Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: UNIVERSIDAD PAÍS VASCO y ANTONIO MENGUIANO

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 problemas en 8 bloques. El estudiante responderá a 4 de 3 bloque diferentes.

TIEMPO: 90 minutos.

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

A.1 $[\![hasta\ 2,5\ \ puntos]\!]$

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Ejercicio B1

B.1 $[\![\textit{hasta } 2{,}5 \textit{ puntos}]\!]$

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

c) $[\![2{,}2 \textit{ puntos}]\!]$ ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?

d) $[\![0{,}3 \textit{ puntos}]\!]$ ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

A.2 $[\![\textit{hasta } 2{,}5 \textit{ puntos}]\!]$

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

a) $[\![1 \textit{ punto}]\!]$ Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0, 0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.

b) $[\![0{,}75 \textit{ puntos}]\!]$ Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.

c) $[\![0{,}75 \textit{ puntos}]\!]$ Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

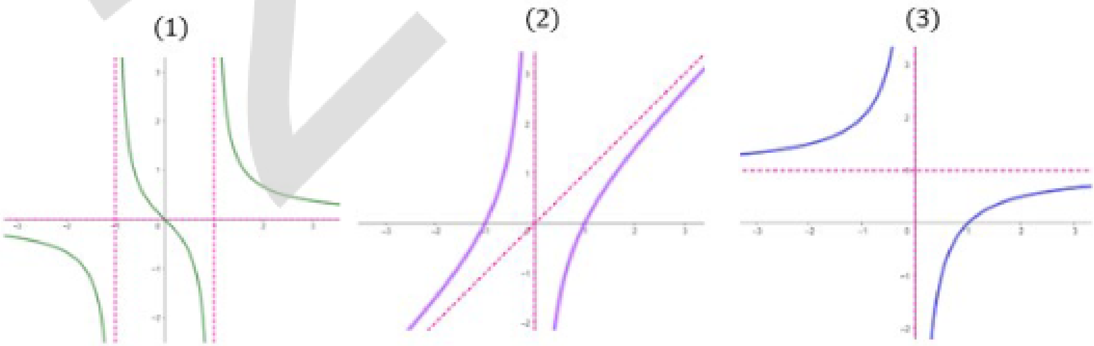
Ejercicio B2

B.2 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

a) $[\![0,9\ puntos]\!]$ Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A)\ f(x)=\frac{x-1}{x}\ ;\quad B)\ g(x)=\frac{x}{x^2-1}\ ;\quad C)\ h(x)=\frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) $[\![1,6\ puntos]\!]$ En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

BLOQUE PROBABILIDAD

Ejercicio A3

A.3 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

a) $[\![0,5\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

c) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.

d) $[\![0,5\ puntos]\!]$ Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Ejercicio B3

B.3 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

a) $[\![0,8\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?

b) $[\![0,35\ puntos]\!]$ Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?

c) $[\![0,35\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?

d) $[\![1\ punto]\!]$ ¿Son independientes los sucesos "ser cliente de A" y "ser cliente de B"? Justifica tu respuesta.

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA

Ejercicio A4

A.4 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

a) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) $[\![1\ punto]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos y el *Apto* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

Ejercicio B4

B.4 $[\![\, hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

a) $[\![\, \mathbf{1,25}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

b) $[\![\, \mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) $[\![\, \mathbf{0,5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Interpreta los resultados obtenidos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

A.1 [[$hasta\ 2,5\ puntos$]]

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Solución:

A.1 *Problema de traducción al lenguaje algebraico de una situación de la realidad social. Uso de la regla de Cramer.*

Definimos las variables:

$$\begin{cases} x = puntuación\ obtenida\ en\ el\ primer\ problema \\ y = puntuación\ obtenida\ en\ el\ segundo\ problema \\ z = puntuación\ obtenida\ en\ el\ tercer\ problema \end{cases}$$

En función de estas variables obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 7{,}2 \\ x = y + 0{,}4\,y \\ z = 2\,(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 72 \\ x = 1{,}4\,y \\ z = 2\,x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y + 5z = 36 \\ 10x - 14\,y = 0 \\ 2\,x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 5y + 5z = 36 \\ 5x - 7\,y = 0 \\ 2\,x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Comprobamos que podemos utilizar el método de Cramer, es decir, que el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\,(7 + 10 + 14 + 5) = 180 \neq 0$$

Por lo tanto, resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 5 & 5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{252}{180} = 1{,}4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 36 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{180}{180} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 36 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{180} = \frac{360 + 504}{180} = \frac{864}{180} = 4{,}8$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} &x = puntuación\ obtenida\ en\ el\ primer\ problema = 1,4\ puntos \\ &y = puntuación\ obtenida\ en\ el\ segundo\ problema = 1\ punto \\ &z = puntuación\ obtenida\ en\ el\ tercer\ problema = 4,8\ puntos \end{aligned}$$

Ejercicio B1

B.1 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

c) $[\![2,2\ puntos]\!]$ ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?

d) $[\![0,3\ puntos]\!]$ ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

Solución:

B.1 *Problema de traducción al lenguaje algebraico de una situación de la realidad social. Problema de programación lineal con dos variables.*

a) Número de trufas de cada tipo para obtener el máximo ingreso.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio	Variables
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €	x
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15gr	1,3 €	y
Disponibilidad	30.000 gr	8.000 gr	10.500 gr		

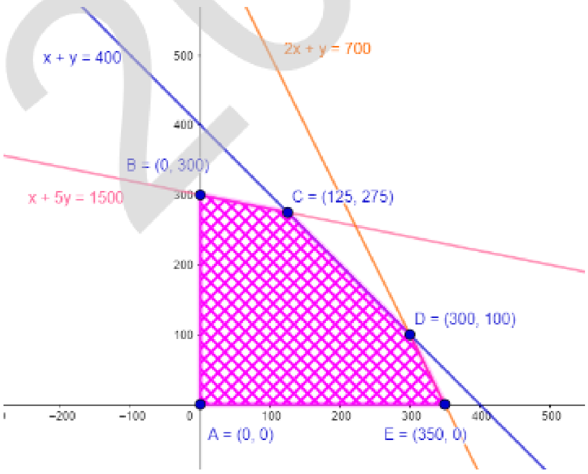
- La función objetivo es:

