11000000€$$

$$B(15,45) = 15 \cdot 150000 + 45 \cdot 250000 = 13500000€$$

El beneficio máximo se obtiene construyendo 15 apartamentos T2 y 45 apartamentos T3, y este beneficio es de 13500000 € .

Problema 2:

Una sociedad invierte el capital de sus inversores en tres tipos de productos financieros (acciones, bonos y depósitos). Trascurrido un año, las acciones han tenido un beneficio del 4 %, mientras que los bonos y los depósitos han tenido una pérdida del 5 % y del 2 % respectivamente, y como consecuencia, los 3 millones de euros invertidos se convierten en 2934300 euros. En bonos se ha invertido un 40 % más que entre los otros dos productos juntos. Calcular el capital invertido en cada uno de los tres productos.

Solución:

Sean

$$x = \{capital\ invertido\ en\ acciones\}$$

$$y = \{capital\ invertido\ en\ bonos\}$$

$$z = \{capital\ invertido\ en\ depósitos\}$$

El sistema de ecuaciones planteado es:

$$\begin{cases} x + y + z = 3000000 \\ 1.04x + 0.95y + 0.98z = 2934300 \\ y = 1.4(x + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3000000 \\ 104x + 95y + 98z = 293430000 \\ 14x - 10y + 14z = 0 \end{cases}$$

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3000000 \\ 104 & 95 & 98 & 293430000 \\ 14 & -10 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3000000 & 1 & 1 \\ 293430000 & 95 & 98 \\ 0 & -10 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{-112320000}{-144} = 780000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3000000 & 1 \\ 104 & 293430000 & 98 \\ 14 & 0 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{-252000000}{-144} = 1750000$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3000000 \\ 104 & 95 & 293430000 \\ 14 & -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{-67680000}{-144} = 470000$$

El capital invertido en cada uno de los tres productos es 780 000 en acciones, 175 000 en bonos y 470 000 en depósitos

Problema 3:

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f\ (x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f\ (x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$.

Solución:

La función f es una función continua en los puntos $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ porque las funciones a la izquierda y derecha del 0 son funciones continuas en todos sus puntos.

En $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + x = 0$$

$$f(0) = 0$$

Como estos tres valores son iguales la función también es continua en $x = 0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función para $x \geq 0$ es $g(x) = x^2 + x$. Su representación gráfica es una parábola cóncava (∪). La coordenada x del vértice se calcula $x = \frac{-b}{2a}$. En este caso

$$x = \frac{-1}{2}$$

y por tanto el vértice está en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y corta a los ejes en $x = 0$ y $x = -1$. La función está siempre por encima del eje cuando $x \geq 0$.

$$\int_0^3 (x^2 + x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} = \frac{27}{2}$$

El área limitada por la función $f\ (x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$ es $\frac{27}{2}$.

Problema 4:

El valor de un gramo de oro, en euros, ha variado en el último mes según la función P(t) donde t representa el tiempo medido en días:

$$P(t) = 0.04t^3 - 1.98t^2 + 24t + 58;\ si\ 0 \leq t \leq 30$$

a) Estudiar cómo crece y decrece el precio del oro a lo largo del mes.

b) Averiguar los días en los cuales el precio del oro es máximo y mínimo y el valor del gramo de oro en esos días.

Solución:

a) Hay que estudiar el signo de la primera derivada

$$P'(t) = 0.12t^2 - 3.96t + 24$$

Hallamos los puntos donde se anula la primera derivada.

$$P'(t) = 0 \Longrightarrow 12t^2 - 396t + 2400 = 0 \Longrightarrow t = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 800}}{2} = \begin{cases} 25 \\ 8 \end{cases}$$

Como se anula en $x = 25$ y en $x = 8$

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & si \quad x < 8 \\ < 0 & si \quad 8 < x < 25 \\ > 0 & si \quad x > 25 \end{cases} \Longrightarrow f(x)\begin{cases} Crece & si \quad x < 8 \\ Decrece & si \quad 8 < x < 25 \\ Crece & si \quad x > 25 \end{cases}$$

La función crece en $x \in (-\infty, 8) \cup (25, +\infty)$ y decrece en $x \in (8, 25)$

b) Sustituimos los valores que anulan la primera derivada en la segunda derivada para saber los máximos y los mínimos.

$$P''(x) = 0.24t - 3.96$$

$$P''(8) = 0.24 \cdot 8 - 3.96 = -2.04 < 0$$

$$P(8) = 0.04 \cdot 8^3 - 1.98 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 58 = 143.76€/gr$$

$$P''(25) = 0.24 \cdot 25 - 3.96 = 2.04 > 0$$

$$P(25) = 0.04 \cdot 25^3 - 1.98 \cdot 25^2 + 24 \cdot 25 + 58 = 45.5€/gr$$

Como el valor de los extremos es

$$P(0) = 58$$

$$P(30) = 0.04 \cdot 30^3 - 1.98 \cdot 30^2 + 24 \cdot 30 + 58 = 76$$

El día 8 el valor de oro fue máximo y valió $143.76\ €/gr$ y el día 25 el valor del oro fue mínimo y valió $45.5\ €/gr$

Problema 5:

El 55 % de la población activa de cierto país está formada por hombres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 25 % de las mujeres están en paro.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro.

c) Calcular la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre.

