Matemáticas II

Selectividad 2025

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

Coordinador: Álvaro Garmendia Antolín

www.apuntesmareaverde.org.es

BY NC SA

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-055911

Fecha y hora de registro: 2014-10-30 16:19:59.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

BY NC SA

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

Textos Marea Verde

Antes **Selectividad**, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia),

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

Reconeixement – NoComercial – CompartirIgual (by-nc-sa).
No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

Reconocimiento (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.

No Comercial (Non commercial): La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.

Compartir Igual (Share alike): La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS: SELECTIVIDAD 2025

ANDALUCÍA

https://www.youtube.com/watch?v=b1jU1zk9ADM

https://www.youtube.com/watch?v=DV6V2jQz6t8

https://www.youtube.com/watch?v=E3R4g8zmXxg

ARAGÓN:

https://www.youtube.com/watch?v=4asWnyz50C8

https://www.youtube.com/watch?v=n0Dn_zfkh_A

CANARIAS

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DHC2sO6KoGbE

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D2HLcE3gLNpI

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DNaf_Kyau16g

CANTABRIA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBbDwCPh__JI

https://www.youtube.com/live/wxG5Uv97g_0

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D_oxotfMqu2g

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DsXN1cOoANvY

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DpI-td_-GHWc

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D1Z--h4UYt00

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DE2-fz-t-LdA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DqIW260_jH9U

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DID3rtVTJHLU

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DZImz7ayANb4

MADRID

Examen Matemáticas II del 2025:

https://www.youtube.com/watch?v=hI-kThLEppI

https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM

https://www.youtube.com/watch?v=hI-kThLEppI

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

https://www.youtube.com/watch?v=YGqMeJr3D0Q

https://luis-vives.es/examanes-resueltos-pau-junio-2025/

https://www.tiktok.com/@a.malaver/video/7512451206275501334

https://www.youtube.com/watch?v=G3dNOV5RraU

https://www.youtube.com/watch?v=TOFiLahHweE

MURCIA

https://www.tiktok.com/@laurimathteacher/video/7512068879137377558

NAVARRA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBFccP66b44M

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DG8LIfgQwYew

https://www.youtube.com/watch?v=9wRPb9ZRaEk

PAÍS VASCO

https://www.youtube.com/watch?v=NtkcCwJWlkQ

https://www.tiktok.com/discover/examen-selectividad-pais-vasco-resuelto

https://www.youtube.com/watch?v=PP-AUT2cMRg

https://www.youtube.com/watch?v=SnmMuVeqqZM

BY NC SA

Textos Marea Verde

https://www.youtube.com/watch?v=lEwPj3OIfD8

VALENCIA

https://www.youtube.com/watch?v=ilhE_YAc-Cg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D1njolqFakAg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3Dd6S1L1-VGKk

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DilhE_YAc-Cg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DGkXhMrUvnY4

OTROS

https://www.tiktok.com/@profesor10demates/video/7510521377930235158

https://www.youtube.com/watch?v=3NeIevt3xW8

https://www.youtube.com/watch?v=3NeIevt3xW8

Noticias:

Un ingeniero, tras resolver el examen de Matemáticas II de la PAU de Madrid: "Lo siento mucho por los chavales"

¿Por qué ha sido tan difícil el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la PAU andaluza? | Sociedad | Cadena SER

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS** — **MATEMÁTICAS II** CURSO 2024–2025 CURSO: **2024 – 2025**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.

d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.

e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

Problema 1:

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del $30\,\%$, del $40\,\%$ y del $20\,\%$, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

Problema 2:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Problema 3:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Sea la función $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

a) **[1 punto]** Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f.

b) **[1,5 puntos]** Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

BY NC SA

Problema 4:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Sean los puntos $O(0,0,0)$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,m)$ y $C(2,3,2)$.

a) **[1,25 puntos]** Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O, A, B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.

b) **[1,25 puntos]** Para $m=0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A, B y C.

Problema 5:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el punto $P(1,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$.

a) **[1 punto]** Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

b) **[1,5 puntos]** Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r.

Problema 6:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Halla la función $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e-2-2\ln(2))$ y $(1,0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \dfrac{1}{x}$.

Problema 7:

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

	Coches	Motos
Aptos	116.383	160.667
No aptos	2.679	3.447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentaron a dicha inspección.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?

b) **[1,25 puntos]** Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

a) **[1,25 puntos]** ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.

b) **[1,25 puntos]** Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del $30\,\%$, del $40\,\%$ y del $20\,\%$, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

Solución:

a) Llamamos "x", "y" y "z" al precio de un jersey, una camisa y un pantalón.
Obtenemos las ecuaciones que podamos obtener de los datos del problema.
"Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón" → $x+y+z=80$

"El precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos" → $x=\dfrac{y+z}{3}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo intentamos resolver.

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=80 \\ x=\dfrac{y+z}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=80-x-z \\ 3x=y+z \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x=80-x-\cancel{z}+\cancel{z} \Rightarrow 4x=80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{80}{4}=20 \Rightarrow y=80-20-z=60-z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=20 \\ y=60-\lambda\,;\ 0\le\lambda\le 60 \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Hemos obtenido el precio del jersey: 20 euros, pero del precio de la camisa y del pantalón solo sabemos que sus precios suman 60 €, por lo que no podemos determinar el precio de la camisa, solo que su precio está entre 0 y 60 euros.

b) Obtenemos la nueva ecuación.
"Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente" el descuento que hubiese obtenido en las rebajas es de $80-57=23$ euros → $0.3x+0.4y+0.2z=23$.
Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} y=80-x-z \\ 3x=y+z \\ 0.3x+0.4y+0.2z=23 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=80-x-z \\ 3x=y+z \\ 3x+4y+2z=230 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x=80-x-z+z \\ 3x+4(80-x-z)+2z=230 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x=80 \\ 3x+320-4x-4z+2z=230 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \boxed{x=\dfrac{80}{4}=20} \\ -x-2z=-90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -20-2z=-90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70=2z \Rightarrow \boxed{z=\frac{70}{2}=35} \Rightarrow \boxed{y=80-20-35=25}$$

El jersey cuesta 20 €, la camisa cuesta 25 € y el pantalón 35 €.

El jersey cuesta 20 €, la camisa 25 € y el pantalón 35 €

BY NC SA

Problema 2:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Solución:

Calculamos el límite indicado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-ax+2-2\cos(x)}{e^x-x\cos(x)-1}=\frac{sen(0)-a\cdot 0+2-2\cos(0)}{e^0-0\cdot\cos(0)-1}=\frac{0}{0}=$$

$$=In\det er\min ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-a+2sen(x)}{e^x-\cos(x)+xsen(x)}=$$

$$=\frac{\cos(0)-a+2sen(0)}{e^0-\cos(0)+0\cdot sen(0)}=\frac{1-a}{1-1+0}=\frac{1-a}{0}=\ldots$$

Para que este límite no valga ∞ debe ser el numerador igual a cero para que surja una indeterminación y sigamos con su cálculo. Es decir, debe ser $a=1$. Seguimos con el cálculo del límite tomando $a=1$.

$$\ldots=\{a=1\}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)+2\cos(x)}{e^x+sen(x)+sen(x)+x\cos(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x)+2\cos(x)}{e^x+2sen(x)+x\cos(x)}=\frac{-sen(0)+2\cos(0)}{e^0+2sen(0)+0\cdot\cos(0)}=\frac{2}{1+0+0}=\boxed{2}$$

El valor de a necesario para que el límite sea finito es $a=1$. Para este valor el límite vale 2.

Para que el límite sea finito a debe valer 1, y entonces el límite vale 2

BY NC SA

Problema 3:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Sea la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a+\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

a) **[1 punto]** Calcula a para que $y=1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f.

b) **[1,5 puntos]** Para $a=0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

a) Para que y = 1 sea una asíntota horizontal debe cumplirse $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$. Calculamos el límite.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} a+\frac{\ln(x)}{x^2}=a+\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=a+\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L'Hôpital)}=$$

$$=a+\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=a+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=a+\frac{1}{\infty}=a$$

Como este límite debe valer 1 entonces debe ser $a=1$.

b) Para $a=0$ la función queda $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln(x)}{x^4}=\frac{x-2x\ln(x)}{x^4}=\frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-2\ln(x)}{x^3}=0\Rightarrow 1-2\ln(x)=0\Rightarrow 1=2\ln(x)\Rightarrow\ln(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{x=e^{1/2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de punto crítico $x=e^{1/2}=1.65$.

- En el intervalo $(0,e^{1/2})$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{1-2\ln(1)}{1^4}=1>0$. La función crece en $(0,e^{1/2})$.
- En el intervalo $(e^{1/2},+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{1-2\ln(2)}{2^4}=-0.024<0$. La función decrece en $(e^{1/2},+\infty)$.

La función crece en $(0,e^{1/2})$ y decrece en $(e^{1/2},+\infty)$.

Con esta evolución de la función podemos decir que la función tiene un máximo relativo y absoluto en $x=e^{1/2}$. Como $f(e^{1/2})=\dfrac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{e}=\dfrac{1}{2e}$ las coordenadas del máximo son $\left(\sqrt{e},\dfrac{1}{2e}\right)$.

a = 1; La función crece en (0, $e^{1/2}$) y decrece en ($e^{1/2}$, +∞). Máximo: ($e^{1/2}$, 1/2e)

CC BY NC SA

Problema 4:

p) **[1'25 puntos]** Para $m=0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A, B y C.

q) **[1'25 puntos]** Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O, A, B y C, tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.

Sean los puntos $O(0,0,0)$, $A(0,2,-2)$, $B(1,2,m)$ y $C(2,3,2)$.

EJERCICIO 4.- (2'5 puntos)

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

Solución:

a) Hallamos la expresión del volumen del tetraedro OABC.

$$\left.\begin{matrix} O(0,\ 0,\ 0) \\ A(0,\ 2,-2) \\ B(1,\ 2,m) \\ C(2,\ 3,\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}=(0,2,-2) \\ \overrightarrow{OB}=(1,2,m) \\ \overrightarrow{OC}=(2,3,2) \end{cases} \Rightarrow Volumen\ OABC=\frac{\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]}{6}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}|0+4m-6+8-4-0|=\frac{|4m-2|}{6}$$

Buscamos el valor de m para el que dicho volumen vale 3 unidades cúbicas.

$$Volumen\ OABC=3\Rightarrow\frac{|4m-2|}{6}=3\Rightarrow\begin{cases}\frac{4m-2}{6}=3\rightarrow 4m-2=18\rightarrow 4m=20\rightarrow \boxed{m=5} \\ \frac{-4m+2}{6}=3\rightarrow -4m+2=18\rightarrow -4m=16\rightarrow \boxed{m=-4}\end{cases}$$

Para $m=-4$ y $m=5$ el tetraedro determinado por los puntos O, A, B y C tiene un volumen de 3 unidades cúbicas.

b) Para $m=0$ los puntos quedan O(0, 0, 0), A(0, 2,−2), B(1, 2, 0) y C(2, 3, 2).
Hallamos el plano π determinado por los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{matrix} A(0,2,-2) \\ B(1,2,0) \\ C(2,3,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,2,0)-(0,2,-2)=(1,0,2) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(2,3,2)-(0,2,-2)=(2,1,4)\Rightarrow \\ A(0,2,-2)\in\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \cancel{4(y-2)}+z+2-\cancel{4(y-2)}-2x=0\Rightarrow \boxed{\pi:-2x+z+2=0}$$

Hallamos la distancia del punto $O(0,0,0)$ al plano $\pi:-2x+z+2=0$.

$$\left.\begin{matrix} \pi:-2x+z+2=0 \\ O(0,0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(O,\pi)=\frac{|-2\cdot 0+0+2|}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Para $m=0$ la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A, B y C tiene un valor de $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ unidades.

V = 3 u³; Dist = $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

BY NC SA

Problema 5:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el punto $P(1,1,1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{2}$.

a) **[1 punto]** Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r.

b) **[1,5 puntos]** Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(1,2,3) \\ \vec{v}_r = (1,2,2) \end{cases}$$

El plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta *r* tiene como vectores directores $\vec{v}_r(1,2,2)$ y $\overrightarrow{PQ_r}$.

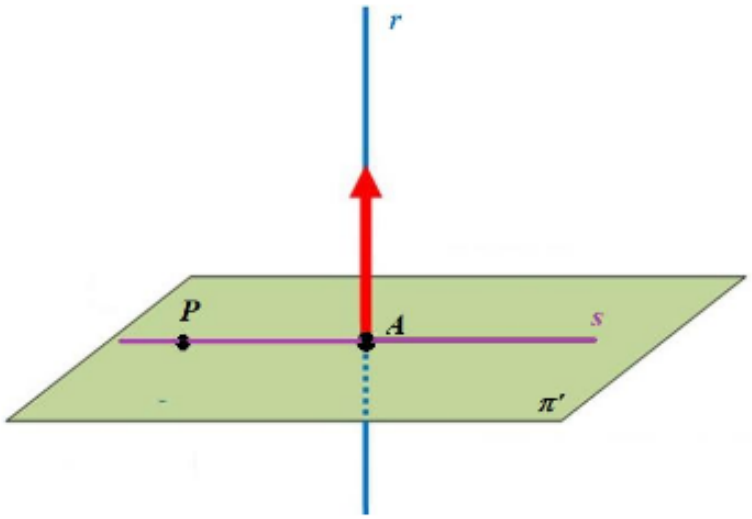
$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1,2,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (1,2,3)-(1,1,1) = (0,1,2) \\ P(1,1,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1)+z-1-2(y-1)-2(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-4+z-1-2y+2-2x+2=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x-2y+z-1=0}$$

El plano que pasa por el punto P y contiene la recta *r* tiene ecuación $\pi : 2x-2y+z-1=0$.

b) Seguimos los pasos del dibujo.



Hallamos el plano π´ perpendicular a la recta *r* que pasa por P. Este plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n'}=\overrightarrow{v_r}=(1,2,2)\\ P(1,1,1)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi':x+2y+2z+D=0\\ P(1,1,1)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 1+2+2+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-5\Rightarrow\boxed{\pi':x+2y+2z-5=0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano $\pi':x+2y+2z-5=0$ y la recta r.

$$\pi':x+2y+2z-5=0$$

$$r\equiv\begin{cases}Q_r(1,2,3)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,2,2)\end{cases}\rightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=1+\alpha\\ y=2+2\alpha\\ z=3+2\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\alpha+2(2+2\alpha)+2(3+2\alpha)-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\alpha+4+4\alpha+6+4\alpha-5=0\Rightarrow 9\alpha+6=0\Rightarrow\alpha=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}\\ y=2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}\\ z=3-\dfrac{4}{3}=\dfrac{5}{3}\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

La recta s que buscamos pasa por los puntos P y A.

$$\left.\begin{array}{l}A\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)\in s\\ P(1,1,1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP}=(1,1,1)-\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)\\ P(1,1,1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=3\overrightarrow{AP}=3\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)=(2,1,-2)\\ P(1,1,1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1-2\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}}$$

La recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r tiene ecuación paramétrica $s:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1-2\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$.

Plano: 2x-2y+z-1=0; Recta: (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -2)

BY NC SA

Problema 6:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Halla la función $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e-2-2\ln(2))$ y $(1,0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$.

Solución:

Integramos la derivada segunda para obtener la derivada primera de la función.

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int e^{x-1}-\frac{1}{x}dx=e^{x-1}-\ln x+A$$

Integramos la primera derivada para obtener la función (salvo dos parámetros a determinar).

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int e^{x-1}-\ln x+Adx=e^{x-1}-\int \ln x dx+Ax=...$$

$$\int \ln x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\to v=\int dx=x\end{array}\right\}=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x$$

$$...=e^{x-1}-(x\ln x-x)+Ax=e^{x-1}-x\ln x+(A+1)x+B$$

Sabemos que la función tiene la expresión $f(x)=e^{x-1}-x\ln x+(A+1)x+B$, falta por determinar A y B.

Si la función pasa por los puntos $(2,e-2-2\ln(2))$ y $(1,0)$ se debe cumplir:
$f(2)=e-2-2\ln 2$ y $f(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=e^{x-1}-x\ln x+(A+1)x+B\\ f(2)=e-2-2\ln 2\\ f(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}e-2-2\ln 2=e^{2-1}-2\ln 2+(A+1)2+B\\ 0=e^{1-1}-\ln 1+(A+1)+B\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cancel{e}-2-\cancel{2\ln 2}=\cancel{e}-\cancel{2\ln 2}+2A+2+B\\ 0=1-0+A+1+B\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-4=2A+B\\ 0=A+2+B\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-4-2A=B\\ 0=A+2+B\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=A+2-4-2A\Rightarrow 0=-A-2\Rightarrow \boxed{A=-2}\Rightarrow \boxed{B=-4-2(-2)=0}$$

Hemos obtenido que debe ser A = –2 y B = 0.
La función que cumple todo lo pedido es $f(x)=e^{x-1}-x\ln x-x$.

$$\boldsymbol{f(x)=\ e^{x-1}-xlnx-x}$$

BY NC SA

Problema 7:

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

	Coches	Motos
Aptos	116.383	160.667
No aptos	2.679	3.447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentaron a dicha inspección.

a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?

b) **[1,25 puntos]** Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

Completamos la tabla proporcionada añadiendo los totales.

	Coches	Motos	TOTALES
Aptos	116.383	160.667	277050
No aptos	2.679	3.447	6126
TOTALES	119062	164114	283176

a) Acudieron a la ITV 164114 motos y resultaron aptos 116383 coches, por lo que la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto vale $\frac{164114+116383}{283176}=\frac{4921}{4968}=0.9905$.

b) De los 119062 coches que acudieron a la ITV resultaron no aptos 2679, por lo que la probabilidad de que al elegir un coche este haya resultado no apto vale $\frac{2679}{119062}=0.0225$.

P(moto o apto) = 0,9905; P(no apto/coche) = 0,0225

BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**

b) Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.

c) Este examen consta de siete ejercicios distribuidos en un bloque con un ejercicio obligatorio y tres bloques con dos ejercicios optativos cada uno.

d) Deberá resolver el ejercicio obligatorio y solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques con optatividad.

e) En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.

f) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.

g) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

h) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

i) Se proporcionará la tabla de la distribución Normal. Se permite el uso de regla.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicios 2 y 3:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\displaystyle\int_1^3 e^{x-k}(x-2)\,dx = 2$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicios 4 y 5:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx - y - 2z = 5$.

a) **[1,5 puntos]** Halla m para que r y π sean paralelos.

b) **[1 punto]** Para $m = -8$, calcula la distancia de la recta r al plano π.

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -3 - 2\lambda \end{cases}$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) **[1,5 puntos]** Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicios 6 y 7:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(x) + a(e^x - 1) + \operatorname{sen}(x)}{bx^2 + x - \operatorname{sen}(x)} = 1.$$

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalete es de 70 km/h.

a) **[1 punto]** En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?

b) **[1,5 puntos]** En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05 % de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Se sabe que la suma de tres números naturales es 22 y que la suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61. ¿Puede ser 15 uno de los tres números? En caso afirmativo, calcula los restantes. ¿Existen otras opciones?

Solución:

Llamamos "x", "y", "z" a los tres números naturales.

Obtenemos las ecuaciones que cumplen los números con los datos del problema.

"La suma de tres números naturales es 22" → x + y + z = 22

"La suma de cuatro veces el primero más el triple del segundo más el doble del tercero es 61" → 4x + 3y + 2z = 61

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo intentamos resolver:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=22 \\ 4x+3y+2z=61 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=22-x-z \\ 4x+3y+2z=61 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x+3(22-x-z)+2z=61 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+66-3x-3z+2z=61 \Rightarrow x-z=-5 \Rightarrow z=x+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=22-x-x-5=17-2x \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\lambda \\ y=17-2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{N} \\ z=5+\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones son infinitas. Comprobamos si alguna de estas soluciones tiene un número que sea 15:

$$\left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=17-2\lambda \\ z=5+\lambda \\ x=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda=15 \\ y=17-2\lambda \\ z=5+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=17-2\cdot 15=-13\notin\mathbb{N}\ \ ¡Mal! \\ z=5+15=20 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=17-2\lambda \\ z=5+\lambda \\ y=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=17-2\lambda=15\rightarrow -2\lambda=-2\rightarrow \lambda=1 \\ z=5+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=5+1=6 \end{cases} \Rightarrow ¡¡OK!!$$

$$\left.\begin{matrix} x=\lambda \\ y=17-2\lambda \\ z=5+\lambda \\ z=15 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=17-2\lambda \\ z=5+\lambda=15\rightarrow \lambda=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=17-20=-3\notin\mathbb{N}\ \ ¡Mal! \end{cases}$$

BY NC SA

Existe una solución con uno de los números valiendo 15 es la solución x = 1, y = 15, z = 6.

Esta combinación de números naturales cumple lo pedido.

Las soluciones tienen la expresión:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 17 - 2\lambda;\ \lambda \in \mathbb{N}. \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$$

Damos valores a $\lambda \in \mathbb{N}$ y obtenemos las restantes opciones.

$$\boxed{\lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 17 - 2\cdot 1 = 15 \\ z = 5 + 1 = 6 \end{cases}} \qquad \lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 17 - 2\cdot 2 = 13 \\ z = 5 + 2 = 7 \end{cases}$$

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 17 - 2\cdot 3 = 11 \\ z = 5 + 3 = 8 \end{cases} \qquad \lambda = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 17 - 2\cdot 4 = 9 \\ z = 5 + 4 = 9 \end{cases}$$

$$\lambda = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 17 - 2\cdot 5 = 7 \\ z = 5 + 5 = 10 \end{cases} \qquad \lambda = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 17 - 2\cdot 6 = 5 \\ z = 5 + 6 = 11 \end{cases}$$

$$\lambda = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 17 - 2\cdot 7 = 3 \\ z = 5 + 7 = 12 \end{cases} \qquad \lambda = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 17 - 2\cdot 8 = 1 \\ z = 5 + 8 = 13 \end{cases}$$

Hay muchas soluciones, una de ellas es x = 1, y = 15, z = 6.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicios 2:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Solución 2:

Comprobamos si se puede descomponer la fracción en fracciones simples.

$$x^2+2x+2=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=\text{No existe}$$

No podemos descomponer la fracción en otras fracciones más sencillas. Utilizamos otro método de integración.

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{(x+1)^2+1}$$

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+1}dx=\left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable}\\ x+1=t\Rightarrow dx=dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\int\frac{1}{1+t^2}dt=arctg(t)=arctg(x+1)+K$$

La primitiva de la función es $F(x)=arctg(x+1)+K$. Determinamos el valor de K para que $F(0)=\frac{\pi}{4}$.

$$\left.\begin{matrix}F(0)=\frac{\pi}{4}\\ F(x)=arctg(x+1)+K\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{\pi}{4}=arctg(0+1)+K\Rightarrow\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+K\Rightarrow\boxed{K=0}$$

La primitiva de la función que cumple lo pedido es $F(x)=arctg(x+1)$.

$$\boldsymbol{F(x)=arctg(x+1)}$$

BY NC SA

Ejercicios 3:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Calcula el valor de k para que $\int_1^3 e^{x-k}(x-2)\,dx = 2$.

Solución 3:

Calculamos la integral indefinida.

$$\int e^{x-k}(x-2)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u = x-2 \to du = dx\\ dv = e^{x-k}dx \to v = \int e^{x-k}dx = e^{x-k}\end{array}\right\} = (x-2)e^{x-k} - \int e^{x-k}dx =$$

$$= (x-2)e^{x-k} - e^{x-k} = (x-3)e^{x-k} + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida.

$$\int_1^3 e^{x-k}(x-2)\,dx = \Big[(x-3)e^{x-k}\Big]_1^3 = (3-3)e^{3-k} - (1-3)e^{1-k} = 2e^{1-k}$$

Averiguamos el valor de k para que esta integral definida valga 2.

$$\int_1^3 e^{x-k}(x-2)\,dx = 2 \Rightarrow 2e^{1-k} = 2 \Rightarrow e^{1-k} = 1 = e^0 \Rightarrow 1-k = 0 \Rightarrow \boxed{k=1}$$

Para que se pueda cumplir lo pedido debe ser $k = 1$.

$$\boldsymbol{k = 1}$$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicios 4 y 5:

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ x+2y-z=4 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv mx-y-2z=5$.

a) **[1,5 puntos]** Halla m para que r y π sean paralelos.

b) **[1 punto]** Para $m=-8$, calcula la distancia de la recta r al plano π.

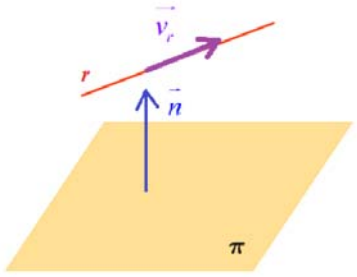
Solución:

a) Hallamos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} x-y+z=3 \\ x+2y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3+y-x \\ x+2y-z=4 \end{cases} \Rightarrow x+2y-3-y+x=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+y=7 \Rightarrow y=7-2x \Rightarrow z=3+7-2x-x=10-3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=\alpha \\ y=7-2\alpha \\ z=10-3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r}=(1,-2,-3) \\ P_r(0,7,10) \end{cases}$$



Para que la recta y el plano sean paralelos el vector normal del plano y el vector director de la recta deben ser perpendiculares y para ello su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=(1,-2,-3) \\ \pi \equiv mx-y-2z=5 \rightarrow \vec{n}=(m,-1,-2) \\ \vec{v_r} \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{n}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,-2,-3)(m,-1,-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m+2+6=0 \Rightarrow \boxed{m=-8}$$

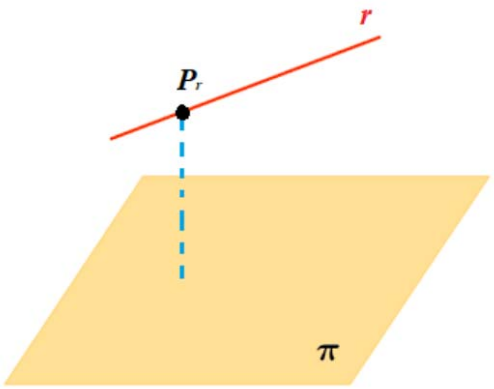
Para $m=-8$ el plano queda $\pi \equiv -8x-y-2z=5$. Con esta condición sabemos que la recta es paralela al plano o está contenida en él. Vemos si el punto $P_r(0,7,10)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -8x-y-2z=5 \\ ¿P_r(0,7,10) \in \pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-8\cdot 0-7-2\cdot 10=5? \Rightarrow ¿-7-20=5? \text{ ¡NO!}$$

BY NC SA

El punto P_r no pertenece al plano por lo que la recta no está contenida en el plano y podemos afirmar que para $m=-8$ la recta es paralela al plano.

b) Para $m=-8$ el plano queda $\pi \equiv -8x-y-2z=5$ y la recta es paralela al plano. La distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano.



$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv -8x-y-2z-5=0\\ P_r(0,7,10)\end{array}\right\} \Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|-8\cdot 0-7-2\cdot 10-5|}{\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\boxed{\frac{32\sqrt{69}}{69}}$$

Para $m=-8$ la distancia de la recta r al plano π vale $\dfrac{32\sqrt{69}}{69}$ unidades.

Para $m=-8$ la distancia de la recta r al plano π vale $\dfrac{32\sqrt{69}}{69}$ unidades.

BY NC SA

Ejercicio 5:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Sean las rectas $r \equiv \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -3-2\lambda \end{cases}$

a) **[1 punto]** Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) **[1,5 puntos]** Halla la ecuación de un plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s.

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} P_r(-1,-2,2) \\ \overrightarrow{v_r} = (4,3,-1) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -3-2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1,2,-3) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-2) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (4,3,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{-1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (4,3,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,2,-3) - (-1,-2,2) = (2,4-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{-20} \cancel{-12} + 4 + 2 - 15 + \cancel{32} = -7 \neq 0$$

El producto mixto tiene un valor distinto de cero. Las rectas se cruzan.

b) Una recta perpendicular a las rectas r y s tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (4,3,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{w_t} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5i + 9j + 7k = (-5,9,7)$$

El plano que contiene a r y a una recta perpendicular a las rectas r y s contiene el punto $P_r(-1,-2,2)$ de la recta r y tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_r} = (4,3,-1)$ y $\overrightarrow{w_t} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s} = (-5,9,7)$.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l} P_r(-1,-2,2)\in\pi \\ \overrightarrow{v_r}=(4,3,-1) \\ \overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}=(-5,9,7) \end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z-2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -5 & 9 & 7 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21(x+1)+5(y+2)+36(z-2)+15(z-2)-28(y+2)+9(x+1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30(x+1)-23(y+2)+51(z-2)=0\Rightarrow 30x+30-23y-46+51z-102=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: 30x-23y+51z-118=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: 30x-23y+51z-118=0$.

30x – 23y + 51z = 118

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicios 6 y 7:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Calcula a y b sabiendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)+a(e^x-1)+\mathrm{sen}(x)}{bx^2+x-\mathrm{sen}(x)}=1.$$

Solución:

Calculamos el límite indicado.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xsen(x)+a\left(e^x-1\right)+sen(x)}{bx^2+x-sen(x)}=\frac{0\cdot sen(0)+a\left(e^0-1\right)+sen(0)}{b\cdot 0^2+0-sen(0)}=\frac{0}{0}=$$

$$=In\,\mathrm{det}\,er\,\mathrm{min}\,ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)+x\cos(x)+ae^x+\cos(x)}{2bx+1-\cos(x)}=$$

$$=\frac{sen(0)+0\cdot\cos(0)+ae^0+\cos(0)}{2b\cdot 0+1-\cos(0)}=\frac{0+0+a+1}{0+1-1}=\frac{1+a}{0}=\ldots$$

Para que este límite no valga ∞ debe ser el numerador igual a cero para que surja una indeterminación y sigamos con su cálculo. Es decir, debe ser $a=-1$. Seguimos con el cálculo del límite considerando que $a=-1$.

$$\ldots=\{a=-1\}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)+x\cos(x)-e^x+\cos(x)}{2bx+1-\cos(x)}=\frac{0}{0}=$$

$$=In\,\mathrm{det}\,er\,\mathrm{min}\,ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+\cos(x)-xsen(x)-e^x-sen(x)}{2b+sen(x)}=$$

$$=\frac{\cos(0)+\cos(0)-0\cdot sen(0)-e^0-sen(0)}{2b+sen(0)}=\frac{2-1}{2b}=\boxed{\frac{1}{2b}}$$

Igualamos el valor del límite a 1 y obtenemos el valor de b.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}\dfrac{xsen(x)+a\left(e^x-1\right)+sen(x)}{bx^2+x-sen(x)}=1\\ a=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2b}=1\Rightarrow 1=2b\Rightarrow\boxed{b=\frac{1}{2}}$$

Los valores buscados son $a=-1$ y $b=\frac{1}{2}$.

a = -1; b = 1/2

BY NC SA

Ejercicio 7

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

La velocidad máxima a la que puede circular un vehículo sobre un determinado puente del río Guadalete es de 70 km/h.

a) **[1 punto]** En uno de los sentidos de circulación, la velocidad de los vehículos sigue una distribución normal de media 64 km/h y desviación típica 4 km/h. Si el radar de control salta a partir de 72 km/h, ¿cuál es el porcentaje de vehículos que se sancionan?

b) **[1,5 puntos]** En el sentido contrario, también sigue una distribución normal de la que sabemos que la velocidad media es de 63,6 km/h y que el 5,05 % de todos los vehículos viaja a más de 80 km/h. En este caso, ¿cuánto vale la desviación típica?

Solución:

a) X = velocidad de los vehículos en uno de los sentidos de circulación. X = N(64, 4).
Calculamos la probabilidad de que un vehículo supere los 72 km/h: $P(X>72)$.

$$P(X>72)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{72-64}{4}\right)=P(Z>2)=$$

$$=1-P(Z\le 2)=\left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.9772=\boxed{0.0228}$$

El porcentaje de vehículos que se sancionan es del 2.28 %.

b) Y = velocidad de los vehículos en el otro de los sentidos de circulación. Y = N(63.6, σ).
Sabemos que $P(Y>80)=0.0505$. Determinamos el valor de σ usando esta información.

$$P(Y>80)=0.0505\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z>\frac{80-63.6}{\sigma}\right)=0.0505\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{16.4}{\sigma}\right)=1-0.0505=0.9495\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{16.4}{\sigma}=1.64\Rightarrow\boxed{\sigma=\frac{16.4}{1.64}=10}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591

La desviación típica tiene un valor de 10 km/h.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Milagros Latasa Asso y
Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO
CURSO: **2024 – 2025**
EJERCICIO DE **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 horas y 30 minutos.**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO (veánse las distintas partes del examen)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Queremos encriptar el mensaje "HOLA" con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:
Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra "HOLA") en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, M_C con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.
Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado,

$$M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ por la matriz M_C obtenida en el apartado anterior

El resultado del último paso, M_{final} , es el mensaje encriptado.

a) *(0,5 puntos)* Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje "HOLA" inicial.

b) *(0,5 puntos)* Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) *(1 punto)* Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito arriba, ¿cual es el mensaje original?

d) *(0,5 puntos)* Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que *ME*, ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD

Ejercicio 2:

Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 *(2,5 puntos)* Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen

$$a = (u \times v) + w, \quad b = v \times (v \times w) \quad \text{y} \quad c = u \cdot (v \times w).$$

Indica si a, b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u, v y w.

2.2 a) *(1 punto)* Halla las ecuaciones paramétricas de la recta *s* que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

Comunidad Autónoma de ARAGÓN
CC BY NC SA
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

b) *(1,5 puntos)* Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3:

Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo $[0,1]$, por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en $\mathbb{R}$. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$err(m) = \int_0^1 (f(x) - gm(x))^2 dx.$$

a) *(1,5 puntos)* Comprueba que $err(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$ con $m \in \mathbb{R}$

b) *(1 punto)* ¿Cuál es el valor de $m \in \mathbb{R}$ que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

3.2

a) *(1,25 puntos)* Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sen(x^2)}{1 - cos(x)}$

b) *(1,25 puntos)* Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

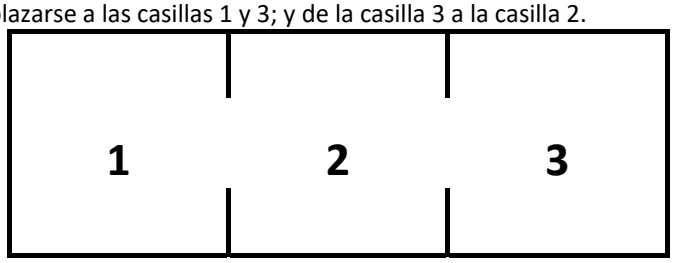
$$f(x) = cos^2(x)sen(x), \qquad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

Ejercicio 4:

Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.



Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda; si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

a) *(0,5 puntos)* Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.

b) *(1 punto)* Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?

c) *(1 punto)* Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es 1/2 y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de 1/4 para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?

4.2 Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que $P(A|B) = 2/3$ y $P(B|A) = 3/4$.

a) *(1 punto)* Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría $P(A \cup B)$?

b) *(1,5 puntos)* Si $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, ¿cuáles son las probabilidades $P(A)$, $P(B)$ y $P(A \cup \bar{B})$?