$f(x, y) = x + 1{,}3\,y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 100y \leq 30.000 \\ 20x + 20y \leq 8000 \\ 30\,x + 15\,y \leq 10.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



• Cálculo del vértice C:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ x+5y=1500 \end{cases} \Rightarrow x=400-y \Rightarrow 400-y+5y=1500 \Rightarrow \begin{matrix} x=125 \\ y=275 \end{matrix} \Rightarrow C(125,275)$$

• Cálculo del vértice D:

$$\begin{cases} x+y=400 \\ 2x+y=700 \end{cases} \Rightarrow x=300 \Rightarrow y=100 \Rightarrow \begin{matrix} x=300 \\ y=100 \end{matrix} \Rightarrow D(300,100)$$

Por lo tanto, los vértices son:

$A(0,0)$, $B(0,300)$, $C(125,275)$, $D(300,100)$, $E(350,0)$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A)=f(0,0)=0$$

$$f(B)=f(0,300)=390$$

$$f(C)=f(125,275)=482{,}5$$

$$f(D)=f(300,100)=430$$

$$f(E)=f(350,0)=350$$

- El valor máximo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{C(125,\ 275)}$, por lo tanto, se tienen que producir **125 trufas dulces y 275 trufas amargas** para obtener el máximo ingreso.

b) El ingreso máximo.

$f(x,y)=f(C)=f(125,275)=482{,}5$.

De esta manera se obtendrá el ingreso máximo de **482,5 €**.

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

A.2 $[\![hasta\ 2,5\ \ puntos]\!]$

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

a) $[\![1\ punto]\!]$ Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0\,,0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2,-4)$.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2$.

c) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2$ y el eje de abscisas.

Solución:

A.2 *Cálculo de los parámetros de una función y sus máximos y mínimos relativos.*

a) Determina a, b, c siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- La función pasa por el punto $(0,0)$ $\Rightarrow f(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 0$

  Por lo tanto, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

- La función pasa por el punto $(2\,,-4) \Rightarrow f(2) = -4 \Rightarrow$

  $8 + 4a + 2b = -4 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = -6$

- La función en $x = 2$ tiene un extremo relativo $\Rightarrow f'(2) = 0$

  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 0 = 12 + 4a + b \Rightarrow$

  $\Rightarrow 4a + b = -12$

Por lo tanto:

$\begin{cases} 2\,a + b = -6 \\ 4\,a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -3$ y $b = 0$ **Esto es:** $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión

- La condición de máximos y mínimos relativos es:

$$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow x_0\ punto\ singular$$

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \ \wedge \ \begin{cases} f''(x_0) < 0 & \Rightarrow & x_0\ máximo\ relativo \\ f''(x_0) > 0 & \Rightarrow & x_0\ mínimo\ relativo \end{cases}}$$

✓ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\,x^2 - 6\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$ puntos singulares

✓ $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ máximo, esto es, $(0,0)$ **Máximo relativo**

$f''(0) = -6 > 0 \Rightarrow x = 2$ mínimo, esto es, $(2,-4)$ **Mínimo relativo**

- La definición de un punto de inflexión es:

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \;\wedge\; f'''(x_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; (x_0, f(x_0)) \;\; \textit{punto de inflexión}}$$

✓ $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

✓ $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$

Por lo tanto, en $x = 1$ hay un punto de inflexión, esto es,

$(1, -2)$ **Punto de inflexión**

c) Calcula la superficie de la región finita delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas

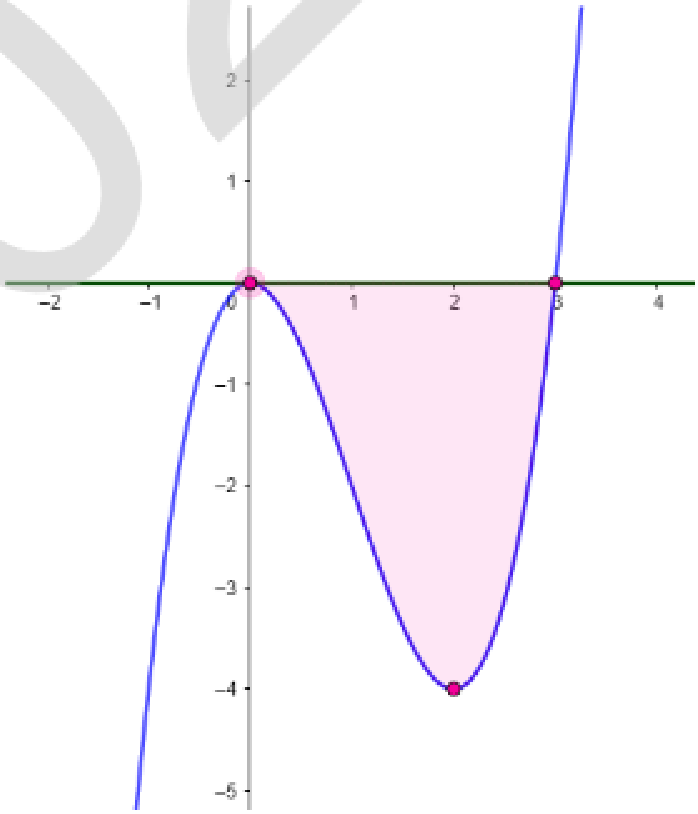
Para calcular el área determinamos y resolvemos la integral definida:

$$A = \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 3\,\frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 3\,\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{4}u^2$$