Solución:

Sean los sucesos $V = \{ser\ varón\}; M = \{ser\ mujer\}; P = \{estar\ en\ paro\}$

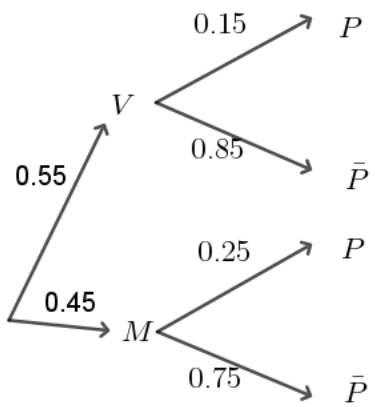
Las probabilidades del enunciado son

$$p(V) = 0.55 \Longrightarrow p(M) = 0.45$$

$$p(P/V) = 0.15 \Longrightarrow p(\bar{P}/V) = 0.85$$

$$p(P/M) = 0.25; p(\bar{P}/M) = 0.75$$

El árbol de probabilidades es:



$$p(M \cap P) = p(M) \cdot p\left(\frac{P}{M}\right) = 0.45 \cdot 0.25 = 0.1125$$

b) Es una probabilidad total

$$p(V) = p(M) \cdot p(P/M) + p(V) \cdot p(P/V) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.15 = 0.195$$

b) Hay que calcular $p(V/P)$. Por el teorema de Bayes:

$$p(V/P) = \frac{p(V) \cdot p(P/V)}{p(P)} = \frac{0.55 \cdot 0.15}{0.195} = 0.4231$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer es 0.1125.

La probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro es 0.195.

La probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre es 0.4231

Problema 6:

La longitud de unas barras de metal para la construcción de plataformas metálicas se distribuye normalmente con una desviación típica de 1.8 milímetros. Para determinar los límites entre los que se encuentra la longitud media de las barras se toma una muestra de 25 de estas barras, obteniéndose su media muestral que es de 195 milímetros.

a) ¿Entre qué valores se encuentra la verdadera longitud media, con un nivel de confianza del 90 %?

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de barras de metal para alcanzar, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo de 0.5 milímetros en la estimación de μ?

Solución:

a) La distribución muestral de medias es $N\left(195, \frac{1.8}{\sqrt{25}}\right) = N(195, 0.36)$.

Llamemos $X = \{longitud\ de\ las\ barras\ de\ metal\ en\ milímetros\}$

El nivel de confianza es $N_c = 0.9$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.1$ y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.05$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C90\%} = (195 - 1.645 \cdot 0.36; 195 + 1.645 \cdot 0.36)$$
$$= (194.41; 195.59)$$

El intervalo de confianza para la longitud de la barra en milímetros es $(194.41; 195.59)$.

b)

Si el nivel de confianza es $N_c = 0.99$, hallamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para determinar el error máximo admitido y a partir de él el tamaño de la muestra.

El nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.01$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.005$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

El error en la estimación es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso

$$0.5 = 2.575 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 85.93$$

El tamaño mínimo es de 86 personas

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $AX + B = C - 3X$.

Solución:

$$\mathrm{AX} + \mathrm{B} = \mathrm{C} - 3\mathrm{X} \Longrightarrow \mathrm{AX} + 3\mathrm{X} = \mathrm{C} - \mathrm{B} \Longrightarrow (\mathrm{A} + 3\mathrm{I})\mathrm{X} = \mathrm{C} - \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{X} = (\mathrm{A} + 3\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{C} - \mathrm{B})$$

$$\boldsymbol{X = (A + 3I)^{-1}(C - B)}$$

Cuestión 2:

Hallar las asíntotas, si las hubiera, de la función:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3}$$

Solución:

No tiene asíntotas verticales porque en esta función racional el denominador no se anula nunca.

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - 10\frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - 10\frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

Hay una asíntota horizontal en $y = 2$

No hay asíntotas oblicuas

Solo hay un asíntota horizontal en $y = 2$

Cuestión 3:

La precipitación anual en una localidad de Castilla y León sigue una distribución normal de media 632 milímetros y desviación típica 48 milímetros. Hallar la probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros.

Solución:

Es una distribución normal $N(632,48)$. Hay que calcular $p(X > 600)$

$$p(X \geq 600) = p\left(Z \geq \frac{600 - 632}{48}\right) = p(Z \geq -0.67) = p(Z \leq 0.67) = 0.7486$$

La probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros es 0.7486