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Queremos encriptar el mensaje "HOLA" con un sistema de encriptado que consta de los siguientes pasos:

Paso 1: Convertimos cada carácter del mensaje a encriptar (en nuestro caso la palabra "HOLA") en un número según la tabla siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Paso 2: Construimos una matriz columna, M_C con los cuatro números obtenidos en el paso anterior.
Paso 3: Multiplicamos la matriz de encriptado,

$M_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ por la matriz M_C obtenida en el apartado anterior

El resultado del último paso, M_{final} , es el mensaje encriptado.

a) *(0,5 puntos)* Obtén el mensaje encriptado al que se llega a partir del mensaje "HOLA" inicial.
b) *(0,5 puntos)* Explica cómo podríamos realizar el proceso de desencriptado para recuperar un mensaje a partir de un mensaje encriptado recibido.

c) *(1 punto)* Si hemos obtenido el mensaje encriptado $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$ con el proceso descrito arriba, ¿cual es el mensaje original?.

d) *(0,5 puntos)* Si quisiéramos utilizar otra matriz de encriptado, del mismo tamaño que M_E, ¿qué condición debería cumplir dicha matriz para poder realizar el proceso completo de encriptado y desencriptado sin problemas?

Solución:

a) Teniendo en cuenta la tabla que aparece en el paso 1 y las indicaciones del paso 2, la matriz M_C que corresponde al mensaje HOLA es $M_C = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aplicamos entonces el proceso descrito en el paso 3 para desencriptar HOLA

$$M_{final} = M_E . M_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ -21 \\ -25 \\ -36 \end{pmatrix}$$

El mensaje encriptado de HOLA es $\begin{pmatrix} \mathbf{37} \\ \mathbf{-21} \\ \mathbf{-25} \\ \mathbf{-36} \end{pmatrix}$

Textos Marea Verde

b) La ecuación matricial $M_{final} = M_E . M_C$ describe el proceso de encriptado. Podremos conocer el mensaje inicial, conociendo el final y la matriz de encriptado siempre que la matriz de encriptado sea regular, es decir, siempre que $\exists M_E^{-1}$. En este caso, el proceso lo obtendremos resolviendo la ecuación anterior, considerando $M_C$como incógnita:

$M_{final} = M_E . M_C \Rightarrow$ (multiplicando por M_E^{-1}por la izquierda)

$$M_E^{-1} . M_{final} = M_E^{-1} . (M_E . M_C) \underbrace{=}_{(1)} (M_E^{-1} . M_E) . M_C = I_4 . M_C \underbrace{=}_{(2)} M_C$$

$(1) Asociativa\ producto\ matrices$ $\quad (2)\quad I_4 matriz\ identidad\ de\ orden\ 4$

El mensaje original se obtiene si $\exists M_E^{-1}$ mediante $M_C = M_E^{-1} . M_{final}$

c) En este caso la matriz M_E es regular ya que

$$|M_E| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{f2'=f2+f1 \\ f3`=f3+f1 \\ f4`=f4+f1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto, es posible encontrar la solución pedida. Podemos seguir varios caminos para encontrarla. Describimos dos

c_1) Utilizando la igualdad obtenida en el apartado b): $M_C = M_E^{-1} . M_{final}$

Resulta muy sencillo en este caso, obtener M_E^{-1} utilizando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{\substack{f2'=f2+f1 \\ f3`=f3+f1 \\ f4`=f4+f1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underbrace{\sim}_{f1``=f1`-(f2'+f3'+f4')} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Entonces $$M_E^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Procedemos a buscar el mensaje original que origina $M_{final} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix}$

Textos Marea Verde

$$M_C = M_E^{-1}.M_{final} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

c$_2$) *Pasamos de la ecuación matricial a un sistema de ecuaciones lineales y lo resolvemos:*

Para ello, nombramos los elementos de la matriz $M_C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$$M_{final} = M_E.M_C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -21 \\ -25 \\ -16 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S \equiv \begin{cases} x + y + z + t = 30 \\ -x \quad - z - t = -21 \\ -x - y \quad - t = -25 \\ -x - y - z \quad = -16 \end{cases}$$

Busquemos un sistema equivalente triangular mediante el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -21 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -25 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -16 \end{pmatrix} \underset{\substack{f2'=f2+f1 \\ f3`=f3+f1 \\ f4`=f4+f1}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente es

$$S' \equiv \begin{cases} x + y + z + t = 30 \\ \quad y \quad = 9 \\ \quad z = 5 \\ \quad t = 14 \end{cases}$$

Solo nos falta obtener x : $x = 30 - y - z - t = 30 - 9 - 5 - 14 = 2$

Obtenemos igualmente $M_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$

Y conocida la matriz Mc, descubrimos la palabra encriptada originariamente

$$M_C = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} \underset{\substack{con\ la\ tabla\ del\ paso\ 1 \\ llegamos\ al\ mensaje\ original}}{\rightarrow} \begin{matrix} B \\ I \\ E \\ N \end{matrix}$$

El mensaje original es "BIEN"

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Ejercicio 2.1 *(2,5 puntos)*

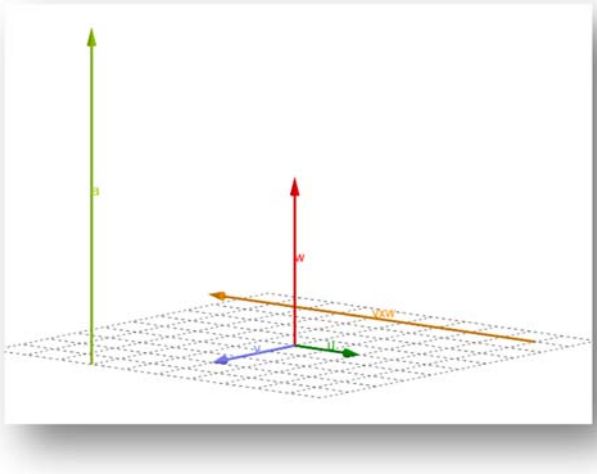
Sean u y v dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen

$$a = (u \times v) + w, \quad b = v \times (v \times w) \text{ y } \quad c = u \cdot (v \times w).$$

Indica si a, b y c son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos o perpendiculares a cada uno de los vectores u, v y w.

Solución

$$a = (u \times v) + w \underbrace{=}_{\text{por definición de } w} w + w \underbrace{=}_{\substack{\text{Propiedad distributivs del producto por un escalar} \\ \text{con respecto a la suma de escalares}}} (1+1)w = 2w$$



a es un vector paralelo a w por ser el producto de un escalar por w

$u \times v$ es perpendicular a u y a $v \Rightarrow a = 2w$ es perpendicular a u y a v

a es un vector paralelo a w y perpendicular a u y a v

u y v son perpendiculares y w es perpendicular a ambos$\Rightarrow$ $v \times w$ es paralelo a $u \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \,/\, v \times w = \alpha u$ (*)

Entonces

$$b = v \times (v \times w) = v \times (\propto u) = \propto (v \times u) = -\propto (u \times v) = -\propto w$$

aplicando las propiedades del producto vectorial de asociatividad mixta y anticonmutatividad

Luego b es un vector paralelo a w por ser el producto de un escalar por w

$u \times v$ es perpendicular a u y a $v \Rightarrow b = -\propto w$ es perpendicular a u y a v

a y b son paralelos a w y por tanto entre sí

b es un vector paralelo a w y perpendicular a u y a v

a y b son paralelos

Por último, c es el producto escalar de dos vectores y por tanto un escalar

$$c = u \cdot (v \times w) = u.(\propto u) = \propto (u\,.\,u) = \propto |u|.|u|\,.\cos 0 = \propto |u|^2 \in \mathbb{R}$$

c es un escalar

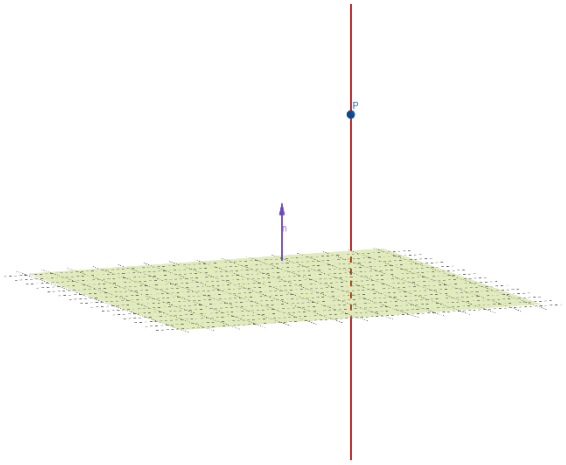
Ejercicio 2.2

a) *(1 punto)* Halla las ecuaciones paramétricas de la recta *s* que pasa por el punto $P(4,-3,0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.

b) *(1,5 puntos)* Halla la ecuación del plano que contiene al punto $Q(1,2,3)$ y a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Solución:



a) El verctor normal a $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$ $\vec{n} = (1,-2,1)$ es también paralelo a la recta r buscada y por tanto un vector director de la misma

Podemos escribir las ecuaciones paramètricas de r

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta perpendicular a π que pasa por P es

$$\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -3 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

b) Ninguno de los planos que definen las ecuaciones paramétricas de la recta, contiene al punto Q, y el plano π buscado debe pertenecer al haz que determinan ambos

La ecuación $\mathcal{H}_\alpha \equiv x + y + z - 1 + \alpha(x - 2y) = 0$ representa a todos los planos que contienen a la recta excepto a $x - 2y = 0$, pero sabemos que no es solución,

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} / \ \pi \equiv x + y + z - 1 + \alpha(x - 2y) = 0$$

$$Q(1,2,3) \in \pi \Rightarrow 1 + 2 + 3 - 1 + \alpha(1 - 4) = 0 \Rightarrow 5 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\pi \equiv x + y + z - 1 + \frac{5}{3}(x - 2y) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z - 1 + \frac{5}{3}(x - 2y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 3(x + y + z - 1) + 5(x - 2y) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 8x - 7y + 3z - 3 = 0$$

El plano que contiene a r y pasa por Q es $\boldsymbol{\pi \equiv 8x - 7y + 3z - 3 = 0}$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Ejercicio 3.1:

Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo $[0, 1]$, por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en $\mathbb{R}$. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$err(m) = \int_0^1 (f(x) - gm(x))^2 dx.$$

a) *(1,5 puntos)* Comprueba que $err(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$ con $m \in \mathbb{R}$

b) *(1 punto)* ¿Cuál es el valor de $m \in$ R que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

Solución:

a) Busquemos una primitiva de $(f(x) - gm(x))^2$

$$\int (f(x) - gm(x))^2 dx = \int (e^x - mx)^2 dx = \int (e^{2x} - 2\,mxe^x + m^2x^2)\, dx =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} - 2\,m \int x\,e^x dx + m^2 \frac{x^3}{3} = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{m^2x^3}{3} - 2\,m \int x\,e^x dx \underbrace{=}_{(*)} \frac{e^{2x}}{2} + \frac{m^2x^3}{3} - 2\,m[xe^x - e^x + k] =$$

$$= \frac{e^{2x}}{2} + \frac{m^2x^3}{3} - 2\,mxe^x + 2me^x + C = F(x) + C$$

(*) Integración por partes

$u = x$	$du = dx$	$\int x\,e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k$
$dv = e^x dx$	$v = e^x$	

Tomamos como primitiva $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{m^2x^3}{3} - 2\,mxe^x + 2me^x$

Aplicamos la regla de Barrow para calcular el error

$$err(m) = \int_0^1 \big(f(x) - gm(x)\big)^2 dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} + \frac{m^2x^3}{3} - 2\,mxe^x + 2me^x\right]_0^1 = F(1) - F(0) =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + \frac{m^2}{3} - 2\,me + 2me\right) - \left(\frac{e^0}{2} + \frac{0}{3} - 2me^0\ 0 + 2me^0\right) = \frac{e^2}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{1}{2} - 2m = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$$

$$\boldsymbol{err(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}\ \text{con}\ m \in \mathbb{R}}$$

b) $err(m)$ es una función polinómica con variable m, continua y derivable en $\mathbb{R}$. Podemos encontrar sus extremos a partir de los valores que anulan su derivada

$$err'(m) = -2 + \frac{2m}{3} \qquad err''(m) = \frac{2}{3} > 0$$

el valor que anula la primera derivada es mínimo relativo

$$err'(m) = -2 + \frac{2m}{3} = 0 \Rightarrow -6 + 2m = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$err(3) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 6 + \frac{9}{3} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 6 + 3 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 3 = \frac{e^2 - 7}{2}$$

Para $m = 3$ se obtiene el mínimo valor de $err(m)$ y es $\frac{e^2-7}{2}$

Ejercicio 3.2

a) *(1,25 puntos)* Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sen(x^2)}{1 - cos(x)}$

b) *(1,25 puntos)* Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = cos^2(x)sen(x), \qquad x \in [0, \pi]$$

y el eje de abscisas.

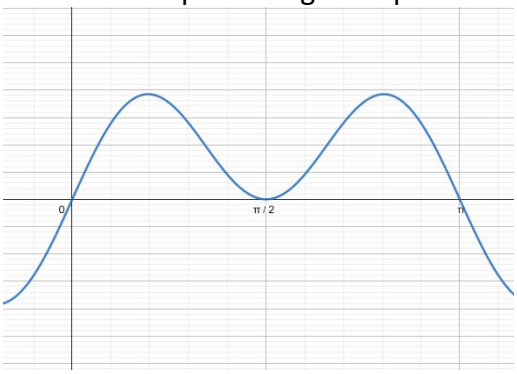
Solución

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sen(x^2)}{1 - cos(x)} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{Regla\ de\ l'Hôpital} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2x\, cos(x^2)}{sen(x)} = \frac{0}{0} =$

$$\underbrace{=}_{Regla\ de\ l'Hôpital} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\, cos(x^2) - 2x\,.\ 2x\left(-sen(x^2)\right)}{cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\, cos(x^2) + 4x^2 sen(x^2)}{cos(x)} \frac{2 - 2\cos 0 + 0}{\cos 0} = \frac{2 - 2 + 0}{\cos 0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - sen(x^2)}{1 - cos(x)} = 0$$

b) Buscamos en primer lugar los puntos de corte de la función f con OX



$$f(x) = cos^2(x)sen(x) = 0 \quad x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos^2(x) = 0 \\ sen(x) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos(x) = 0 \\ sen(x) = 0 \end{cases} \quad x \in [0, \pi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = 0, \quad x = \pi \end{cases}$$

El área total será la suma de las áreas determinadas por la gráfica de f entre cada dos puntos de corte con OX consecutivos

f es positiva o nula tanto en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ como en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ya que $cos^2(x) \geq 0\,, sen(x) \geq 0 \ \forall x \in [0, \pi]$

No obstante, para calcular el área pedida A, tomamos valor absoluto en cada uno de los dos sumandos que debemos considerar

Comunidad Autónoma de ARAGÓN CC BY NC SA www.apuntesmareaverde.org.es Textos Marea Verde

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)sen(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos^2(x)sen(x)dx\right| \underbrace{=}_{por\ la\ regla\ de\ Barrow}$$

$= \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$ siendo F una primitiva de $f(x) = cos^2(x)sen(x)$

Procedemos para encontrar F

$$\int cos^2(x)sen(x)\,dx \underbrace{=}_{\substack{\cos x = t \\ -senx\,dx = dt}} -\int t^2\,dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{cos^3(x)}{3} + C$$

Elegimos $F(x) = -\frac{cos^3(x)}{3}$ y calculamos el área A:

$$A = \left|F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)\right| + \left|F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|-\frac{cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{cos^3(0)}{3}\right| + \left|-\frac{cos^3(\pi)}{3} + \frac{cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3}\right| =$$

$$= \left|-\frac{0}{3} + \frac{1}{3}\right| + \left|-\frac{(-1)}{3} + \frac{0}{3}\right| = \frac{2}{3}u^2$$

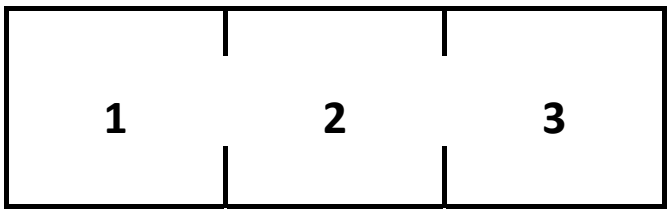
El área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas es $\frac{2}{3}u^2$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

Ejercicio 4.1

En un juego se cuenta con el siguiente tablero, de manera que una ficha puede desplazarse de la casilla 1 a la 2; de la 2 puede desplazarse a las casillas 1 y 3; y de la casilla 3 a la casilla 2.

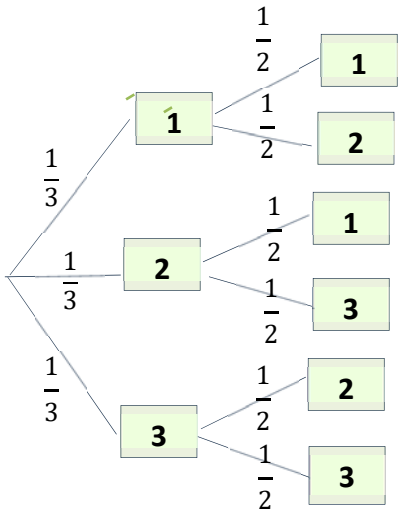


Para decidir el movimiento a realizar en cada turno, se lanza una moneda equilibrada (misma probabilidad de cara y cruz). Si sale cara, se intenta desplazar la ficha a la izquierda; si sale cruz, a la derecha. En caso de no poder realizar el desplazamiento correspondiente, la ficha se queda en la casilla en la que está durante ese turno.

a) *(0,5 puntos)* Construye un árbol (o una tabla) que muestre las probabilidades de pasar de una casilla a otra en un turno.
b) *(1 punto)* Si la ficha se encuentra en la casilla 1, ¿cuál es la probabilidad de que tras tres turnos se encuentre de nuevo en la casilla 1?
c) *(1 punto)* Para comenzar el juego, se procede a un sorteo para ver dónde comienza la ficha. Si la probabilidad de empezar en la casilla 1 es 1/2 y la probabilidad de empezar en la casilla 2 y en la 3 es de 1/4 para cada una, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas dos turnos después de empezar?

Solución

Construyamos un diagrama en árbol que describa todas las posibles posiciones de la ficha desde el momento inicial hasta la acción que procede tras lanzar la moneda



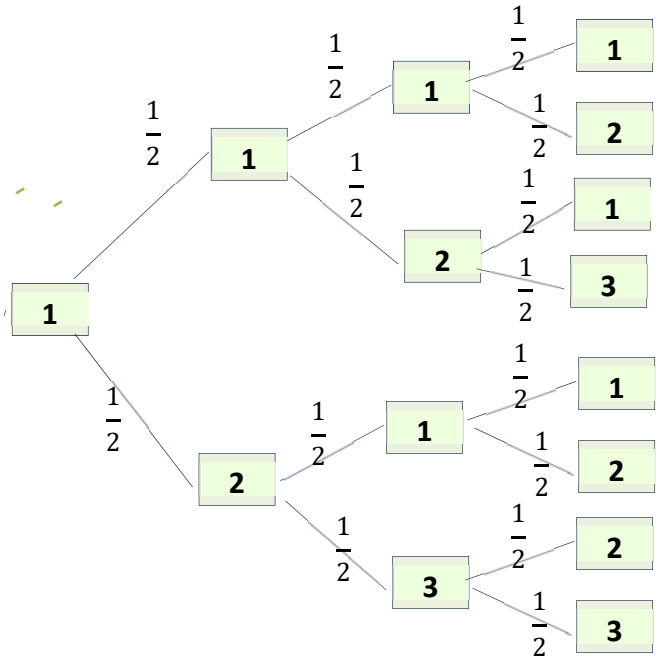
Denotamos por 1,2,3 los sucesos “la ficha está en la casilla1”, “la ficha está en la casilla2” o “la ficha está en la casilla3”,

En la situación inicial existe la misma probabilidad de que la ficha esté en cada una de las tres casillas, por tanto $\frac{1}{3}$ en cada rama de la primera fase del árbol. La probabilidad de cada rama en la segunda fase es $\frac{1}{2}$, coincidiendo con la probabilidad de obtener cara o cruz en la moneda que se lanza.

Todos los sucesos elementales tienen probabilidad $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Textos Marea Verde

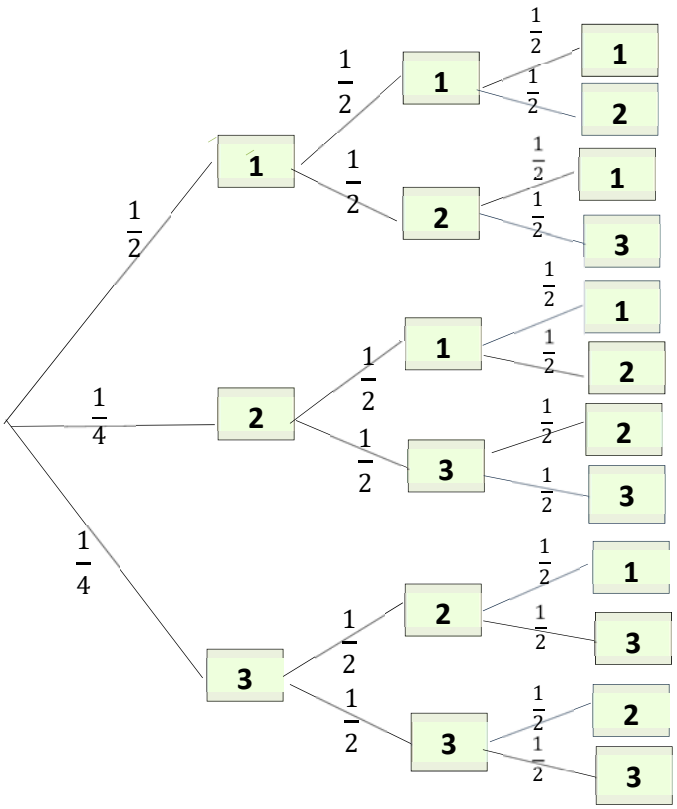
a)



$$P(\text{“la ficha esté en la casilla1 tras tres tiradas”}) = P(111) + P(121) + P(211) =$$

$$= P(CCC) + P(CXC) + P(XCC) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

La probabilidad de que, si la ficha está en la casilla 1, se encuentre de nuevo en ella después de tres tiradas es $\frac{3}{8}$


1/2
1/4
1/4
1
2
3
1
2
1
2
1
2

Ejercicio 4.2

Dados dos sucesos aleatorios de los que se sabe que $P(A|B) = 2/3$ y $P(B|A) = 3/4$.

a) *(1 punto)* Si A y B fueran independientes, ¿cuánto valdría $P(A \cup B)$?
b) *(1,5 puntos)* Si $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, ¿cuáles son las probabilidades $P(A), P(B)$ y $P(A \cup \bar{B})$?

Solución:

a) A y B independientes $\Rightarrow \begin{cases} P(A|B) = \frac{2}{3} = P(A) \\ P(B|A) = \frac{3}{4} = P(B) \\ P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{2}{3}.\frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8+9-6}{12} = \frac{11}{12}$$

Si A y B son independientes, $\boldsymbol{P(A \cup B) = \frac{11}{12}}$

b) $P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $\quad P(B|A) = \frac{3}{4} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ $\quad P(A \cup B) = \frac{5}{6} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Por comodidad de notación hagamos $x = P(A)$ $\quad y = P(B)$ $\quad z = P(A \cap B)$

Y resolvamos el sistema $\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{z}{y} \\ \frac{3}{4} = \frac{z}{x} \\ \frac{5}{6} = x + y - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3z}{2} \\ x = \frac{4z}{3} \\ \frac{4z}{3} + \frac{3z}{2} - z = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3z}{2} \\ x = \frac{4z}{3} \\ \frac{8z}{6} + \frac{9z}{6} - \frac{6z}{6} = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3z}{2} \\ x = \frac{4z}{3} \\ 11z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{15}{22} \\ x = \frac{20}{33} \\ z = \frac{5}{11} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{20}{33} \quad P(B) = \frac{15}{22} \quad P(A \cap B) = \frac{5}{11}$$

Para finalizar:

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) \underbrace{=}_{(*)} P(A) + [1 - P(B)] - [P(A) - PA \cap B)] =$$

$$= \frac{20}{33} + 1 - \frac{15}{22} - \frac{20}{33} + \frac{5}{11} = \frac{17}{22}$$

(*) $A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow\Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{20}{33} \quad P(B) = \frac{15}{22} \quad P(A \cup \bar{B}) = \frac{17}{22}}$$

Textos Marea Verde

Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CURSO: **2024 – 2025**

EJERCICIO DE **MATEMÁTICAS II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 horas y 30 minutos.**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO (veánse las distintas partes del examen)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción 1 y Opción 2, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos A(0, 0, 0), B(2, 0, 1/2) y C(3/2, 3, 1) y el vértice superior, D, se encuentra en una viga recta entre los puntos E(0, 1, 3) y F(3, 2, 3) (es decir, $D = E + \lambda\overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0, 1]$).

a) *(1,5 puntos)* Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).

b) *(1 punto)* Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$.

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ 8x + my - 6z = -8 \\ -x - 2y + m^2 z = m \end{cases}$$

Con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro.

a) *(1,5 puntos)* Estudia, en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) *(1 punto)* Resuelve, si es posible, el sistema para $m = 1$.

2.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) *(1.5 puntos)* Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\begin{cases} A \cdot B = -B \\ A \cdot C = B - C \end{cases}.$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.

b) *(1 punto)* Sea D una matriz columna no nula tal que $A \cdot D = D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1} \cdot D = D$.

Textos Marea Verde

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 a) *(0.5 puntos)* Dada la función $f(x)=2+sen(x)\cos(x)$ con $x\in\mathbb{R}$, calcula $f'(x)$.

b) *(1 punto)* Obtén $\int \frac{\cos^2(x)-sen^2(x)}{2+sen(x)\cos(x)}dx$.

c) *(1 punto)* Calcula (si existe), en función del valor de $k\in\mathbb{Z}$, el valor del límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}$$

3.2 Sea $g(x)=x-sen(x)$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) *(0,5 puntos)* Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de *g(x)*.

b) *(0,5 puntos)* Obtén los máximos y mínimos absolutos de *g(x)* en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

c) *(1,5 puntos)* Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x)=xg(x)$, el eje X y las rectas $x=\pi/2$ y $x=\pi$.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.

La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.

Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:

a) *(1 punto)* Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) *(1 punto)* Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?

c) *(0,5 puntos)* Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?

4.2 El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PIS.A.	11125	527
RHOM.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

a) *(1,25 puntos)* El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?

b) *(1,25 puntos)* El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?

Textos Marea Verde

SOLUCIONES

Ejercicio 1:

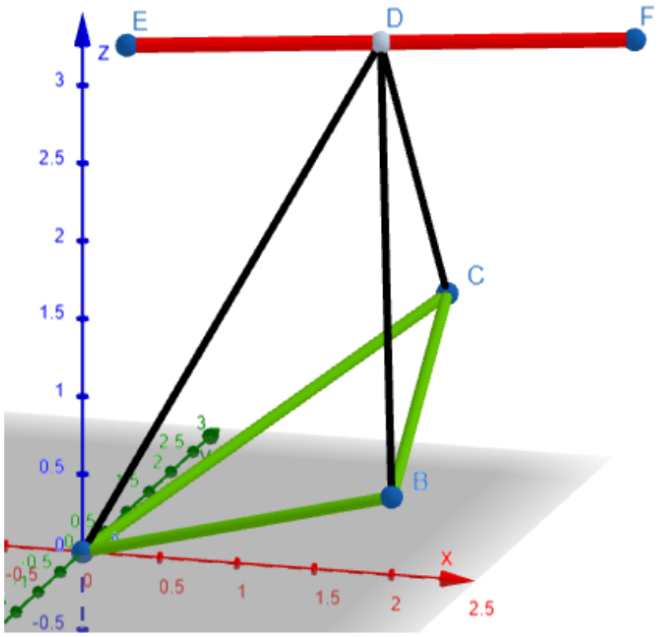
1. Se quiere construir una estructura con forma de tetraedro cuya base tiene como vértices los puntos A(0, 0, 0), B(2, 0, 1/2) y C(3/2, 3, 1) y el vértice superior, D, se encuentra en una viga recta entre los puntos E(0, 1, 3) y F(3, 2, 3) (es decir, $D = E + \lambda\overrightarrow{EF}$ con $\lambda \in [0, 1]$).

a) *(1,5 puntos)* Calcula el volumen máximo de dicha estructura (todos los datos están dados en metros).

b) *(1 punto)* Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura, calcula la altura de la estructura (desde D a la base) si tomásemos $\lambda = 1$

Solución:

La situación planteada es la del dibujo donde hemos elegido un punto D de la viga EF.



a) Hallamos las coordenadas del punto D.

$$\overrightarrow{EF} = (3,2,3) - (0,1,3) = (3,1,0)$$

$$D = E + \lambda\overrightarrow{EF} = (0,1,3) + \lambda(3,1,0) = (3\lambda, 1+\lambda, 3)$$

El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]$.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2,0,0.5) - (0,0,0) = (2,0,0.5)\\ \overrightarrow{AC} &= (1.5,3,1) - (0,0,0) = (1.5,3,1)\\ \overrightarrow{AD} &= (3\lambda, 1+\lambda, 3) - (0,0,0) = (3\lambda, 1+\lambda, 3)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0.5 \\ 1.5 & 3 & 1 \\ 3\lambda & 1+\lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 18 + 0.75(1+\lambda) - 4.5\lambda - 2(1+\lambda) = 18 + 0.75 + 0.75\lambda - 4.5\lambda - 2 - 2\lambda = 16.75 - 5.75\lambda$$

El volumen del tetraedro depende del valor de λ según la expresión:

Textos Marea Verde

$$V(\lambda)=\frac{16.75-5.75\lambda}{6};\ \text{siendo}\ \lambda\in[0,\ 1]$$

El máximo valor se alcanza para el valor de λ más pequeño, es decir, para λ = 0.

El volumen máximo es de $V(0)=\frac{-5.75\cdot 0+16.75}{6}=\frac{16.75}{6}\simeq 2.79167$ metros cúbicos.

b) Para $\lambda=1$ el volumen de la pirámide es $V(1)=\frac{-5.75+16.75}{6}=\frac{11}{6}$ metros cúbicos.

El área de la base es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}=(2,0,0.5)\\ \overrightarrow{AC}=(1.5,3,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 0 & 0.5\\ 1.5 & 3 & 1\end{vmatrix}=0.75j+6k-2j-1.5i=(-1.5,-1.25,6)$$

$$Área\ Base=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-1.5)^2+(-1.25)^2+6^2}}{2}=\frac{7\sqrt{13}}{8}$$

Despejamos la altura de la pirámide en la expresión del volumen.

$$Volumen=\frac{Área\,base\cdot Altura}{3}\Rightarrow\frac{11}{6}=\frac{\frac{7\sqrt{13}}{8}\cdot Altura}{3}\Rightarrow\frac{11}{2}=\frac{7\sqrt{13}}{8}\cdot Altura\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Altura=\frac{88}{14\sqrt{13}}=\boxed{\frac{44\sqrt{13}}{91}\simeq 1.7433\ metros}$$

Textos Marea Verde

Ejercicio 2.1:

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 8x+my-6z=-8 \\ -x-2y+m^2z=m \end{cases}$$

Con $m\in\mathbb{R}$ un parámetro.

a) *(1,5 puntos)* Estudia, en función del parámetro $m\in\mathbb{R}$, el número de soluciones del sistema anterior.

b) *(1 punto)* Resuelve, si es posible, el sistema para $m=1$.

Solución:

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ -1 & -2 & m^2 \end{pmatrix}$.y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & m & -6 & -8 \\ -1 & -2 & m^2 & m \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ -1 & -2 & m^2 \end{vmatrix}=\{\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 1^a\}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 8 & m & -6 \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{vmatrix}=\{\text{Fila } 2^a-8\cdot\text{Fila } 1^a\}=$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & m-16 & 2 \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{vmatrix}=(m-16)(m^2-1)=(m-16)(m-1)(m+1)$$

$$|A|=0\Rightarrow(m-16)(m-1)(m+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{m=16}\\ \boxed{m=1}\\ \boxed{m=-1}\end{cases}$$

El determinante se anula para $m=16$, $m=1$ y $m=-1$. Analizamos cuatro casos por separado.

CASO 1. $m\neq16$, $m\neq1$ y $m\neq-1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $m=16$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 16 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 256 & 16 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3^a+Fila\,1^a & & & \\ -1 & -2 & 256 & 16 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 255 & 15\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2^{a} - 8\cdot Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 8 & 16 & -6 & -8 \\ -8 & -16 & 8 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^{a} - 255\cdot Fila\,2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 510 & 30 \\ 0 & 0 & -510 & 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 30 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ \underbrace{0}_{A} & \underbrace{0}_{A} & \underbrace{0}_{A} \end{array}}^{A/B} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 30 \end{array} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m = 1$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 8 & 1 & -6 & -8 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^{a} + Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,3^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila\,2^{a} - 8\cdot Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 8 & 1 & -6 & -8 \\ -8 & -16 & 8 & 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & -15 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila\,2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -15 & 2 \\ \underbrace{0}_{A} & \underbrace{0}_{A} & \underbrace{0}_{A} \end{array}}^{A/B} & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el rango de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 4. $m=-1$

El determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\8&-1&-6&-8\\-1&-2&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}Fila\,3^a+Fila\,1^a\\-1&-2&1&-1\\1&2&-1&-1\\\hline0&0&0&-2\end{array}\right.\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a\Bigg\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}Fila\,2^a-8\cdot Fila\,1^a\\8&-1&-6&-8\\-8&-16&8&8\\\hline0&-17&2&0\end{array}\right.\rightarrow Nueva\ Fila\,2^a\Bigg\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{1&2&-1&-1}^{A/B}\\0&-17&2&0\\\underbrace{0&0&0}_{A}&-2\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m\neq16$, $m\neq1$ y $m\neq-1$ el sistema tiene 1 solución, si $m=16$ o $m=-1$ el sistema tiene 0 soluciones y si $m=1$ el sistema ∞ soluciones.

b) Para $m=1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix}\overbrace{1&2&-1&-1}^{A/B}\\0&-15&2&0\\\underbrace{0&0&0}_{A}&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y-z=-1\\-15y+2z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y-z=-1\\2z=15y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y-z=-1\\z=\dfrac{15}{2}y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2y-\frac{15}{2}y=-1\Rightarrow x-\frac{11}{2}y=-1\Rightarrow x=-1+\frac{11}{2}y\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=-1+\dfrac{11}{2}\lambda\\y=\lambda\\z=\dfrac{15}{2}\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases}x=-1+\dfrac{11}{2}\lambda\\y=\lambda\\z=\dfrac{15}{2}\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.2:

2.2 Sea $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$

a) *(1.5 puntos)* Estudia si existen matrices columna no nulas B y C tales que

$$\begin{cases}A\cdot B=-B\\A\cdot C=B-C\end{cases}.$$

En caso afirmativo, calcula la expresión general de dichas matrices B y C.

b) *(1 punto)* Sea D una matriz columna no nula tal que $A\cdot D=D$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}\cdot D=D$.