Por lo tanto:

$$A = \frac{27}{4}u^2$$

Ejercicio B2

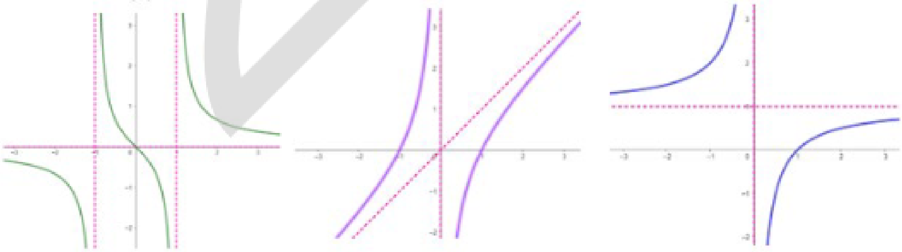
B.2 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

a) $[\![\ 0,9\ puntos]\!]$ Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A)\ f(x)=\frac{x-1}{x}\ ;\quad B)\ g(x)=\frac{x}{x^2-1}\ ;\quad C)\ h(x)=\frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:

(1) (2) (3)



b) $[\![\ 1,6\ puntos\ ]\!]$ En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

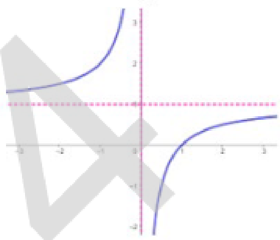
B.2 *Asociar funciones con representaciones gráficas. Identificar el dominio, el recorrido y el crecimiento de una función.*

a) Asocia, razonadamente, las funciones A), B) y C) con las gráficas (1), (2) y (3).

- Analizamos la función:

$$A)\ f(x)=\frac{x-1}{x}$$

(3)



- $f(x)$ no está definida en el punto $x=0$.
- Pasa por los puntos $(-1,\ \ 2)$, $(1,\ \ 0)$.
- $f(x)$ tiene en $x=0$ una asíntota vertical.
- $f(x)$ tiene en $y=1$ asíntota horizontal.

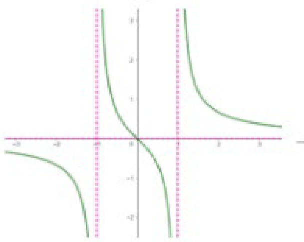
La única función con esas características es la (3).

Por lo tanto, **A) = (3).**

- Analizamos la función:

$$B)\ g(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

(1)



- $g(x)$ no está definida en los $x=-1$ y $x=1$.
- Pasa por el punto $(0,\ \ 0)$.
- $g(x)$ tiene en $x=1$ una asíntota vertical.
- $g(x)$ tiene en $x=-1$ otra asíntota vertical.
- $g(x)$ tiene en $y=0$ asíntota horizontal.

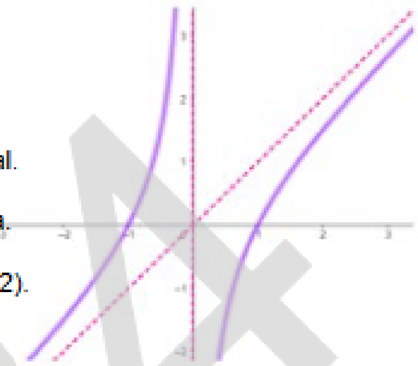
La única función con esas características es la (1).

Por lo tanto, **B) = (1)**

- Analizamos la función:

$C)\ h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

(2)



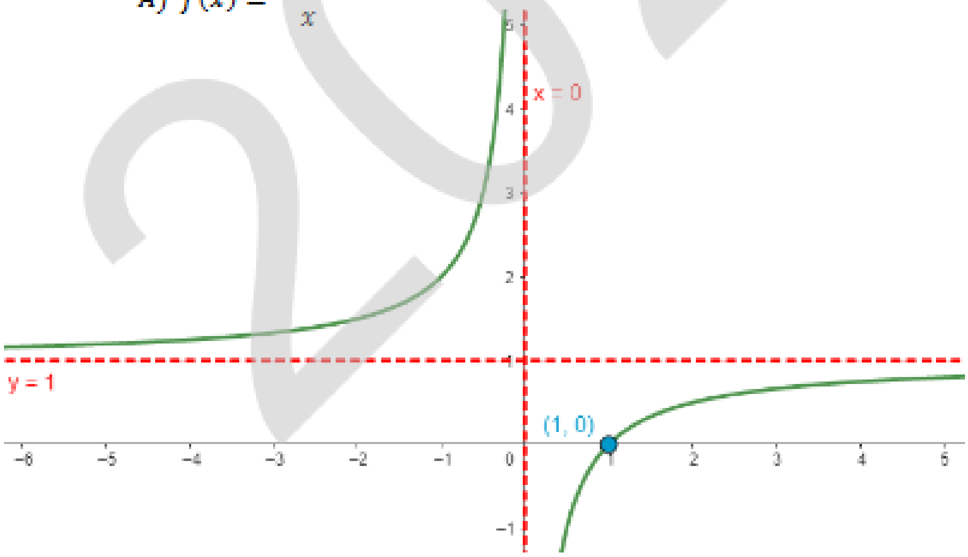
- ○ $h(x)$ no está definida en el $x = 0$.
- ○ Pasa por los puntos $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$.
- ○ $h(x)$ tiene en $x = 0$ una asíntota vertical.
- ○ $h(x)$ tiene en $y = x$ una asíntota oblicua.

La única función con esas características es la (2).

