Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Generalitat de Catalunya

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

cc BY NC SA

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

1. Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.

a) ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi?

[1 punto]

b) Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio?

[1,5 puntos]

Problema 2:

2. Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

a) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica.

[1,25 puntos]

b) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado.

[1,25 puntos]

Problema 3:

3. Una campesina contrata a un conductor para que lleve un tractor hasta un pueblo que se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Se supone que el conductor hará todo el trayecto a una velocidad constante y que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función

$$G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}.$$

a) Calcule el tiempo que el conductor tardará en realizar el viaje y el coste total del viaje si el tractor hace todo el recorrido a 40 km/h (la velocidad máxima permitida para este tipo de vehículo). Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = \frac{7.350}{x} + 6x$.

[1,25 puntos]

b) Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es este coste?

[1,25 puntos]

BY NC SA

Problema 4:

4. Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina *constante mágica*.

Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

a) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10\cdot\boldsymbol{A}+3\cdot\boldsymbol{B}+18\cdot\boldsymbol{C}$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas).

[1,25 puntos]

b) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí?

[1,25 puntos]

Problema 5:

5. Guiu y Roc son unos grandes aficionados al cine y ven muchas películas de la plataforma a la que están subscritos. Les gusta tanto que, si se elige una película de la plataforma al azar, la probabilidad de que Guiu la haya visto es de 0,5, la probabilidad de que Roc la haya visto es de 0,6 y la probabilidad de que ambos la hayan visto es de 0,25.

a) Si se elige una película al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos la haya visto. Calcule también la probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu.

[1,5 puntos]

b) Si se escoge una película al azar, calcule la probabilidad de que Guiu la haya visto si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto.

[1 punto]

Problema 6:

6. Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.

a) Dé la estimación puntual de la proporción y del porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo.

[1 punto]

b) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.

NOTA: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0,1)$, $P(-1{,}96\le Z\le 1{,}96)=0{,}95$. Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción con un nivel de confianza $\gamma\in(0,1)$ viene dado por $\left[\hat{p}-z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$.

[1,5 puntos]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.

a) ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi?
[1 punto]

b) Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio?
[1,5 puntos]

Solución:

1.

a)

La tarifa de la companyia A segueix la funció $f(x) = 0{,}4x + 20$. Mentre que la tarifa de la companyia B és $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$.

Per trobar el preu de les tarifes si fem un recorregut de 10 o de 80 km, només hem de substituir:

$$f(10) = 24, \qquad g(10) = 12.$$

Per tant, si fem un recorregut de 10 km la tarifa de la companyia A ens surt 12 euros més cara que la de la companyia B. D'altra banda,

$$f(80) = 52, \qquad g(80) = 82.$$

En aquest cas la tarifa de la companyia A és 30 euros més econòmica que la tarifa de la companyia B.

Si substituïm $x = 0$ a la tarifa de la companyia B, observem que $g(0) = 10$, per tant, efectivament hi ha un cost fix de 10 euros només pel sol fet de pujar al taxi.

b)

Per trobar el valor per al qual les dues tarifes coincideixen, hem de resoldre l'equació:

$$0{,}4x + 20 = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$$

$x^2 - 30x - 1000 = 0$ que té per solucions $x = 50$ i $x = -20$.

Descartem la segona solució perquè no té sentit en el context del problema i obtenim que per a una distància de $x = 50$ km les dues tarifes coincideixen.

Per a distàncies entre 0 i 50 km observem que la segona tarifa és inferior a la primera. La diferència de preu entre totes dues tarifes si $x \in [0,50)$ vindrà donada per la funció:

$$D(x) = 0{,}4x + 20 - (0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 10.$$

Textos Marea Verde

Per trobar el màxim, calculem la derivada

$$D'(x) = -0{,}02x + 0{,}3,$$

la igualem a zero i obtenim $x = 15$.

Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a $x = 15$, i per tant, la diferència de preu és creixent, mentre que és negativa per a valors superiors a $x = 15$ i, per tant, la funció $D(x)$ és decreixent.