Solución:

a) Para que sean posibles los productos $A\cdot B$ y $A\cdot C$ las matrices columna deben ser de dimensiones 4×1.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\b\\-c+d\\-d\end{pmatrix}\qquad A\cdot C=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\f\\g\\h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e+f\\f\\-g+h\\-h\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}A\cdot B=-B\\A\cdot C=B-C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}a+b\\b\\-c+d\\-d\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}e+f\\f\\-g+h\\-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}e\\f\\g\\h\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=-a\to b=-2a\\b=-b\to\boxed{b=0}\\-c+d=-c\to\boxed{d=0}\\-d=-d\to0=0\\\\e+f=a-e\to2e+f=a\\f=b-f\to2f=b\\-g+h=c-g\to h=c\\-h=d-h\to\boxed{0=d}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=-2a\to\boxed{a=0}\\2e+f=a\\2f=0\to\boxed{f=0}\\h=c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2e+0=0\to\boxed{e=0}\\h=c\end{cases}\Rightarrow\boxed{h=c}$$

Las matrices columna que cumplen lo pedido son $B=\begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0\\0\\g\\c\end{pmatrix}$

b) Suponemos que se cumple $A\cdot D=D$ y sabemos que existe la inversa de la matriz A. Multiplicamos en ambos lados de la igualdad por la inversa de A.

$$A\cdot D=D\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot D=A^{-1}\cdot D\Rightarrow I\cdot D=A^{-1}\cdot D\Rightarrow A^{-1}\cdot D=D$$

Ejercicio 3.1:

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 a) *(0.5 puntos)* Dada la función $f(x)=2+sen(x)\cos(x)$ con $x\in\mathbb{R}$, calcula $f'(x)$.

b) *(1 punto)* Obtén $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)-sen^2(x)}{2+sen(x)\cos(x)}dx$.

c) *(1 punto)* Calcula (si existe), en función del valor de $k\in\mathbb{Z}$, el valor del límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}$$

3.2 Sea $g(x)=x-sen(x)$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) *(0,5 puntos)* Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de *g(x)*.

b) *(0,5 puntos)* Obtén los máximos y mínimos absolutos de *g(x)* en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

c) *(1,5 puntos)* Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x)=xg(x)$, el eje X y las rectas $x=\pi/2$ y $x=\pi$.

Solución:

a) Determinamos la expresión de la derivada de la función.

$$f(x)=2+sen(x)\cos(x)\Rightarrow f'(x)=\cos(x)\cos(x)-sen(x)sen(x)=\cos^2(x)-sen^2(x)$$

b) Acabamos de ver que la derivada del denominador del integrando es el numerador.

$$\int \frac{\cos^2(x)-sen^2(x)}{2+sen(x)\cos(x)}dx=\ln\left|2+sen(x)\cos(x)\right|+K$$

c) Para el cálculo del límite influye es signo del exponente del denominador. Analizamos tres situaciones diferentes, en función de que el exponente sea negativo, cero o positivo.

CASO 1. $k\in\mathbb{Z}$ y $k\le -1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}=\left\{\begin{matrix}2k<0\\-2k>0\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 1}\left(x^4+x^3-x^2-x\right)\left(x^2-1\right)^{-2k}=$$

$$=\left(1^4+1^3-1^2-1\right)\left(1^2-1\right)^{-2k}=0\cdot 0^{-2k}=\boxed{0}$$

CASO 2. $k\in\mathbb{Z}$ y $k=0$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{0}}=\lim_{x\to 1}x^4+x^3-x^2-x=1^4+1^3-1^2-1=\boxed{0}$$

CASO 3. $k\in\mathbb{Z}$ y $k\ge 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)}{\left(x^2-1\right)^{2k}}=\frac{1^4+1^3-1^2-1}{\left(1^2-1\right)^{2k}}=\frac{0}{0}=\textit{Indeterminación(L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2-2x-1}{2k\left(x^2-1\right)^{2k-1}(2x)}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2-2x-1}{4kx\left(x^2-1\right)^{2k-1}}=\frac{4\cdot 1^3+3\cdot 1^2-2\cdot 1-1}{4k\cdot 1\left(1^2-1\right)^{2k-1}}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}k\ge 1\to 2k\ge 2\to 2k-1\ge 1\\2k-1\text{ es impar}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x^3+3x^2-2x-1}{4kx\left(x^2-1\right)^{2k-1}}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x^3+3x^2-2x-1}{4kx\left(x^2-1\right)^{2k-1}}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\end{matrix}\right.=\boxed{\infty}$$

Resumiendo: Si $k\le 0$ el límite vale 0 y si $k\ge 1$ el límite vale ∞.

Ejercicio 3.2:

3.2 Sea $g(x)=x-sen(x)$ con $x\in\mathbb{R}$.

a) *(0,5 puntos)* Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento de *g(x)*.

b) *(0,5 puntos)* Obtén los máximos y mínimos absolutos de *g(x)* en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

c) *(1,5 puntos)* Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $h(x)=xg(x)$, el eje X y las rectas $x=\pi/2$ y $x=\pi$.

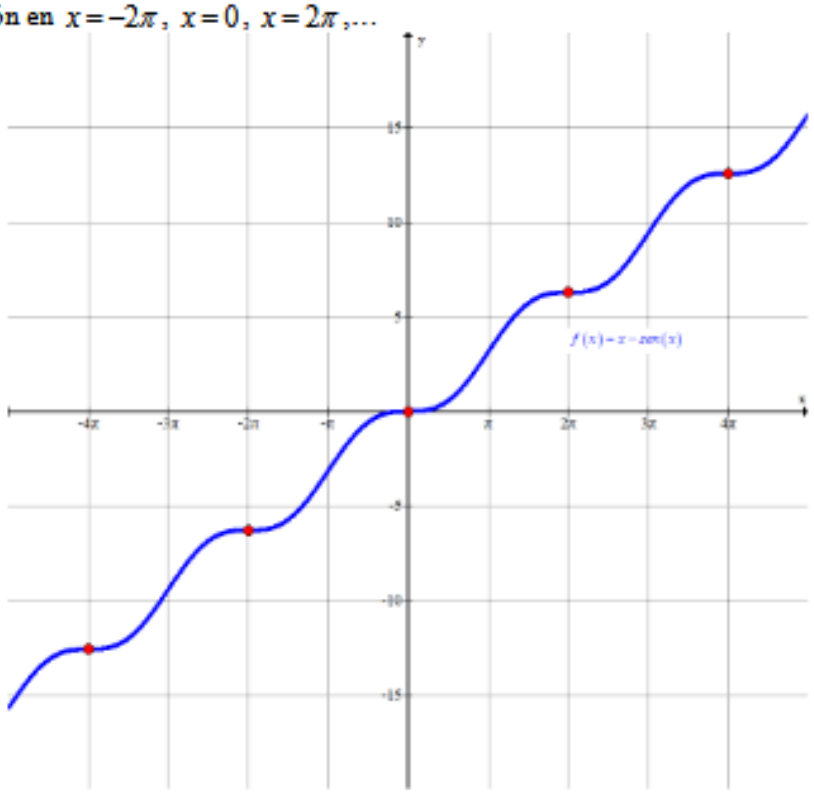
Solución:

a) Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$g(x)=x-sen(x)\Rightarrow g'(x)=1-\cos(x)$$

$$g'(x)=0\Rightarrow 1-\cos(x)=0\Rightarrow \cos(x)=1\Rightarrow \begin{cases}\dots\\ x=-2\pi\\ x=0\\ x=2\pi\\ \dots\end{cases}$$

La derivada es siempre positiva pues $\cos(x)\le 1\rightarrow 0\le 1-\cos(x)$ → $g'(x)=1-\cos(x)\ge 0$. La función crece en todo su dominio $\mathbb{R}$. La función tiene puntos de inflexión en $x=-2\pi$, $x=0$, $x=2\pi$,...



b) Como la función es siempre creciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ el mínimo absoluto lo tiene en $x=\frac{\pi}{2}$ y el máximo absoluto se tiene en $x=\pi$.

Textos Marea Verde

Para $x=\frac{\pi}{2}$ la función vale $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$. El mínimo absoluto tiene coordenadas $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}-1\right)$.

Para $x=\pi$ la función vale $g(\pi)=\pi-sen(\pi)=\pi$. El máximo absoluto tiene coordenadas (π,π).

c) Hallamos los puntos de corte de la función $h(x)=xg(x)=x(x-sen(x))=x^2-xsen(x)$ con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=xg(x)=x(x-sen(x)) \\ Eje\,X\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x(x-sen(x))=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-sen(x)=0\rightarrow\boxed{x=0}\end{cases}$$

La gráfica de la función corta el eje X fuera del intervalo $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

El área delimitada por la gráfica de la función $h(x)=xg(x)$, el eje X y las rectas $x=\pi/2$ y $x=\pi$ es el valor de la integral definida entre $\frac{\pi}{2}$ y π de la función.

Calculamos primero la integral indefinida de la función.

$$\int h(x)dx=\int x^2-xsen(x)dx=\int x^2dx-\int xsen(x)dx=\ldots$$

$$\int xsen(x)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=sen(x)dx\rightarrow v=\int sen(x)dx=-\cos(x)\end{array}\right\}=$$

$$=x(-\cos(x))-\int-\cos(x)dx=-x\cos(x)+\int\cos(x)dx=-x\cos(x)+sen(x)+K$$

$$\ldots=\frac{x^3}{3}+x\cos(x)-sen(x)+K$$

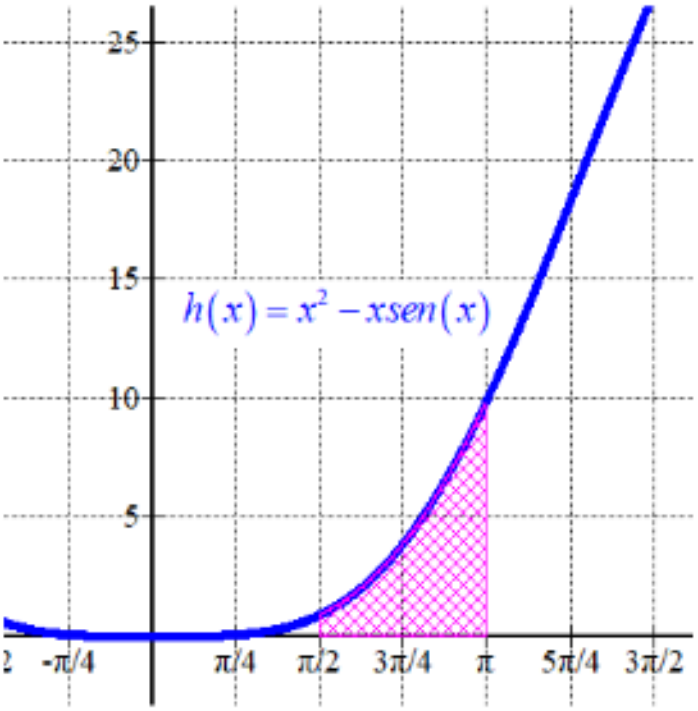
Aplicamos este resultado al cálculo del área.

$$Área=\int_{\pi/2}^{\pi}h(x)dx=\int_{\pi/2}^{\pi}x^2-xsen(x)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x\cos(x)-sen(x)\right]_{\pi/2}^{\pi}=$$

$$=\left[\frac{\pi^3}{3}+\pi\cos(\pi)-sen(\pi)\right]-\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3}+\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\pi^3}{3}-\pi-\frac{\pi^3}{24}+1=\frac{7\pi^3}{24}-\pi+1=6.902u^2$$

El área buscada tiene un valor de $\frac{7\pi^3}{24} - \pi + 1 = 6.902$ unidades cuadradas.



Ejercicio 4.1:

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Dentro de un estudio sobre la brecha que existe en el acceso de las mujeres a las carreras del ámbito de las STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas) se está analizando el caso de Teruel.

La Universidad de Zaragoza cuenta con 3 centros en Teruel: la Facultad de Ciencias Sociales, la Escuela Universitaria Politécnica y la Escuela Universitaria de Enfermería. En el curso 2024-2025 se matricularon en esos centros 1550, 250 y 150 estudiantes, respectivamente. Además, en la Facultad de Ciencias Sociales el 74 % de los estudiantes son mujeres, en la Politécnica lo son solo el 18 % y en Enfermería el 76 %.

Colabora con el estudio y contesta las siguientes preguntas:

a) *(1 punto)* Si se elige un estudiante universitario en Teruel, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) *(1 punto)* Sabiendo que la escogida es mujer ¿cuál es la probabilidad de que dicha estudiante esté matriculada en la Escuela Politécnica?

c) *(0,5 puntos)* Si el estudiante escogido es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en la Escuela Politécnica?

Solución:

a) En total hay matriculados en Teruel 1550 + 250 + 150 = 1950 estudiantes. Son mujeres el 74% de los estudiantes matriculados en la FCS, es decir, 0.74 · 1550 = 1147 mujeres estudian en la FCS. Son mujeres el 18% de los estudiantes de la Politécnica, es decir, 0.18 · 250 = 45 mujeres estudian en la Politécnica. El 76% de los matriculados en Enfermería son mujeres, es decir, 0.76 · 150 = 114 mujeres están matriculadas en Enfermería.
Colocamos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Mujeres	Hombres	
Facultad de Ciencias Sociales	1147		1550
Politécnica	45		250
Enfermería	114		150
TOTALES			1950

Completamos la tabla.

	Mujeres	Hombres	
Facultad de Ciencias Sociales	1147	403	1550
Politécnica	45	205	250
Enfermería	114	36	150
TOTALES	1306	644	1950

De los 1950 estudiantes de Teruel 1306 son mujeres. La probabilidad de que al elegir al azar un estudiante de Teruel este sea mujer tiene un valor de $\frac{1306}{1950} = \frac{653}{975} = 0.6697$.

b) De las 1306 mujeres matriculadas en Teruel solo 45 lo están en la Politécnica. La probabilidad de que al elegir un estudiante de la Politécnica este sea mujer tiene un valor de $\frac{45}{1306} = 0.0345$.

c) Hay 644 hombres matriculados y solo 205 en la Politécnica. La probabilidad de que al elegir un hombre esté matriculado en la Politécnica tiene un valor de $\frac{205}{644} = 0.3183$.

Ejercicio 4.2:

4.2 El beneficio mensual de dos empresas locales puede aproximarse por dos variables aleatorias con distribución normal. La media y la desviación típica, en euros, de ambas distribuciones es la siguiente:

Empresa	Media	Desviación típica
PIS.A.	11125	527
RHOM.A.	10950	430

Hay dos inversores que quieren invertir parte de sus ahorros en una de estas dos empresas.

a) *(1,25 puntos)* El primer inversor, con perfil agresivo, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 euros sea mayor. ¿En qué empresa debe invertir?

b) *(1,25 puntos)* El segundo inversor, con un perfil más conservador, quiere invertir en la empresa cuya probabilidad de tener pérdidas a lo largo de un mes sea menor. ¿En qué empresa debe invertir?

Solución:

a) Llamamos X = Beneficio mensual de PI S.A. en euros. Y = Beneficio mensual de RHO M.A. en euros. X = N(11125, 527). Y = N(10950, 430).

Hallamos $P(X>10000)$ y $P(Y>10000)$.

$$P(X>10000)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{10000-11125}{527}\right)=P(Z>-2.135)=$$

$$=P(Z<2.135)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=\frac{0.9834+0.9838}{2}=\boxed{0.9836}$$

$$P(Y>10000)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{10000-10950}{430}\right)=P(Z>-2.21)=$$

$$=P(Z<2.21)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.9864}$$

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080		
0,1	0,5398	0,5438	0,5478		
0,2	0,5793	0,5832	0,5871		
0,3	0,6179	0,6217	0,6255		
0,4	0,6554	0,6591	0,6628		
0,5	0,6915	0,6950	0,6985		
0,6	0,7257	0,7291	0,7324		
0,7	0,7580	0,7611	0,7642		
0,8	0,7881	0,7910	0,7939		
0,9	0,8159	0,8186	0,8212		
1,0	0,8413	0,8438	0,8461		
1,1	0,8643	0,8665	0,8686		
1,2	0,8849	0,8869	0,8888		
1,3	0,9032	0,9049	0,9066		
1,4	0,9192	0,9207	0,9222		
1,5	0,9332	0,9345	0,9357		
1,6	0,9452	0,9463	0,9474		
1,7	0,9554	0,9564	0,9573		
1,8	0,9641	0,9649	0,9656		
1,9	0,9713	0,9719	0,9726		
2,0	0,9772	0,9778	0,9783		
2,1				0,9834	0,9838

k	0,00	0,01
0,0	0,5000	
0,1	0,5398	
0,2	0,5793	
0,3	0,6179	
0,4	0,6554	
0,5	0,6915	
0,6	0,7257	
0,7	0,7580	
0,8	0,7881	
0,9	0,8159	
1,0	0,8413	
1,1	0,8643	
1,2	0,8849	
1,3	0,9032	
1,4	0,9192	
1,5	0,9332	
1,6	0,9452	
1,7	0,9554	
1,8	0,9641	
1,9	0,9713	
2,0	0,9772	
2,1	0,9821	
2,2		0,9864

Comparamos ambas probabilidades.

Textos Marea Verde

$$P(Y>10000)=0.9864>0.9836=P(X>10000)$$

La probabilidad de tener un beneficio mensual superior a 10000 € es mayor con la empresa RHO M.A.

b) Hallamos $P(X<0)$ y $P(Y<0)$.

$$P(X<0)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{0-11125}{527}\right)=P(Z<-21.11)=P(Z>21.11)$$

$$P(Y<0)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{0-10950}{430}\right)=P(Z<-25.46)=P(Z>25.46)$$

Ambas probabilidades son prácticamente nulas, pero aunque las diferencias sean mínimas, si las comparamos:

$$25.46>21.11\Rightarrow P(Z>25.46)<P(Z>21.11)\Rightarrow P(Y<0)<P(X<0)$$

La probabilidad de tener pérdidas es menor en la empresa RHOM.A.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de Oviedo y Sergio Manso Bravo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

Extraordinaria

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste **una única opción**, A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) **(0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) **(0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.

(b) **(1 punto)** Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1}.

(c) **(0.5 puntos)** Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$, y $g(1) = -1$ y $g'(1) = 2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que f tiene un máximo en $x = 3$ y que $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

CC BY NC SA

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 4, \\ 3 - (x-5)^2, & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.

(b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.

(c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x, ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función F(x) es una primitiva de la función

$$f(x) = x\cos(4x^2 - 1).$$

Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(b) **(1 punto)** Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

Pregunta 3. Opción B

(a) **(1.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = 4\,\text{sen}(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

(b) **(1 punto)** Se considera una función g(x) continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$, calcula una expresión de g.

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t); \qquad r_2(s) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s).$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan

(b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: A(1, 2, 3), B(−2, 1, 4), C(3, 0, 5) y D(0, −1, 2). Se pide:

(a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.

(b) **(0.75 puntos)** Calcular el area del triángulo de vértices A, B y C.

(c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

CC BY NC SA

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6 % de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95 % mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

(a) **(1.25 puntos)** Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?

(b) **(1.25 puntos)** Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Cual es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?

(b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?

(c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolucion medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 € en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 € en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 € en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) **(0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 € para alimentación y 225 € para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) **(0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Solución:

Pregunta 1. Opción A Un turista recorre el Principado de Asturias pasando 'x' días en la zona del oriente, 'y' días en la zona centro y 'z' días en la zona de occidente. Sus gastos en estas vacaciones se reparten como sigue: cada día que pasa en la zona oriental gasta 30 € en hospedaje y 25 en alimentación, en la zona centro gasta 40 € en hospedaje y 20 en alimentación. En cuanto a la zona del occidente sus gastos diarios son 30 € en hospedaje y 40 en alimentación. Además, cada día de vacaciones gasta en otros conceptos 25 € en cada zona.

(a) **(0.75 puntos)** Si decide repartir el presupuesto en 290 € para hospedaje, 290 para alimentación y 225 para gastos varios, plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** En la situación del apartado (a) decide cuántos días puede estar en cada zona.

(c) **(0.75 puntos)** Manteniendo el presupuesto para cada concepto decide cuántos días pasará en cada zona si decide no visitar la zona del oriente, o demuestra que no se puede mantener esa distribución del presupuesto.

Solución:

(a) **(0.75 puntos)** El turista, en hospedaje en la zona oriente gasta 30x, en la zona centro 40y, y en la zona de occidente 30z, de forma que se obtiene la ecuación:

$$30x + 40y + 30z = 290$$

Realizando un razonamiento similar con los gastos en alimentación se obtiene:

$$25x + 20y + 40z = 290$$

y con respecto al resto de conceptos se tendría:

$$25x + 25y + 25z = 225$$

El sistema, por lo tanto, sería:

$$\left.\begin{array}{l} 30x + 40y + 30z = 290 \\ 25x + 20y + 40z = 290 \\ 25x + 25y + 25z = 225 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 40 & 30 \\ 25 & 20 & 40 \\ 25 & 25 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 290 \\ 290 \\ 225 \end{pmatrix}$$

CC BY NC SA

(b) **(1 punto)** Resolvamos el problema. Para ello tomemos la matriz ampliada asociada al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 40 & 30 & 290 \\ 25 & 20 & 40 & 290 \\ 25 & 25 & 25 & 225 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3/25} \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 40 & 30 & 290 \\ 25 & 20 & 40 & 290 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 25 & 20 & 40 & 290 \\ 30 & 40 & 30 & 290 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 30F_1]{F_2 \to F_2 - 25F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 15 & 65 \\ 0 & 10 & 0 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & -5 & 15 & 65 \\ 0 & 0 & 30 & 150 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 2 \\ z & = & 5 \end{array}\right\}$$

y el turista ha pasado 2 días en la zona oriente, 2 días en la zona centro y 5 días en la zona occidente.

(c) **(0.75 puntos)** Si el turista decide no visitar la zona oriente, el sistema sería:

$$\left.\begin{array}{rcl} 40y + 30z & = & 290 \\ 20y + 40z & = & 290 \\ 25y + 25z & = & 225 \end{array}\right\}$$

y la matriz ampliada sería:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 40 & 30 & 290 \\ 20 & 40 & 290 \\ 25 & 25 & 225 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3/25} \left(\begin{array}{cc|c} 40 & 30 & 290 \\ 20 & 40 & 290 \\ 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 20 & 40 & 290 \\ 40 & 30 & 290 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 40F_1]{F_2 \to F_2 - 20F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 20 & 110 \\ 0 & -10 & -70 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2/2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 9 \\ 0 & 20 & 110 \\ 0 & 0 & -15 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible, por lo tanto no se pueden dar las condiciones pedidas.

CC BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B

Pregunta 1. Opción B Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Calcular los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuáles B tiene inversa.

(b) **(1 punto)** Para $x = 0$, calcular, en caso de que sea posible, B^{-1}.

(c) **(0.5 puntos)** Calcular los valores de x para los cuales $\det(AB) = \det(A)$.

Solución:

(a) **(1 punto)** Para que tenga inversa debe verificar que $\det(B) \neq 0$:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3+2F_1}}{\overset{F_2+F_1}{=}} \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x-4 \end{pmatrix} = 1$$

Luego existe B^{-1} para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

(b) **(1 punto)**

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-4F_3]{F1-2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Cambiando de signo a la matriz obtenemos la inversa:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) **(0.5 puntos)** Como $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(A)$ la condición se cumple para cualquier valor de x.

CC BY NC SA

Ejercicio 2A

Pregunta 2. Opción A Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 4, \\ 3-(x-5)^2, & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Estudia si la función es continua en su dominio.

(b) **(1 punto)** Estudia los intervalos de crecimiento de la función. Estudia si la función tiene extremos relativos. Haz un esbozo de la gráfica de la función.

(c) **(0.5 puntos)** Suponiendo que la función representa el número de millones de bacterias de un tipo que existen en una determinada muestra, en cada instante x, ¿se llegaría a alcanzar en algún instante el valor 5 millones?

Solución:

(a) **(1 punto)** La función es polinómica, por lo tanto es continua, salvo, a lo sumo en $x = 4$. Para que sea continua debe verificarse que: $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 3-(x-5)^2 = 2$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{x}{2} = 2$$

Como $f(4) = 3-(4-5)^2 = 2$. la función es continua en su dominio.

(b) **(1 punto)** Para ver si tiene extremos se calcula la derivada y se iguala a cero. Si $0 \leq x < 4$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \neq 0$$

Por lo tanto no existen extremos en el intervalo $(0, 4)$. Además, como la primera derivada es positiva en todo el intervalo, la función es creciente.

Si $x > 4$:

$$f'(x) = -2(x-5) = 0 \leftrightarrow x = 5$$

Por lo tanto la función tiene un extremo en $x = 5$. Como la derivada es positiva en valores de $x < 5$ y negativa si $x > 5$, el punto es un máximo.

Además dado el signo de la derivada, la función crece en $(4, 5)$ y decrece en $(5, +\infty)$

(c) **(0.5 puntos)** Como el máximo se alcanza en $x = 5$ y $f(5) = 3 < 5$, no se llegaría a alcanzar nunca dicho valor.

CC BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 2B

Pregunta 2. Opción B De dos funciones continuas se sabe que $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$, y $g(1) = -1$ y $g'(1) = 2$. Se construye la función

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Calcular $h(1)$ y $h'(1)$.

(b) **(1.25 puntos)** Sabiendo que f tiene un máximo en $x = 3$ y que $k(x) = (x-2)^2 f(x)$ tiene un mínimo en ese mismo punto, calcular $f(3)$.

Solución:

(a) $h(1) = \dfrac{f(1)}{g(1)} = \dfrac{1}{-1} = -1.$

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \rightarrow h'(1) = \frac{f'(1)g(1) - f(1)g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{2(-1) - 1*2}{(-1)^2} = -4$$

(b) Si f y k tienen extremos en $x = 3$ entonces $f'(3) = 0$ y $k'(3) = 0$, entonces

$$k'(x) = 2(x-2)f(x) + (x-2)^2 f'(x) \rightarrow k'(3) = 2f(3) = 0 \rightarrow f(3) = 0$$

CC BY NC SA

Ejercicio 3A

Pregunta 3. Opción A Se sabe que la función F(x) es una primitiva de la función

$$f(x) = x\cos(4x^2 - 1).$$

Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcular F sabiendo que $F\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

(b) **(1 punto)** Estudiar si F tiene un extremo en $x = \frac{1}{2}$.

Solución:

(a)

$$\int x\cos(4x^2 - 1)dx = \frac{1}{8}\int 8x\cos(4x^2 - 1)dx = \frac{1}{8}\operatorname{sen}(4x^2 - 1) + k$$

Por lo tanto $F(x) = \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + k$,

$$1 = F\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) + k \rightarrow k = 1$$

y la función buscada es $F(x) = \operatorname{sen}(4x^2 - 1) + 1$

(b) Para ver si F tiene un extremo en dicho punto recordemos que $F'(x) = f(x)$, por lo tanto es suficiente con sustituir:

$$F'\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{2} \neq 0$$

luego la respuesta es no.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 3B

Pregunta 3. Opción B

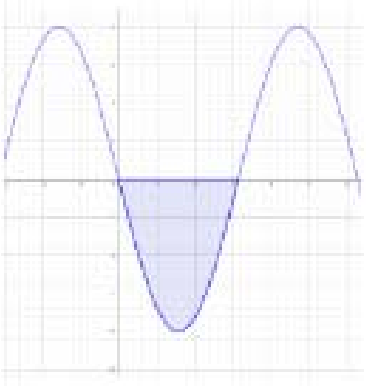
(a) **(1.5 puntos)** Se considera la función $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(x - \pi)$. Calcula el área acotada encerrada por f y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = \pi$.

(b) **(1 punto)** Se considera una función g(x) continua. Sabiendo que una primitiva de g es $f(x) = \mathrm{sen}(x)\cos(x)$, calcula una expresión de g.

Solución:

(a) La función corta a los ejes en $\mathrm{sen}(x - \pi) = 0$, es decir, cuando $x - \pi = k\pi$. En el área pedida sólo se anularía en $x = 0$ y en $x = \pi$. Como la función es continua, si en un punto intermedio es negativa los será en todo el intervalo $f(\pi/2) = 4\,\mathrm{sen}(-pi/2) = -4 < 0$.

El área pedida es:



Y el área:

$$A = -\int_0^{\pi} 4\,\mathrm{sen}(x - \pi)dx = 4\cos(x - \pi)|_0^{\pi} = 4\cos(0) - 4\cos(-\pi) = 4 - 4(-1) = 8$$

(b) Si f es su primitiva, la función $g(x) = f'(x)$:

$$g(x) = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x) = \cos(2x)$$

CC BY NC SA

Ejercicio 4A

Pregunta 4. Opción A Se están construyendo dos puentes rectos en un tramo de autovía para los dos carriles. Los puentes siguen las ecuaciones siguientes:

$$r_1(t) = (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t); \qquad r_2(s) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s).$$

Se pide:

(a) **(1.25 puntos)** Estudia si los puentes son paralelos, se cortan o se cruzan

(b) **(1.25 puntos)** La empresa quiere construir un puente de servicio que los una, y quiere que sea lo más corto posible, ¿qué longitud tendrá la vía de servicio? Indica los puntos inicio y final del pasadizo.

Solución:

(a) Un vector director de la recta t es el $\vec{u} = (1, -2, 2)$ y un vector director de la recta s es $\vec{v} = (2, -1, -2)$. Los puentes serían paralelos si sus vectores directores fuesen paralelos, es decir, si existiese un α tal que $(1, -2, 2) = \alpha(2, -1, -2)$. Es decir, debería cumplirse que $1 = \alpha 2$ y $-2 = -\alpha$, lo cual es imposible, por lo tanto los puentes no son paralelos.

Para ver si se cortan, buscamos un punto común, que sería solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2+t & = & 1+2s \\ -1-2t & = & 4-s \\ 3+2t & = & 4-2s \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$Ab = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

y el sistema es incompatible, por lo tanto los puentes se cruzan, no se cortan.

CC BY NC SA

(b) La distancia mínima entre las dos rectas que se cruzan es:

$$d = \frac{|(r_1(t) - r_2(t)) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (6, 6, 3).$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{6^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{81} = 9.$$

El vector entre los puntos de referencia es:

$$(2, -1, 3) - (1, 4, 4) = (1, -5, -1).$$

El producto escalar:

$$(1, -5, -1) \cdot (6, 6, 3) = 6 - 30 - 3 = -27.$$

La distancia mínima es:

$$d = \frac{|-27|}{9} = 3.$$

Los puntos más cercanos entre las rectas son aquellos tales que el vector PQ es perpendicular a r_1 y r_2, por tanto, cogemos todos los vectores que unen un punto de r_1 y uno de r_2

$$r_2(s) - r_1(t) = (1 + 2s, 4 - s, 4 - 2s) - (2 + t, -1 - 2t, 3 + 2t) = \begin{pmatrix} -t + 2s - 1 & 2t - s + 5 & -2t - 2s + 1 \end{pmatrix}$$

Imponemos la condición de que ese vector tienen que ser perpendicular a ambas rectas y se obtienen las siguiente ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} -t + 2s - 1 & 2t - s + 5 & -2t - 2s + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -9t - 9 = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$\begin{pmatrix} -t + 2s - 1 & 2t - s + 5 & -2t - 2s + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 9s - 9 = 0 \Rightarrow s = 1$$

Con lo que se obtienen los puntos $P = r_1(-1) = (1, 1, 1)$ y $Q = r_2(1) = (3, 3, 2)$. Por lo tanto, el pasadizo más corto mide 3 decámetros (30 metros) y debe construirse entre los puntos (1, 1, 1) y (3, 3, 2).

CC BY NC SA

Ejercicio 4B

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: $A(1,2,3)$, $B(-2,1,4)$, $C(3,0,5)$ y $D(0,-1,2)$. Se pide:

(a) **(1 punto)** Estudiar si los puntos pertenecen a un mismo plano.

(b) **(0.75 puntos)** Calcular el area del triángulo de vértices A, B y C.

(c) **(0.75 puntos)** Calcular el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Solución:

Pregunta 4. Opción B Se consideran los puntos siguientes: $A(1,2,3)$, $B(-2,1,4)$, $C(3,0,5)$ y $D(0,-1,2)$. Se pide

(a) **(1 punto)** Estudia si los puntos pertenecen a un mismo plano.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el area del triángulo de vértices A, B y C.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el volumen del tetraedro formado por los 4 puntos.

Solución:

(a) Para ver si los puntos son coplanarios construimos los vectores $\vec{AB} = (-3,-1,1)$, $\vec{AC} = (2,-2,2)$ y $\vec{AD} = (-1,-3,-1)$ y veremos si son linealmente dependientes:

$$\det\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = -32 \neq 0$$

Por lo tanto los puntos no son coplanarios.

(b) El área del triángulo de vértices A, B y C es $\frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2}$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 8\vec{j} + 8\vec{k}$$

Por lo que el área del triángulo sería

$$\frac{\sqrt{8^2+8^2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

(c) El volumen de un tetraedro es el valor absoluto de un sexto del producto mixto de $\vec{AB} = (-3,-1,1)$, $\vec{AC} = (2,-2,2)$ y $\vec{AD} = (-1,-3,-1)$. Como en el apartado primero ya hicimos este producto, la solución sería $\left|\frac{-32}{6}\right| \approx 5.3333$

CC BY NC SA

Ejercicio 5A

Pregunta 5. Opción A En una fábrica de componentes electrónicos se sabe que el 6 % de las piezas que se fabrican son defectuosas. En el proceso de control de calidad se toma una pieza al azar y se introduce en un sistema de prueba/fallo. Se sabe que la probabilidad de que el sistema dé fallo si la pieza es defectuosa es del 95 % mientras que la probabilidad de que lo haga si la pieza no es defectuosa es del 4 %.

(a) **(1.25 puntos)** Si se seleccionan 10 piezas al azar ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea defectuosa?

(b) **(1.25 puntos)** Determina la probabilidad de que si se selecciona una pieza al azar, la prueba no indique fallo.

Solución:

Solución: Llamamos D al suceso la pieza extraída es defectuosa. Nos dicen que $P(D) = 0.06$. Llamamos F al suceso el sistema da fallo. Con los datos dados $P(F/D) = 0.95$ y $P(F/\overline{D}) = 0.04$.

(a) Llamando X al número de piezas que no son defectuosas entre las 10 seleccionadas, se trata de una $B(10, 0.94)$. Vamos a calcular la probabilidad de que ninguna sea defectuosa que sería el suceso complementario.

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.94^{10} 0.06^{0} = 0.5386$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al menos una sea defectuosa es $P(X \geq 1) = 1 - 0.5386 = 0.4614$

(b) Se pide $P(\overline{F})$ utilizando el teorema de la probabilidad total podemos escribir:

$$P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - (P(F \cap D) + P(F \cap \overline{D})) = 1 - P(F/D)P(D) - P(F/\overline{D})P(\overline{D}) =$$

$$= 1 - 0.95 \cdot 0.06 - 0.04 \cdot 0.94 = 1 - 0.0946 = 0.9054$$

CC BY NC SA

Ejercicio 5B

Pregunta 5. Opción B En una empresa de telecomunicaciones, el tiempo que tarda un cliente en resolver un problema llamando a Atención al Cliente sigue una distribución normal con media $\mu = 30$ minutos y desviación típica $\sigma = 5$ minutos.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Cual es la probabilidad de que un cliente tarde entre 25 y 30 minutos en resolver su problema?

(b) **(0.75 puntos)** Un cliente decide que si tarda más de 20 minutos en su resolución, cambiará de empresa ¿cuál es la probabilidad de que cambie?

(c) **(1 punto)** La empresa hace cambios en la gestión de atención al cliente obteniendo que la probabilidad de que se tarde menos de 20 minutos es 0.7. Si se mantiene la desviación típica ¿se ha mejorado el tiempo de resolucion medio o por el contrario el cambio no ha sido positivo?

Solución:

Solución: Llamaremos X al tiempo que tarda en resolver el problema.

(a)

$$P(25 \leq X \leq 30) = P(X \leq 30) - P(X \leq 25) = P\left(\frac{X-30}{5} \leq \frac{30-30}{5}\right) - P\left(\frac{X-30}{5} \leq \frac{25-30}{5}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 0) - (1 - P(Z \leq 1)) = 0.5 - 1 + 0.8413 = 0.3413$$

(b)

$$P(X \geq 20) = P\left(\frac{X-30}{5} \geq \frac{20-30}{5}\right) = P(Z \geq -2) = P(Z \leq 2) = 0.9772$$

(c) $P(X \leq 20) = 0.7$ lo que corresponde a la normal tipificada $Z = 0.525$, de esta forma

$$0.515 = \frac{20-\mu}{5} \rightarrow \mu = 20 - 5 * 0.525 = 17.3750$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EVAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Pregunta 1. Opción A Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) (0.75 puntos) Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo $AX = [0]$ tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.