Por lo tanto, **C) = (2)**

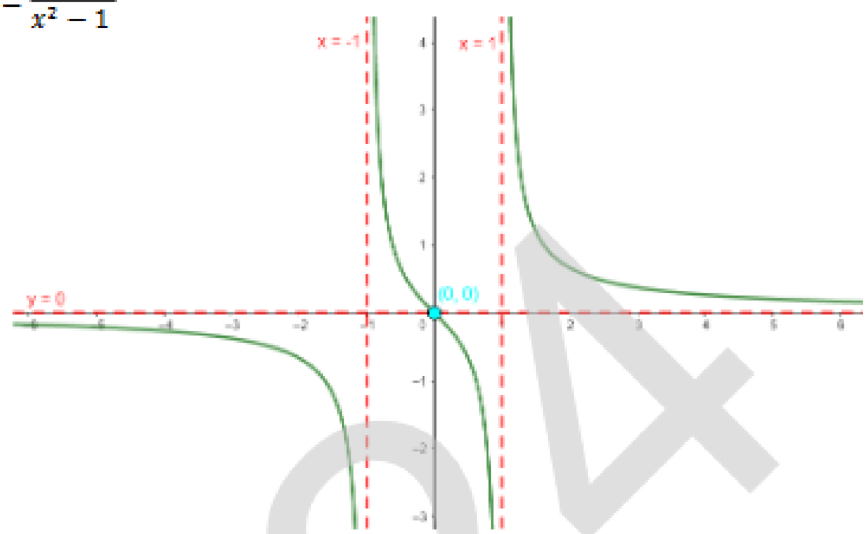
b) En cada caso, indicar el dominio, el recorrido y el crecimiento y decrecimiento de la función.

$A)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x}$



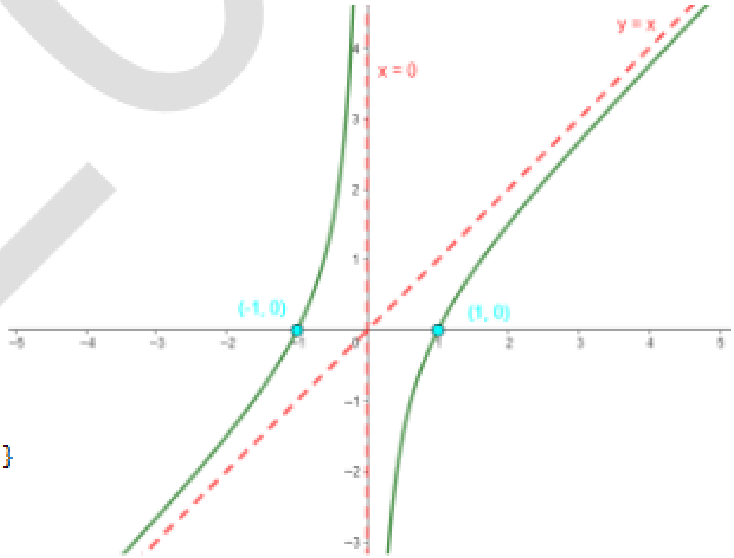
- $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $Recorrido\ f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (0,\ \infty)$

$B)\ g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$



- $Dom\ g(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $Recorrido\ g(x) = \mathbb{R}$
- Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ \infty)$

$C)\ h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$



- $Dom\ h(x) = \mathbb{R}\ - \{\ 0\ \}$
- $Recorrido\ h(x) = \mathbb{R}$
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (0,\ \infty)$

BLOQUE PROBABILIDAD
Ejercicio A3

A.3 [$\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}$]

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

a) [$\boldsymbol{0,5\ puntos}$] ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

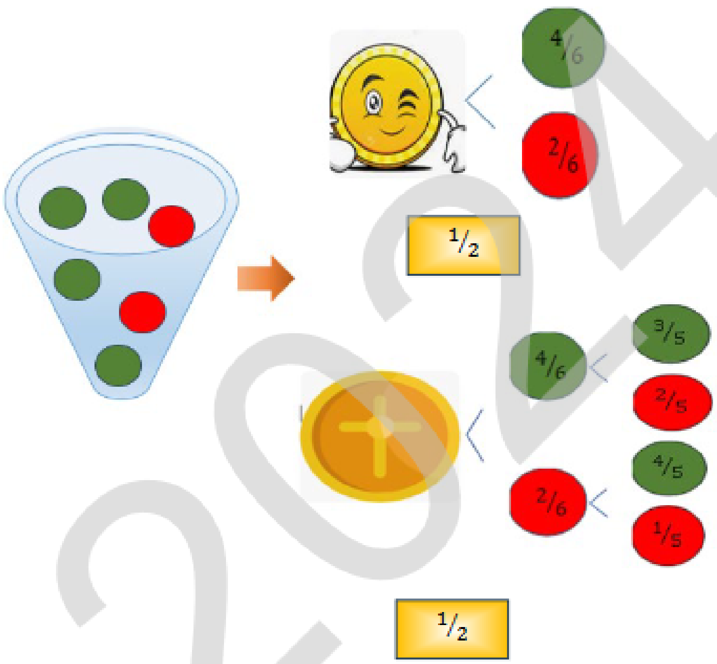
b) [$\boldsymbol{0,75\ puntos}$] Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

c) [$\boldsymbol{0,75\ puntos}$] Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.

d) [$\boldsymbol{0,5\ puntos}$] Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Solución:

A.3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol o a través de la probabilidad total. Teorema de Bayes*



Sucesos:

$V_1 = la\ primera\ bola\ verde$ $\quad$ $V_2 = la\ segunda\ bola\ verde$

$R_1 = la\ primera\ bola\ roja$ $\quad$ $R_2 = la\ segunda\ bola\ roja$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30} \Rightarrow \boldsymbol{P(R_1 \cap R_2) = 0,03333\ = 3,33\ \%}$$

b) Probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

$$P(ninguna\ roja) = P(cara\ \cap V_1) + P(cruz\ \cap V_1 \cap V_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} = 0{,}5333 \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(ninguna\ roja) = 0,5333 = 53,33\ \%}$$

c) Calcula la probabilidad de que al menos haya extraído una bola verde.

$$P(al\ menos\ una\ verde) = 1 - P(\ ninguna\ verde) =$$

$$= 1 - \left(P(cara\ \cap\ R_1\ ) + P(cruz \cap R_1 \cap R_2)\right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) = 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} =$$

$$= 0{,}8 \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(al\ menos\ una\ verde) = 80\ \%}$$

Otra forma

$$P(al\ menos\ una\ verde) = P(una\ verde) + P(\ dos\ verdes) =$$

$$= \left(P(cara\ \cap\ V_1\ ) + P(cruz \cap V_1 \cap R_2) + P(cruz \cap R_1 \cap V_2)\right) + P(cruz \cap V_1 \cap V_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

d) Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Haciendo uso del Teorema Bayes:

$$P(Cara\ |\ al\ menos\ una\ verde) = \frac{P(cara)\cdot P(al\ menos\ una\ verde\ |\ cara)}{P(al\ menos\ una\ verde)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{12} = 0{,}4167 \Rightarrow \boldsymbol{P(Cara\ |\ al\ menos\ una\ verde) = 0,4167 = 41,67\ \%}$$

Ejercicio B3

B.3 [*hasta 2,5 puntos*]

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

a) [*0,8 puntos*] ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?