Quan $x = 15$ la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és de $D(15) = 12{,}25$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar les tarifes de les dues companyies si fem un recorregut de 10 km: 0,25 punts. Trobar les tarifes de les dues companyies per al recorregut de 80 km: 0,25 punts. Calcular la diferència en els dos casos: 0,25 punts. Calcular el cost fix de la tarifa de la companyia B: 0,25 punts.

b) Calcular el valor per al qual les dues tarifes coincideixen: 0,5 punts. Trobar la funció que ens dona la diferència entre les dues tarifes: 0,25 punts. Trobar el valor per al qual s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el valor de la diferència màxima de tarifes per a distàncies inferiors a 50 km: 0,25 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 2:

2. Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

a) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica.
[1,25 puntos]

b) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado.
[1,25 puntos]

Solución:

2.

a)

Anomenarem x, y i z la producció de sofàs del mes passat de la primera, segona i tercera fàbrica, respectivament. Tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=1260 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss en l'ordre x, y, z, s'obté el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \end{array}\right)$$

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat, ja que només tenim dues equacions i en canvi tenim tres incògnites, i, per tant, no es pot determinar quants sofàs van produir cadascuna de les tres fàbriques. Tanmateix, observem que podem trobar la producció de la segona fàbrica a partir de la segona equació, i obtenim $y = 630$ sofàs.

b)

Ara tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=1260 \\ x-y+z=0 \\ 0{,}1\,x+0{,}3\,y+0{,}2\,z=284 \end{cases}$$

Fem un canvi entre la primera i la segona fila i multipliquem l'última fila per 10. S'obté:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=1260 \\ x+3y+2z=2840 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss, prenent les variables en l'ordre x, y, z, obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & 3 & 2 & 2840 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \\ 0 & 4 & 1 & 2840 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 630 \\ 0 & 0 & 1 & 320 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat. Resolent-lo s'obté la solució $z = 320, y = 630$ i $x = 310$. Així doncs, la primera fàbrica va produir 310 sofàs el mes passat, la segona 630 i la tercera 320.

Criteris de correcció:

a) Plantejament del sistema: 0,25 punts cada equació. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la segona fàbrica: 0,25 punts.

b) Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la primera i la tercera fàbrica: 0,5 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3:

3. Una campesina contrata a un conductor para que lleve un tractor hasta un pueblo que se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Se supone que el conductor hará todo el trayecto a una velocidad constante y que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función

$$G(x)=5+\frac{x^2}{98}.$$

a) Calcule el tiempo que el conductor tardará en realizar el viaje y el coste total del viaje si el tractor hace todo el recorrido a 40 km/h (la velocidad máxima permitida para este tipo de vehículo). Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x)=\frac{7.350}{x}+6x$.

[1,25 puntos]

b) Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es este coste?

[1,25 puntos]

Solución:

3.

a)

Si el tractor fa el recorregut a 40 km/h obtenim que el temps que trigarà a fer tot el trajecte és de $\frac{300}{40}=7{,}5$ hores. Per tant, el cost total del trajecte sumant les despeses de gasoil i el salari del conductor serà

$$\left(5+\frac{40^2}{98}\right)\cdot 7{,}5\cdot 1{,}96+7{,}5\cdot 14{,}70=423{,}75\ €$$

Anem ara a buscar la funció que ens dona el cost en funció de la velocitat, en quilòmetres per hora, x:

$$C(x)=\left(5+\frac{x^2}{98}\right)\cdot\frac{300}{x}\cdot 1{,}96+\frac{300}{x}\cdot 14{,}70=\frac{7350}{x}+6x$$

b)

Per trobar el cost més econòmic cal buscar el mínim de la funció $C(x)$. Comencem calculant la derivada:

$$C'(x)=-\frac{7350}{x^2}+6$$

Si la igualem a zero obtenim que $x=\pm\sqrt{\frac{7350}{6}}=\pm 35$ km/h

Descartem la solució negativa perquè no té sentit en el context del problema i observem que la derivada $C'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x=35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és decreixent, mentre que és positiva per a valors superiors a $x=35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és creixent. Així, doncs, en $x=35$ hi trobem un mínim local.