(b) (b) (0.75 punto) Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.

(c) (1 punto) Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de $a = 0$.

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes) Se pide:

(a) (1 punto) Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x - 1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

(b) (0.75 puntos) Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudiar si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) (0.75 puntos) Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3, que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. calcula los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0,4]$. Se pide:

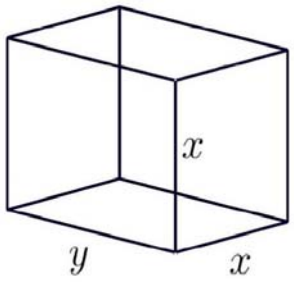
(a) (1 punto) Calcular los máximos y mínimos de la función.

(b) (0.75 puntos) Demostrar que el depósito no se vacía nunca.

(c) (0.75 puntos) Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

CC BY NC SA

Pregunta 2. Opción B Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y, como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcula los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

(a) (1.25 puntos) Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.
(b) (1.25 puntos) Calcular el área encerrada entre la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g, donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:
(a) (1 punto) Determinar la función g(x) en función de los parámetros a y b

(b) (0.5 puntos) ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K?

(c) (1 punto) Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determina la función g.

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1,1,1)$ y $B(-1,1,3)$. Se pide:

(a) (1 punto) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
(b) (1 punto) Calcula las distancias de A y B al plano π.
(c) (0.5 puntos) Tome un punto cualquiera del plano π distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Pregunta 4. Opción B Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y + \beta z = 3$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.

(b) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.
(c) (1 punto) Para $\beta = 0$ calcular el simétrico del punto $(-1,0,1)$ respecto del plano π.

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.
(a) (1.25 puntos) Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
(b) (1.25 puntos) Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.
(a) (0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
(b) (0.75 puntos) Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
(c) (1 punto) Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que 82 + a.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ *son*: $F(x) = P(Z \leq x)$, F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.5596, F (0.6) = 0.7257, F(2.06) = 0.98, F (0.98) = 0.8365.

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Pregunta 1. Opción A Dado a ∈ ℝ, se considera la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

(a) (0.75 puntos) Encuentre todos los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones homogéneo AX = [0] tiene infinitas soluciones. ¿Existe algún valor de a para el cual el sistema no tenga solución? Razone sus respuestas.
(b) (0.75 punto) Suponiendo que A es la matriz ampliada de un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas. Calcule los valores de a para los cuales el sistema tiene solución.
(c) (1 punto) Resuelva el sistema homogéneo de apartado (a), para el valor de a = 0.

Solución:

(a) Dado que el sistema es homogéneo, siempre tiene solución, al menos la solución trivial:

$x = 0, y = 0, z = 0.$

Para discutir el sistema calcularemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mathrm{a} \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2a$, por lo que, si a = 0 el sistema es compatible indeterminado ya que el $rg(A) \neq 3$, y como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$, y tiene infinitas soluciones en caso contrario ($a \neq 0$)la solución es única (la trivial).
También podríamos haber hecho la discusión escalonando la matriz de coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{a} \\ -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 + 5F_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{a} \\ 0 & -1 & 3\mathrm{a} + 2 \\ 0 & -1 & 5\mathrm{a} + 2 \end{pmatrix} \overset{F_3 \to F_3 - F_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{a} \\ 0 & -1 & 3\mathrm{a} + 2 \\ 0 & 0 & 2\mathrm{a} \end{pmatrix}$$

y llegamos a la misma conclusión, de esta manera tenemos ya la matriz escalonada que usaremos para la resolución del resto del ejercicio.

(b) Teniendo en cuenta la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior la matriz ampliada del sistema $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a + 2 \\ 2a \end{pmatrix}$ sería: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 3a + 2 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}$

Que sólo tiene solución si el $rg \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = rgA$ que sucede si y sólo si $2a = 0, i.e. a = 0$

(c) Sabemos que el sistema del apartado (a) para $a = 0$ tiene infinitas soluciones. Para calcularlas podemos utilizar la matriz escalonada calculada en el primer apartado lo escribimos como

$$\begin{cases} \mathrm{x} - \mathrm{y} = 0 \\ -\mathrm{y} + 2\mathrm{z} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{y} \\ \mathrm{y} = 2\mathrm{z} \\ \mathrm{z} = \alpha \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{x} = 2\alpha \\ \mathrm{y} = 2\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ \mathrm{z} = \alpha \end{cases}$$

Pregunta 1. Opción B Una matriz M verifica que $\det(M) = x$. (Los apartados siguientes son independientes) Se pide:

(a) (1 punto) Supongamos que la matriz M tiene 2 filas y 2 columnas, y que $M^2 = (x-1)I$, siendo I la matriz identidad. Calcule todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

(b) (0.75 puntos) Supongamos ahora que la matriz M tiene 3 filas y 3 columnas. Estudiar si existe algún valor de x para el que pueda ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) (0.75 puntos) Supongamos ahora que el tamaño de M es 3×3, que $x \neq 0$ y que $M = xM^2$. calcula los posibles valores de x y $\det(M^{-1})$ para cada uno de ellos.

Solución:

(a) Suponiendo que $M \epsilon \mathcal{M}_{2x2}$.

Si $|M| = x$, entonces $|M^2| = |M| \cdot |M| = x^2$.

Como $|(x-1)I| = \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \cdot |I| = (x-1)^2$

Entonces, como $M^2 = (x-1)I$, tiene que pasar que $|M^2| = |(x-1)I|$

$$x^2 = (x-1)^2 \rightarrow x^2 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow 0 = -2x + 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

(b) Suponiendo ahora que $M \epsilon \mathcal{M}_{3x3}$ y que $|M| = x$, al calcular:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x - 1$$

para que existiese dicho valor de x debería cumplirse que $x = x - 1$, pero esto es imposible ya que $0 \neq -1$.

La respuesta es que no existe ningún valor de x para que $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ con las hipótesis del problema

(c) Como $M = xM^2 y$ teniendo en cuenta el tamaño de M, teniendo en cuenta el valor de sus determinantes:

$|M| = |xM^2| \rightarrow x = x^3|M^2| \rightarrow x = x^3x^2 \rightarrow x = x^5$, que como $x \neq 0, 1 = x^4$, nos da como solución que $x = \pm 1$

Si $\begin{cases} x = 1 \rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = 1 \\ x = -1 \rightarrow |M^{-1}| = \frac{1}{|M|} = -1 \end{cases}$

CC BY NC SA

Pregunta 2. Opción A Un depósito tiene una tubería de entrada de agua y un grifo. Se estudia la cantidad de agua del depósito en cada instante t a lo largo de 4 horas, teniendo en cuenta que en ocasiones se descarga por la apertura del grifo. Se observa que la cantidad de agua viene dada por la función: $f(t) = 2\cos(t + \pi/2) + 10$, donde $t \in [0,4]$. Se pide:
(a) (1 punto) Calcular los máximos y mínimos de la función.
(b) (0.75 puntos) Demostrar que el depósito no se vacía nunca.
(c) (0.75 puntos) Deducir durante cuánto tiempo el depósito está aumentando el volumen de agua durante esas 4 horas.

Solución:

(a) (1 punto) Calculemos los extremos de la función.

$$f'(t) = -2\text{sen}(t + \pi/2)$$

Calculemos los puntos críticos:

$$f'(t) = 0 \rightarrow \text{sen}(t + \pi/2) = 0$$

Las posibles soluciones son $\text{t} + \pi/2 = \text{k}\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$,

Se comprueba fácilmente que k=0 y k=1 son las únicas soluciones que cumplen $t \in [0,4]$.

$\begin{cases} \text{t} + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \text{t} = -\frac{\pi}{2} \notin [0,4] \\ \text{t} + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow \text{t} = \frac{\pi}{2} \in [0,4] \end{cases}$. Es decir, la $\text{t} = \pi/2$.

Veamos si se tratan de un máximo o un mínimo:

$$f''(t) = -2\cos(t + \pi/2)$$

Como $\text{f}''(\pi/2) = 2 > 0$, en $\text{x} = \frac{\pi}{2}$ tiene un mínimo. $\text{f}(\pi/2) = 2\cos(\pi) + 10 = 8$

también se puede estudiar el signo de la primera derivada como sigue:

ya que $^{\pi}/_{4}\,\epsilon\left(0, ^{\pi}/_{2}\right) \rightarrow\ f'(\pi/4) = -2\text{sen}\left(\pi/4 + \frac{\pi}{2}\right) < 0$

ya que $\pi\epsilon\left(^{\pi}/_{2}, 4\right) \rightarrow f'(\pi) = -2\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) > 0$

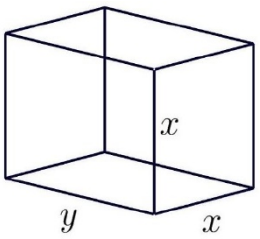
	$\left(0, ^{\pi}/_{2}\right)$	$\left(^{\pi}/_{2}, 4\right)$
$-2 \cdot sen(t + ^{\pi}/_{2})$	$-$	$+$
$f'(x)$	$\searrow$ *Decreciente*	$\nearrow$ *Creciente*

Por lo tanto f tiene en $\text{x} = \frac{\pi}{2}$ tiene un mínimo. $f(\pi/2) = 2\cos(\pi) + 10 = 8$

(b) En los extremos del intervalo $f(0) = 10$ y $f(4) = 11.51$, por lo tanto 8 es un mínimo absoluto. Por lo tanto, el mínimo valor que toma la función en el intervalo es 8, y no se llega a vaciar.
(c) Se buscan los intervalos de crecimiento de la función. Como en el intervalo pedido sólo hay un mínimo, el intervalo de crecimiento sería $\left[\frac{\pi}{2}, 4\right]$ y aumenta el volumen durante $4 - \frac{\pi}{2}$ horas $\approx$ 2.4292 horas.

CC BY NC SA

Pregunta 2. Opción B Se quiere construir una caja sin tapa de forma que tenga dos caras paralelas cuadradas de lado x y tres caras rectangulares, dos de ellas paralelas, de lados x e y, como la figura. Si se quiere utilizar 3 m^2 de material, calcula los valores de x e y para que la capacidad de la caja sea máxima.



Solución:

La cantidad de material que se utilizaría para una caja sin tapa como la del dibujo será:

$3 = 2x^2 + 3xy \rightarrow 3xy = 3 - 2x^2$, es decir, $y = \frac{3-2x^2}{3x}$. (función auxiliar)

La función volumen es: $f(x,y) = x^2y$, por lo tanto $f(x) = x^2\frac{3-2x^2}{3x} = \frac{3x-2x^3}{3}$. (función a maximizar)

Para calcular el máximo tendremos que calcular los puntos críticos, es decir los ceros de la función derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3 - 6x^2) = 1 - 2x^2 \rightarrow f'(x) = 0 \leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \leftrightarrow 2x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

por lo tanto, la función tiene un *punto crítico en* $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (observe que la otra solución es negativa y no es válido como longitud, área o volumen).

Como $f''(x) = -4x$, y $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$ entonces f tiene un máximo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow y = \frac{3-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{3\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow y = \frac{3-2\cdot\frac{2}{4}}{3\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \cdots \rightarrow y = 2\frac{\sqrt{2}}{3}$ la capacidad es $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\ m^3$

Pregunta 3. Opción A Dada la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

(a) (1.25 puntos) Una primitiva de la función f que en 0 valga 1.
(b) (1.25 puntos) Calcular el área encerrada entre la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

(a) Una primitiva de f se calcula como sigue:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + K$$

Como en 0 debe valer 1 ($F(0) = 1$) se tiene que

$$1 = \frac{1}{2}\ln(1) + K \to K = 1$$

y la primitiva buscada es

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 1$$

(b) Para calcular el área encerrada hemos de estudiar el signo de la función en el intervalo $[-1,1]$.

El denominador de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ es siempre > 1 ya que $x^2 > 0$ para cualquier valor real por lo que el signo de la función dependerá sólo de numerador.

Por lo que $\begin{cases} f(x) < 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) > 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ y, por lo tanto, el área pedida será:

$$\int_{-1}^{0} \frac{-x}{x^2+1}dx + \int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_{0}^{1} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln((0)^2+1) + \frac{1}{2}\ln((-1)^2+1) + \frac{1}{2}\ln(1^2+1) - \frac{1}{2}\ln(0^2+1) =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(1) + \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}\ln(1) = \ln(2) \approx 0.6931$$

CC BY NC SA

Pregunta 3. Opción B Se sabe que la función $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + 5$ es una primitiva de una función g, donde $a, b \in \mathbb{R}$ son valores desconocidos, pero constantes. Se pide:

(a) (1 punto) Determinar la función g(x) en función de los parámetros a y b

(b) (0.5 puntos) ¿Podría dar la forma de todas las primitivas de g en función de una constante K?

(c) (1 punto) Sabiendo que $g(1) = 2$ y $g(0) = 1$, determina la función g.

Solución:

(a) Si $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$ entonces $G'(x) = g(x)$, por lo tanto

$$g(x) = x^2 + 2ax + b$$

(b) Las primitivas de g son de la forma, una cualquiera más una constante cualquiera, por lo tanto todas las primitivas de g serían

$$G(x) + k = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + K, \forall K \in \mathbb{R}$$

(c) $\begin{cases} \text{Si } g(1) = 2 \rightarrow 1 + 2a + b = 2 \\ \text{Si } g(0) = 1 \rightarrow b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2a + 1 = 2 \rightarrow a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ y la función sería $g(x) = x^2 + 1$.

Pregunta 4. Opción A Se consideran los puntos $A(1,1,1)$ y $B(-1,1,3)$. Se pide:

(a) (1 punto) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto medio de A y B y es perpendicular a la recta que los contiene.
(b) (1 punto) Calcula las distancias de A y B al plano π.
(c) (0.5 puntos) Tome un punto cualquiera del plano π distinto del calculado en el apartado (a). Calcule su distancia a A y a B y compruebe que es la misma.

Solución:

(a) El punto medio es $\mathrm{P} = \frac{1}{2}((1,1,1) + (-1,1,3)) = (0,1,2)$.

Un vector normal al plano puede ser el vector $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,1,3) - (1,1,1) = (-2,0,2)$

Con lo que el plano pedido $\pi \equiv \{P; \overrightarrow{\mathrm{AB}}\} = -2x + 2z + D = 0$

como $P \in \pi \implies 4 + D = 0 \implies$y $D = -4$ por lo que el plano es $\pi \equiv -2x + 2z - 4 = 0$, o lo que es lo mismo $\pi \equiv x - z + 2 = 0$.
(b) La distancia de cada uno de estos puntos es la mitad de la distancia entre ellos:

$d(A,\pi) = d(B,\pi) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| \frac{1}{2} d(A,B) = \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)^2 + (1-1)^2 + (1-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4} = \frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}\mathrm{u}$

(c) (0.5 puntos) Un punto cualquiera puede ser $\mathrm{R}(1,0,-1)$ ya que verifica la ecuación del plano.

$$d(A,R) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AR}}\right\| = \|(0,-1,-2)\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}u$$
$$d(B,\mathrm{R}) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{BR}}\right\| = \|(-2,1,-4)\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21}u$$

CC BY NC SA

Pregunta 4. Opción B Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x+y+\beta z=3$. Se pide:

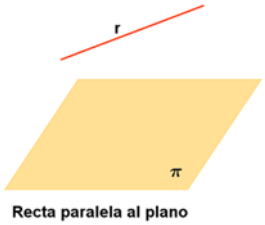
(a) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ que hace que r y π sean paralelos.

(b) (0.75 puntos) Calcular, en caso de que exista, el valor de β para que el plano y la recta sean perpendiculares.

(c) (1 punto) Para $\beta = 0$ calcular el simétrico del punto $(-1,0,1)$ respecto del plano π.

Solución:

(a) $r \parallel \pi \Leftrightarrow$ tomando dos puntos de r, por ejemplo, $A=(0,1,1)$ y $B(-2,0,4)$. El vector $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$ (que es un vector director de r), debe ser perpendicular al vector normal al plano $\vec{n}_\pi$, es decir, su producto escalar debe ser 0.

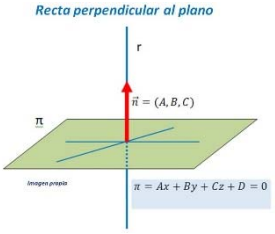


Recta paralela al plano

Un vector normal al plano es $\vec{n}_\pi=(2,1,\beta)$,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}_\pi=0 \Leftrightarrow (-2,-1,3)\cdot(2,1,\beta)=-4-1+3\beta=0 \Leftrightarrow \beta=\frac{5}{3}$$

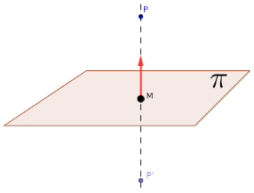
(b) Para que la recta y el plano sean perpendiculares $r \perp \pi$, el vector director de la recta, $\overrightarrow{AB}$ debe ser proporcional al normal del plano $\vec{n}_\pi$, es decir $\exists\lambda\epsilon\mathbb{R}\ tal\ que\ \overrightarrow{AB}=\lambda\vec{n}_\pi$



$$(-2,-1,3)=\lambda(2,1,\beta)\rightarrow \left.\begin{matrix} -2=2\lambda \\ -1=\lambda \\ 3=\beta\lambda \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda=-1\ y\ \beta=-3$$

(c) Si $\beta=0 \rightarrow \pi \equiv 2x+y=3$.

Calculamos la recta perpendicular a π que pasa por $P=(-1,0,1)$. La recta es



$$(x,y,z)=(-1,0,1)+\lambda(2,1,0)\rightarrow \begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}, \forall\lambda\epsilon\mathbb{R}$$

Sustituyendo las coordenadas de un punto cualquiera de la recta (dependiendo de λ) en las ecuaciones del plano obtendremos un valor de λ para que un punto que está en r este también en π

$$2(-1+2\lambda)+\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=1$$

Si $\lambda=1$ el punto $M=(-1+2,1,1)=(1,1,1)=r\cap\pi$ la intersección del plano π y la recta perpendicular al plano y que pasa por $(-1,0,1)$.

Este punto es el punto medio del segmento con extremos en el simétrico pedido y $(-1,0,1)$. Por lo tanto, el punto P' que buscamos es:

$$\frac{1}{2}(P'+(-1,0,1))=(1,1,1) \Leftrightarrow P'=2(1,1,1)-(-1,0,1)=(3,2,1)$$

O el lenguaje vectorial: $P'=P+2\overrightarrow{PM}=(-1,0,1)+2(2,1,0)=(3,2,1)$

CC BY NC SA

Pregunta 5. Opción A Supongamos que tenemos en un monedero 5 monedas de 1 euro, 3 de 2 euros y 2 de 10 céntimos.
(a) (1.25 puntos) Si sacamos 3 monedas al azar del monedero ¿cuál es la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro?
(b) (1.25 puntos) Sacamos dos monedas una tras otra (sin reemplazamiento) ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea de 10 céntimos?

Solución:

(a) Para calcular la probabilidad de que al menos una sea de 1 euro, calcularemos la probabilidad de que ninguna sea de 1 euro que es el suceso complementario, ya que:

El nº de formas distintas de elegir 3 monedas de entre 10 se calcula mediante el nº combinatorio:

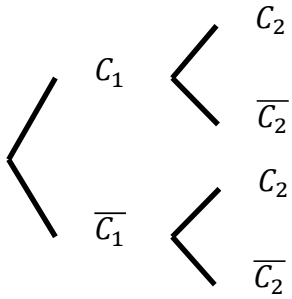
$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$, que serán los casos posibles del experimento.
Los casos favorables serían extraer 3 monedas de entre las 5 que no son de 1 euro, es decir $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$.

Por lo tanto, la probabilidad pedida es;

$$1 - \frac{10}{120} = 0.9167$$

(b) Al ser un experimento sin reemplazamiento usaremos un esquema de árbol para modelizar el problema.

Llamaremos $C_1 =$ "Sacar una moneda de 10 céntimos en la primera extracción"



Podemos decir que

$$P(C_1) = \frac{2}{10} = 0.2, P(\overline{C_1}) = 1 - P(1c) = 0.8$$

Llamemos $C_2 =$ "Sacar una moneda de 10 céntimos en la primera extracción" .

Utilizando el teorema de la probabilidad total se tiene que

$$P(C_2) = P(C_2 \cap C_1) + P(C_2 \cap \overline{C_1}) = P(C_2/C_1)P(C_1) + P(C_2/\overline{C_1})P(\overline{C_1}) = \frac{1}{9}0.2 + \frac{2}{9}0.8 = 0.2$$

Pregunta 5. Opción B La esperanza de vida de un elefante sigue una distribución normal de media 82 años y desviación típica 30.
(a) (0.75 puntos) ¿Qué porcentaje de población de elefantes se espera que viva más de 100 años?
(b) (0.75 puntos) Si se toma una muestra de 4 elefantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno supere los 100 años de vida?
(c) (1 punto) Calcula un valor $a \in \mathbb{R}$ que haga que el 98% de los elefantes tengan una esperanza de vida menor o igual que $82 + a$.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0,1)$ *son*: $F(x) = P(Z \leq x)$, F(0) = 0.5, F(0.15) = 0.5596, F (0.6) = 0.7257, F(2.06) = 0.98, F (0.98) = 0.8365.

Solución:

Llamaremos $X =$ "Esperanza de vida de un elefante" que según el enunciado $X \rightsquigarrow N(82,30)$.
(a) (0.75 puntos) Se pide:

$$p(X > 100) = 1 - p(X \leq 100) = 1 - \mathrm{p}\left(\frac{\mathrm{X} - 82}{30} \leq \frac{100 - 82}{30}\right) = 1 - p(Z \leq 0.6) = 1 - 0.7257 = 0.2743$$

Por lo tanto, se espera que el 27.43 % de los elefantes vivan más de 100 años.

(b) (0.75 puntos) En este caso llamamos $Y =$ "$Nº\ de\ elefantes\ que\ viven\ más\ de$ 100 $años\ de\ una\ muestra\ de$ 4".

Se trata por tanto de una distribución binomial $Y \rightsquigarrow B(\mathrm{n}, \mathrm{p}(\mathrm{X} > 100))$ es decir $Y \rightsquigarrow B(4,0.2743)$. La probabilidad buscada, entonces, sería

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y < 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.2743^0 (1 - 0.2743)^4 = 0.2774$$

(c) (1 punto) Nos piden que valor toma $a \in \mathbb{R}$ para que $\mathrm{p}(\mathrm{X} \leq 82 + a) = 0.98$

Tipificando la v.a. X:

$$P\left(\frac{\mathrm{X} - 82}{30} \leq \frac{82 + a - 82}{30}\right) = P\left(Z \leq \frac{a}{30}\right) = 0.98$$

Buscamos un valor z_a tal que $\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq z_a) = 0.98$, como $\mathrm{F}(2.06) = 0.98$ entonces $\frac{a}{30} = 2.06$ y

$a = 30 \cdot 2.06 = 61{,}8$.

Matemáticas II

PAU 2025

Comunidad autónoma de

ISLAS BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Govern de les Illes Balears	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

El examen consta de cuatro partes: la primera no tiene diferentes opciones, y las otras tres tienen dos posibles problemas, a contestar solo uno. En caso de contestar dos problemas de una misma parte, solo se evaluará el primero.
Justificad las respuestas utilizando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite el uso de calculadora científica básica, pero NO se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información. Se pueden usar reglas y bolígrafos de colores (excepto rojo y verde).

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2.023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos a una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.

a) Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 metros (véase la figura). A Continuación, éste se desplazó 37 metros sobre la siguiente recta $\{x=0 \quad 35y+12z=-3.780$ hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

b) Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?

c) Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria $\{x=5+4\lambda \quad y=10+\lambda \quad z=-380+10\lambda$. Si dicho objeto no cambia la trayectoria, ¿podría chocar con el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x euros/kg), de hierro (que tiene un coste de y euros/kg) y de plástico (que tiene un coste de z euros/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x+y-z=40$ E.
Producto 2: $x-y+2z=90$ E.
Producto 3: $x+2y=70$ E.

BY NC SA

Producto 4: x-y+z=50 E.

a) Describe qué significa la ecuación del producto 1.

b) Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia prima? Es decir, ¿calcular x, y, z? Justifica tu respuesta.

B2) Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3.

a) Sabiendo que AB+I=A, calcula la inversa de A en función de I y B.

b) Sabiendo que A=0 1 -1 1 -1 1 1 2 0 y A-1=12·2 2 0 -1 -1 1 -3 -1 1 , calcula la matriz B que satisface la igualdad AB+I=A. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es Ax=-0,0001x3+0,05x2-4x+200, donde x∈0, 500 es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

a) Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado. Indicación: Se puede utilizar el teorema de Bolzano.

b) Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

C2) Dada la función fx=1x·L2x,

a) Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.

b) Calcula el área comprendida entre fx, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones x=12 y x=5.

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0,0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99 % y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99 %, responde:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

D2) En una universidad española, el 55 % del alumnado son mujeres y el 45 % son hombres. En esta universidad, el 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37 % de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?

b) Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio A.-

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Un grupo de investigación de la Escuela Politécnica Superior de la UIB participó en diciembre de 2.023 en un estudio de las profundidades marinas. El equipo desplegó diversas tecnologías marinas avanzadas con el fin de explorar y recoger datos de hábitats marinos a una profundidad de 350 m. Por este motivo, una embarcación con el equipo de investigación se dirigió hacia unas coordenadas marinas específicas.

a) Una vez alcanzado el punto deseado en la superficie del mar, llamémosle O, sumergieron un dispositivo verticalmente 315 metros (véase la figura). A Continuación, éste se desplazó 37 metros sobre la siguiente recta {x=0 35y+12z=-3.780 hasta alcanzar la profundidad deseada. Calcula el punto donde se situó el dispositivo después de este movimiento considerando el punto O el centro de referencia (el origen de coordenadas).

b) Si queremos mantener la profundidad deseada (350 m), ¿sobre qué plano debe desplazarse el dispositivo?

c) Se deja que el dispositivo se desplace libremente sobre el plano calculado en el apartado b) y se va monitoreando desde el barco. Con un GPS se ha detectado, desde el barco, la presencia de un objeto (posiblemente un pez) que se desplaza en la línea recta sobre la trayectoria {x=5+4λ y=10+λ z=-380+10λ . Si dicho objeto no cambia la trayectoria, ¿podría chocar con el dispositivo? En caso afirmativo, ¿en qué punto podría tener lugar la colisión?

Respuesta A:

a)

La profundidad deseada son 350 metros, por lo cual, el punto que ocupa el dispositivo es P0, 0, -315.

La expresión de la recta r≡{x=0 35y+12z=-3.780 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

z=λ; y=-3.780-12λ35=-108-1235⇒r≡{x=0 y=-108-1235 z=λ

.

Un vector director de r es, para λ=1, cualquiera que sea linealmente dependiente del vector v=0, -1235, 1, por ejemplo, vr=0, -12μ, 35μ.

De los infinitos posibles vectores vr, necesitamos los que tengan de módulo 37:

vr=02+-12μ2+35μ2=37; 1442+1.2252=1.369; 1.3692=1.369; 2=1⇒1=-1, 2=1.

Los vectores posibles son:

vr1=0, 12, -35 y vr2=0, -12, 35.

Por ser la profundidad deseada mayor (en valor negativo) que la posición del dispositivo, el valor de la componente z del vector ha de ser negativa, por lo cual, el vector buscado es el siguiente: vr1=0, 12, -35.

El punto D pedido es el siguiente:

$OP=OP+PQ=OP+vr1=0, 0, -315+0, 12, -35=0, 12, -350.$

Q: (0, -12, -350).

b)

Se nos pide el plano , horizontal, que contiene al punto Q0, 12, -350 y, lógicamente, tiene como vector normal n=0, 0, 1.

El plano tiene la siguiente expresión general: $\pi\equiv z+D=0$.

$\pi\equiv z+D=0$ Q0, 12, -350 $\}\Rightarrow -350+D=0;\ D=350\Rightarrow$

$\pi \equiv z+350 = 0$.

c)

Se trata de averiguar si el plano $\pi\equiv z-350=0$ y la recta $s\equiv\{x=5+4\lambda \quad y=10+\lambda \quad z=-380+10\lambda$ se cortan (en cuyo caso tienen un punto en común) o son paralelos (no tienen puntos en común).

Un vector director de la recta s es vs=4, 1, 10.

La condición necesaria para que una recta y un plano sean paralelos es que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$vs\cdot n=4, 1, 10\cdot 0, 0, 1=10\neq 0\Rightarrow$ r y π son secantes.

El objeto observado podría chocar con el dispositivo.

El punto de corte de la recta $s\equiv\{x=5+4\lambda \quad y=10+\lambda \quad z=-380+10\lambda$ y el plano $\pi\equiv z-350=0$ es el siguiente:

$\pi\equiv z+350=0 \quad s\equiv\{x=5+4\lambda \quad y=10+\lambda \quad z=-380+10\lambda \ \}-380+10\lambda+350=0;\ 10\lambda=30;\ \lambda=3.$

$x=5+4\cdot 3=5+12=17 \quad y=10+3=13 \quad z=-380+10\cdot 3=-380+30=-350 \Rightarrow N17, 13, -350.$

El punto de la posible colisión es N (17, 13, -350).

BY NC SA

Parte B.-

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Una empresa de construcción necesita comprar diferentes materias primas para elaborar sus productos. Se construyen 4 productos diferentes, los cuales requieren una cierta cantidad de madera (que tiene un coste de x euros/kg), de hierro (que tiene un coste de y euros/kg) y de plástico (que tiene un coste de z euros/kg). Para la elaboración de los diferentes productos se ha recopilado la siguiente información sobre el coste en materias primas:

Producto 1: $2x+y-z=40$ E.
Producto 2: $x-y+2z=90$ E.
Producto 3: $x+2y=70$ E.
Producto 4: $x-y+z=50$ E.

a) Describe qué significa la ecuación del producto 1.

b) Con los datos de que disponemos, ¿es posible calcular el precio del kg de cada materia prima? Es decir, ¿calcular x, y, z? Justifica tu respuesta.

B2) Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3.

a) Sabiendo que $AB+I=A$, calcula la inversa de A en función de I y B.

b) Sabiendo que $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\1&2&0\end{pmatrix}$ y $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2&0\\-1&-1&1\\-3&-1&1\end{pmatrix}$, calcula la matriz B que satisface la igualdad $AB+I=A$. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Respuestas Parte B1.-

a)

Es una ecuación con tres incógnitas que indican que dos kilos de madera, más un kilo de hierro, menos un kilo de plástico, valen 40 euros.

b)

Restando a la segunda ecuación la cuarta resulta: $z=40$.

Sustituyendo el valor de z en las ecuaciones primera, segunda y tercera, resulta:

$2x+y=80 \quad x-y=10 \quad x+2y=70\ \}$. Sumando las dos primeras ecuaciones resulta: $3x=90;\ x=30$.

El valor de la incógnita restante es $y=20$.

El sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas es compatible determinado.

El kg de madera, hierro y plástico es de 30, 20 y 40 euros, respectivamente.

Parte B2

B2) Sean A y B dos matrices 3×3 tales que A es invertible. Sea I la matriz identidad de dimensión 3×3.

a) Sabiendo que AB+I=A, calcula la inversa de A en función de I y B.

b) Sabiendo que A=0 1 -1 1 -1 1 1 2 0 y A-1=12·2 2 0 -1 -1 1 -3 -1 1 , calcula la matriz B que satisface la igualdad AB+I=A. ¿Es B invertible? Justifica la respuesta.

Respuestas Parte B2.-

a)

AB+I=A; A-AB=I; A·I-B=I.

Por definición de inversa de una matriz: A·A-1=A-1·A=I, de la expresión (*) se deduce que:

A-1=I-B.

b)

B=I-A-1=1 0 0 0 1 0 0 0 1 -12·2 2 0 -1 -1 1 -3 -1 1 =

=1 0 0 0 1 0 0 0 1 +-1 -1 0 12 12 -12 32 12 -12 B=0 -1 0 12 32 -12 32 12 12 =12·0 -2 0 1 3 -1 3 1 1 .

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

B=123·0 -2 0 1 3 -1 3 1 1 =18·6+2=1≠0.

Se ha utilizado la propiedad de los determinantes que si se dividen los elementos de una línea de una matriz por un número, su determinante queda dividido por ese número.

La matriz B es invertible.

Ejercicio C.-

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) La función que describe la altitud A de un terreno (en metros) sobre un tramo de 500 metros es Ax=-0,0001x3+0,05x2-4x+200, donde x∈0, 500 es la distancia recorrida horizontalmente, medida en metros.

a) Demuestra que existe al menos un punto x donde la altitud es 0 dentro del tramo considerado. Indicación: Se puede utilizar el teorema de Bolzano.

b) Estudia los puntos críticos de la función y su crecimiento/decrecimiento para concluir si este punto es único o no. ¿Lo es? Justifica la respuesta.

C2) Dada la función fx=1x·L2x,

a) Determina el dominio de la función y el comportamiento de la función en los extremos de su dominio.

b) Calcula el área comprendida entre fx, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones x=12 y x=5.

Respuestas Parte C1.-

a)

La función Ax=-0,0001x3+0,05x2-4x+200, por ser polinómica, es continua en su dominio.

El teorema de Bolzano dice que "si fx es una función continua en a, b y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces ∃c∈a, b tal que fc=0".

A0=200>0.

A500=-0,0001·5003+0,05·5002-4·500+200=

=-0,0001·125.000.000+0,05·250.000-2.000+200=

=-12.500+12.500-1.800=-1.800<0.

Queda demostrado que ∃x∈R para el cual la altura es 0 en 0, 500.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

A'x=-0,0003x2+0,1x-4.

A'x=0⇒-0,0003x2+0,1x-4=0; 3x2-1.000x+40.000=0;

x=1.000±1.000.000-480.0006=1.000±520.0006=1.000±4·13·10.0006=

$=1.000\pm200\cdot136=500\pm100\cdot133\{x1=1003\cdot5-13\cong46,48$
$x2=1003\cdot5+13\cong286,85$.

Por ser Ax polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función en los intervalos 0; 46,48, 46,48;286,85 y 286,85; 500, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x=10\in0;46,48$ es:

$A'10=-0,0003\cdot102+0,1\cdot10-4=-0,03-3<0\Rightarrow$Decreciente.

Teniendo en cuenta la continuidad de la función y de lo expresado anteriormente se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$A'x<0\Rightarrow$Decrecimiento: $x\in0;\ 46,48286,85;\ 500$.

$A'x>0\Rightarrow$Crecimiento: $x\in46,48;286,85$.

De lo anterior se deduce que la función tiene dos puntos críticos: para $x=46,48$ la función presenta un mínimo relativo y para $x=286,85$ un máximo relativo.

Respuestas Parte C2.-

a)

Teniendo en cuenta que los números negativos y el cero no tienen logaritmo y también por contener 1x, el dominio de la función es Df0, +∞.

fx =L2xx =L00=-∞0=-∞.

La función fx tiene la asíntota vertical x=0.

fx =L2xx =⇒Ind.⇒L'Hopital22x1 =1x =

=1=0.

La función fx tiene la asíntota horizontal y=0.

b)

El punto de corte de la función con el eje de abscisas es el siguiente:

fx=0⇒L2x=0; 2x=1; x=12⇒P12, 0.