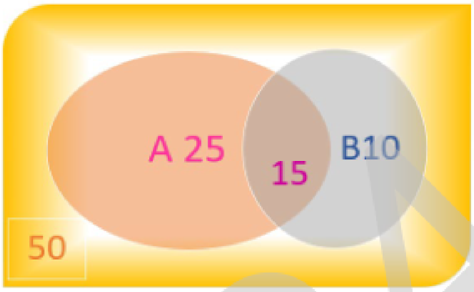
b) [*0,35 puntos*] Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?

c) [*0,35 puntos*] ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?

d) [*1 punto*] ¿Son independientes los sucesos "ser cliente de A" y "ser cliente de B"? Justifica tu respuesta.

Solución:

B.3. *Problema de cálculo de probabilidades.*



a) ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en A y no compre en B?

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25 \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cap B^c) = 25\ \%}$

b) Si esta persona es cliente de A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de B?

$P(\ B \mid A\ ) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375 \Rightarrow \boldsymbol{P(\ B \mid A\ ) = 37{,}5\ \%}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de A ni de B?

$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(A^c \cap B^c) = 50\%}$

d) ¿Son independientes los sucesos "ser cliente de A" y "ser cliente de B"?

"*ser cliente de A*" y "*ser cliente de B*" son sucesos independientes $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P(\text{ser cliente de } A \mid \text{ser cliente de } B) = P(\text{ser cliente de } A) \\ P(\text{ser cliente de } B \mid \text{ser cliente de } A) = P(\text{ser cliente de } B) \end{cases}$$

- $P(\text{ser cliente de } A \mid \text{ser cliente de } B) = \frac{15}{25} = 0{,}6$
- $P(\text{ser cliente de } A) = 0{,}4$

$\Rightarrow P(\text{ser cliente de } A \mid \text{ser cliente de } B) \neq P(\text{ser cliente de } A)$

Por lo tanto, "*ser cliente de A*" y "*ser cliente de B*" **no son sucesos independientes: son dependientes.**

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA
Ejercicio A4

A.4 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

a) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) $[\![\ 1\ punto]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos y el *Apto* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

Solución:

A.4 *Comprensión, utilización y cálculo de probabilidad de una distribución normal.*

La puntuación obtenida en el examen $X \equiv \mathcal{N}(5{,}8\,,\ \sigma)$ tal que $P(X > 6{,}8) = 0{,}35$.

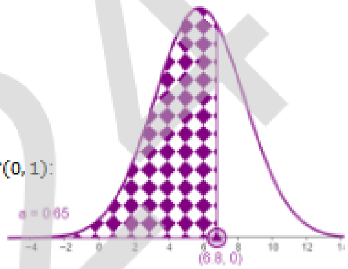
a) Cálculo de la desviación típica.

$P(X > 6{,}8) = 0{,}35 \Rightarrow P(X \le 6{,}8) = 0{,}65 \implies$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{6{,}8-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}65 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{6{,}8-5{,}8}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}65$

Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:



$P\left(Z \le \frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}65$

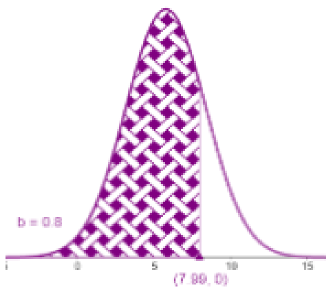
Por lo tanto:

$\frac{1}{\sigma} = 0{,}385 \implies \sigma = \frac{1}{0{,}385} = \mathbf{2,597}$

b) Si $\sigma = 2{,}6, \Longrightarrow X \equiv \mathcal{N}(5{,}8\,,\ 2{,}6)$. Calculamos el valor de k (puntuación) que solo supera el 20 % del alumnado $\Longrightarrow P(X > k) = 0{,}2 \implies$

$\Longrightarrow P(X \le k) = 0{,}8 \implies P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \implies$

$\implies P\left(Z \le \frac{k-5{,}8}{2{,}6}\right) = 0{,}8$



Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$\frac{k-5{,}8}{2{,}6} = 0{,}845 \Rightarrow \mathbf{k = 5,8 + 0,845 \cdot 2,6 = 7,997}$

Por lo tanto, **alrededor del 20% del alumnado obtiene una nota superior a 8 puntos.**

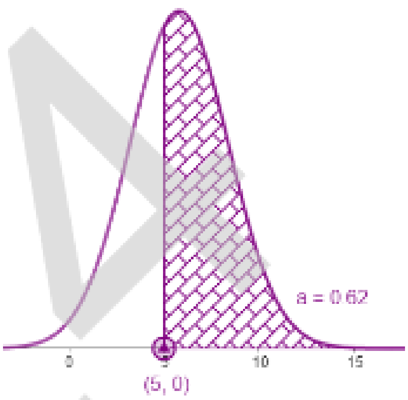
c) Si $\sigma = 2{,}6$, calculamos el porcentaje del alumnado que ha conseguido ser apto en el examen.

Dada:

$$X \equiv \mathcal{N}(5{,}8\,,\ 2{,}6)$$

$$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5-5{,}8}{2{,}6}\right) =$$

$$= P(Z \geq -0{,}31) = P(Z \leq 0{,}31)$$



Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$$\boldsymbol{P(Z \leq 0,31) = 0,6217 = 62,17\ \%}$$

Luego, alrededor del 62,17 % del alumnado ha conseguido un apto en el examen.