El cost a aquesta velocitat serà de

$$C(35)=\frac{7350}{35}+6\cdot 35=420\ €$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul del temps necessari a 40 km/h: 0,25 punts. Càlcul del cost a 40 km/h: 0,5 punts. Obtenció de la funció que dona el cost en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el mínim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Càlcul del cost a aquesta velocitat: 0,25 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 4:

4. Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina *constante mágica*.

Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\text{ y }C=\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}.$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

a) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10\cdot A+3\cdot B+18\cdot C$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas).

[1,25 puntos]

b) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí?

[1,25 puntos]

Solución:

4.

a)

Comencem calculant el producte que ens demanen

$$10\cdot A+3\cdot B+18\cdot C=10\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}+18\cdot\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&41&3\\11&18&25\\33&-5&26\end{pmatrix}.$$

Comprovem que efectivament la matriu és màgica:

$10+41+3=54, 11+18+25=54, 33-5+26=54, 10+11+33=54, 41+18-5=54$ i $3+25+26=54$.

La constant màgica del Martí és 54.

b)

Ara sabem que el pare del Martí va néixer el 8 de setembre però no sabem quina edat té, que anomenarem x. Si calculem la seva matriu màgica obtenim

$$8\cdot A+9\cdot B+x\cdot C=8\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-17+3x&9\\1+x&x&-1+x\\-9+2x&17-x&-8+2x\end{pmatrix}.$$

Sabem que la suma de qualsevol fila o columna ha de sumar 153. A partir, per exemple, de la primera fila, obtenim que $8-17+3x+9=153$ i, per tant, obtenim que $x=51$.

Així doncs, el pare del Martí té 51 anys.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de $10\cdot A+3\cdot B+18\cdot C$: 0,5 punts. Comprovació que la matriu obtinguda és màgica: 0,5 punts. Obtenció de la constant màgica del Martí: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul de la matriu màgica en funció de x: 0,5 punts. Obtenció de l'edat del pare del Martí: 0,25 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 5:

5. Guiu y Roc son unos grandes aficionados al cine y ven muchas películas de la plataforma a la que están subscritos. Les gusta tanto que, si se elige una película de la plataforma al azar, la probabilidad de que Guiu la haya visto es de 0,5, la probabilidad de que Roc la haya visto es de 0,6 y la probabilidad de que ambos la hayan visto es de 0,25.

a) Si se elige una película al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos la haya visto. Calcule también la probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu.
[1,5 puntos]

b) Si se escoge una película al azar, calcule la probabilidad de que Guiu la haya visto si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto.
[1 punto]

Solución:

5.

Considerem els esdeveniments:

A_1 = el Guiu ha vist la pel·lícula

A_2 = el Roc ha vist la pel·lícula

Sabem que $P(A_1) = 0{,}5$, $P(A_2) = 0{,}6$ i $P(A_1 \cap A_2) = 0{,}25$.

a)

La probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula correspon a la unió dels dos esdeveniments:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

I, per tant,

$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}85$$

Així doncs, la probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula és de 0,85.

Ara ens demanen

$$P\left(A_2 \cap A_1^c\right) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$$

La probabilitat que el Roc hagi vist la pel·lícula però el Guiu no és de 0,35.

b)

Finalment ens demanen la probabilitat condicionada que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista:

$$P(A_1|A_1 \cup A_2) = \frac{P\left(A_1 \cap (A_1 \cup A_2)\right)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{0{,}5}{0{,}85} = 0{,}5882$$

La probabilitat que ens demanen és de 0,5882.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i de les dades de l'enunciat: 0,25 punts. Fórmula de la probabilitat de la unió: 0,25 punts. Resultat de la primera probabilitat demanada: 0,25 punts. Plantejament de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts. Obtenció d'aquesta probabilitat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resultat: 0,5 punts.