Teniendo en cuenta la continuidad de la función en su dominio, las ordenadas correspondientes al intervalo de la superficie a calcular, 12, 5, son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

S=125fx·dx=125L2xx·dxx=5→t=L10 x=12→t=0

⇒S=0L10t·dt=t220L10=L1022-0⇒

S=L2102 u2≅2,65 u2.

Ejercicio D.-

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Supongamos que la probabilidad de tener tuberculosis es de 0,0005. Sabiendo que la probabilidad de que la prueba dé positivo sabiendo que la enfermedad está presente es del 99 % y la probabilidad que dé negativo cuando la enfermedad no está presente también es del 99 %, responde:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el test dé positivo si la persona no tiene la enfermedad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de tener tuberculosis si el resultado de la prueba es negativo?

D2) En una universidad española, el 55 % del alumnado son mujeres y el 45 % son hombres. En esta universidad, el 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37 % de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?

b) Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Respuesta Parte D1.-

Haz un diagrama de árbol

a)

$$P=PPo/T=PT\cap PoPT=PT\cdot PPo/TPT=0,9995\cdot 0,010,9995=0,01.$$

b)

$$P=PT/Ne=PT\cap NePNe=PT\cdot PNe/TPT\cdot PNe/T+PT\cdot PNe/T=0,0005\cdot 0,010,0005\cdot 0,01+0,9995\cdot 0,99=$$

$$=0,0000050,000005+0,989505=0,0000050,989510=0,000005.$$

Respuesta Parte D2.-

D2) En una universidad española, el 55 % del alumnado son mujeres y el 45 % son hombres. En esta universidad, el 13 % de las mujeres estudia una carrera STEM, mientras que el 37 % de los hombres también estudian una. Si seleccionamos un estudiante al azar:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante seleccionado estudie STEM?
b) Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
c) Sabiendo que el estudiante escogido NO estudia STEM, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Respuesta

a) Haz un diagrama de árbol

$$P(St)=P(M\cap St)+P(H\cap St)=P(M)\cdot P(St/M)+P(H)\cdot P(St/H)=$$

$$=0,55\cdot 0,13+0,45\cdot 0,37=0,0715+0,1665=0,2380.$$

b)

$$P=P(M/St)=\frac{P(M\cap St}{P(St)}=\frac{P(M)\cdot P(St/M)}{P(St)}=\frac{0,55\cdot 0,13}{0,2380}=\frac{0,0715}{0,2380}=0,3004.$$

c)

$$P=P(M/St)=\frac{P(M\cap St}{P(St)}=\frac{P(M)\cdot P(St/M)}{1-P(St)}=\frac{0,55\cdot 0,87}{1-0,2380}=\frac{0,4785}{0,7620}=0,6280.$$

Govern de les Illes Balears	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

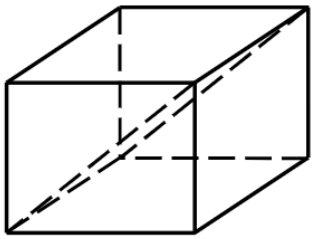
INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2.5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2,5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión $3\times2,5$ metros, tal como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



a) Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.

b) Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifique el proceso.

c) Una de las dos caras de dimensión $2\times2,5$ metros constituye la puerta del contenedor tal como se muestra en la figura. ¿Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones $2,75\times2,75$ metros?

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Dado el sistema $\{kx + y = 1 \quad ky + z = 0 \quad 3x - y - z = 0$, donde k es un número real cualquiera.

a) Discute, según el parámetro k, el número de soluciones que tiene el sistema.

b) Resuelve el sistema cuando sea posible.

BY NC SA

B2) Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3,50 euros, cada hamburguesa cuesta 4 euros y cada refresco cuesta 1,50 euros. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

a) ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 euros y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.

b) Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas, ¿cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

a) Calcula la recta r tangente a la curva en el punto $P(2,\ 0)$.

b) Calcula el área de la región comprendida entre la curva y, el eje OY y la recta r.

C2) La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo $(t \geq 0)$, por la función $H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}}$, donde el tiempo está medido en segundos.

a) ¿Cuál es la concentración inicial?

b) Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

c) Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45 % de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40 % han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los producto no averiados, se sabe que el 55 % también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

a) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?

b) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?

c) Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

D2) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A y B los sucesos complementarios de A y B, respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B.

Dadas las probabilidades $P(A) = 0,75$, $P(B') = 0,45$ y $P(A - B) = 0,30$, calcula:

a) $P(A \cap B)$. *b*) $P(B - A)$. *c*) $P(A' \cap B')$.

BY NC SA

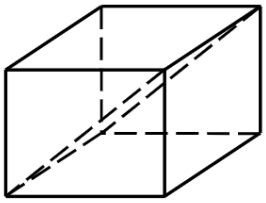
RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Parte A.

A1

PARTE A. Contestad el único problema de esta parte.

A1) Una empresa de transporte marítimo ha diseñado un nuevo contenedor metálico en forma de prisma rectangular, tal como se muestra en la figura. El contenedor diseñado tiene una base con dimensiones 3 metros por 2 metros y una altura de 2,5 metros. En el interior del contenedor se colocan un total de dos vigas para reforzar la estructura, las cuales se colocan sobre la diagonal de cada una de las caras de dimensión $3\times2,5$ metros, tal como se muestra en la figura (segmentos discontinuos).



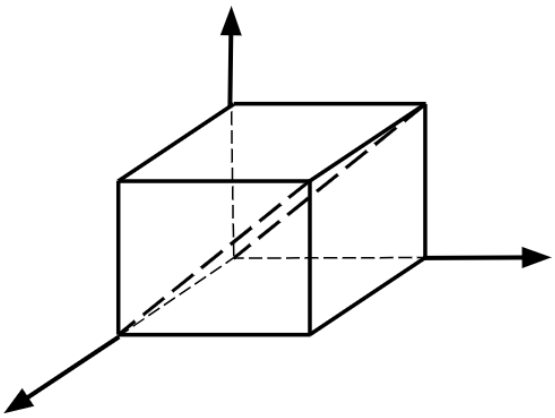
a) Escoge un vértice del prisma regular y sobre él determina un sistema de referencia cartesiano, el cual tendrá como origen dicho vértice. Indica, con este sistema de referencia, cuáles son las coordenadas de cada uno de los diferentes vértices del prisma rectangular.

b) Calcula la longitud de las dos vigas y calcula la ecuación del plano que las contiene. Justifique el proceso.

c) Una de las dos caras de dimensión $2\times2,5$ metros constituye la puerta del contenedor tal como se muestra en la figura. ¿Podremos introducir en ella una lámina de hierro cuadrada muy fina de dimensiones $2,75\times2,75$ metros?

Respuesta

a)



b)

$$d_1 = d_2 = \overline{OB'} = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2 + (2,5-0)^2} = \sqrt{0+9+6,25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{d_1 = d_2 = \sqrt{15,25}\ metros \cong 3,905\ metros.}$$

El plano π que contiene a las dos diagonales contiene a los puntos O, A y B', que determinan los vectores $\vec{OA} = (2,\ 0,\ 0)$ y $\vec{OB'} = (0,\ 3,\ 2'5)$.

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\beta\left(O;\ \vec{OA},\ \vec{OB'}\right) \equiv \left|x\ y\ z\ 2\ 0\ 0\ 0\ 3\ 2'5\right| = 0;\ \ 6z - 5y = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 5y - 6z = 0}.$$

$c)$

La puerta es un rectángulo cuya diagonal es $\overline{B'C} = \overline{BC'}$.

La lámina se podrá introducir en el contenedor si $\overline{B'C} = \overline{BC'} > 2,75$.

$$\overline{B'C} = \sqrt{(2-0)^2 + (3-3)^2 + (0-2,5)^2} = \sqrt{4+0+6,25} = \sqrt{10,25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{10,25} = 3,20 > 2,75 \Rightarrow \underline{La\ lámina\ puede\ introducirse\ en\ el\ contenedor}.$$

Solución: D = 3,9 m; Plano: 5y – 6z =0; La lámina puede introducirse en el contenedor

Parte B.

Parte B. Escoged un solo problema de esta parte.

B1) Dado el sistema $\{kx + y = 1 \quad ky + z = 0 \quad 3x - y - z = 0$, donde k es un número real cualquiera.

a) Discute, según el parámetro k, el número de soluciones que tiene el sistema.

b) Resuelve el sistema cuando sea posible.

B2) Estás gestionando una parada de comida y bebidas en un partido de baloncesto. Vendes perritos calientes, hamburguesas y refrescos. Cada perrito caliente cuesta 3,50 euros, cada hamburguesa cuesta 4 euros y cada refresco cuesta 1,50 euros. Al final de la noche, te piden informar de cuántos perritos calientes, hamburguesas y refrescos se han vendido.

a) ¿Podrías informar de las cantidades sabiendo que has recaudado un total de 328 euros y has vendido 132 artículos entre perritos calientes, hamburguesas y refrescos? Justifica la respuesta.

b) Si, además, sabemos que se han vendido 20 hamburguesas, ¿cuántos perritos calientes y cuántos refrescos se han vendido?

Respuesta B1

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = (k\ 1\ 0\ 0\ k\ 1\ 3\ \ -1\ \ -1) \text{ y } M' = (k\ 1\ 0\ 0\ k\ 1\ 3\ \ -1\ \ -1\ \ \ 1\ 0\ 0).$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M| = |k\ 1\ 0\ 0\ k\ 1\ 3\ \ -1\ \ -1| = -k^2 + 3 + k = 0;\ k^2 - k - 3 = 0;\ k = \frac{1\pm\sqrt{}$$

$$= \frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2},\ k_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

$$Para\left\{k\neq\frac{1-\sqrt{13}}{2}\ k\neq\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}\Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ D.$$

$$Para\ k = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow M' = (k\ 1\ 0\ 0\ k\ 1\ 3\ \ -1\ \ -1\ \ \ 1\ 0\ 0) \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |1\ 0\ 1\ k\ 1\ 0\ \ -1\ \ -1\ 0| = -\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\left\{k=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\ k=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible$$

.

b)

Se resuelve el sistema $\forall k\in R-\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2},\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

$kx+y=1 \quad ky+z=0\ 3x-y-z=0\}\Rightarrow$ Sumando a la tercera ecuación la segunda, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} kx+y=1\ 3x+(k-1)y=0\} \\ -3kx-3y=-3\ 3kx+\left(k^2-k\right)y=0\end{array}\right\}\Rightarrow -3y+\left(k^2-k\right)y=-3;$$

$$\left(k^2-k-3\right)y=-3;\ \ y=\frac{-3}{k^2-k-3}.$$

$$kx+y=1;\ \ kx=1-y=1+\frac{3}{k^2-k-3}=\frac{k^2-k}{k^2-k-3}\Rightarrow x=\frac{k-1}{k^2-k-3}.$$

$$ky+z=0;\ \ z=-ky=-k\cdot\frac{-3}{k^2-k-3}\Rightarrow z=\frac{3k}{k^2-k-3}.$$

$$Solución:\ x=\frac{k-1}{k^2-k-3},\ y=\frac{-3}{k^2-k-3},\ z=\frac{3k}{k^2-k-3},\ \forall k\in R-\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2},\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}.$$

Solución: $x=\frac{k-1}{k^2-k-3},\ y=\frac{-3}{k^2-k-3},\ z=\frac{3k}{k^2-k-3},\ \forall k\in R-\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2},\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right.$

BY NC SA

Respuesta B2:

a)

Sean $x,\ y,\ z$ el número de perritos calientes, hamburguesas y refrescos que se venden en el partido de baloncesto, respectivamente.

El sistema que resulta del enunciado es el siguiente:

$3,5x + 4y + 1,5z = 328 \qquad x + y + z = 132\ \}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = (3,5\ 4\ 1,5\ 1\ 1\ 1\ )\ y\ M' = (3,5\ 4\ 1,5\ 1\ 1\ 1 \quad 328\ 132\ ) \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2$

.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.\ C.\ I.$$

No se puede deducir el número de cada artículo vendido.

b)

Para $y = 20$ el sistema resulta: $3,5x + 4{\cdot}20 + 1,5z = 328 \qquad x + 20 + z = 132\ \}$, equivalente al sistema: $3,5x + 1,5z = 248 \qquad x + z = 112\ \}$. Resolviendo:

$7x + 3z = 496 \quad x + z = 112\ \}\ 7x + 3z = 496\ -3x - 3z = -336\ \} \Rightarrow 4x = 160;$

$.\ z = 112 - 40 = 72.$

Se han vendido 40 perritos, 20 hamburguesas y 72 refrescos.

Parte C:

Parte C. Escoged un solo problema de esta parte.

C1) Dada la curva $y(x) = x^2 - 4$,

a) Calcula la recta r tangente a la curva en el punto $P(2,\ 0)$.

b) Calcula el área de la región comprendida entre la curva y, el eje OY y la recta r.

C2) La concentración (en %) de hidrógeno de un cierto compuesto químico está dada, en función del tiempo $(t \geq 0)$, por la función $H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}}$, donde el tiempo está medido en segundos.

a) ¿Cuál es la concentración inicial?

b) Demuestra que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

c) Calcula hacia qué valor tiende la concentración a medida que pasa el tiempo.

Respuesta C1:

a)

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = 2x. \qquad m = f'(2) = 2\cdot 2 = 4 \Rightarrow m = 4.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(2,\ 0)$ con $m = 4$ es:

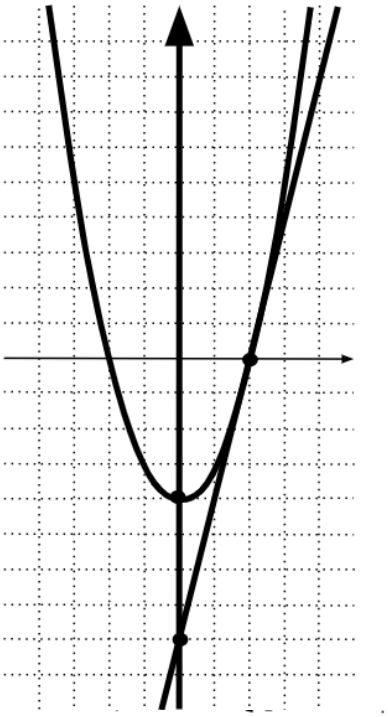
$$y - 0 = 4\cdot(x - 2) = 4x - 8.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 4x - y - 8 = 0.}$$

BY NC SA

b)

La curva $y(x) = x^2 - 4$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:



$$y'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f(0) = -4 \Rightarrow V(0, -4).$$

Los puntos de corte de la curva y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4 = 4x - 8;\ x^2 - 4x + 4 = 0;\ (x-2)^2 = 0;$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \rightarrow A(2, 0).$$

La recta contiene al punto $B(0, -8)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

La superficie pedida, que aparece sombreada en la figura, es la siguiente:

$$S = \int_0^2 \left[\left(x^2 - 4\right) - (4x - 8)\right] \cdot dx = \int_0^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\right) - 0 = \frac{8}{3} - 8 + 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2,67\ u^2.$$

BY NC SA

Respuesta C2:

a)

$$H(0) = \frac{20}{1+e^{-0}} = \frac{20}{1+e^{0}} = \frac{20}{1+1} = \frac{20}{2} = 10.$$

La concentración inicial de hidrógeno fue del 10 %.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$H'(t) = \frac{0\cdot\left(1+e^{-t}\right)-20\cdot\left(-e^{-t}\right)}{\left(1+e^{-t}\right)^2} = \frac{0+20\cdot e^{-t}}{\left(1+e^{-t}\right)^2} = \frac{20\cdot e^{-t}}{\left(1+e^{-t}\right)^2} > 0,\ \forall t\in R.$$

Queda demostrado que la concentración de hidrógeno es siempre creciente.

c)

$$H(t) = \frac{20}{1+e^{-t}} = \frac{20}{1+e^{-\infty}} = \frac{20}{1+\frac{1}{e^{\infty}}} = \frac{20}{1+\frac{1}{\infty}} = \frac{20}{1+0} = 20.$$

Con el tiempo la concentración de hidrógeno crece constantemente al 20 %.

BY NC SA

Parte D:

Parte D. Escoged un solo problema de esta parte.

D1) Una empresa de construcción de drones ha realizado un estudio sobre la vida media de sus productos. Se ha detectado que el 45 % de sus productos se averían antes de los 5 años. De entre estos objetos averiados, el 40 % han sufrido un mal uso por parte de los usuarios, mientras que, de los producto no averiados, se sabe que el 55 % también sufrieron un mal uso por parte de los usuarios.

a) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos del estudio, ¿cuál es la probabilidad de obtener un producto que no se hubiera averiado antes de los 5 años?

b) Si se selecciona aleatoriamente uno de los productos no averiados antes de los 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un buen uso?

c) Si se selecciona aleatoriamente un producto del estudio y se sabe que sufrió un mal uso por parte del usuario, ¿cuál es la probabilidad de que no estuviera averiado antes de los 5 años?

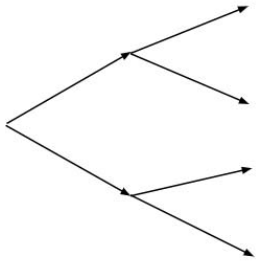
D2) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. Sean A y B los sucesos complementarios de A y B, respectivamente, y sea $A - B$ el conjunto de sucesos elementales de A que no pertenecen a B.

Dadas las probabilidades $P(A) = 0,75$, $P(B') = 0,45$ y $P(A - B) = 0,30$, calcula:

a) $P(A \cap B)$. *b*) $P(B - A)$. *c*) $P(A' \cap B')$.

Respuesta D1:

Sean A y $\overline{A}$ las probabilidades de que se averíen o no los productos antes de 5 años, respectivamente y, U y $\overline{U}$ las probabilidades de que el producto haya recibido buen o mal uso, respectivamente.



a)

$$P = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,45 = \underline{0,55}.$$

b)

$$P = P(U/\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap U)}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(U/\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{0,55 \cdot 0,45}{0,55} = \underline{0,45}.$$

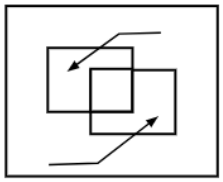
c)

$$P = P(\overline{A}/\overline{U}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{U})}{P(\overline{U})} = \frac{P(\overline{A}) \cdot P(\overline{U}/\overline{A})}{P(A) \cdot P(\overline{U}/A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{U}/\overline{A})} = \frac{0,55 \cdot 0,55}{0,45 \cdot 0,40 + 0,55 \cdot 0,55} =$$

$$= \frac{0,3025}{0,1800 + 0,3025} = \frac{0,3025}{0,4825} = \underline{0,6269}.$$

BY NC SA

Respuesta D2:



$Datos:\ P(A) = 0,75, P(B') = 0,45$ y $P(A - B) = 0,30.$

$a)$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = 0,75 - 0,30 = \underline{0,45}.$$

$b)$

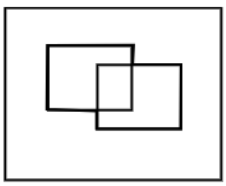
$$P(B') = 1 - P(B) \Rightarrow P(B) = 1 - P(B') = 1 - 0,45 = 0,55.$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0,55 - 0,45 = \underline{0,10}.$$

$c)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 0,75 + 0,55 - 0,45 = 1,30 - 0,45 \Rightarrow P(A \cup B) = 0,85.$$



$$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,85 = \underline{0,15}.$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Paula Orta y Gobierno Canario

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Distrito Universitario Canarias	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones:
- Debe responder sólo una pregunta de cada bloque de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque, se considerará sólo la primera pregunta respondida.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & si \quad 0 \le x < 2 \\ \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

0.5 a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta.

0.75 b) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que $-0.5\ (mg/L)/h$.

0.75 c) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración.

0.5 d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2A:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2x2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

1 a) Para cualquier valor del parámetro a: comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1}.

1.5 b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2B:

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

1.25 a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k.

1.25 b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3A:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2,-1,1)\ ;\ r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\ ;\ r_2:\frac{x+3}{2}=2-y=\frac{z+4}{3}$$

0.25 a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$

1 b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

1.25 c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2

Ejercicio 3B:

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2);\ \pi: -x+2y+z+1=0\ ;\quad r:\begin{cases}4x-7y+2z=7\\y-2z+5=0\end{cases}$$

1 a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r

1.5 b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4A:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer al azar una bola de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

0.5 a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.

1 b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.

1 c) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

Ejercicio 4B:

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22ºC con desviación típica de 5ºC. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18ºC y 25ºC. Si se superan los 30ºC, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15ºC, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

0.75 a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?

0.75 b) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?

1 c) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarias en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos senderistas se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (Metabolix)

1. En un hospital de las Islas Canarias, un equipo de investigación está analizando cómo se metaboliza en sangre un nuevo medicamento llamado Metabolix, utilizado para tratar infecciones bacterianas. La concentración residual del fármaco en el plasma sanguíneo, denotada como $f(x)$ (medida en miligramos por litro, mg/L), depende del tiempo transcurrido x (en horas) desde su administración. El estudio indica que el medicamento sigue dos fases diferenciadas:

- Fase de absorción: En las primeras dos horas, el fármaco se distribuye por el organismo.
- Fase de eliminación: A partir de la segunda hora, el fármaco empieza a eliminarse.

Este comportamiento se modeliza mediante la siguiente función matemática:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & si \quad 0 \le x < 2 \\ \dfrac{9}{\sqrt{5x-1}} & si \quad x \ge 2 \end{cases}$$

El equipo de investigación necesita aclarar algunas dudas del modelo matemático:

0.5 a) Confirmar si este modelo es realmente continuo. Justifica tu respuesta.

0.75 b) La concentración residual varía con el tiempo, comprobar que la velocidad de crecimiento instantánea de la concentración residual a las 3 horas de administrar Metabolix es mayor que $-0.5\ (mg/L)/h$.

0.75 c) ¿Es cierto que la concentración residual del fármaco en la sangre siempre va disminuyendo con respecto al tiempo transcurrido? Averiguar en qué instante la concentración residual es máxima y calcular el valor de dicha concentración.

0.5 d) Pasado un largo periodo de tiempo, ¿cuál será la concentración residual de este medicamento?

Solución:

a) Analizamos la continuidad de los diferentes tramos de la función.

- Primer tramo: f(x) es polinómica, por tanto, continua.
- Segundo tramo: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{5x-1}}$. Como $x \ge 2$, se tiene que $5x - 1 > 0$, por tanto la raíz y el cociente están bien definidos. Este segundo tramo también es continuo.

Analizamos la continuidad en el punto de cambio, $x = 2$.

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 6x + 11) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 3 \end{cases} \Rightarrow Como\ f(2) = \lim_{x\to 2} \text{f(x)},\ \text{f(x) es continua en x=2.}$$

Se puede afirmar que le modelo es continuo.

b) La velocidad de crecimiento instantáneo es la derivada de f(x) en x=3,

$f'(x) = \frac{-45}{2(5x-1)\sqrt{5x-1}}$ para $x > 2$; $f'(3) = \frac{-45}{28\sqrt{14}} \approx -0.43\ (mg/L)/h$.

Por tanto, podemos afirmar que es cierto, la velocidad instantánea de crecimiento de la concentración residual a las 3 horas de suministrar el medicamento es mayor que -0.5 (mg/L)/h.

BY NC SA

c) Para saber si siempre disminuye analizamos el crecimiento de la función en cada uno de los tramos,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & si \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{-45}{2(5x-1)\sqrt{5x-1}} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Como se observa en la expresión de la derivada, la derivada de la función es siempre negativa, por tanto, la concentración residual del Metabolix en sangre siempre disminuye.

Como la función siempre disminuye la concentración máxima se alcanza al inicio, y su valor es

$$f(0) = 11\ mg/L$$

La concentración del Metabolix en sangre en máxima justo en el momento que se administra el medicamento y es de 11mg/L

d) Calculamos el comportamiento de la función cuando $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9}{\sqrt{5x-1}} = 0$$

La concentración del Metabolix en sangre tiende a desaparecer cuando transcurre el tiempo.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2A:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Dada la matriz $M \in M_{2x2}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

1 a) Para cualquier valor del parámetro a: comprobar que M es invertible y dar la expresión de M^{-1}.

1.5 b) Para $a = -1$, calcula el valor de la matriz X que satisface la ecuación $MA = B - MX$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) La matriz M tiene inversa si y sólo si $|M| \neq 0$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a-3 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix} = 2 - a + a - 3 = -1 \neq 0$$

Por tanto, la matriz M siempre tiene inversa.

Calculamos la matriz inversa,

$$Adj(M) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 3-a & 1 \end{pmatrix}; \quad Adj(M)^t = \begin{pmatrix} 2-a & 3-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} Adj(M)^t = \begin{pmatrix} a-2 & a-3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial,

$$MA = B - MX; \quad MX = B - MA; \quad X = M^{-1}(B - MA)$$

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

$$B - MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -9 & 11 \\ 3 & 7 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (usando el apartado a))

Finalmente,

$$X = M^{-1}(B - MA) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 9 & -8 \\ -4 & -5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución, $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Notación matemática correcta

Otra forma: $MA = B - MX; \quad MX = B - MA; \quad X = M^{-1}(B - MA) = M^{-1}B - A$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad M^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -13 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución, $X = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -16 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Notación matemática correcta

BY NC SA

Ejercicio 2B:

2B. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

1.25 a) Estudiar el rango de A según los valores del parámetro k.

1.25 b) Para $k = -1$, comprobar que $A^2 = 2A - I$, donde I denota la matriz identidad de orden 3. Además, utilizando la igualdad anterior verifica, sin calcular la potencia, que $A^4 = 4A - 3I$.

Solución:

a) El rango máximo de la matriz A es 3 y eso ocurre cuando su determinante sea distinto de cero,

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & k & 1 \\ -4 & 4 & k \end{vmatrix} = 5k^2 + 16 + 16 + 8k - 20 + 8k = 5k^2 + 16k + 12$$

$$5k^2 + 16k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -2,\ k = \frac{-6}{5}$$

- Si $k \neq -2$ y $k \neq \frac{-6}{5}$, el $rang(A) = 3$
- Si $k = -2$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Tomando el menor

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -10 + 8 = -2 \neq 0$$

Obtenemos que el $rang(A) = 2$.

- Si $k = \frac{-6}{5}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & \frac{-6}{5} & 1 \\ -4 & 4 & \frac{-6}{5} \end{pmatrix}$

Tomando el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0$

Obtenemos que el $rang(A) = 2$.

b) Calculamos A^2,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $2A - I$,

$$2A - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix},$$

Y se comprueba la igualdad.

Por otro lado,

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$$

Uso correcto de la notación matemática

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3A:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, dados el punto P y las rectas r_1 y r_2 siguientes:

$$P(2,-1,1)\ ;\ r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\ ;\ r_2:\frac{x+3}{2}=2-y=\frac{z+4}{3}$$

0.25 a) Comprobar que $P \in r_1$ y que $P \notin r_2$

1 b) Hallar la distancia entre el punto P y el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

1.25 c) Hallar el ángulo con el que se cortan las rectas r_1 y r_2

Solución:

a) Verificamos si $P \in r_1$

$$r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\xrightarrow{P=(2,-1,1)}\begin{matrix}4\cdot 2+3(-1)-3\cdot 1=8-3-3=2\\2\cdot 2-3(-1)-6\cdot 1=4+3-6=1\end{matrix}\rightarrow P(2,-1,1)\in r_1$$

Comprobamos a continuación que el punto P no está en la recta r_2

$$r_2:\frac{x+3}{2}=2-y=\frac{z+4}{3}\xrightarrow{P=(2,-1,1)}\frac{2+3}{2}\underset{?}{=}2-(-1)\underset{?}{=}\frac{1+4}{3}\rightarrow\frac{5}{2}\neq 3\neq\frac{5}{3}\rightarrow P(2,-1,1)\notin r_2$$

b) Hallemos en primer lugar el punto de intersección de las rectas r_1 y r_2

$$r_2:\frac{x+3}{2}=2-y=\frac{z+4}{3}\rightarrow\begin{cases}x=2\lambda-3\\y=2-\lambda\\z=3\lambda-4\end{cases}$$

$$r_1:\begin{cases}4x+3y-3z=2\\2x-3y-6z=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}4(2\lambda-3)+3(2-\lambda)-3(3\lambda-4)=2\\2(2\lambda-3)-3(2-\lambda)-6(3\lambda-4)=1\end{cases}\rightarrow$$

$$\begin{cases}8\lambda-12+6-3\lambda-9\lambda+12=2\\4\lambda-6-6+3\lambda-18\lambda+24=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-4\lambda+6=2\\-11\lambda+12=1\end{cases}\rightarrow\lambda=1$$

$$\begin{cases}x=2\lambda-3\\y=2-\lambda\\z=3\lambda-4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=2\cdot 1-3\\y=2-1\\z=3\cdot 1-4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\\z=-1\end{cases}\rightarrow Q=(-1,1,-1)$$

Hallemos, ahora, la distancia entre los puntos $P=(2,-1,1)$ y $Q=(-1,1,-1)$

$$d(P,Q)=\sqrt{(-1-2)^2+\left(1-(-1)\right)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{(-3)^2+(2)^2+(-2)^2}=$$

$$=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}=4.12\,u$$

$$\boxed{d(P,Q)=\sqrt{17}=4.12\,u}$$

c)

$$\overrightarrow{v_{r_1}}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\4&3&-3\\2&-3&-6\end{vmatrix}=-27\vec{\imath}+18\vec{\jmath}-18\vec{k}=(-27,+18,-18)\equiv(3,-2,2)$$

$$\overrightarrow{v_{r_2}}=(2,-1,3)$$

$$cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_{r_1}}\cdot\overrightarrow{v_{r_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{v_{r_1}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_{r_2}}\right|}=\frac{|(3,-2,2)\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{9+4+4}\cdot\sqrt{4+1+9}}=\frac{|14|}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{14}}=0.9074\rightarrow$$

$$\boxed{\alpha=cos^{-1}(0.9074)=24.83°=24°50'24''}$$

BY NC SA

Ejercicio 3B:

3B. En el espacio tridimensional se consideran los siguientes elementos geométricos:

$$A(1,0,2);\ \pi: -x+2y+z+1=0\,; \qquad r: \begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$$

1 a) Hallar la posición relativa del plano π y la recta r

1.5 b) Hallar el punto simétrico de A con respecto del plano π

Solución:

a) Veamos si recta y plano se intersecan, para ello vamos a expresar la recta r en paramétricas y sustituiremos en la ecuación del plano.

Calculamos el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 4 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 4\vec{k} = (12,8,4) \equiv (3,2,1)$$

Averiguamos un punto de la recta: $\begin{cases} 4x-7y+2z=7 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$

Hacemos $z=0$, entonces $y=-5$, y con estos datos sustituímos en la primera ecuación y el valor de $x = \frac{7-35}{4} = -7$

El punto será $P(-7,-5,0)$

$$r: \begin{cases} x=-7+3\lambda \\ y=-5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\pi:\ -(-7+3\lambda)+2(-5+2\lambda)+\lambda+1=0$$
$$-2+2\lambda=0;\ \lambda=1;$$

Por tanto, recta y plano se intersecan en el punto $Q(-4,-3,1)$

b) Para hallar el punto simétrico de A respecto del plano π, construimos la recta perpendicular al plano que pase por A, hallamos la intersección con el plano π y dicho punto será el punto medio entre A y su simétrico A'.
Como la recta es perpendicular al plano, su vector director será el vector normal del plano, por tanto la ecuación en paramétricas de dicha resta es

$$s: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

Sustituimos en la ecuación del plano

$$-1+\lambda+4\lambda+2+\lambda+1=0;\ \ \lambda=\frac{-1}{3}.$$

Con lo que el punto de intersección, punto medio de A y su simétrico es,

$$P_M = \left(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Y el vector $\overrightarrow{AP_M} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$, con lo que el punto simétrico de A es

$$A' = A + 2\overrightarrow{AP_M} = \left(\frac{5}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4A:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En una feria, un participante tiene la oportunidad de ganar premios eligiendo entre tres cajas sorpresa: una con premio y dos vacías. Hay una regla especial si se selecciona una caja vacía:

En caso de elegir una caja sin premio, se debe extraer al azar una bola de una urna compuesta por 2 bolas verdes y 3 negras, de idéntica forma y tamaño. Si se elige la bola negra, finaliza la jugada sin premio. Si se elige la bola verde, tendrá la oportunidad de elegir una nueva caja, de las dos cajas no seleccionadas anteriormente, y acabaría la jugada.

Responder a las siguientes cuestiones:

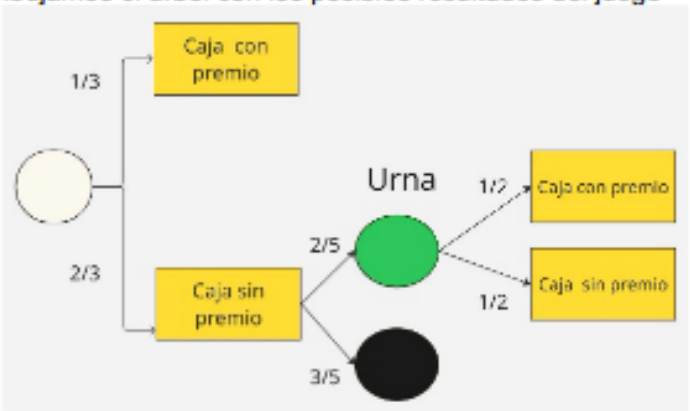
0.5 a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos de este juego.

1 b) Calcular la probabilidad de obtener premio en este juego.

1 c) Si el participante ha obtenido premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido una bola verde en la urna?

Solución:

a) Dibujamos el árbol con los posibles resultados del juego



b) Definimos lo siguientes sucesos:

- G_1='elegir la caja premiada en el primer intento'
- NG_1='elegir una de las cajas no premiadas en el primer intento'
- G_2='elegir la caja premiada en el 2º intento'
- NG_2='elegir una de las cajas no premiadas en el 2º intento'
- V='sacar bola verde'
- N='sacar bola negra'

La probabilidad de que obtener premio se calcula aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P('ganar\ premio') = P(G_1) + P(NG_1) \cdot P\left(V/_{NG_1}\right) \cdot P(G_2|NG_1 \cap V) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$$

La probabilidad de ganar premio es $\frac{7}{15} \approx 0.47$

c) Utilizamos el teorema del Bayes para el cálculo de esta probabilidad

$$P(V|\ "Ganar\ premio") = \frac{P(V) \cdot P('ganar\ premio'/V)}{P(\quad 'ganarpremio')}$$

BY NC SA

$$= \frac{\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}.$$

$$P(V) = P(NG_1) \cdot P\left(V/_{NG_1}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

La probabilidad de haber sacada una bola verde sabiendo que ha ganado un premio es de $\frac{2}{15} \approx 0.27$.

BY NC SA

Ejercicio 4B:

4B. La temperatura diurna en el Parque Nacional de las Cañadas del Teide durante el mes de agosto sigue una distribución normal. La temperatura media durante el día es de 22ºC con desviación típica de 5ºC. Además, se sabe que, las condiciones ideales para realizar senderismo es cuando la temperatura diurna se sitúa entre 18ºC y 25ºC. Si se superan los 30ºC, los excursionistas tendrían un riesgo elevado de insolación. Mientras que, si la temperatura se sitúa por debajo de los 15ºC, existe riesgo de cambios meteorológicos bruscos previstos para ese día.

Se está elaborando una guía informativa para los servicios de emergencia. Responder a lo siguiente:

0.75 a) ¿Qué probabilidad hay de que un día de agosto se den las condiciones ideales para realizar senderismo?