Ejercicio B4

B.4 [*hasta 2,5 puntos*]

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

a) [**1,25 *puntos***] Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

b) [**0,75 *puntos***] Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) [**0,5 *puntos***] Interpreta los resultados obtenidos.

Solución:

B.4 *Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y error máximo admisible.*

a) Estimamos, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

- Si el tamaño de muestra n es grande, la distribución de las proporciones muestrales es:

$$\mathcal{N}\left(\mu = p,\ \sigma = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$$

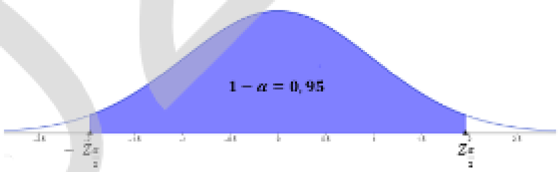
- En la muestra de 1000 jóvenes vascos, 860 viven con sus padres, entonces:

$$\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86$$

es la proporción muestral de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

- El intervalo de confianza para la proporción de la población con un nivel de confianza del 95 % es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$$



- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Nivel de confianza: $n_c = 0,95 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

- Calculamos $\hat{q}$

$$\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86 \Longrightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,14$$

- Luego:

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,86\cdot 0,14}{1000}} = 0,01097$$

- Por lo tanto, el intervalo de confianza para la proporción de población, con un nivel de confianza del 95 % es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (0{,}86 - 1{,}96\cdot 0{,}01097;\ \ 0{,}86 + 1{,}96\cdot 0{,}01097) =$$

$$= (0{,}8385;\ \ 0{,}8815)$$

Por lo tanto, el porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres está entre el 83,85 % y el 88,15 % con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

El error máximo admisible para la estimación de la proporción es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

Por lo tanto:

$$e_m = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\cdot 0{,}01097 = \frac{0{,}8815 - 0{,}8385}{2} = 0{,}0215 \Rightarrow e_m = 2{,}15\ \%$$

c) Interpretar los resultados obtenidos.

Se puede decir con un nivel de confianza del 95 %, que el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres es mayor que el 83,85 % y menor que el 88,15 %, lo que supone un error máximo del 2,15 %.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 problemas en 8 bloques. El estudiante responderá a 4 de 3 bloque diferentes.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

1º) Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1.000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

a) ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) ¿Cuál sería dicho ingreso?

Ejercicio B1

2º) a) Resuelve este sistema de ecuaciones lineales: $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

3º) a) Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $P(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

c) Calcula el área de la región delimitada por la gráfica de $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

Ejercicio B2

4º) La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión: $f(x) = 40 - 6x + x^2$, para $x \geq 0$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez?

b) Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

c) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

d) Si el coste fuera de 80.000 euros, ¿cuál sería la cantidad producida?

e) Representa gráficamente la función.

BLOQUE PROBABILIDAD

Ejercicio A3

5º) Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

$a)$ Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

$b)$ Sabemos que $P(C) = 0{,}5;\ \ P(D) = 0{,}6$ y $P(C \cup D) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

$c)$ Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(E) = 0{,}6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Ejercicio B3

6º) En una caja hay una bola blanca y una bola negra. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

$a)$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra si la primera que se ha sacado ha sido blanca.

$b)$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

$c)$ Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido blanca?

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA

Ejercicio A4

7º) En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

$a)$ Obtén el intervalo característico para el 80 %.

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

$d)$ Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

Ejercicio B4

8º) Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores: $\overline{x} = 98$ puntos y $\sigma = 15$ puntos. Hemos hecho la siguiente afirmación: “El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos”. ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta información?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

1º) Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1.000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

a) ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) ¿Cuál sería dicho ingreso?

Solución:

a) Sean x e y los relojes de pulsera y de bolsillo que se producen diariamente en la fábrica, respectivamente.

Las condiciones que se deducen del enunciado son: $\left.\begin{array}{r} x+y \leq 1.000 \\ x \leq 800;\ y \leq 600 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow x+y \leq 1.000 \Rightarrow y \leq 1.000-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	1.000
y	1.000	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

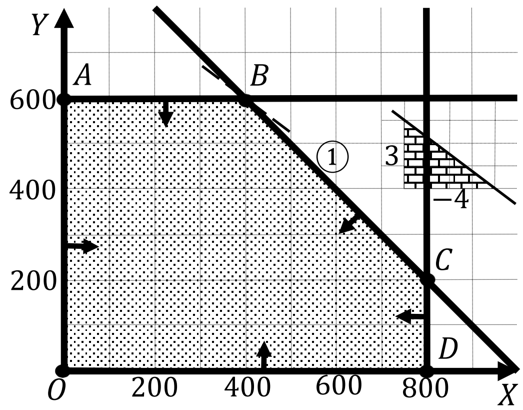
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=600 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,600).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=600 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow x=400 \Rightarrow B(400,600).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow y=200 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(800,200).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(800,0).$



La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,y)=90x+120y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,600)=90\cdot 0+120\cdot 600=0+72.000=72.000.$

$B \Rightarrow f(400,600)=90\cdot 400+120\cdot 600=36.000+72.000=108.000.$

$C \Rightarrow f(800,200)=90\cdot 800+120\cdot 200=72.000+24.000=96.000.$

$D \Rightarrow f(800,0)=90\cdot 800+120\cdot 0=72.000+0=72.000.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 90x + 120y = 0 \Rightarrow y = -\frac{90}{120}x = -\frac{9}{12}x \Rightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ ingreso\ es\ m\acute{a}ximo\ produciendo\ 400\ relojes\ de\ pulsera\ y\ 600\ de\ bolsillo}}.$$

$b)$

$$\underline{\boldsymbol{El\ ingreso\ m\acute{a}ximo\ diario\ es\ de\ 108.000\ euros.}}$$