Textos Marea Verde

Problema 6:

6. Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.

a) Dé la estimación puntual de la proporción y del porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo.

[1 punto]

b) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.

NOTA: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0,1)$, $P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96) = 0{,}95$. Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ viene dado por $\left[\hat{p} - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$.

[1,5 puntos]

Solución:

6.

a)

La mida de la mostra és $n = 350$. L'estimació puntual de la proporció de persones que està a favor de la proposta és

$$\hat{p} = \frac{218}{350} = 0{,}6229.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones a favor de la proposta és de 0,6229, és a dir, un 62,29%.

b)

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\hat{p} - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \le Z \le z_\gamma) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\hat{p} - z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}5721$$

i

$$\hat{p} + z_\gamma\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 + 1.96\sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}6737$$

L'interval de confiança demanat és [57,21% , 67,37%], és a dir, el percentatge de persones que està a favor de la proposta està entre el 57,21% i el 67,37% amb una confiança del 95%.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la proporció mostral: 0,75 punts. Expressió com a percentatge: 0,25 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 1 punt. Resultat final: 0,5 punts.

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Els beneficis o pèrdues diaris d'una nova empresa durant el primer any de funcionament són donats per la funció $B(x) = -x^2 + 260x - 12.000$, en què x representa el dia des de l'inici de l'activitat de l'empresa.

a) Quin benefici o pèrdua va tenir l'empresa el dia 45? Quins dies va obtenir un benefici de 4.000 €?
[1 punt]

b) Calculeu quin dia l'empresa va obtenir el benefici màxim i quin va ser aquest valor. Calculeu també entre quins dies l'empresa no va tenir pèrdues.
[1,5 punts]

Problema 2:

2. Una inversora vol invertir el seu capital en un banc especialitzat en criptomonedes que ofereix diferents dipòsits amb els interessos següents:

— BTC (*bitcoin*): 15 % anual.
— ETH (*ether*): 10 % anual.
— LNK (*link*): 13 % anual.

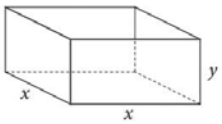
La inversora vol invertir la mateixa quantitat en *bitcoins* que entre les altres dues criptomonedes juntes i vol obtenir un rendiment anual global d'un 13 %.

a) Quina ha de ser la relació entre la inversió en *ethers* i en *links*?
[1,25 punts]

b) Si sabem que la inversió total serà de 150.000 €, quina quantitat invertirà en cada criptomoneda?
[1,25 punts]

Problema 3:

3. L'Ona vol construir una capsa de cartró de base quadrada i oberta (sense tapa) per a posar-hi retoladors i colors, com la de la figura següent:



La capsa ha de tenir un volum de 4 litres.

a) Expresseu l'alçària de la capsa (y) en funció de la longitud del costat de la base (x).
[0,5 punts]

b) L'Ona vol fer servir el mínim de cartró possible per a construir la capsa. Quants centímetres ha de mesurar el costat de la base (x) perquè la superfície de la capsa sigui mínima? Quants centímetres ha de mesurar l'alçària (y)? Quina quantitat de cartró farà servir per a construir la capsa?
[2 punts]

BY NC SA

Problema 4:

4. Un cinema disposa de dues sales en les quals es projecten dues pellícules diferents. La taula següent mostra el nombre de persones que han assistit a la projecció de cada pellícula la darrera setmana, agrupades per franges d'edat:

Franja d'edat	*Pellícula de la sala 1*	*Pellícula de la sala 2*
Menys de 18 anys	122	620
18-65 anys	930	433
Més de 65 anys	384	281

La informació de la taula anterior es registra amb la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

a) Considerant la matriu $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu el producte $A \cdot B$. Expliqueu el significat de la matriu obtinguda.

Sabem que una entrada per a persones de menys de 18 anys costa 5 €, una entrada per a adults d'entre 18 i 65 anys costa 8,5 € i una entrada per a adults de més de 65 anys costa 6,5 €. Trobeu una matriu $C = (a \quad b \quad c)$ de manera que el producte $C \cdot A \cdot B$ doni els ingressos setmanals totals obtinguts per la venda d'entrades, i calculeu els ingressos corresponents a aquesta setmana.