0.75 b) ¿Cuántos días de agosto se espera que haya senderistas con riesgo de insolación?

1 c) Si las Cañadas del Teide recibe un promedio de 11000 visitantes diarias en el mes de agosto y, de ellos, un 5% realiza senderismo. ¿Cuántos senderistas se estima que se puedan ver afectados por cambios meteorológicos bruscos a lo largo de dicho mes?

Solución:

a) X='temperatura diurna en un día de agosto en ºC' $X \sim N(22,5)$

$$P(18 \le X \le 25) = P\left(\frac{18-22}{5} \le Z \le \frac{25-22}{5}\right) = P(-0.8 \le Z \le 0.6)$$
$$= P(Z \le 0.6) - P(Z \ge 0.8) = P(Z \le 0.6) - \left(1 - P(Z \le 0.8)\right)$$
$$= 0.7257 - (1 - 0.7881) = 0.5138$$

La probabilidad de que en un día de agosto se den las condiciones ideales para el senderismo es 0.5138

b) Agosto es un mes de 31 días, calculamos primero la probabilidad de estar en riego de insolación

$$P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-22}{5}\right) = P(Z \ge 1.6) = 1 - P(Z \le 1.6) = 1 - 0.9452$$
$$= 0.0548$$

Con este dato, podemos decir que el número esperado de días en el mes de agosto donde existe peligro de insolación es $31 \cdot 0.0548 = 1.6988 \sim 2\ días$

c) Número de visitantes por día es 11.000, de ellos practican senderismo $0.05 \cdot 11000 = 550\ personas/día$. Ahora calculamos la probabilidad de que exista cambios bruscos de temperatura es un día de agosto.

$$P(X \le 15) = P\left(Z \le \frac{15-22}{5}\right) = P(Z \le -1.4) = 1 - P(Z \le 1.4) = (1 - 0.9192)$$
$$= 0.0808$$

Sabiendo esta probabilidad, el número de días del mes de agosto donde se esperan cambios bruscos de temperatura es $0.0808 \cdot 31 = 2.5 \approx 3\ días$

Por tanto, se verán afectadas unas 1650 personas por los cambios bruscos de temperatura.

BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159\, e^{-0.5t}}$$

0.25 a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?

0.75 b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.

0.75 c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.

0.75 d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 2:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

2.5

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

BY NC SA

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

2.5
$$\left.\begin{array}{l} 4X-5Y=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-9 & -4 & -6\\ 17 & 3 & 13\end{pmatrix} \\ 6X+4Y=\begin{pmatrix}10 & 4 & -10\\ 12 & 10 & 22\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Bloque 3:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \quad \pi: x-y+2z-5=0$$

1.5 a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s, contenida en el plano π, que corta perpendicularmente a r.

1 b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π.

3B. En el espacio tridimensional, se tienen las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+y-6z=2 \end{cases} \qquad s: x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$$

1.5 a) Comprobar que r y s son coplanarias.

1 b) Hallar la ecuación del plano que las contiene.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 4:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

1.5 a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo.

1 b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test?

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

1.75 a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria.

0.75 b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Bloque 1.- Análisis (La colonia de hormigas)

1. El modelo logístico es un modelo matemático utilizado para describir la evolución de una población a lo largo del tiempo, cuando los recursos son limitados. Es uno de los modelos matemáticos más comunes en biología y describe cómo la población se estabiliza cuando alcanza la capacidad de carga del entorno, esto es, el tamaño máximo que puede alcanzar una población antes de que los recursos se vuelvan insuficientes, lo que genera competencia y, en muchos casos, una desaceleración de la tasa de crecimiento o una crisis en la población.

Un ejemplo de modelo logístico lo encontramos en las colonias de hormigas, que están compuestas por una red de túneles, entradas, cámaras de cría y áreas de almacenamiento, donde las hormigas establecen su hábitat.

Un grupo de investigadores ha estudiado el momento en el que unas hormigas forman una nueva colonia y ha modelizado el número de hormigas ($H(t)$) después de t meses con la función:

$$H(t) = \frac{6400}{1 + 159\, e^{-0.5t}}$$

0.25 a) ¿Cuántas hormigas formaron la nueva colonia inicialmente?

0.75 b) ¿Cuál es la tasa media de crecimiento el primer año? ¿Y el segundo año? Interpretar el resultado.

0.75 c) Un observador afirma que el modelo siempre es creciente y entiende que la población de hormigas crece sin control. Justificar matemáticamente si esta afirmación es o no correcta.

0.75 d) ¿En qué momento la colonia de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad de carga?

Solución:

a) $H(0) = \frac{6400}{1+159e^{0}} = \frac{6400}{160} = 40$

La colonia de hormigas cuenta, inicialmente, con 40 individuos.

b) Para calcular la tasa de crecimiento medio del primer año:

$TVM[0,12] = \frac{H(12)-H(0)}{12-0}$, para lo que se necesita calcular $H(0)$ y $H(12)$:

$$H(0) = 40 \quad (apartado\ a)$$

$$H(12) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5\cdot 12}} = \frac{6400}{1 + 159e^{-6}} = 4591 \text{ individuos}$$

Queda:

$$TVM[0,12] = \frac{H(12) - H(0)}{12 - 0} = \frac{4591 - 40}{12} = 379 \text{ individuos por mes}$$

Para el segundo año será:

$$TVM[12,24] = \frac{H(24) - H(12)}{24 - 12}$$

$$H(24) = \frac{6400}{1 + 159e^{-0.5\cdot 24}} = \frac{6400}{1 + 159e^{-12}} = 6394 \text{ individuos}$$

$$TVM[12,24] = \frac{6394 - 4591}{24 - 12} = \frac{1803}{12} = 150\ individuos\ por\ mes$$

La tasa media de crecimiento el primer año es de 379 hormigas y el segundo año es de 150 hormigas, con lo que se está frenando el crecimiento de la colonia de hormigas en el segundo año.

BY NC SA

c) Para justificar que el modelo siempre es creciente comprobamos que la derivada siempre es positiva. La derivada de la función es:

$$H'(t) = \frac{-6400 \cdot [159 \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0.5t})}{(1+159e^{-0.5t})^2} = \frac{508800e^{-0.5t}}{(1+159e^{-0.5t})^2}$$

Como el denominador está elevado al cuadrado, siempre será positivo.
Y en el numerador tenemos una constante positiva multiplicada por una exponencial, que siempre es positiva.
Esto indica que es creciente.
Comprobamos que no crece sin control.
Calculamos el límite cuando el tiempo se va a infinito para observar su tendencia:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = \frac{6400}{1+159e^{-\infty}} = \frac{6400}{1+0} = 6400$$

La colonia de hormigas crece todo el tiempo, según este modelo, pero está controlado por la capacidad de carga que, según el modelo propuesto, será de 6400 individuos.

d) La carga máxima es de 6400 individuos y tenemos que averiguar en qué instante se alcanza la mitad, esto es, $\frac{6400}{2} = 3200$ individuos:

$$H(t) = 3200 \Rightarrow \frac{6400}{1+159e^{-0.5t}} = 3200 \Rightarrow \frac{6400}{3200} = 1+159e^{-0.5t} \Rightarrow 2-1 = 159e^{-0.5t}$$

$$\Rightarrow 1 = 159e^{-0.5t} \Rightarrow \frac{1}{159} = e^{-0.5t} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{159}\right) = -0{,}5t \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{159}\right)}{-0{,}5} = 10{,}14$$

La población de hormigas alcanzará la mitad de su capacidad a los 10 meses.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 2:

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. En la fabricación de piensos para peces en granjas acuícolas, es necesario equilibrar la cantidad de proteína, grasa y carbohidratos. Una empresa dedicada a los piensos para peces utiliza tres tipos principales de materias primas, las cuales proporcionan diferentes cantidades de proteína, grasa y carbohidratos. Las materias primas son: subproductos vegetales que contienen un 20% de proteína, un 10% de grasa y un 10% de carbohidratos; harinas que aportan un 40% de proteínas, un 20% de grasa y un 30% de carbohidratos; y subproductos cárnicos que aportan un 60%, 10% y 30% respectivamente.

2.5

Esta empresa productora está preparando 1000 kg de pienso que han de contener un 36% de proteína, un 12% de grasa y un 20% de carbohidratos. ¿Qué cantidad de cada materia prima se ha de utilizar para obtener el pienso con las características indicadas?

2B. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

2.5

$$\left.\begin{array}{r} 4X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

Solución 2A:

El problema nos facilita la siguiente información:

	Proteína	Grasa	Carbohidratos
P1-Vegetal	20	10	10
P2-Harinas	40	20	30
P3-Carnes	60	10	30
1000 kg	36	12	20

Nos preguntan por la cantidad de cada producto (P1, P2, P3) que necesitamos para poder cumplir con los porcentajes que queremos que estén presentes en los 1000 kg.

Sean las siguientes variables:

x = cantidad (Kg) de producto vegetal (P1)

y = cantidad (Kg) de producto de harina (P2)

BY NC SA

z = cantidad (Kg) de producto cárnico (P3)

Al seleccionar estas cantidades de productos, aportamos los porcentajes correspondientes de proteínas, grasas y energía. Y queremos lograr una mezcla que en 1000 kg verifique los porcentajes señalados en la última fila de la tabla. Así, las ecuaciones serán las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 0.20x + 0.40y + 0.60z = 0.36 \cdot 1000 \\ 0.10x + 0.20y + 0.10z = 0.12 \cdot 1000 \\ 0.10x + 0.30y + 0.30z = 0.20 \cdot 1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.20x + 0.40y + 0.60z = 360 \\ 0.10x + 0.20y + 0.10z = 120 \\ 0.10x + 0.30y + 0.30z = 200 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20x + 40y + 60z = 36000 \\ 10x + 20y + 10z = 12000 \\ 10x + 30y + 30z = 20000 \end{array}\right\}$$

Mediante el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} 20x + 40y + 60z = 36000 \\ 10x + 20y + 10z = 12000 \\ 10x + 30y + 30z = 20000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20x + 40y + 60z = 36000 \\ -20z = -6000 \\ -20y = -4000 \end{array}\right\}$$

Por tanto, la solución del sistema será:

Z = 300, y = 200, x = 500

$$\boldsymbol{z = 300, y = 200, x = 500}$$

En este problema lo que hemos encontrado es que la cantidad que debemos tomar de cada tipo de pienso es:

P1: 500 kg, P2: 200 Kg, P3: 300 kg. Con ello tendremos los 1000kg de pienso en el que se verifican las condiciones anteriormente indicadas para las proteínas, grasas y carbohidratos.

Solución 2B:

A. Hay que empezar calculando la inversa de la matriz dada. Para ello será necesario:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^t$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \; ; \; Adj \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos ahora el producto anterior:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & -4 & -6 \\ 17 & 3 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

El sistema queda planteado como:

$$\left.\begin{matrix} 4X - 5Y = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ 6X + 4Y = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4X - 5Y = A \\ 6X + 4Y = B \end{matrix}\right\}$$

El sistema se resuelve por Gauss y queda de la siguiente forma:

$$\left.\begin{matrix} 4X - 5Y = A \\ 6X + 4Y = B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4X - 5Y = A \\ 46Y = 4B - 6A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} X = \frac{1}{4}(A + 5Y) \\ Y = \frac{1}{46}(4B - 6A) \end{matrix}\right\}$$

Realizamos las operaciones indicadas:

$$Y = \frac{1}{46}(4B - 6A) = \frac{1}{46}\left(4\begin{pmatrix} 10 & 4 & -10 \\ 12 & 10 & 22 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}\right)$$

$$Y = \frac{1}{46}\left(\begin{pmatrix} 40 & 16 & -40 \\ 48 & 40 & 88 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 30 & -6 \\ -48 & 6 & -42 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{46}\begin{pmatrix} 46 & 46 & -46 \\ 0 & 46 & 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}(A + 5Y) = X = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$X = \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} -1 & -5 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Las soluciones son:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

BY NC SA

Bloque 3:

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. En el espacio tridimensional, se considera la recta y plano siguientes:

$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=10 \end{cases} \quad \pi: x-y+2z-5=0$$

1.5 a) Comprobar que el plano π y la recta r se cortan. Dar la ecuación de la recta s, contenida en el plano π, que corta perpendicularmente a r.

1 b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano π.

3B. En el espacio tridimensional, se tienen las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x+y-2z=3 \\ 2x+y-6z=2 \end{cases} \qquad s: x-1=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{2}$$

1.5 a) Comprobar que r y s son coplanarias.

1 b) Hallar la ecuación del plano que las contiene.

Solución 3A:

a) Para calcular la intersección del plano y la recta, vamos a pasar a paramétrica la recta:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k} = (2,1,-3)$$

Averiguamos un punto de la recta r. Para ello hacemos $x=0$ y resolvemos:

$$\begin{cases} y+z=0 \\ -y+z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ 2z=10 \end{cases}$$

Por lo que, $z=5, y=-5, x=0$

El punto de la recta r será: $A(0,-5,5)$

La ecuación de la recta en paramétrica será:

$$r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=-5+\lambda \\ z=5-3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituimos en la ecuación del plano y buscamos el punto de corte:

$$x-y+2z-5=2\lambda+5-\lambda+10-6\lambda-5=10-5\lambda=0 \rightarrow \lambda=2$$

Con lo que el punto de corte será:

$$P(4,-3,-1)$$

Ahora buscamos la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y contenida en el plano.

Para ello, el vector director de la recta buscada será perpendicular al vector director de r y al vector normal al plano, por lo que calculamos el producto vectorial de ambos vectores:

$$\vec{v}_r = (2,1,-3), \vec{n}(1,-1,2)$$

BY NC SA

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 3\vec{k} = (-1, -7, -3)$$

$$\vec{v}_s(-1, -7, -3)$$

Además, como la nueva recta s debe ser secante a la recta r y estar en el plano π, utilizamos el punto de corte averiguado anteriormente:

$$P(4, -3, -1)$$

Luego, la ecuación de la recta s será:

$$s: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = -3 - 7\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$$

b) El ángulo entre la recta y el plano será:

$$\vec{v}_r = (2,1,-3), \vec{n}(1,-1,2)$$

$$\alpha = arsen\left(\frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|}\right) = arcsen\left(\frac{|2 - 1 - 6|}{\sqrt{4+1+9} \cdot \sqrt{1+1+4}}\right) = arcsen\left(\frac{5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}\right)$$

$$\alpha = arsen(0.5455) = 33.06° = 33°3'42.83''$$

BY NC SA

Solución 3B

a) Dos rectas, en el espacio tridimensional, son coplanarias si no se cruzan.

Calculamos los vectores directores de las rectas r y s:

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k} = (-4, 2, -1) \qquad \vec{v}_s(1, 3, 2)$$

Ahora comprobamos que realmente se cortan y que no se cruzan. Buscamos un punto de cada recta con el que generar un nuevo vector que debe ser linealmente dependiente con los vectores directores.

$P \epsilon r$, hacemos z=0,

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x + y = 3 \\ x = -1 \end{matrix} \rightarrow y = 4; \qquad P(-1, 4, 0)$$

$Q \epsilon s$, hacemos z=1,

$$x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2} \rightarrow x - 1 = \frac{y}{3} = 1 \rightarrow x = 2; y = 3; \qquad Q(2, 3, 1)$$

El vector que va de una recta a la otra será: $\overrightarrow{PQ}(3, -1, 1)$

Veamos que no se cruzan:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 + 1 - 2 + 9 - 8 = 0$$

Como los vectores son linealmente dependientes, se confirma que las rectas son coplanarias.

b) Para hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas necesitamos un punto y dos vectores directores.

$P(-1, 4, 0)$, $\vec{v}_r(-4, 2, 1)$, $\vec{v}_s(1, 3, 2)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 7x + 7y - 14z - 21 = 0$$

La ecuación del plano que las contiene será: $x + y - 2z = 3$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Bloque 4:

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. Se está desarrollando una prueba para detectar una enfermedad rara que afecta al 1% de la población adulta. Se sabe que, la sensibilidad de la prueba (dar positivo cuando la persona está enferma) es del 95%, y la especificidad de la prueba (dar negativo cuando la persona está sana) es del 98%. Se selecciona al azar un individuo de la población:

1.5 a) Si se somete a la prueba de diagnóstico, calcular la probabilidad de que esté realmente enfermo cuando la prueba da positivo.

1 b) Si una población de 35000 individuos se somete a la prueba, ¿podríamos afirmar que se espera que habrá más de 50 personas que estarán enfermas, aún cuando han obtenido un resultado negativo en el test?

4B. El Instituto Canario de Estadística (ISTAC) se ha encargado de realizar un estudio multidisciplinar para optimizar la planificación de plazas en residencias universitarias de estudiantes de nuevo ingreso en las dos universidades públicas canarias (ULL y ULPGC).

Para ello, se ha llevado a cabo una encuesta a 1800 estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas no capitalinas, de los que el 27% de estos estudiantes solicitan plaza en una residencia universitaria.

1.75 a) Comprobar si hay más de un 90% de posibilidades de recibir entre 460 y 510 solicitudes de plaza en una residencia de estudiantes de nuevo ingreso que provienen de islas diferentes a Tenerife y Gran Canaria.

0.75 b) A partir de 525 solicitudes de alojamiento de estos estudiantes, las universidades deberían acometer la construcción de nuevas residencias universitarias. ¿Qué probabilidad hay de que deban adoptar esta medida?

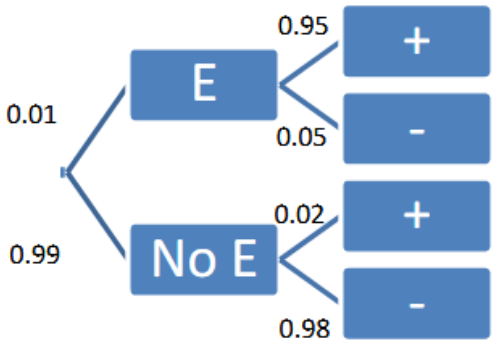
Solución 4A:

Construimos el diagrama de árbol conociendo que:

Definimos los siguientes sucesos: E ='estar enfermo', $\bar{E}$='no estar enfermo'

+='prueba dé positivo', −='prueba dé negativo'

$$Sensibilidad: P(+ \setminus E) = 0.95;\ Especificidad: P(- \setminus \bar{E}) = 0.98$$



a) Nos piden que calculemos la siguiente probabilidad que se resuelve mediante el teorema de Bayes:

$$P(E \setminus +) = \frac{P(E \cap +)}{P(+)}$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(+) = P(E) \cdot P(+\setminus E) + P(\bar{E}) \cdot P(+\setminus \bar{E}) = 0.01 \cdot 0.95 + 0.99 \cdot 0.02 = 0.0095 + 0.0198 = 0.0293$$

$$P(E \setminus +) = \frac{0.01 \cdot 0.95}{0.0293} = \frac{0.095}{0.0293} = 0.3242$$

La probabilidad de que está realmente enfermo es de 0.3242

b) Sabemos que ha dado negativo y nos piden la probabilidad de que estén enfermo, aplicando el teorema de Bayes:

$$P(E \setminus -) = \frac{P(E \cap -)}{P(-)}$$

$$P(-) = 1 - P(+) = 1 - 0.0293 = 0.9707$$

$$P(E \setminus -) = \frac{0.01 \cdot 0.05}{0.9707} = 0.00052$$

En una población de 35000 individuos sometidos a esta prueba, cabe esperar:

35000·0.00052=18 individuos que han dado negativo pero, realmente están enfermos.

No es cierto que se esperen más de 50 personas enfermas con resultado negativo en el test.

BY NC SA

Solución 4B:

X=nº de solicitudes de estudiantes de nuevo ingreso para plazas en residencias de estudiantes de islas no capitalinas

Las solicitudes enviadas son independientes.

$p = 0.27$

$X \sim B(1800, 0.27)$

Además, como, $np=486>5$ y $nq=1314> 5$ se puede aproximar con la normal

$$N\left(np, \sqrt{npq}\right) = N(486, 18.84)$$

a) $P(460 \leq X \leq 510) = P(X \leq 510) - P(X \leq 460) = P\left(Z \leq \frac{510-486}{18.84}\right) - P\left(\frac{460-486}{18.84}\right) = P(Z \leq 1.27) - P(Z \leq -1.38) = P(Z \leq 0.73) - \left(1 - P(Z \leq 1.38)\right) = 0.8980 - (1 - 0.9162) = 0.8142$

La probabilidad de que envíen entre 460 y 510 solicitudes es de 0.8142. Hay menos de un 90% de posibilidades de recibir esa cantidad de solicitudes.

b) $P(X > 525) = P\left(Z > \frac{525-486}{18.8}\right) = P(Z > 2.07) = 1 - P(Z \leq 2.07) = 1 - 0.9808 = 0.0192$

Hay un 1.92% de posibilidades de que se reciban 525 o más solicitudes de estudiantes de otras islas.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Vídeos

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBbDwCPh__JI

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D_oxotfMqu2g

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DsXN1cOoANvY

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DpI-td_-GHWc

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D1Z--h4UYt00

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DE2-fz-t-LdA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DqIW260_jH9U

BY NC SA

Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, debe responder solo a una de las opciones. Si realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Problema 1A:

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C - 3B$.

1A.c) [1 PUNTO] Resuelve la ecuación $AX + 3B = C$.

Problema 1B:

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a = 2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a = 8$. Resuélvalo si es compatible.

Problema 2A:

APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x, & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9), & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

donde ln denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

BY NC SA

Problema 2B:

2B) Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Problema 3:

APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]

Considere el punto $P = (1, 5, 0)$ y la recta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P.

3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P' en r y un vector dirección de r. Calcule el área del paralelogramo determinado por $\vec{P'P}$ y el vector dirección de r elegido.

3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y r.

Problema 4A:

APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El $1,5\%$ de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es $0,021$ y la de que si estas enfermo de negativo también es $0,021$.

4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Problema 4B:

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A \cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B.

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A:

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&-1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-3&0&2\\-1&2&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}.$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.

1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C-3B$.

1A.c) [1 PUNTO] Resuelve la ecuación $AX+3B=C$.

Solución:

1A.a) Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-1&1&0\\2&-1&0\end{vmatrix}=0+0-1+2-0-0=1\neq 0$$

El determinante de A es distinto de cero y esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&1\\-1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&2\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

1A.b) Calculamos la matriz $C-3B$.

$$C-3B=\begin{pmatrix}-3&0&2\\-1&2&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&-1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-6&0+6&2-0\\-1-0&2+3&1-6\\0-3&-2+3&-1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&6&2\\-1&5&-5\\-3&1&2\end{pmatrix}$$

1A.c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX+3B=C\Rightarrow AX=C-3B\Rightarrow X=A^{-1}\left(C-3B\right)$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=A^{-1}\left(C-3B\right)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&2&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&6&2\\-1&5&-5\\-3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-3&5+1&-5+2\\-2-3&10+1&-10+2\\9+1&-6-5&-2+5\end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}-4&6&-3\\-5&11&-8\\10&-11&3\end{pmatrix}$.

BY NC SA

Problema 1B:

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a=2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a=8$. Resuélvalo si es compatible.

Solución:

1B.a) Para $a=2$ el sistema queda $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=2 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a & & & \\ -1 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -6 & 4 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^a + 2\cdot\text{Fila } 1^a & & & \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 4 \\ \hline 0 & -6 & 4 & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -4 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & -3 & 1 & 2}^{A/B} \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

Los rangos de la matriz A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido.

BY NC SA

$$\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}1&-3&1&2\\0&-6&4&4\\0&0&0&0\end{array}}^{A/B}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-3y+z=2\\-6y+4z=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-3y+z=2\\-3y+2z=2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x-3y+z=2\\-3y=2-2z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-2z+z=2\Rightarrow x-z=0\Rightarrow x=z\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\alpha\\-3y=2-2\alpha\rightarrow y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\alpha\\z=\alpha\end{cases}}$$

Para $a=2$ las soluciones del sistema son $x=\alpha;\ y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\alpha;\ z=\alpha$ para cualquier valor $\alpha\in\mathbb{R}$.

1B.b) Para $a=8$ el sistema queda $\begin{cases}x-3y+z=2\\-2x+2z=0\\-x-3y+3z=8\end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1&-3&1\\-2&0&2\\-1&-3&3\end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix}1&-3&1&2\\-2&0&2&0\\-1&-3&3&8\end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&-3&1&2\\-2&0&2&0\\-1&-3&3&8\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}}+\text{Fila } 1^{\text{ª}}\\-1\quad-3\quad3\quad8\\1\quad-3\quad1\quad2\\\hline0\quad-6\quad4\quad10\rightarrow\text{Nueva fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{ª}}+2\cdot\text{Fila } 1^{\text{ª}}\\-2\quad0\quad2\quad0\\2\quad-6\quad2\quad4\\\hline0\quad-6\quad4\quad4\rightarrow\text{Nueva fila } 2^{\text{ª}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&1&2\\0&-6&4&4\\0&-6&4&10\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}}-\text{Fila } 2^{\text{ª}}\\0\quad-6\quad4\quad10\\0\quad6\quad-4\quad-4\\\hline0\quad0\quad0\quad6\rightarrow\text{Nueva fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}1&-3&1&2\\0&-6&4&4\\0&0&0&6\end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

BY NC SA

Problema 2A:

APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 9x, & \text{si } x \leq 3 \\ \ln(x^2 - 9), & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

donde ln denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de $f(x)$.

2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX de abscisas.

2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de $f(x)$ y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

Solución:

2A.a) El único problema se puede plantear al calcular el logaritmo neperiano, pero si $x>3$ entonces $x^2-9>9-9=0$ y el logaritmo neperiano $\ln\left(x^2-9\right)$ existe.
El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

2A.b) En el intervalo $(-\infty,3)$ la función es $f(x)=x^3-6x^2+9x$ que es una función polinómica y por tanto continua.
En el intervalo $(3,+\infty)$ la función es $f(x)=\ln\left(x^2-9\right)$ que es una función logarítmica que es continua pues $x^2-9>0$.
Comprobamos la continuidad en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^3-6x^2+9x=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \ln\left(x^2-9\right)=\ln(9-9)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

La función no es continua en $x=3$. La función es continua en $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

2A.c) Hallamos los puntos de corte.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^3-6x^2+9x & si\ x\leq 3 \\ \ln\left(x^2-9\right) & si\ x>3 \\ eje\ OX\rightarrow y=0 & \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3-6x^2+9x=0\rightarrow x\left(x^2-6x+9\right)=0\rightarrow \\ \quad\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=0}\in(-\infty,3) \\ x^2-6x+9=0\rightarrow \boxed{x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-36}}{2}=3} \end{array}\right. \\ \ln\left(x^2-9\right)=0\rightarrow x^2-9=1\rightarrow x^2=10\rightarrow \\ \quad\rightarrow \boxed{x=\sqrt{10}}\simeq 3.16\in(3,+\infty) \end{array}\right.$$

Los puntos de corte de *f(x)* con el eje OX de abscisas son $(0,0)$, $(3,0)$ y $\left(\sqrt{10},0\right)$.

BY NC SA

2A.d) **Asíntotas verticales**. $x=a$.

$x=3$ es asíntota vertical por la derecha pues $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\ln\left(x^2-9\right)=\ln(9-9)=-\infty$.

Asíntota horizontal. $y=b$.

Buscamos en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-6x^2+9x=-\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Buscamos en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(x^2-9\right)=+\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2-6x+9=+\infty\\ =\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-9\right)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\{L'Hôpital\}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2-9}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2-9}=0\end{cases}$$

Como el valor obtenido es $+\infty$ y 0 la función no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical por la derecha: $x=3$ y no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.

BY NC SA

Problema 2B:

2B) Considere la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de $f(x)$ en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de $f(x)$.

Solución:

2B.a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador nunca se anula. Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos: $x=-1$ y $x=1$

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\dfrac{1-(-2)^2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{1-0^2}{\left(0^2+1\right)^2}=1>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{1-2^2}{\left(2^2+1\right)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2B.b) Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(1+x^2\right)2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

BY NC SA

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=0\Rightarrow 2x^3-6x=0\Rightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x^2-3=0\rightarrow\boxed{x=\pm\sqrt{3}}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos $x=-2$ y la segunda derivada vale

  $f''(-2)=\dfrac{2(-2)^3-6(-2)}{\left((-2)^2+1\right)^3}=\dfrac{-4}{125}<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\sqrt{3},0\right)$ tomamos $x=-1$ y la segunda derivada vale

  $f''(-1)=\dfrac{2(-1)^3-6(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^3}=\dfrac{4}{8}>0$. La función es convexa (∪) en $\left(-\sqrt{3},0\right)$.

- En el intervalo $\left(0,+\sqrt{3}\right)$ tomamos $x=1$ y la segunda derivada vale

  $f''(1)=\dfrac{2(1)^3-6(1)}{\left(1^2+1\right)^3}=\dfrac{-4}{8}<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x=2$ y la segunda derivada vale

  $f''(2)=\dfrac{2(2)^3-6(2)}{\left(2^2+1\right)^3}=\dfrac{4}{125}>0$. La función es convexa (∪) en $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función es cóncava en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

2B.c) La función cambia de concavidad a convexidad o viceversa en $x=0$, $x=+\sqrt{3}$ y $x=-\sqrt{3}$.

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{-\sqrt{3}}{4}\rightarrow A\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$f(0)=\frac{0}{(0)^2+1}=0\longrightarrow B(0,0)$$

$$f\left(+\sqrt{3}\right)=\frac{+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{+\sqrt{3}}{4}\longrightarrow C\left(+\sqrt{3},\frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$$

Sus puntos de inflexión son $A\left(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,0)$ y $C\left(+\sqrt{3},\dfrac{+\sqrt{3}}{4}\right)$.

BY NC SA

Problema 3:

APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]

Considere el punto $P=(1,5,0)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a r que pase por el punto P.

3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P' en r y un vector dirección de r. Calcule el área del paralelogramo determinado por $\vec{P'P}$ y el vector dirección de r elegido.

3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y r.

Solución:

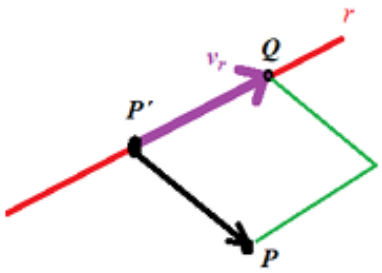
3.a) Hallamos un vector director y un punto de la recta r.

$$r:\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 2x-1=z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,2,-1) \\ \vec{v_r}=(1,-1,2) \end{cases}$$

La recta s paralela a r tiene como vector director el vector director de r.

$$\left.\begin{matrix} P(1,5,0)\in s \\ \vec{u_s}=\vec{v_r}=(1,-1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5-\lambda\,;\,\lambda\in\mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$$

3.b) Dibujamos el paralelogramo.



Consideramos el punto $P'=P_r(0,2,-1)$ y el vector director $\vec{v_r}=(1,-1,2)$. Hallamos las coordenadas del punto Q sumando al punto P´ el vector $\vec{v_r}$.

$$Q=P'+\vec{v_r}=(0,2,-1)+(1,-1,2)=(1,1,1)$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial $\vec{P'P}\times\vec{v_r}$.

$$\vec{P'P}=(1,5,0)-(0,2,-1)=(1,3,1)$$

$$\vec{P'P}\times\vec{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6i+j-k-3k-2j+i=7i-j-4k=(7,-1,-4)$$

$$Área=\left|\vec{P'P}\times\vec{v_r}\right|=\sqrt{7^2+(-1)^2+(-4)^2}=\boxed{\sqrt{66}\simeq 8.124\ u^2}$$

BY NC SA

El área del paralelogramo tiene un valor de $\sqrt{66} = 8.124$ unidades cuadradas.

3.c) La distancia del punto P a la recta r es el valor del área del paralelogramo dividida por el módulo del vector $\overrightarrow{v_r}$ (base del paralelogramo).

$$\overrightarrow{v_r} = (1,-1,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$d(P,r) = \frac{Área\ paralelogramo}{base = \left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11} \simeq 3.32\ unidades$$

BY NC SA

Problema 4A:

APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]

Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El $1,5\%$ de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es $0,021$ y la de que si estas enfermo de negativo también es $0,021$.

4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?

4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?

4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Solución:

Llamamos M al suceso "sufrir la enfermedad" y T a "el test da positivo".
Tenemos que $P(M)=0.015$, $P(T/\overline{M})=0.021$ y $P(\overline{T}/M)=0.021$.

4A.a) Nos piden calcular $P(\overline{M})$. Como es el suceso contrario de sufrir la enfermedad tenemos que $P(\overline{M})=1-P(M)=1-0.015=0.985$.

4A.b) Nos piden calcular $P(T/M)$. Como es el suceso contrario de dar negativo si tienes la enfermedad tenemos que $P(T/M)=1-P(\overline{T}/M)=1-0.021=0.979$.

4A.c) Nos piden calcular $P(M/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/T)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{P(M)P(T/M)}{P(M)P(T/M)+P(\overline{M})P(T/\overline{M})}=$$

$$=\frac{0.015\cdot 0.979}{0.015\cdot 0.979+0.985\cdot 0.021}=\boxed{\frac{979}{2358}\simeq 0.415}$$

La probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo tiene un valor aproximado de 0.415.

BY NC SA

Problema 4B:

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A \cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B.

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c \cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A.

Solución:

4B.a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=1 \\ P(A)=0.8 \\ P(B)=0.5 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 1=0.8+0.5-P(A\cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=1.3-1=0.3}$$

Hemos obtenido que $P(A\cap B)=0.3$.

4B.b) Para que A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Averiguamos si se cumple la igualdad o no.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ P(A)P(B)=0.8\cdot 0.5=0.4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.3\neq 0.4=P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.

4B.c) $P(B^c)=1-P(B)=1-0.5=0.5$

4B.d) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c\cap B^c)=P\left((A\cup B)^c\right)=1-P(A\cup B)=1-1=\boxed{0}$$

BY NC SA

UC Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INDICACIONES

Para obtener la máxima calificación, se debe responder a una cuestión de cada apartado/bloque.

- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, se debe responder solo a una de las opciones. Si se realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo del examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes tareas (1A o 1B):

1A) Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}, \text{ con } a\in\mathbb{R}.$$

[0.75 puntos] Estudia el rango de A, en función de los valores de a.

[0.75 puntos] Estudia el rango de BA, en función de los valores de a.

[1 punto] Considera $a=1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $BAX=\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}$.

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y+z=4\\ (a-1)x-3z=2\\ y+(a^2+a+1)z=0\end{cases}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

b) [0,5 puntos] Considera $a=-1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

c) [0,5 puntos] Considera $a=2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

BY NC SA

APARTADO 2 (Bloque B) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considera la siguiente función: $f(x)=e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)$

a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*..

b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.

c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de *f(x)*.

2B) Considera las siguientes funciones: $f(x)=x^2-x$ y $g(x)=1-x^2$.

a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.

b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.

c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2.5 PUNTOS]

3) Considera la recta $r:\begin{cases}x-2z-2=0\\y+z=3\end{cases}$ y el punto $P=(-3,2,2)$.

a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.

b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P.

c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P.

APARTADO 4 (Bloque E) [2.5 PUNTOS]

Resuelve una de las siguientes cuestiones (4A o 4B)

4A) Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.
[0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?
[0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?
[1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

[0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.
[1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.
[1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A:

1A) Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}, \text{ con } a\in\mathbb{R}.$$

a) [0.75 puntos] Estudia el rango de AB, en función de los valores de a.
b) [0.75 puntos] Estudia el rango de BA, en función de los valores de a.
c) [1 punto] Considera $a=1$. Calcula, si es posible, la matriz X que satisface la siguiente ecuación matricial: $BAX=\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}$.