Ejercicio B1

2º) a) Resuelve este sistema de ecuaciones lineales: $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

Solución:

a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3y + 2(1-2x) = -1 \\ 2y + 2(x+1) + 2 = 2 \\ 2 + z = 0 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} 3y + 2 - 4x = -1 \\ 2y + 2x + 2 + 2 = 2 \\ z + 2 = 0 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r} -4x + 3y = -3 \\ 2x + 2y = -2 \\ z + 2 = 0 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r} -4x + 3y = -3 \\ x + y = -1 \\ z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = -2.$$

$$\left.\begin{array}{r} -4x + 3y = -3 \\ x + y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x - 3y = 3 \\ 3x + 3y = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 0; \;\; x = 0. \quad\quad 3y = -3; \;\; y = -1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = 0, y = -1, z = -2.}}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$M = A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{M = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.}}$$

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

3º) a) Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $P(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

c) Calcula el área de la región delimitada por la gráfica de $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

Solución:

a) Por tener un punto de inflexión para $x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$. $f''(x) = 6ax + 6$.

$f''(-1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot (-1) + 6 = 0;\ -a + 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}$.

La función resulta: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + b$.

Por pasar por $P(1, -3) \Rightarrow f(1) = -3$.

$f(1) = -3 \Rightarrow 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + b = -3;\ 1 + 3 - 5 + b = -3 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{b = -2}}.$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$g'(x) = 3x^2 - 6x$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0;\ \ 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$.

Por ser $g(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$g'(1) = 3 - 6 < 0 \Rightarrow Decreciente$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{g'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (0, 2)}.}$$

$$\boldsymbol{g'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

De los periodos de crecimiento se deducen las abscisas de los máximos y mínimos relativos; no obstante, se procede a su cálculo por derivadas.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$g''(x) = 6x - 6$.

$g''(0) = -6 < 0 \Rightarrow M'ax. relativo\ para\ x = 0$.

$$g(0) = 7 \Rightarrow$$

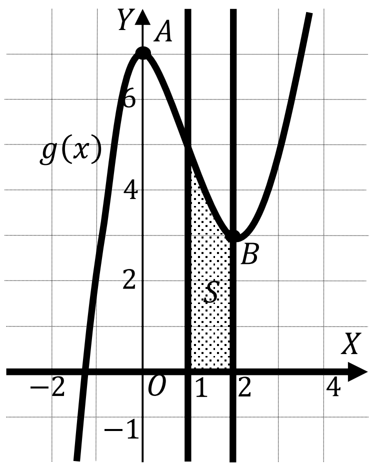
$$\underline{\boldsymbol{Máx: A(0, 7).}}$$

$g''(2) = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow Mín. relativo\ para\ x = 2.$

$$g(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 7 = 8 - 12 + 7 = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mín: B(2, 3).}}$$

$c)$ La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



La superficie a calcular es la siguiente:

$S = \int_1^2 g(x) \cdot dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 7) \cdot dx =$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 7x\right]_1^2 = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 7x\right]_1^2 =$

$= \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 7 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 7 \cdot 1\right) = 4 - 8 + 14 - \frac{1}{4} + 1 - 7 =$
$4 - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{15}{4}\, u^2 = 3,75\, u^2.}}$$

Ejercicio B2

4º) La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión: $f(x) = 40 - 6x + x^2$, para $x \geq 0$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez?

b) Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

c) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

d) Si el coste fuera de 80.000 euros, ¿cuál sería la cantidad producida?

e) Representa gráficamente la función.

Solución:

a) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = -6 + 2x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0;\ -3 + x = 0 \Rightarrow x = 3.$

Por ser $f(x)$ una función cuadrática convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su mínimo para $x = 3$, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ disminuye\ cuando\ se\ producen\ menos\ de\ tres\ artículos.}}$$

b) Del apartado anterior se deduce que la función tiene un mínimo absoluto en el punto de abscisa $x = 3$:

$f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 40 - 18 + 9 = 31 \Rightarrow Mínimo: A(3, 31).$

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 31.000\ euros\ cuando\ se\ producen\ 3\ artículos.}}$$

c) $f(0) = 40.$

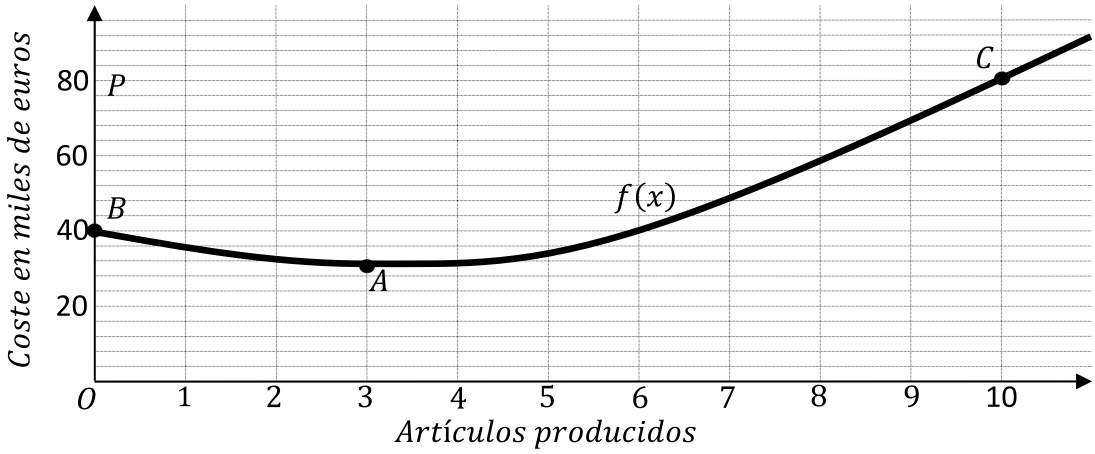
$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ es\ de\ 40.000\ euros\ cuando\ \ no\ se\ produce\ nada\ de\ ese\ artículo.}}$$

d) $f(x) = 80 \Rightarrow 40 - 6x + x^2 = 80;\ \ x^2 - 6x - 40 = 0;\ \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36+160}}{2} =$

$= \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = 3 \pm 7 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4, \notin D(f) \\ x_2 = 10 \end{cases}.$

$$\underline{\boldsymbol{Si\ el\ coste\ es\ de\ 80.000\ euros\ se\ producen\ 10\ artículos.}}$$

e) La representación, aproximada, de la función es la siguiente.