[1,5 punts]

b) Al cap d'uns mesos, el registre setmanal és donat per la matriu

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix},$$

però hi ha un valor que s'ha esborrat, el del nombre de persones entre 18 i 65 anys que han assistit a la segona pellícula, i l'hem denotat per x. Calculeu el valor de x sabent que els ingressos totals d'aquella setmana van ser de 12.076 €.

[1 punt]

Problema 5:

5. Un centre esportiu té dues zones: la zona de la piscina ($A1$) i la zona del gimnàs ($A2$). Els abonats han de triar a quina de les dues zones (només una) volen accedir i també si volen anar al centre esportiu en horari de matí (opció $B1$) o en horari de tarda (opció $B2$).

Si seleccionem un abonat del centre a l'atzar, sabem que la probabilitat que utilitzi la zona de la piscina és de 0,4 i la probabilitat que utilitzi el gimnàs és de 0,6. D'altra banda, la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza la zona de la piscina, és de 0,55, mentre que la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza el gimnàs, és de 0,45.

a) Quina és la probabilitat que l'individu estigui abonat en horari de matí?

[1,25 punts]

b) Si sabem que està abonat en horari de matí, quina és la probabilitat que utilitzi la zona de piscina?

[1,25 punts]

Problema 6:

6. Una empresa d'autobusos afirma que fa el trajecte entre l'aeroport i el centre de la ciutat en 30 minuts. Hem obtingut una mostra del temps, en minuts, que ha trigat en 10 trajectes escollits a l'atzar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

a) Construïu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de trajecte, suposant que aquest temps segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2 minuts.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$. Recordeu també que l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ quan la variància σ^2 és coneguda és donat per $\left[\overline{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

[1,5 punts]

b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior, podem afirmar que la informació que proporciona l'empresa d'autobusos és errònia? Justifiqueu la resposta.

[1 punt]

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1. Els beneficis o pèrdues diaris d'una nova empresa durant el primer any de funcionament són donats per la funció $B(x) = -x^2 + 260x - 12.000$, en què x representa el dia des de l'inici de l'activitat de l'empresa.

a) Quin benefici o pèrdua va tenir l'empresa el dia 45? Quins dies va obtenir un benefici de 4.000 €?
[1 punt]

b) Calculeu quin dia l'empresa va obtenir el benefici màxim i quin va ser aquest valor. Calculeu també entre quins dies l'empresa no va tenir pèrdues.
[1,5 punts]

Solución:

1.

a) Primer, ens demanen el valor de la funció el dia 45:

$B(45) = -2.325$, per tant aquest dia l'empresa té unes pèrdues de 2.325 euros.

Hem de saber ara quins dies l'empresa ha tingut uns beneficis de 4000 euros. Per tant, hem de trobar els valors de x per als quals

$$B(x) = 4000 \rightarrow -x^2 + 260x - 12000 = 4000 \rightarrow x^2 - 260x + 16000 = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{260 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

que té dues solucions, $x = 100$ i $x = 160$. Per tant, els dies 100 i 160 ha tingut un benefici de 4000 €.

b) Per trobar el màxim, comencem calculant la derivada de la funció que ens dona els beneficis

$$B'(x) = -2x + 260$$

Igualant-la a zero, trobem un extrem relatiu en $x = 130$. Observem que en aquest punt hi ha un màxim perquè la funció $B'(x)$ és positiva per a valors inferiors a $x = 130$ i, per tant, la funció $B(x)$ és creixent, i $B'(x)$ és negativa per a valors superiors a $x = 130$ i, per tant, $B(x)$ és decreixent.

Els beneficis aquest dia seran de $B(130) = 4900$ euros.

Per tant, el dia 130 l'empresa té el benefici màxim i aquest benefici és de 4900 euros.