Solución:

a) Hallamos la expresión de la matriz AB.

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & -a & 2\\ 1+6 & a & 4\\ 1+3a & a & 2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -a & 2\\ 7 & a & 4\\ 1+3a & a & 2a\end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|AB|=\begin{vmatrix}2 & -a & 2\\ 7 & a & 4\\ 1+3a & a & 2a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 7 & 1 & 4\\ 1+3a & 1 & 2a\end{vmatrix}=$$

$$=a\left(4a-4-12a+14-2-6a+14a-8\right)=a\cdot 0=0$$

El determinante de AB es 0 por lo que su rango es menor de 3.
Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la segunda columna y la tercera fila → $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 7 & 4\end{vmatrix}=8-14=-6\neq 0$.
El rango de AB es 2 para cualquier valor de a.

b) Obtenemos la expresión de la matriz BA.

$$BA=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+a & 1+2a\\ -3+2 & 3+2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & 1+2a\\ -1 & 3+2a\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

Calculamos el determinante de la matriz BA y averiguamos cuando se anula.

$$|BA|=\begin{vmatrix}a-1 & 1+2a\\ -1 & 3+2a\end{vmatrix}=(a-1)(3+2a)+1+2a=3a+2a^2-3-\cancel{2a}+1+\cancel{2a}=2a^2+3a-2$$

BY NC SA

$$|BA| = 0 \Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2(-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = a} \\ \frac{-3-5}{4} = \boxed{-2 = a} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

Situación 1. Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de *BA* es distinto de cero y el rango de *BA* es 2.

Situación 2. Si $a = \frac{1}{2}$

En este caso el determinante de *BA* vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 & 1 + 2\frac{1}{2} \\ -1 & 3 + 2\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. El rango de *BA* es 1.

Situación 3. Si $a = -2$

En este caso el determinante de *BA* vale 0 y su rango es menor de 2.

La matriz queda $BA = \begin{pmatrix} -2-1 & 1+2(-2) \\ -1 & 3+2(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. El rango de *BA* es 1.

***Resumiendo*:** Si $a \neq \frac{1}{2}$ y $a \neq -2$ el rango de *BA* es 2 y si $a = -2$ o $a = \frac{1}{2}$ el rango de *BA* es 1.

c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$BAX = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = (BA)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Para $a = 1$ el determinante de *BA* es distinto de cero y tiene inversa. La calculamos.

$$BA = \begin{pmatrix} 1-1 & 1+2 \\ -1 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |BA| = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 3 = 3 \neq 0$$

$$(BA)^{-1} = \frac{Adj\left((BA)^T\right)}{|BA|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

BY NC SA

$$X=(BA)^{-1}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -3\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}15-21\\3+0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{2\cdot 2}\times 1\rightarrow 2\times 1$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B:

1B) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax+y+z=4 \\ (a-1)x-3z=2 \\ y+(a^2+a+1)z=0 \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] Determina los valores de a para los cuales el sistema es compatible.

b) [0,5 puntos] Considera $a=-1$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

c) [0,5 puntos] Considera $a=2$. Si el sistema es compatible, halla su solución general.

Solución:

a) El sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ a-1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 \end{vmatrix}=\begin{Bmatrix} \text{Fila } 1^{\text{a}} - \text{Fila } 3^{\text{a}} \\ a \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -a^2-a-1 \\ a \quad 0 \quad -a^2-a \rightarrow \text{Nueva Fila } 1^{\text{a}} \end{Bmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & -a^2-a \\ a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & a^2+a+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a-1)(-a^2-a)+3a=-a^3-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}+a+3a=-a^3+4a=a(4-a^2)$$

$$|A|=0 \Rightarrow a(4-a^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ 4-a^2=0 \rightarrow a^2=4 \rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2} \end{cases}$$

Para cualquier valor de a distinto de 0, –2 y 2 el determinante de la matriz A es distinto de cero y su rango es 3. Por lo que el rango de la matriz A/B también es 3 e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

BY NC SA

Para $a=0$ el sistema queda $\begin{cases} y+z=4 \\ -x-3z=2 \\ y+z=0 \end{cases}$. La primera ecuación y la tercera tienen el primer miembro igual, pero el segundo distinto. Esta es una situación imposible y el sistema es incompatible.

Para $a=-2$ el sistema queda $\begin{cases} -2x+y+z=4 \\ -3x-3z=2 \\ y+3z=0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} -2x+y+z=4 \\ -3x-3z=2 \\ y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=4 \\ -3x-3z=2 \\ y=-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-3z+z=4 \\ -3x-3z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-2z=4 \\ -3x-3z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=-2 \\ -3x-3z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2-z \\ -3x-3z=2 \end{cases} \Rightarrow -3(-2-z)-3z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6+3z-3z=2 \Rightarrow 6=2 \quad \text{¡¡Imposible!!}$$

El sistema es incompatible.

Para $a=2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-3z=2 \\ y+7z=0 \end{cases}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-3z=2 \\ y+7z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x=3z+2 \\ y=-7z \end{cases} \Rightarrow 2(3z+2)-7z+z=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z+4-7z+z=4 \Rightarrow 4=4 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-7\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \ , \lambda \in \mathbb{R}}$$

El sistema es compatible indeterminado.

Resumiendo: El sistema es compatible para cualquier valor de *a* distinto de –2 y 0.

b) Considerando $a=-1$ el sistema queda $\begin{cases} -x+y+z=4 \\ -2x-3z=2 \\ y+z=0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el apartado anterior sabemos que el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución.

BY NC SA

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ -2x-3z=2 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=4 \\ -2x-3z=2 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-z+z=4 \\ -2x-3z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=4 \rightarrow \boxed{x=-4} \\ -2x-3z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(-4)-3z=2 \Rightarrow -3z=-6 \Rightarrow \boxed{z=2} \Rightarrow \boxed{y=-2}$$

Si $a=-1$ el sistema es compatible determinado, siendo su solución $x=-4, y=-2, z=2$.

c) Considerando $a=2$ el sistema queda $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x-3z=2 \\ y+7z=0 \end{cases}$. Por el estudio realizado en el apartado anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado y que sus infinitas soluciones tienen la expresión:

$x=2+3\lambda;\ y=-7\lambda;\ z=\lambda$ **, siendo** $\lambda \in \mathbb{R}$ **.**

BY NC SA

Ejercicio 2A:

2A) Considera la siguiente función: $f(x)=e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)$

a) [1 punto] Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*..

b) [0.75 puntos] Determina, si existen, los puntos de inflexión de $f(x)$.

c) [0.75 puntos] Si existen, halla las asíntotas horizontales de *f(x)*.

Solución:

a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f(x)=e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)\Rightarrow f'(x)=(-2)e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)+e^{-2x}(2x-3)=$$

$$=e^{-2x}\left(-2x^2+6x-3\right)+e^{-2x}(2x-3)=e^{-2x}\left(-2x^2+6x-3+2x-3\right)=e^{-2x}\left(-2x^2+8x-6\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow e^{-2x}\left(-2x^2+8x-6\right)=0\Rightarrow\left\{e^{-2x}\neq 0\right\}\Rightarrow -2x^2+8x-6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale
  $f'(0)=e^{-2\cdot 0}\left(-2\cdot 0^2+8\cdot 0-6\right)=-6<0$. La función decrece en $(-\infty,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale
  $f'(2)=e^{-2\cdot 2}\left(-2\cdot 2^2+8\cdot 2-6\right)=\frac{2}{e^4}>0$. La función crece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale
  $f'(4)=e^{-2\cdot 4}\left(-2\cdot 4^2+8\cdot 4-6\right)=\frac{-6}{e^8}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ y crece en $(1,3)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda de la función.

BY NC SA

$$f'(x)=e^{-2x}\left(-2x^2+8x-6\right)=-2e^{-2x}\left(x^2-4x+3\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=-2(-2)e^{-2x}\left(x^2-4x+3\right)-2e^{-2x}(2x-4)=$$

$$=-2e^{-2x}\left(-2x^2+8x-6\right)-2e^{-2x}(2x-4)=-2e^{-2x}\left(-2x^2+8x-6+2x-4\right)=$$

$$=-2e^{-2x}\left(-2x^2+10x-10\right)=4e^{-2x}\left(x^2-5x+5\right)$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 4e^{-2x}\left(x^2-5x+5\right)=0\Rightarrow\left\{e^{-2x}\neq 0\right\}\Rightarrow x^2-5x+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\frac{5+\sqrt{5}}{2}\approx \boxed{3.6=x}\\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\approx \boxed{1.38=x}\end{cases}$$

Tenemos dos candidatos a punto de inflexión. Estudiamos la curvatura antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=4e^{-2\cdot 0}\left(0^2-5\cdot 0+5\right)=20>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$ tomamos $x=2$ y la derivada segunda vale $f''(2)=4e^{-2\cdot 2}\left(2^2-5\cdot 2+5\right)=\frac{-4}{e^4}<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ tomamos $x=4$ y la derivada segunda vale $f''(4)=4e^{-2\cdot 4}\left(4^2-5\cdot 4+5\right)=\frac{4}{e^8}>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.

La función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.y otro en $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

BY NC SA

Como $f\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)=e^{-2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}\left(\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2-3\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{3}{2}\right)=e^{\sqrt{5}-5}\,\frac{3-2\sqrt{5}}{2}$ y

$f\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)=e^{-2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}\left(\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2-3\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{3}{2}\right)=e^{-5-\sqrt{5}}\,\frac{3+2\sqrt{5}}{2}=\frac{3+2\sqrt{5}}{2e^{5+\sqrt{5}}}$ los puntos de inflexión tienen coordenadas $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2},\frac{3-2\sqrt{5}}{2e^{5-\sqrt{5}}}\right)$ y $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2},\frac{3+2\sqrt{5}}{2e^{5+\sqrt{5}}}\right)$.

c) **Asíntota horizontal.** $y=b$

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+\frac{3}{2}}{e^{2x}}=\frac{+\infty}{+\infty}=$$

$$=In\det er\min ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3}{2e^{2x}}=\frac{+\infty}{+\infty}=$$

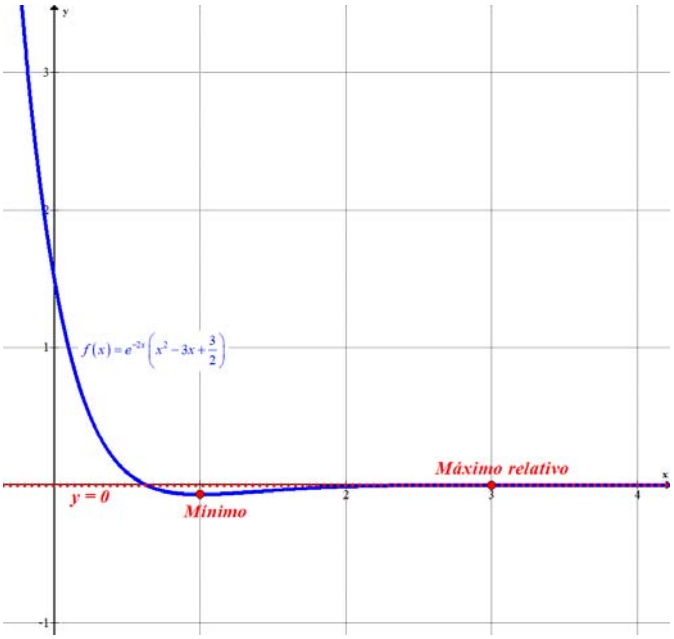
$$=In\det er\min ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4e^{2x}}=\frac{2}{+\infty}=\boxed{0}$$

Cuando x tiende a $+\infty$ la recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos lo que ocurre cuando x tiende a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\left(x^2-3x+\frac{3}{2}\right)=e^{+\infty}\left(+\infty\right)=+\infty$$

Cuando x tiende a $-\infty$ no existe asíntota horizontal.



BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 2B:

2B) Considera las siguientes funciones: $f(x)=x^2-x$ y $g(x)=1-x^2$.

a) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.

b) [0,5 puntos] Determina los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.

c) [1,5 puntos] Calcula el área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas OX.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=1-x^2 \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Los puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas son $(-1,0)$ y $(1,0)$.

b) Hallamos los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$.

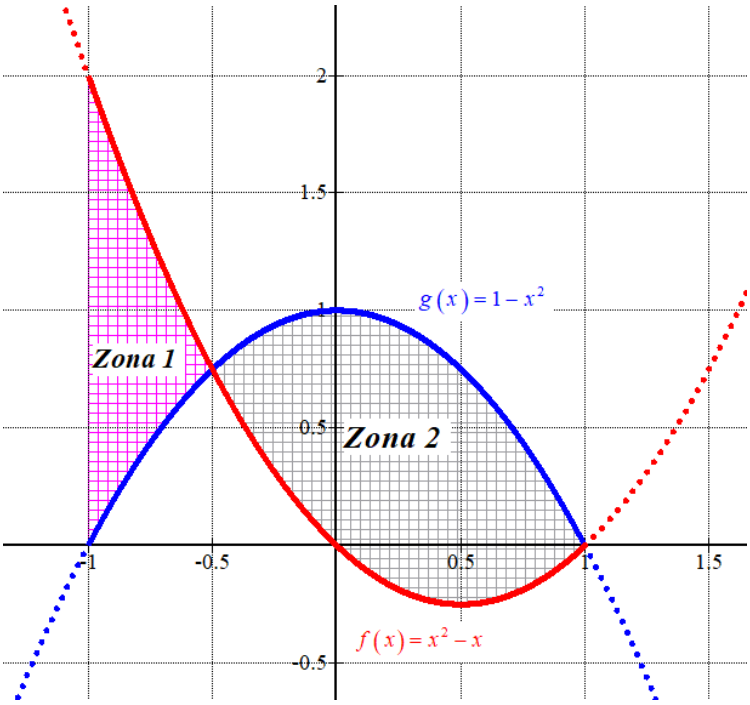
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-x \\ g(x)=1-x^2 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-x=1-x^2 \Rightarrow 2x^2-x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2(-1)}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm 3}{4}=\begin{cases} \dfrac{1+3}{4}=\boxed{1=x} \\ \dfrac{1-3}{4}=\boxed{\dfrac{-1}{2}=x} \end{cases}$$

Las dos gráficas coinciden en $x=\dfrac{-1}{2}$ y en $x=1$. Se cortan en (–0.5, 0.75) y (1, 0).

c) El recinto delimitado por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$ lo dividimos en dos partes y el área la obtenemos como la suma de las áreas de los dos trozos-

BY NC SA



Calculamos el área de la zona 1.

$$\int_{-1}^{-0.5} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-1}^{-0.5} x^2-x-\left(1-x^2\right)dx=\int_{-1}^{-0.5} x^2-x-1+x^2dx=$$

$$=\int_{-1}^{-0.5} 2x^2-x-1dx=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{-0.5}=$$

$$=\left[\frac{2(-0.5)^3}{3}-\frac{(-0.5)^2}{2}+0.5\right]-\left[\frac{2(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}+1\right]=-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1=\boxed{\frac{11}{24}}$$

Calculamos el área de la zona 2.

$$\int_{-0.5}^{1} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-0.5}^{1} 1-x^2-\left(x^2-x\right)dx=\int_{-0.5}^{1} 1-x^2-x^2+xdx=$$

$$=\int_{-0.5}^{1} -2x^2+x+1dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-0.5}^{1}=$$

$$=\left[\frac{-2\cdot 1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right]-\left[\frac{-2(-0.5)^3}{3}+\frac{(-0.5)^2}{2}-0.5\right]=-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{9}{8}}$$

El área delimitada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$ es la suma de las dos áreas obtenidas y tiene un valor de $\frac{11}{24}+\frac{9}{8}=\frac{19}{12}\approx 1.5833$ unidades cuadradas.

BY NC SA

Ejercicio 3:

) Considera la recta $r:\begin{cases}x-2z-2=0\\y+z=3\end{cases}$ y el punto $P=(-3,2,2)$.

a) [0,5 puntos] Expresa la recta r en forma continua.

b) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P.

c) [1 punto] Calcula la distancia entre r y P.

Solución:

a) Hallamos la ecuación continua de la recta.

$$r:\begin{cases}x-2z-2=0\\y+z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2+2z\\y=3-z\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2+2\lambda\\y=3-\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_r(2,3,0)\\\vec{v}_r=(2,-1,1)\end{cases}\Rightarrow\boxed{r:\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{1}}$$

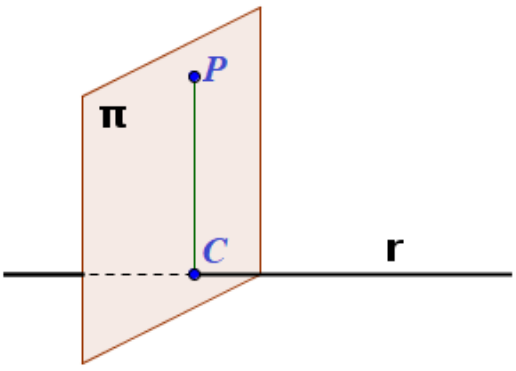
b) El plano π perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}=\vec{v}_r=(2,-1,1)\\P=(-3,2,2)\in\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\pi:2x-y+z+D=0\\P=(-3,2,2)\in\pi\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2(-3)-2+2+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D-6=0\Rightarrow D=6\Rightarrow\boxed{\pi:2x-y+z+6=0}$$

La ecuación del plano perpendicular a r que pasa por P es $\pi:2x-y+z+6=0$.

c) La distancia entre r y P es la distancia entre P y el punto C de corte de la recta r con el plano π hallado en el apartado anterior.



Hallamos el punto C.

$$\left.\begin{matrix}r:\begin{cases}x-2z-2=0\\y+z=3\end{cases}\\\pi:2x-y+z+6=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=2+2z\\y=3-z\\2x-y+z+6=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2(2+2z)-(3-z)+z+6=0\Rightarrow$$

BY NC SA

$$\Rightarrow 4+4z-3+z+z+6=0 \Rightarrow 6z+7=0 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-7}{6}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=2+2\frac{-7}{6}=\frac{-1}{3}} \\ \boxed{y=3+\frac{7}{6}=\frac{25}{6}} \end{cases}$$

El punto de corte de recta y plano es $C\left(\frac{-1}{3},\frac{25}{6},\frac{-7}{6}\right)$.

Hallamos la distancia del punto *P* a la recta *r* como la distancia del punto *P* al punto *C*.

$$\left.\begin{matrix} C\left(\frac{-1}{3},\frac{25}{6},\frac{-7}{6}\right) \\ P(-3,2,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PC}=\left(\frac{-1}{3},\frac{25}{6},\frac{-7}{6}\right)-(-3,2,2)=\left(\frac{8}{3},\frac{13}{6},\frac{-19}{6}\right)$$

$$d(P,r)=d(P,C)=\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{13}{6}\right)^2+\left(\frac{-19}{6}\right)^2}=\boxed{\frac{\sqrt{786}}{6}\approx 4.67\,u}$$

La distancia del punto *P* a la recta *r* tiene un valor de $\frac{\sqrt{786}}{6}\approx 4.67$ unidades.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4A:

4A) Se tienen dos urnas con bolas rojas y bolas verdes. En la urna A hay un total de 3 bolas rojas y 2 bolas verdes. En la urna B hay un total de 4 bolas verdes y 2 bolas rojas.

a) [0,5 puntos] Si se sacan al azar dos bolas de la urna A, a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que sean dos bolas rojas?

b) [0,5 puntos] Si se saca una sola bola de una urna elegida al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

c) [1,5 puntos] Si se saca una bola verde de una urna escogida al azar, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido la urna A?

Solución:

a) La probabilidad de sacar una bola roja de la urna A vale $\frac{3}{5}$. En la extracción de la segunda bola de la urna A quedan 4 bolas, siendo 2 bolas rojas y 2 bolas verdes, la probabilidad de que la segunda bola sea roja, habiendo sacado una primera bola roja vale $\frac{2}{4}$.

La probabilidad de que al extraer de la urna A dos bolas de forma simultánea estas sean dos bolas rojas vale $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}=0.3$.

P = 0.3

b) Este es un experimento compuesto donde primero elegimos una urna entre la A y la B, y luego extraemos una bola de la urna elegida. El suceso sacar bola roja puede pasar de dos formas distintas: una eligiendo la urna A y luego sacando bola roja o bien eligiendo la urna B y luego extraer bola roja.

La probabilidad del suceso es $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}\approx 0.4667$.

P = 0.4667

c) En el experimento elegir una urna y extraer una bola de la urna elegida la probabilidad de sacar bola verde (suceso complementario de "sacar bola roja") es $1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$.

La probabilidad de elegir la urna A y sacar bola verde de la urna A vale $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$.

Si de cada 15 repeticiones del experimento sabemos que 8 saldrá bola verde y de estas 3 serán extraídas de la urna A entonces la probabilidad de que al sacar bola verde esta haya sido extraída de la urna A vale $\frac{3}{8}=0.375$

P = 0.375

BY NC SA

Ejercicio 4B:

4B) En una población, el 85% de las personas son rubias. Además, su altura se distribuye según una distribución normal de media 170 cm y desviación típica de 16 cm.

a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de 190 cm.
b) [1 punto] Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar mida entre 160 y 190 cm.
c) [1 punto] Sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm, calcula la probabilidad de que, escogiendo a una persona al azar, esta sea rubia y mida más de 190 cm.

Solución:

Sea X = Altura en centímetros de un habitante de una población. X = N(170, 16).

a) Nos piden calcular $P(X>190)$.

$$P(X>190)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{190-170}{16}\right)=P(Z>1.25)=$$

$$=1-P(Z\le 1.25)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8944=\boxed{0.1056}$$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115

b) Nos piden calcular $P(160<X<190)$.

$$P(160<X<190)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{160-170}{16}<Z<\frac{190-170}{16}\right)=$$

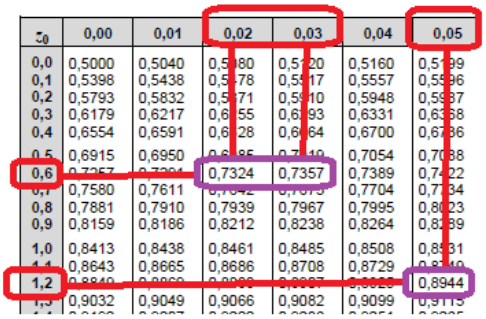
$$=P(-0.625<Z<1.25)=P(Z<1.25)-P(Z<-0.625)=$$

$$=P(Z<1.25)-P(Z>0.625)=P(Z<1.25)-\left[1-P(Z<0.625)\right]=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.8944-1+\frac{0.7324+0.7357}{2}=\boxed{0.62845}$$

P(160 < X < 190) = 0.62845

BY NC SA



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115

c) La información que vamos a manejar para responder en este apartado es: "En una población, el 85% de las personas son rubias, sabiendo que solo el 12% de las personas rubias de la población mide más de 190 cm".

Llamamos R al suceso "elegir una persona rubia" y A a "elegir una persona que mide más de 190 cm".

Sabemos que $P(A/R)=0.12$ y $P(R)=0.85$.

Nos piden calcular $P(R\cap A)$.

$$P(R\cap A)=P(R)P(A/R)=0.85\cdot 0.12=\boxed{0.102}$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

PAU 2025

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t + 1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el límite cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t\to\infty} f(t)$

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas: $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3, cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto A(0, 0, 0).

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto B(-1, -1, 2).

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) [**1,25 puntos**] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

b.2) [**1,25 puntos**] Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto A(0, 0, 0).

BY NC SA

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x \quad - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a.1) [**1,5 puntos**] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [**1 punto**] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ tal que $m \in \mathbb{R}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Además, la matriz X es de orden 2 x 2.

b.1) [**1,5 puntos**] ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) [**1 punto**] Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

a.1) **[1,5 puntos]** Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.

a.2) [**1 punto**] Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2.

BY NC SA

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?

b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

BY NC SA

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t + 1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el límite cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t\to\infty} f(t)$

Respuestas:

a) La pendiente nos la da la primera derivada de la función: $f'(t) = 5\,e^{-t} - 5(t + 1)\,e^{-t}$. Consideramos la derivada como una nueva función de la que queremos calcular su mínimo, para ello su derivada ha de ser 0, $f''(t) = -5\,e^{-t} - 5\,e^{-t} + 5(t + 1)\,e^{-t} = -10\,e^{-t} + 5(t + 1)\,e^{-t}$, igualamos a 0 y resolvemos,

$-10e^{-t} + 5(1 + t)e^{-t} = 0 \rightarrow \frac{-10}{e^t} + \frac{5(1+t)}{e^t} = \frac{-10+5(1+t)}{e^t} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -10 + 5(1 + t) = 0 \rightarrow 5t = 5 \rightarrow t = 1$. Estudiamos el crecimiento y decrecimiento antes y después de t = 1,

$f''(0) = \frac{-10+5(1+0)}{e^0} = -5 < 0$, f` es decreciente,

$f''(10) = \frac{-10+5(1+10)}{e^{10}} = \frac{45}{e^{10}} > 0$, f` es creciente.

Por tanto, para t = 1 el valor de la derivada es mínimo.

b) $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 5(t + 1)e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{5(1+t)}{e^t} = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminación, aplicamos la Regla de L'Hôpital, $\lim_{t\to\infty} \frac{5(1+t)}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{5}{e^t} = \frac{5}{\infty} = 0$

Respuesta: a) mínimo para t = 1, b) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$

BY NC SA

EJERCICIO 2.

Apartado a) Sean las rectas: $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

a.1) [1,25 puntos] Determina la ecuación de la recta, r_3, cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto A(0, 0, 0).

a.2) [1,25 puntos] Calcula la distancia de la recta r_2 al punto B(-1, -1, 2).

Respuestas:

a.1) El vector perpendicular a los vectores directores de las rectas lo obtenemos calculando el producto vectorial de dichos vectores: $v_1 \text{ x } v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0i + 3j + 3k \rightarrow w = (0,3,3) = (0,1,1)$

$r_3 \equiv \frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \rightarrow r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a.2) $d(B, r_2) = \frac{|BP \; x \; v_2|}{|v_2|}$ donde P es un punto de r_2 , por ejemplo P(1, 1, 1)

$BP = (1,1,1) - (-1,-1,2) = (2,2,-1), \quad AP \; x \; v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -i + 0j - 2k$

De donde, $d(B, r_2) = \frac{|BP \; x \; v_2|}{|v_2|} = \frac{|(-1,0,-2|}{|(2,1,-1)|} = \frac{\sqrt{(-1)^2+0^2+(-2)^2}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

Respuesta: **a.1)** $\boldsymbol{r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}}$ **a.2)** $\boldsymbol{\sqrt{\frac{5}{6}}}$

BY NC SA

EJERCICIO 2.

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) [**1,25 puntos**] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

b.2) [**1,25 puntos**] Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0, 0, 0)$.

Respuestas:

b.1) Para obtener la ecuación de un plano necesitamos 2 vectores y un punto, un vector será el director de la recta y el punto también de la recta, pues queremos que el plano contenga a la recta, el otro vector será el normal al plano π, con lo cual el plano pedido será perpendicular al π

$$v_r = (1, -1, 2)\ ,\quad P_r = (0, 0, 0)\ ,\quad n_\pi = (1, -1, 3)$$

De donde, la ecuación del plano pedido es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3x - z + 2y + z + 2x - 3y = 0 \rightarrow -x - y = 0 \rightarrow\ \pi' \equiv x + y = 0$$

b.2) ángulo (r, π) = $sen(\ v_r\ ,\ n_\pi) = \frac{|\ v_r \cdot n_\pi|}{|\ v_r||\ n_\pi|} = \frac{|(1,-1,2)\cdot(1,-1,3)|}{|(1,-1,2)||(1,-1,3)|} = \frac{|1+1+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}} =$

$= \frac{8}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = \frac{8}{\sqrt{66}} = \frac{8\sqrt{66}}{66} = \frac{4\sqrt{66}}{33}$. Ángulo (r, π) = arcsen$\frac{4\sqrt{66}}{33} = arcsen(0{,}9847) \cong 80°$

Respuesta: b.1) $\pi' \equiv x + y = 0$, b.2) ángulo (r, π) = $80°$

BY NC SA

EJERCICIO 3.

Apartado a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x \quad - 2z = a \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

a.1) [**1,5 puntos**] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [**1 punto**] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Respuestas:

a.1) Escribimos la matriz de coeficientes y la ampliada para estudiar sus rangos, aplicando Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -F1 + F2 \\ -2F1 + F3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -2-a & a-1 \\ 0 & -1 & 1-2a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow -F2 + F3 \rightarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & -1 & -2-a & a-1 \\ 0 & 0 & 3-a & a+2 \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes nos queda, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -2-a \\ 0 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$

Su determinante es: –(3 – a) que 0 para a = 3, tenemos

1. Si a ≠ 3, el rango de la matriz de coeficientes es 3 y por tanto el de la ampliada también, igual al número de incógnitas, luego es un sistema compatible determinado con una solución.
2. Si a = 3, la matriz ampliada queda, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$

   Por tanto el rango es 3, luego los rangos son distintos y tenemos un sistema incompatible, ninguna solución.

a.2) Si a = 0, la matriz ampliada queda, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, luego el sistema quedaría,

$\begin{cases} x + y \quad = 1 \\ -y - 2z = -1 \\ \quad 3z = 2 \end{cases}$ tenemos, $z = \frac{2}{3}$; $-y - 2 \cdot \frac{2}{3} = -1 \rightarrow y = -\frac{1}{3}$; $x + y = 1 \rightarrow \mathrm{x} - \frac{1}{3} = 1 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

Respuesta: a.1) Si a ≠ 3, S.C.D. , si a = 3, S.I. a.2) $\boldsymbol{x = \frac{4}{3}, \; y = -\frac{1}{3}, \; z = \frac{2}{3}}$

BY NC SA

EJERCICIO 3.

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones A · X − B = X, con matriz A = $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix}$ tal que m ∈ ℝ y B = $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Además, la matriz X es de orden 2 x 2.

b.1) [**1,5 puntos**] ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) [**1 punto**] Para m = 1, resuelve el sistema y obtén el valor de X

Respuestas:

b.1) Despejamos X en el sistema,

$$A \cdot X - B = X \rightarrow A \cdot X - X = B \rightarrow (A - I) \cdot X = B \rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot B$$

Para que el sistema tenga solución debe existir $(A - I)^{-1}$ y para ello el determinante de (A – I) debe ser distinto de 0, lo calculamos,

$$|A - I| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \mathrm{m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{m}-1 \end{pmatrix}\right| = m - 1 - 1 = m - 2 \rightarrow m - 2 = 0 \rightarrow m = 2$$

Luego el determinante no es 0 cuando m no sea 2 y por tanto el sistema tendrá solución única.

b.2) Para m = 1 $(A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, y $|A - I| = -1$, calculamos $(A - I)^{-1}$,

$$(A - I)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Adj(A - I)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{|A-I|} Adj(A - I)^t = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ya podemos calcular X, $X = (A - I)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respuesta: b.1) Si m ≠ 2, Solución única. b.2) $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

BY NC SA

EJERCICIO 4.

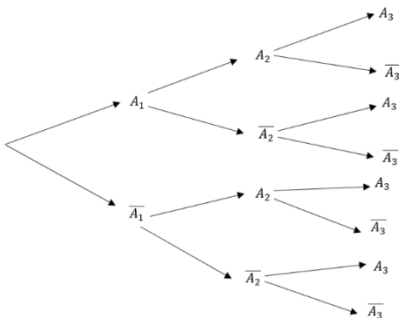
Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

a.1) **[1,5 puntos]** Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.

a.2) [**1 punto**] Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

Respuestas:

a.1) Sale as al extraer la carta i: A_i , No sale as al extraer la carta i: $\overline{A_i}$



1 carta: $P(A_1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}10$

2 cartas: $P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot (A_2/\overline{A_1}) = \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{6}{65} \cong 0{,}09$

3 cartas: $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3) = P(\overline{A_1}) \cdot (\overline{A_2}/\overline{A_1}) \cdot P(A_3/\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) =$

$= \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{4}{38} = \frac{21}{247} \cong 0{,}085$

a.2) El primer jugador ha sacado una carta y el as, para que el segundo jugador gane debe sacar 2 o más y después el as, es decir, lo contrario de sacar el as en la primera o en la segunda, de donde,

P(ganar el segundo jugador cuando el primero ha sacado 2 cartas) = $1 - [P(A_1) + (\overline{A_1} \cap A_2)] =$

$= 1 - [P(A_1) + (\overline{A_1} \cap A_2)] = 1 - \left[P(A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot \left(\frac{A_2}{\overline{A_1}}\right)\right] = 1 - \left(\frac{4}{40} + \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39}\right) = \frac{21}{26} = 0{,}808$

Respuesta: a.1) 0,10; 0,09; 0,085. a.2) 0,808

BY NC SA

EJERCICIO 4.

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1,5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1,5 m y varianza 0,64 m^2.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2,1 m?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0,9 m?

b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80,51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

Respuestas:

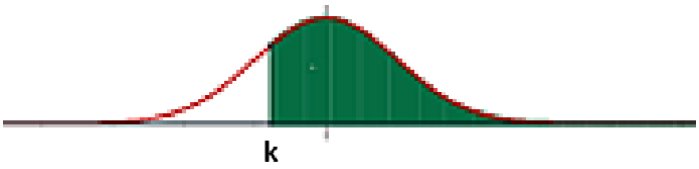
Sea X la variable "medidas del aparato" como nos dan la varianza, σ = $\sqrt{0.64}$ = 0,8

tenemos que X → N(1,5 , 0,8)

b.1) $P(X > 2{,}1) = P\left(Z > \frac{2{,}1-1{,}5}{0{,}8}\right) = P(Z > 0{,}75) = 1 - P(Z < 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$

b.2) $P(X > 0{,}9) = P\left(Z > \frac{0{,}9-1{,}5}{0{,}8}\right) = P(Z > -0{,}75) = P(Z < 0{,}75) = 0{,}7734$

b.3) Nos piden el valor "k" tal que el 80,51% de las mediciones estarían por encima de él



Es decir, $P(X > k) = 0{,}8051$ como la probabilidad es mayor que 0,5, al tipificar el valor será negativo,

$P(X > k) = P\left(X > \frac{k-1{,}5}{0{,}8}\right) = P\left(Z < -\frac{k-1{,}5}{0{,}8}\right) = 0{,}8051 \rightarrow$

Buscamos el valor 0,8051 dentro de la tabla, obtenemos 0,86 , luego $-\frac{k-1{,}5}{0{,}8} = 0{,}86$ despejando

$k = 1{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}86 = 0{,}182$

El 85,01% de las distancias serán superiores a 0,812 metros.

Respuesta: b.1) 0,2266; b.2) 0,7734; b.3) 0,812 metros

BY NC SA

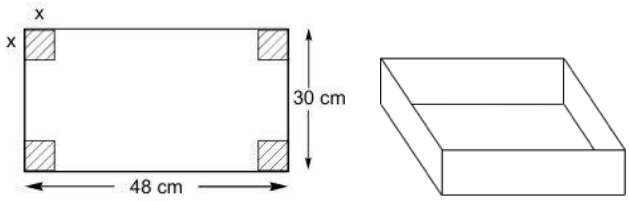
UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En los **ejercicios 2, 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadores de tipo 1 y 2 (tal y como se indica en la información de las pruebas). Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

EJERCICIO 1. Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



a) **[0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.

b) **[1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.

c) **[0,75 puntos]** Para poder trasportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo:
$A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) **[1 punto]** Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) **[0,75 puntos]** Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

a.3) **[0,75 puntos]** Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) **[1 punto]** Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$

b.2) **[1,5 puntos]** Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

BY NC SA

EJERCICIO 3. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

a.1) [1,5 puntos] Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [**1 punto]** Para a = 0, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) [1,25 puntos] Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) [1,25 puntos] Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a.