Coste en miles de euros
80
60
40
20
P
B
A
C
f(x)
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Artículos producidos

BLOQUE PROBABILIDAD

Ejercicio A3

5º) Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

$a)$ Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

$b)$ Sabemos que $P(C) = 0{,}5;\ \ P(D) = 0{,}6$ y $P(C \cup D) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

$c)$ Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(E) = 0{,}6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Solución:

$a)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,2.}}$$

$b)$ $P = P(C/D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)+P(D)-P(C\cup D)}{P(D)} = \frac{0{,}5+0{,}6-0{,}7}{0{,}6} = \frac{1{,}1-0{,}7}{0{,}6} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{4}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = P(C/D) = \frac{2}{3} = 0,6667.}}$$

$c)$ Los sucesos A y E son independientes cuando $P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$.

$$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = P(A) + P(E) - P(A) \cdot P(E) =$$

$$= 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}24 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cup E) = 0,76.}}$$

Ejercicio B3

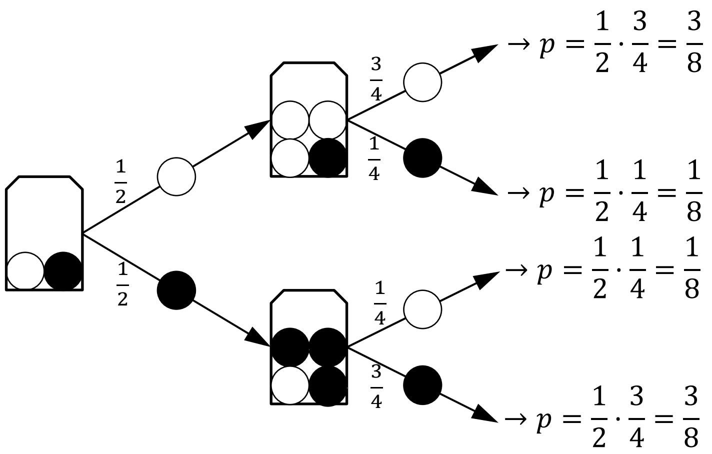
6º) En una caja hay una bola blanca y una bola negra. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

$a)$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra si la primera que se ha sacado ha sido blanca.

$b)$ Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

$c)$ Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido blanca?

Solución:



$a)$

$$P = P(BN) = \underline{\frac{1}{4} = 0{,}25}.$$

$b)$

$$P = P(N) = P(BN) + P(NN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{4}{8} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5}.$$

$c)$

$$P = P(B/N) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{8}} = \frac{1}{1+3} = \underline{\frac{1}{4} = 0{,}25}.$$

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA

Ejercicio A4

7º) En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) Obtén el intervalo característico para el 80 %.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

d) Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 80 % es:

$$1-\alpha = 0{,}80 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}80 = 0{,}20 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}10} = 1{,}28.$$

$(1-0{,}10 = 0{,}9000 \ \rightarrow z = 1{,}28)$.

Datos: $\mu = 210;\ \ \sigma^2 = 144;\ \ \sigma = 12;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}28.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$ y σ, es la siguiente:

$$\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma;\ \ \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right).$$

$(210 - 1{,}28 \cdot 12;\ 210 + 1{,}28 \cdot 12);\ \ (210 - 15{,}38;\ 210 + 15{,}38).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{80\,\%} = (194,64;\ 225,38).}}$$

b) $Datos$: $\mu = 210;\ \ \sigma = 12.$

$X \rightarrow N(\mu, \sigma) = N(210, 12).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-210}{12}.$

$P = P(X > 228) = P\left(Z > \frac{228-210}{12}\right) = P\left(Z > \frac{18}{12}\right) = P(Z > 1{,}5) =$

$= 1 - P(Z \leq 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = \underline{0{,}0668}.$

c) $P = P(200 < X < 210) = P\left(\frac{200-210}{12} < Z < \frac{210-210}{12}\right) =$

$= P\left(\frac{-10}{12} < Z < \frac{0}{12}\right) = P(-0{,}83 < Z < 0) = P(Z < 0) - P(Z < -0{,}83) =$

$= 0{,}5 - [1 - P(Z < 0{,}83)] = 0{,}5 - 1 + P(Z < 0{,}83) = -0{,}5 + 0{,}7967 =$

$$= \underline{\boldsymbol{0,2967}}.$$

d) Datos: $n = 30;\ \ \mu = 210;\ \ \sigma = 12.$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(210;\ \frac{12}{\sqrt{30}}\right) = N(210;\ 2{,}19).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-210}{2{,}19}.$

$P = P(X < 207) = P\left(Z < \frac{207-210}{2{,}19}\right) = P\left(Z < \frac{-3}{2{,}19}\right) = P(Z < -1{,}37) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}37) = 1 - 0{,}9147 = \underline{0{,}0853}.$

Ejercicio B4

8º) Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores: $\overline{x} = 98$ puntos y $\sigma = 15$ puntos. Hemos hecho la siguiente afirmación: "El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos". ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta información?

Solución:

$E = \frac{101,5-94,5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5.$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 98;\ \ \sigma = 15.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,5 \cdot \sqrt{100}}{15} = \frac{3,5 \cdot 10}{15} = 2,33.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$, al valor 2,33 le corresponde 0,9901, por lo cual:

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9901;\ \ 2 - \alpha = 1,9802;\ \ \alpha = 2 - 1,9802 = 0,0198;\ \ 1 - \alpha = 0,9802.$

El nivel de confianza utilizado en la afirmación fue del 98,02 %.