Sabem que l'empresa no té pèrdues si $B(x) \geq 0$. Si resolem l'equació B(x) = 0 obtenim

$$-x^2 + 260x - 12000 = 0 \rightarrow x = \frac{260 \pm \sqrt{19600}}{2}$$

que té per solucions $x = 60$ i $x = 200$. Observem, substituint en un punt intermedi com, per exemple, el valor en $x = 130$ que ja hem calculat abans, que la paràbola és positiva entre aquests dos valors. Per tant, l'empresa no ha tingut pèrdues entre els dies 60 i 200.

Criteris de correcció:

a) Trobar les pèrdues del dia 45: 0,5 punts. Trobar els dos dies que el benefici ha estat de 4.000 euros: 0,5 punts.

b) Calcular la derivada: 0,25 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts. Calcular l'interval de dies entre els quals l'empresa no ha tingut pèrdues: 0,5 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 2:

2. Una inversora vol invertir el seu capital en un banc especialitzat en criptomonedes que ofereix diferents dipòsits amb els interessos següents:
— BTC (*bitcoin*): 15 % anual.
— ETH (*ether*): 10 % anual.
— LNK (*link*): 13 % anual.
La inversora vol invertir la mateixa quantitat en *bitcoins* que entre les altres dues criptomonedes juntes i vol obtenir un rendiment anual global d'un 13 %.

a) Quina ha de ser la relació entre la inversió en *ethers* i en *links*?
[1,25 punts]

b) Si sabem que la inversió total serà de 150.000 €, quina quantitat invertirà en cada criptomoneda?
[1,25 punts]

Solución:

2.

a) Anomenem x, y i z la inversió en BTC, ETH i LNK, respectivament.
Obtenim les dues equacions següents

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \end{cases}$$

Si substituïm la primera igualtat en la segona equació obtenim

$$1{,}15(y + z) + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(y + z + y + z)$$
$$2{,}25y + 2{,}28z = 2{,}26y + 2{,}26z; \quad -0{,}01y = -0{,}02z; \quad y = 2z$$

Per tant, la inversió en ETH ha de ser el doble que en LNK.

b) Si hi afegim la nova condició, obtenim el sistema

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \\ x + y + z = 150000 \end{cases}$$

Si substituïm la primera relació en la tercera equació, obtenim

$$y + z + y + z = 150000; \quad 2y + 2z = 150000; \quad y + z = 75000$$

Si fem servir la relació obtinguda a l'apartat *a)*, obtenim

$$2z + z = 75000; \quad 3z = 75000; \quad z = \frac{75000}{3} = 25000;$$
$$y = 2z = 2 \cdot 25000 = 50000; \quad x = y + z = 50000 + 25000 = 75000$$

Per tant, la inversió és de 75000 € en BTC, 50000 € en ETH i 25000 € en LNK.

Criteris de correcció:

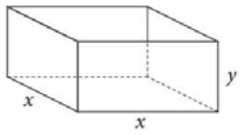
a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta. Trobar la relació entre ETH i LNK: 0,5 punts.

b) Escriure la nova equació: 0,25 punts. Resoldre el sistema: 0,5 punts. Escriure la inversió realitzada en cada criptomoneda: 0,5 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3:

3. L'Ona vol construir una capsa de cartró de base quadrada i oberta (sense tapa) per a posar-hi retoladors i colors, com la de la figura següent:



La capsa ha de tenir un volum de 4 litres.

a) Expresseu l'alçària de la capsa (y) en funció de la longitud del costat de la base (x).
[0,5 punts]

b) L'Ona vol fer servir el mínim de cartró possible per a construir la capsa. Quants centímetres ha de mesurar el costat de la base (x) perquè la superfície de la capsa sigui mínima? Quants centímetres ha de mesurar l'alçària (y)? Quina quantitat de cartró farà servir per a construir la capsa?
[2 punts]

Solución:

3.

a) Si el volum ha de ser de 4 litres $= 4000\ cm^3$ tenim que $x^2 \cdot y = 4000$ i, per tant, $y = \frac{4000}{x^2}$.

b) La superfície de la caixa en cm^2 ve donada per l'expressió

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot y = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$$

Si calculem la derivada, obtenim

$$S'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$$

Trobem els extrems relatius igualant a zero

$$2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 = 8000 \rightarrow x = 20$$

Comprovem que es tracta d'un mínim perquè la derivada $S'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 20$, i, per tant, $S(x)$ és decreixent, mentre que $S'(x)$ és positiva per a valors superiors a $x = 20$ i, per tant, $S(x)$ és creixent.

Hem obtingut, per tant, que el costat de la base x ha de mesurar 20 cm.
L'alçària de la caixa serà de

$$y = \frac{4000}{x^2} = \frac{4000}{20^2} = 10\ cm.$$

Finalment, la quantitat de cartró és la superfície de la caixa amb aquests valors $S = 20^2 + \frac{16000}{20} = 400 + 800 = 1200\ cm^2$.

Criteris de correcció:

a) Trobar l'expressió algebraica: 0,5 punts.

b) Trobar la funció que cal optimitzar: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el mínim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Trobar l'alçària: 0,25 punts. Trobar la quantitat de cartró: 0,5 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 4:

4. Un cinema disposa de dues sales en les quals es projecten dues pellícules diferents. La taula següent mostra el nombre de persones que han assistit a la projecció de cada pellícula la darrera setmana, agrupades per franges d'edat:

Franja d'edat	*Pellícula de la sala 1*	*Pellícula de la sala 2*
Menys de 18 anys	122	620
18-65 anys	930	433
Més de 65 anys	384	281

La informació de la taula anterior es registra amb la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

a) Considerant la matriu $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu el producte $A \cdot B$. Expliqueu el significat de la matriu obtinguda.

Sabem que una entrada per a persones de menys de 18 anys costa 5 €, una entrada per a adults d'entre 18 i 65 anys costa 8,5 € i una entrada per a adults de més de 65 anys costa 6,5 €. Trobeu una matriu $C = (a \quad b \quad c)$ de manera que el producte $C \cdot A \cdot B$ doni els ingressos setmanals totals obtinguts per la venda d'entrades, i calculeu els ingressos corresponents a aquesta setmana.

[1,5 punts]

b) Al cap d'uns mesos, el registre setmanal és donat per la matriu

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix},$$

però hi ha un valor que s'ha esborrat, el del nombre de persones entre 18 i 65 anys que han assistit a la segona pellícula, i l'hem denotat per x. Calculeu el valor de x sabent que els ingressos totals d'aquella setmana van ser de 12.076 €.

[1 punt]

Solución:

4.

a) Fem el producte

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix}.$$

Clarament, la primera fila correspon al nombre total de menors de 18 anys que han anat al cinema aquella setmana, la segona al total de persones entre 18 i 65 anys i la tercera al total de majors de 65 anys.

Per la propietat associativa del producte de matrius, només cal trobar una matriu $C = (a \quad b \quad c)$ que multiplicada pel producte $A \cdot B$, que acabem de calcular, ens doni els ingressos totals per la venda d'entrades. Observem que

$$C \cdot A \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = (a \quad b \quad c) \cdot \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix} = 742 \cdot a + 1363 \cdot b + 665 \cdot c$$

I, per tant, per obtenir els ingressos totals és suficient definir $C = (a \quad b \quad c) = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5)$. Els ingressos totals de la setmana són 19618 euros.

b) Comencem calculant el producte C·D·B

$$C \cdot D \cdot B = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5) \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5) \begin{pmatrix} 107 \\ 338 + x \\ 664 \end{pmatrix}$$
$$= 7724 + 8{,}5x$$

Sabem, d'altra banda, que el total d'ingressos ha estat de 12076 euros. Per tant, $7724 + 8{,}5x = 12076 \rightarrow 8{,}5\,x = 4352 \rightarrow x = 512$.

Així doncs, el valor que ens faltava, el nombre d'adults que van assistir a la segona pel·lícula aquella setmana, fou de 512 persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del producte $A \cdot B$: 0,5 punts. Interpretació del producte obtingut: 0,25 punts. Obtenció de la matriu C: 0,5 punts. Càlcul dels ingressos: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul del valor de x: 0,5 punts.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 5:

5. Un centre esportiu té dues zones: la zona de la piscina ($A1$) i la zona del gimnàs ($A2$). Els abonats han de triar a quina de les dues zones (només una) volen accedir i també si volen anar al centre esportiu en horari de matí (opció $B1$) o en horari de tarda (opció $B2$).

Si seleccionem un abonat del centre a l'atzar, sabem que la probabilitat que utilitzi la zona de la piscina és de 0,4 i la probabilitat que utilitzi el gimnàs és de 0,6. D'altra banda, la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza la zona de la piscina, és de 0,55, mentre que la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza el gimnàs, és de 0,45.

a) Quina és la probabilitat que l'individu estigui abonat en horari de matí?
[1,25 punts]

b) Si sabem que està abonat en horari de matí, quina és la probabilitat que utilitzi la zona de piscina?
[1,25 punts]

Solución:

5.

Considerem els esdeveniments:

A_1 = l'abonat utilitza la zona de piscina

A_2 = l'abonat utilitza el gimnàs

B_1 = l'individu està abonat en horari de matí

B_2 = l'individu està abonat en horari de tarda

Sabem que $P(A_1) = 0{,}4$ i que $P(A_2) = 0{,}6$. Sabem també que $P(B_1|A_1) = 0{,}55$ i que $P(B_1|A_2) = 0{,}45$.

a) Aplicant la fórmula de les probabilitats totals tenim que

$$P(B_1) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2).$$

Per tant,

$$P(B_1) = 0{,}55 \cdot 0{,}4 + 0{,}45 \cdot 0{,}6 = 0{,}49.$$

La probabilitat que estigui abonat en horari de matí és de 0,49.

b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada i la fórmula de Bayes,

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}4}{0{,}49} = 0{,}4490.$$

La probabilitat que utilitzi la zona de la piscina si sabem que està abonat en horari de matí és de 0,4490.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i interpretació correcta de les probabilitats de l'enunciat: 0,5 punts. Fórmula de les probabilitats totals: 0,5 punts. Resultat de l'apartat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Ús correcte de la fórmula de Bayes: 0,5 punts. Resultat: 0,25 punts.

Textos Marea Verde

Problema 6:

6. Una empresa d'autobusos afirma que fa el trajecte entre l'aeroport i el centre de la ciutat en 30 minuts. Hem obtingut una mostra del temps, en minuts, que ha trigat en 10 trajectes escollits a l'atzar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

a) Construïu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de trajecte, suposant que aquest temps segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2 minuts.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96) = 0{,}95$. Recordeu també que l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ quan la variància σ^2 és coneguda és donat per $\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

[1,5 punts]

b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior, podem afirmar que la informació que proporciona l'empresa d'autobusos és errònia? Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

Solución:

6.

a) Tenim una mostra de mida $n = 10$. Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$\bar{x} = 32{,}3$$

D'altra banda, sabem que la desviació típica és $\sigma = 2$.

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0,1)$, quan la variància σ^2 és coneguda s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-z_\gamma \le Z \le z_\gamma) = \gamma$.

Per tant, tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 - 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 31{,}0604$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 + 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 33{,}5396$$

L'interval de confiança demanat és [31'0604 , 33'5396].

b) A partir del resultat anterior podem afirmar, amb una confiança del 95%, que la informació que proporciona l'empresa és errònia. Ja que, a partir de la mostra, amb una confiança del 95%, la mitjana hauria d'estar entre 31,0604 i 33,5396 minuts i, per tant, superior als 30 minuts que indica l'empresa.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la mitjana: 0,5 punts. Fórmula de l'interval de confiança per a la mitjana: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.

b) Justificació correcta: 1 punt.

BY NC SA
Textos Marea Verde