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopiadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopiadoras están libres, elige una al azar.

a.1) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) [1,5 puntos] Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopiadora B?

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) [0,75 puntos] Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

b.2) [0,75 puntos] Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

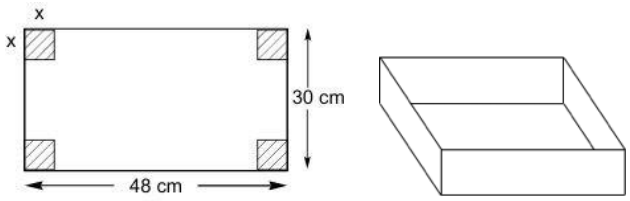
b.3) [1 punto] Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

		p									
n	***k***	**0.05**	**0.1**	**0.15**	**0.2**	**0.25**	**0.3**	**0.35**	**0.4**	**0.45**	**0.5**
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

EJERCICIO 1. Para guardar el material escolar, se quiere construir una caja (sin tapa) a partir de una plancha de cartón de 48 cm de largo por 30 cm de ancho, a la que se le ha recortado un cuadrado de lado x en cada una de sus esquinas (véase el dibujo).



a) **[0,75 puntos]** Determina el volumen de la caja.
b) **[1 punto]** Determina las dimensiones de la caja si se quiere que contenga el mayor volumen posible.
c) **[0,75 puntos]** Para poder trasportar la caja cómodamente, se van a realizar dos aberturas. El área de cada una de ellas está encerrada por las curvas $f(t) = t^2 - 4t$ y $g(t) = 2t - 5$. Calcula el área de una de las aberturas

Respuestas:

a) Las dimensiones de la caja son: altura x, ancho 30 – 2x y largo 48 – 2x, luego el volumen de la caja es: $V(x) = (48 - 2x)\cdot(30 - 2x)\cdot x = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$, $0 < x < 16$.

Respuesta: $V(x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$, $0 < x < 16$

b) Calculamos la derivada, $V'(x) = 12x^2 - 312x + 1440$ hallamos donde se hace 0

$12x^2 - 312x + 1440 = 12(x^2 - 26x + 120) = 0$, $x = 20$ y $x = 6$.

Calculamos la segunda derivada, $V''(x) = 24x - 312$, descartamos x = 20 como posible máximo

$V''(6) = 24\cdot 6 - 312 = -168 < 0$, máximo para x = 6, las dimensiones para este valor son:

altura: 6 cm ; ancho: $30 - 2\cdot 6 = 18$ cm ; largo: $48 - 2\cdot 6 = 36$ cm.

Respuesta: *altura: 6 cm ; ancho: 18 cm ; largo: 36 cm*

c) Hallamos los puntos de intersección de las curvas: $t^2 - 4t = 2t - 5$, $t^2 - 6t + 5 = 0$

obtenemos t = 1 y t = 5, luego el área será el valor absoluto de la integral definida:

$$\left|\int_1^5 [(t^2 - 4t) - (2t - 5)]dt\right| = \left|\int_1^5 (t^2 - 6t + 5)dt\right| = \left|\left(\frac{t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + 5t\right)_1^5\right| = \text{sustituimos}$$

$$\left|\left(\frac{5^3}{3} - 3\cdot 5^2 + 5\cdot 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3\cdot 1^2 + 5\cdot 1\right)\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}\ \text{cm}^2 .$$

Respuesta: $\frac{32}{3}$ *cm²*

BY NC SA

EJERCICIO 2.

Apartado a) Para las fiestas del Corpus Christi que se celebran en Toledo, se instalan toldos en las calles por las que transcurre la procesión. En una de ellas, los operarios colocan los siguientes puntos de apoyo:

$A(0,1,-2)$, $B(1,2,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,0,m)$, con $m \in \mathbb{R}$.

a.1) [1 punto] Calcula el valor de m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

a.2) [0,75 puntos] Determina la ecuación del plano π que contiene al toldo.

a.3) [0,75 puntos] Si los adornos florales deben estar como mínimo a 1 metro de distancia del toldo y se ha colocado un adorno de flores en el punto $P(1,2,3)$, ¿estará correctamente ubicado?

Respuestas:

a.1) Podemos escribir 3 vectores determinados por los 4 puntos y calcular m para que su producto mixto valga 0, es decir no formen un paralelepípedo, AB x AC x AD = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & m+2 \end{vmatrix} = -m - 2 + 3 + 2 + 3 = 6 - m = 0 \rightarrow m = 6$$

También podemos calcular el plano determinado por los puntos A, B y C y calcular m para que el punto D pertenezca al plano.

Respuesta: m = 6

a.2) Tomamos los vectores AB(1, 1, 2) y AC(0, -1, 3) y el punto A(0, 1, -2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ x & y-1 & z+2 \end{vmatrix} = -z - 2 + 3x + 2x - 3y + 3 = 5x - 3y - z + 1 = 0$$

Respuesta: $\pi \equiv 5x - 3y - z + 1 = 0$

a.3) Calculamos la distancia del punto al plano:

$$d(P,\pi) = \frac{|5\cdot 1 - 3\cdot 2 - 3 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{35}} = \frac{3}{\sqrt{35}} \approx 0{,}5 \text{ m}$$

Respuesta: No está correctamente ubicado, está a menos de 1 metro.

BY NC SA

EJERCICIO 2.

Apartado b) Resuelve los problemas siguientes:

b.1) [1 punto] Calcula la ecuación del plano π' que pasa por $C(1,1,-2)$, es paralelo a la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,3)$ y $B(0,4,-1)$ y perpendicular al plano $\pi \equiv -x + y + 2z = 1$.

b.2) [1,5 puntos] Determina los valores reales de $m \in \mathbb{R}$, para que los puntos $A(-1,2,3)$, $B(-1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$ y $D(2,3,m)$, formen un tetraedro de volumen 8 unidades cúbicas.

Respuestas:

b.1) Uno de los vectores del plano es el vector director de la recta r, AB(-1, 4, -4) y el otro es el vector normal del plano π, (-1, 1, 2) luego

$$\pi' = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+2 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8x - 8 + 4y - 4 - z - 2 + 4z + 8 + 4x - 4 + 2y - 2 =$$

$$= 12x + 6y + 3z - 12 = 0 \rightarrow 4x + 2y + z - 4 = 0$$

Respuesta: $\pi' \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$

b.2) El volumen del tetraedro viene dado por 1/6 del valor absoluto del producto mixto de los 3 vectores AB, AC, AD

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & m-3 \end{vmatrix}\right| = 8 \rightarrow |-12 + 12 - 36 + 6m - 18| = 48 \rightarrow |6m - 54| = 48 \rightarrow$$

$$6m - 54 = 48 \rightarrow m = 17$$

$$6m - 54 = -48 \rightarrow m = 1$$

Respuesta: m = 1 o m = 17

BY NC SA

EJERCICIO 3.

Apartado a) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 4x+2y=a \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

a.1) [1,5 puntos] Discute la resolución del sistema según los valores que pueda tomar el parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indica el número de soluciones en cada caso.

a.2) [**1 punto]** Para a = 0, resuelve el sistema de ecuaciones, de forma razonada.

Respuestas:

a.1) Escribimos la matriz ampliada y hacemos ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C1 \leftrightarrow C3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} F1' = F1 \\ F2' = F2 \\ F3' = F1 + F3 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & a \\ 0 & 2 & a+1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} F1'' = F1' \\ F2'' = F2' \\ F3'' = -F2' + F3' \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & a \\ 0 & 0 & a-3 & 3-a \end{pmatrix} \rightarrow$$ a – 3 = 0 , a = 3 ; tenemos 2 casos:

1. a ≠ 3, El rango de la matriz de coeficientes es 3 y por tanto el rango de la matriz ampliada también es 3 e igual al número de incógnitas, se trataría de un Sistema Compatible Determinado con una única solución.

2. a = 3 , $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ El rango de la matriz de coeficientes es y el rango de la matriz ampliada también es 2 menor al número de incógnitas, se trataría de un Sistema Compatible Indeterminado con infinitas soluciones.

Respuesta: Si a ≠ 3 S.C.D. si a = 3 S.C.I.

a.2) Para a = 0 tenemos que el sistema es compatible determinado, la matriz ampliada queda,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -z+y+x=2 \\ 2y+4x=0 \\ -3x=3 \end{cases} \rightarrow x=-1 \rightarrow 2y+4x=0 \rightarrow 2y-4\cdot 1=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y=2 \rightarrow -z+y+x=2 \rightarrow -z+2-1=2 \rightarrow z=-1$$

Respuesta: x = - 1 ; y = 2; z = - 1.

BY NC SA

EJERCICIO 3.

Apartado b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$.

b.1) [1,25 puntos] Calcula los valores del parámetro a para que $A \cdot B$ sea invertible. Justifica tu respuesta.

b.2) [1,25 puntos] Calcula la inversa de $A \cdot B$ en función de a.

Respuestas:

b.1) Hacemos el producto, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ a & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}$, para que sea invertible el valor de su determinante ha de ser distinto de 0,

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 3+2a \\ 1-a & 1 \end{vmatrix} = (1+2a) - (3+2a)(1-a) = 2a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = -2,\ a = \frac{1}{2}$$

Respuesta: AB es invertible para a ≠ - 2 y a ≠ $\frac{1}{2}$

b.2) $(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot Adj(AB^t)$ $\quad AB^t = \begin{pmatrix} 1+2a & 1-a \\ 3+2a & 1 \end{pmatrix}$

$$Adj(AB^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3-2a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot Adj(AB^t) = \frac{1}{2a^2+3a-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3-2a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix}$$

Respuesta: $\boldsymbol{(AB)^{-1} = \frac{1}{2a^2+3a-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3-2a \\ -1+a & 1+2a \end{pmatrix}}$

BY NC SA

EJERCICIO 4.

Apartado a) En la entrada del instituto hay tres fotocopiadoras A, B y C cuyos porcentajes de fallos son 3%, 5% y 4%, respectivamente. Un estudiante entra en el instituto y, como las tres fotocopiadoras están libres, elige una al azar.

a.1) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que fotocopie sin fallos?

a.2) [1,5 puntos] Si al fotocopiar observa que una página es defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que se haya utilizado la fotocopiadora B?

Respuestas:

Como hay 3 fotocopiadoras P(A) = P(B) = P(C) = 1/3 ; F = fallos, SF = sin fallos.

Según los porcentajes de fallos:

P(F/A) = 0,03 ; P(SF/A) = 0,97 ; P(F/B) = 0,05 ; P(SF/B) = 0,95 ; P(F/C) = 0,04 ; P(SF/C) = 0,96.

a.1) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(SF) = P(A)P(SF/A) + P(B)P(SF/B) + P(C)P(SF/C) = \frac{1}{3}\cdot 0{,}97 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}95 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}96 = 0{,}96$$

Respuesta: P(fotocopia sin fallos) = 0,96

a.2) Por el Teorema de Bayes:

$$P(B/F) = \frac{P(B)\cdot P(F/B)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}05}{1-0{,}96} = 0{,}42$$

Respuesta: P(B/F) = 0,42

BY NC SA

Apartado b) Una inspectora de sanidad sabe que el 5% de los restaurantes no pasará una inspección. Si elige 8 restaurantes al azar, calcula:

b.1) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que tres restaurantes no pasen la inspección.

b.2) **[0,75 puntos]** Probabilidad de que todos los restaurantes pasen la inspección.

b.3) **[1 punto]** Probabilidad de que al menos dos restaurantes pasen la inspección.

Respuestas:

Sea I = pasar la inspección e $\bar{I}$ no pasar inspección, P(I) = 0,95 P($\bar{I}$) = 0,05

La variable, "no pasar inspección" sigue una distribución binomial con p = 0,05 y n= 8, B(8, 0,05)

b.1) $P(X = 3) = \binom{8}{3} 0{,}05^3 \cdot 0{,}95^5 = 0{,}0054$ mirando en la tabla

		p									
n	k	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734

Respuesta: P(3 restaurantes no pasen la inspección) = 0,0054

b.2) Que todos pasen la inspección es lo mismo que ninguno no la pase

$P(X = 0) = \binom{8}{0} 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^8 = 0{,}6634$ mirando en la tabla

		p									
n	k	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039

Respuesta: P(todos los restaurantes pasen la inspección) = 0,6634

b.3) Que al menos dos restaurantes pasen la inspección (2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8 pasan la inspección) es lo mismo que 6 o menos no pasen la inspección (6, 5, 4, 3, 2, 1 o 0 no pasan la inspección).

Debemos calcular $P(X \leq 6)$. Usamos el suceso contrario para hacer el cálculo más sencillo.

P(X ≤ 6) = 1 – P(X > 6) = 1 – [P(X = 7) + P(X = 8)] = 1 – (0 + 0) = 1

		p									
n	k	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

Respuesta: P(al menos 2 restaurantes pasen la inspección) = 1

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

Castilla y León

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INDICACIONES

1. OPTATIVIDAD: El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
2. **CALCULADORA**: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
3. **CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos**. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
4. **DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES**: Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
5. El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1:(elegir UN problema)

Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)

a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m, indicando el número de soluciones en cada caso. **(1.5 puntos)**

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Problema 1B

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular la matriz $M = A^t A - BB^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B, respectivamente. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. **(1.5 puntos)**

APARTADO 2: (obligatorio)

Problema 2

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

APARTADO 3:(elegir UN problema)

Problema 3A:

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x - 1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m. **(1,5 puntos)**

b) Para m = 6 hallar el punto de intersección de las rectas r y s. **(1 punto)**

Problema 3B

Se considera el vector $\vec{u} = (3,-1,5)$.

a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1,a,0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. **(0.75 puntos)**

b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3,-1,5)$ y $\vec{v} = (2,6,0)$. **(0,75 puntos)**

c) Dados $\vec{u} = (3,-1,5)$, $\vec{v} = (2,6,0)$ y $\vec{w} = (-3,1,2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. **(1 punto)**

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A

Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. **(1,25 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. **(1,25 puntos)**

Problema 4B

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. **(0,75 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. **(0,75 puntos)**

c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. **(1 punto)**

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

APARTADO 1:(elegir UN problema)

Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)

a) Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \text{ donde } m \in \mathbb{R}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m, indicando el número de soluciones en cada caso. **(1.5 puntos)**

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Solución:

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{m} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \end{vmatrix} = \boldsymbol{m^2 + 4 + 10 - 5m - 2m - 4 = m^2 - 7m + 10 = (m-2)(m-5)}$$

Si m $\neq \{2,5\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m = 5$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 21$ es distinto de cero.

Como

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

al tener dos filas iguales, el rango de la matriz ampliada es también 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si m $= 2$ las matrices son

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix}\mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-6$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=6\neq 0$

el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, al tener rangos distintos el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

m	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq\{2,5\}$	3	3	Compatible determinado
5	2	2	Compatible indeterminado
2	2	3	Incompatible

b)

Si $m=3$, el sistema es compatible determinado:

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Aplicando la regla de Cramer

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{-2}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\end{vmatrix}}=\frac{-4}{-2}=2$$

BY NC SA

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{-2} = -3$$

Las soluciones son x = 0; y = 2, z = -3

BY NC SA

Problema 1B

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular la matriz $M = A^t A - BB^t$, donde A^t *y* B^t representan las matrices transpuestas de A y B, respectivamente. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. **(1.5 puntos)**

Solución:

a)

$$M = A^t A - BB^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0 \quad 1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

b)

Cálculo de N^{-1}

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|N| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$N^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$XN = C \Longrightarrow X = CN^{-1} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{N^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

BY NC SA

APARTADO 2: (obligatorio)

Problema 2

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Dominio de definición.

Tanto la función exponencial como la función $g(x) = 2x$ son funciones que están definidas en todo $\mathbb{R}$. Como es un producto la función $f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$.

Dom(f)=$\mathbb{R}$

Monotonía y extremos

Hallamos la primera y segunda derivada

$$f'(x) = 2e^{-2x^2} + 2xe^{-2x^2}(-4x) = e^{-2x^2}(2 - 8x^2)$$

$$f''(x) = (-4x)e^{-2x^2}(2 - 8x^2) + e^{-2x^2}(-16x) = e^{-2x^2}(32x^3 - 24x)$$

Como la función exponencial no se anula nunca, hallamos los valores que anulan el polinomio en la primera derivada

$$2 - 8x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < -\frac{1}{2} \\ > 0 & si \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ < 0 & si \quad x > \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow f(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < -\frac{1}{2} \\ Crece & si \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ Decrece & si \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < -\frac{1}{2} \\ Crece & si \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ Decrece & si \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}}$$

BY NC SA

Sustituimos los valores que anulan la primera derivada en la segunda

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\left(32\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 24\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = e^{-\frac{1}{2}}(-4+12) = 8e^{-\frac{1}{2}} > 0$$

En el punto $\left(-\frac{1}{2}, -e^{-\frac{1}{2}}\right)$ hay un mínimo.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(32\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 24\left(\frac{1}{2}\right)\right) = e^{-\frac{1}{2}}(4-12) = -8e^{-\frac{1}{2}} < 0$$

En el punto $\left(\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ hay un máximo

Asíntotas

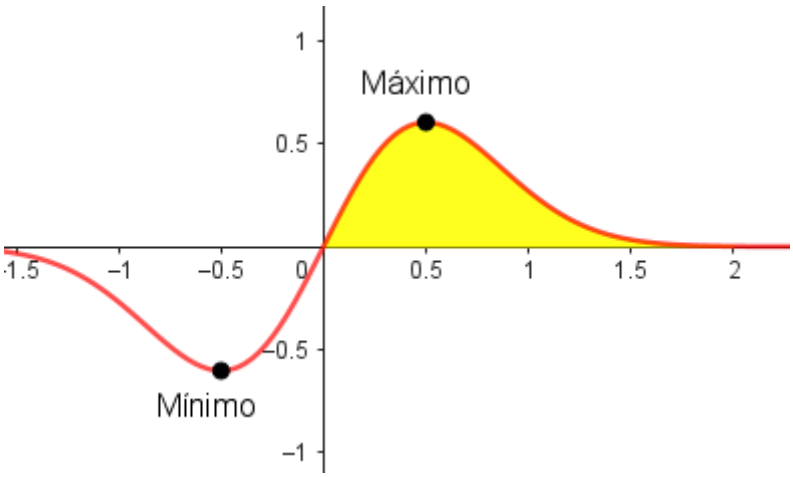
Utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{4xe^{2x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{2x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^{2x^2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{4xe^{2x^2}} = 0$$

La función tiene una asíntota horizontal por la izquierda y por la derecha de ecuación $y = 0$.

La representación gráfica es



b) El área es

$$\int_0^2 2xe^{-2x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-2x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\left(e^{-2\cdot 2^2} - e^0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^8} - 1\right) \cong 0.4998$$

El área es $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^8} - 1\right) \cong 0.4998$

BY NC SA

APARTADO 3:(elegir UN problema)

Problema 3A:

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x - 1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m. **(1,5 puntos)**

b) Para m = 6 hallar el punto de intersección de las rectas r y s. **(1 punto)**

Solución:

a)

Si $A(0,1,0)$ y $\vec{u}(4,-2,2)$ son un punto y un vector director de la recta r, y B$(1,m,3)$ y $\vec{v}(1,m-1,3)$ son un punto y un vector director de la recta s, las dos rectas se cortarán en un punto si el producto mixto $[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}] = 0$ y los vectores no son proporcionales

$$\overrightarrow{AB} = (1,m,3) - (0,1,0) = (1,m-1,3)$$

$$[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}] = \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

porque tiene dos filas iguales.

Los vectores no son proporcionales porque la primera y tercera coordenadas no son proporcionales

$$\frac{4}{1} \neq \frac{2}{3}$$

independientemente del valor de *m*.

En consecuencia las dos rectas se cortan en un punto, independientemente del valor de m.

b)

Los puntos y vectores directores de cada recta son $A(0,1,0)$ y $\vec{u}(4,-2,2)$ y B$(1,6,3)$ y $\vec{v}(1,5,3)$. Para hallar el punto de corte, X resolvemos el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones paramétricas de las dos rectas

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 6 + 5k \\ z = 3 + 3k \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t = 1 + k \\ 1 - 2t = 6 + 5k \\ 2t = 3 + 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow X(0,1,0)$$

El punto de corte es $X(0,1,0)$

BY NC SA

Problema 3B

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1, 5)$.

a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. **(0.75 puntos)**

b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1, 5)$ y $\vec{v} = (2, 6, 0)$. **(0,75 puntos)**

c) Dados $\vec{u} = (3, -1, 5)$, $\vec{v} = (2, 6, 0)$ y $\vec{w} = (-3, 1, 2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{t}$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser cero

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot a + 5 \cdot 0 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

Para que $\vec{u}$ y $\vec{t}$ sean perpendiculares debe ser $a = 3$

b)

Para que $\vec{w}$ sea perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ hay que hallar el producto vectorial

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -30\vec{\imath} + 10\vec{\jmath} + 20\vec{k}$$

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\overrightarrow{w}\,(-30, 10, 20)$

c)

Para hallar el volumen del paralelepípedo hay que hallar el producto mixto

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 140u^3$$

El volumen del paralelepípedo es $140\ u^3$

BY NC SA

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A

Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. **(1,25 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. **(1,25 puntos)**

Solución:

Está claro que es una probabilidad a posteriori por tanto debemos utilizar el teorema de Bayes. Para ello hay que calcular la probabilidad total de que el autobús sufra un accidente (y solo uno) a lo largo del periodo de 10 días. Hay que calcular la probabilidad de que a lo largo de 10 días, de los que sabemos que 7 fueron secos y tres nublados, el accidente se haya producido en un día seco y la probabilidad de que el accidente se haya producido en un día nublado. (*)

La probabilidad de sufrir un accidente en siete días secos es una distribución binomial $B_1(7,0.005)$, donde llamamos "éxito"(X_1) a sufrir un accidente en día seco (podría ocurrir que hubiera dos o más accidentes). La probabilidad de sufrir un accidente en tres días nublados es una distribución binomial $B_2(3,0.09)$, donde llamamos "éxito" (X_2) a sufrir un accidente en día nublado.

Sean los sucesos

$$A = \{sufrir\ un\ accidente\ en\ el\ perido\ de\ 10\ días\}$$
$$S = \{sufrir\ un\ accidente\ en\ el\ perido\ de\ 7\ dias\ secos\}$$
$$N = \{Sufrir\ un\ accidente\ en\ los\ tres\ nublados\}$$

Como queremos evaluar la probabilidad de sufrir exactamente un accidente en los 10 días, la probabilidad de sufrir exactamente un accidente en un día seco es la de sufrir un accidente en uno de los siete días secos multiplicado por la probabilidad no sufrir un accidente en un día nublado

$$p(accidente\ en\ dia\ seco) = p(A \cap S) = p(X_1 = 1) \cdot p(X_2 = 0) =$$
$$= \binom{7}{1} 0.005 \cdot (1 - 0.005)^6 \cdot \binom{3}{0} 0.09^0 \cdot (1 - 0.09)^3$$

De la misma manera, la probabilidad de sufrir exactamente un accidente en un día nublado es la de sufrir un accidente en uno de los tres días nublados multiplicado por la probabilidad no sufrir un accidente en un día seco

$$p(accidente\ en\ dia\ nublado) = p(A \cap N) = p(X_1 = 0) \cdot p(X_2 = 1) =$$
$$= \binom{7}{0} 0.005^0 \cdot (1 - 0.005)^7 \cdot \binom{3}{1} 0.09^1 \cdot (1 - 0.09)^2$$

La probabilidad de sufrir exactamente un accidente a lo largo del periodo de 10 días es

$$p(sufrir\ accidente) = p(A) = p(A \cap S) + p(A \cap N) =$$
$$= 7 \cdot 0.005 \cdot 0.995^6 \cdot 0.91^3 + 0.995^7 \cdot 3 \cdot 0.09 \cdot 0.91^2 \cong 0.2415$$

BY NC SA

Puede parecer una probabilidad alta, pero hay que tener en cuenta que la probabilidad de accidente en día nublado es muy alta. (9%)

Calculamos ahora lo pedido en el enunciado

a)

$$p(N/A) = \frac{p(A \cap N)}{p(A)} = \frac{0.995^7 \cdot 3 \cdot 0.09 \cdot 0.91^2}{0.2415} = 0.8939$$

La probabilidad de que el accidente fuera en día nublado es 0.8939

b)

$$p(S/A) = \frac{p(A \cap S)}{p(A)} = \frac{7 \cdot 0.005 \cdot 0.995^6 \cdot 0.91^3}{0.2415} = 0.1060$$

La probabilidad de que el accidente fuera en día seco es 0.1060

(*) NOTA: El problema NO dice que la probabilidad de que haya un día seco es $\frac{7}{10}$ y de que sea nublado es $\frac{3}{10}$, pidiendo la probabilidad de que el día estuviera nublado sabiendo que ha habido un accidente. Si esto fuera así la probabilidad de sufrir un accidente sería

$$P(A) = p(A/S)p(S) + p(A/N)p(N) = 0.005\frac{7}{10} + 0.09\frac{3}{10} = 0.0305$$

y, en consecuencia

$$p(N/A) = \frac{0.09\frac{3}{10}}{0.0305} = 0.8852$$

pero en el enunciado sabemos cuántos días hubo secos y cuántos nublado.

BY NC SA

Problema 4B

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. **(0,75 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. **(0,75 puntos)**

c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. **(1 punto)**

Solución:

a)

Sean los sucesos

R_1 ={sacar bola roja en la primera extracción}

A_1 ={sacar bola azul en la primera extracción}

R_2 ={sacar bola roja en la segunda extracción}

A_2 ={sacar bola azul en la segunda extracción}

Las probabilidades proporcionadas en el enunciado son

$$p(R_1) = \frac{4}{6}; p(A_1) = \frac{2}{6}$$

Si en la primera extracción sale bola roja solo quedarán 3 bolas rojas y dos azules en la urna, por tanto

$$p(R_2/R_1) = \frac{3}{5}; p(A_2/R_1) = \frac{2}{5}$$

Si en la primera extracción sale bola azul solo quedarán 4 bolas rojas y una azul en la urna, por tanto

$$p(R_2/A_1) = \frac{4}{5}; p(A_2/A_1) = \frac{1}{5}$$

a)

Hay que calcular la probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color

$$p(R_1 \cap A_2) + p(A_1 \cap R_2) = p(R_1)p(A_2/R_1) + p(A_1)p(R_2/A_1) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

La probabilidad de que las dos bolas sean de distinto color es $\frac{8}{15}$

b)

La probabilidad de que la segunda bola sea azul (probabilidad total)

$$p(A_2) = p(R_1)p(A_2/R_1) + p(A_1)p(A_2/A_1) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de que la segunda bola sea azul es $\frac{1}{3}$

c)

Utilizamos el teorema de Bayes para hallar la probabilidad de que la primera fuera roja sabiendo que la segunda ha sido azul

$$p(R_1/A_2) = \frac{p(R_1)p(A_2/R_1)}{p(A_2)} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{5}$$

La probabilidad de que la primera bola fuera roja, sabiendo que la segunda ha sido azul es $\frac{4}{5}$

BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE JULIO

INDICACIONES

1. OPTATIVIDAD: El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de **CUATRO PROBLEMAS**: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
2. **CALCULADORA**: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
3. **CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos**. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
4. **DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES**: Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
5. El examen debe realizarse usando **bolígrafo azul o negro** (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

APARTADO 1:(obligatorio)

Problema 1.

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$, y resolverlo para $k = -1$ **(1.5 puntos)**

b) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I + 3A$, donde I denota la matriz identidad. Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar A^{-1}en función de A y de I. **(1 punto)**

APARTADO 2:(elegir UN problema)

Problema 2A

Sea la función $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$.

a) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y su recta tangente en el punto $x = 1$. **(1.5 puntos)**

b) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x f(x)}$, donde ln denota el logaritmo neperiano. **(1 punto)**

BY NC SA

Problema 2B

Se considera la función $f(x) = x^2 e^{-x}$

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

APARTADO 3:(elegir UN problema)

Problema 3A:(Propuesto por la Comunidad Valenciana, julio 2023)

Sean el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (1,1,0) + t(-1,-1,2), t \in \mathbb{R}$

a) Determinar la posición relativa de r y π en función de m. **(1,5 puntos)**

b) Para m =1 calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. **(1 punto)**

Problema 3B

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que esté a una distancia de $2\sqrt{3}$ unidades de la recta r. ¿Es único ese plano? Justifica la respuesta. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la ecuación de un plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$.

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A

El tamaño de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 28 cm y desviación típica de 6 cm.

a) Calcular el porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm. **(1,5 puntos)**

b) Sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, ¿cuál es la probabilidad de que midiera más de 42 cm? **(1 punto)**

Problema 4B

Un grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de un gimnasio de judo, está compuesto por un 55% de mujeres y el resto hombres. Se sabe que el 15% del grupo es cinturón verde y que una quinta parte de las mujeres es cinturón verde.

a) ¿Qué porcentaje de hombres son cinturón verde? **(1 punto)**

b) Si el grupo recibe un mensaje enviado por un cinturón verde, calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer. **(0,75 puntos)**

c) Si el mensaje no tiene información sobre el sexo y el color del cinturón del remitente, calcular la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde. **(0,75 puntos)**

APARTADO 1:(obligatorio)

Problema 1.

a) Dado $k \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} kx & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & 2kz & = & k \end{cases}$$

Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$, y resolverlo para $k = -1$ **(1.5 puntos)**

b) Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 = I + 3A$, donde I denota la matriz identidad. Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar A^{-1}en función de A y de I. **(1 punto)**

Solución

a) Las matrices del sistema de ecuaciones son:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 + 1$$

Como $k^2 + 1$ nunca vale cero, el rango de la matriz A es 2 para cualquier valor de k y por tanto el rango de la matriz ampliada, que no puede ser mas de 2, también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, al tener las matrices el mismo rango, pero ser menor que el número de incógnitas (3), el sistema es compatible indeterminado, independientemente del valor de k.

Para $k = -1$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como el sistema es compatible indeterminado, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -x & - & y & = & 1 & + & z \\ x & - & y & = & -1 & + & 2z \end{cases}$$

actuando z como parámetro

Aplicando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & -1 \\ -1+2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-z-1+2z}{2} = \frac{-2+z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1+z \\ 1 & -1+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1-2z-1-z}{2} = \frac{-3z}{2}$$

Las soluciones pueden parametrizarse como

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

BY NC SA

El sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de k. Para $k = -1$ las soluciones son

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

b) Si

$$A^2 = I + 3A \Longrightarrow A^2 - 3A = I \Longrightarrow (A - 3I)A = I$$

Haciendo el determinante de la expresión

$$|(A - 3I)A| = |I| \Longrightarrow |A - 3I||A| = 1$$

Si $|A| = 0$, la expresión anterior sería imposible porque el primer término de la igualdad sería cero. Por tanto, debe ser $|A| \neq 0$

$$(A - 3I)A = I \Longrightarrow A - 3I = A^{-1}$$

BY NC SA

Problema 2A

Sea la función $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$.

a) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y su recta tangente en el punto $x = 1$. **(1.5 puntos)**

b) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{xf(x)}$, donde ln denota el logaritmo neperiano. **(1 punto)**

Solución

a) Hallamos primero la recta tangente

$$f'(x) = 12 + 6x - 6x^2$$
$$f'(1) = 12 + 6 - 6 = 12$$
$$f(1) = 12 + 3 - 2 = 13$$

La recta tangente es

$$y - 13 = 12(x - 1) \Longrightarrow y = 12x + 1$$

Los puntos de corte de esta recta con la función dada son

$$\begin{cases} y = 12x + 3x^2 - 2x^3 \\ y = 12x + 1 \end{cases} \Longrightarrow 12x + 3x^2 - 2x^3 = 12x + 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -2x^3 + 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (doble) \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Para hallar el área que se pide hay que hallar la integral entre $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$ teniendo en cuenta la función que está por encima y la que está por debajo en la representación gráfica.

Veamos que en el intervalo $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ la recta está siempre por encima de la función. Para ello hay que ver que $12x + 3x^2 - 2x^3 < 12x + 1, x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

$$12x + 3x^2 - 2x^3 < 12x + 1 \Longrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 > 0 \Longrightarrow$$
$$2(x-1)^2\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$$

Esta expresión es positiva cuando $x + \frac{1}{2} > 0$, es decir $x > -\frac{1}{2}$.

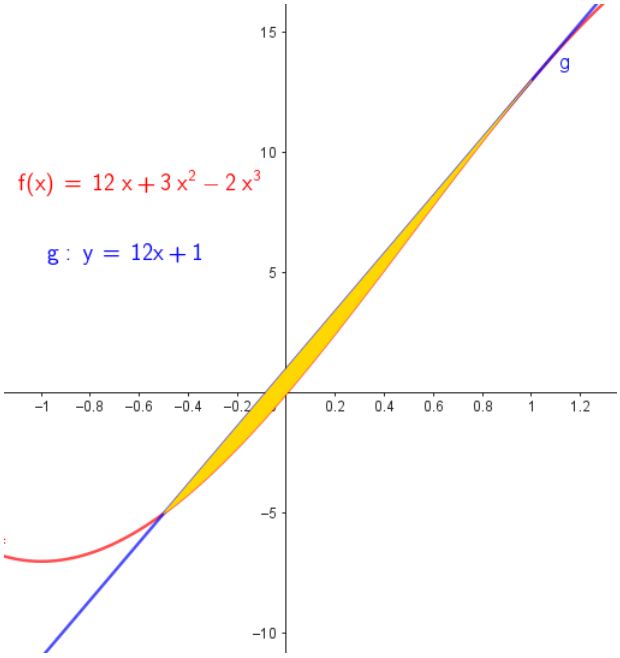
Por tanto, el área es

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{1} (12x + 1 - (12x + 3x^2 - 2x^3))dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (12x + 1 - 12x - 3x^2 + 2x^3)dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{1} (1 - 3x^2 + 2x^3)dx = \left[x - x^3 + \frac{x^4}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \left(\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(-\frac{11}{32}\right) = \frac{27}{32}$$

La gráfica de la función es así:



El área de la región encerrada entre la curva y la función es $\frac{27}{32}$

b) Utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x(12x+3x^2-2x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{12x^2+3x^3-2x^4} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{24x+9x^2-8x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+x^2)(24x+9x^2-8x^3)} =$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2x(24x+9x^2-8x^3)+(1+x^2)(24+18x-24x^2)} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

El límite es $\frac{1}{12}$

BY NC SA

Problema 2B

Se considera la función $f(x) = x^2e^{-x}$

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Dominio de definición

Tanto x^2 como e^{-x} son funciones que existen para todos los números reales, por tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R}$

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow (2x - x^2)e^{-x} = 0 \Longrightarrow 2x - x^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < 0 \\ > 0 & si \quad 0 < x < 2 \\ < 0 & si \quad x > 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < 0 \\ Crece & si \quad 0 < x < 2 \\ Decrece & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Máximos y mínimos

$$f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$$

Para hallar los máximos y mínimos, sustituimos los valores que anulan la primera derivada en la segunda

$$f''(0) = 2e^0 = 2 > 0$$

Como en $x = 0$ la segunda derivada es positiva, en $(0,0)$ hay un mínimo.

$$f''(2) = (2 - 4 \cdot 2 + 2^2)e^{-2} = -2e^{-2} < 0$$

Como en $x = 2$ la segunda derivada es negativa, en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ hay un máximo.

Asíntotas

Ho hay asíntotas verticales porque el dominio es $\mathbb{R}$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to\infty} (-x)^2e^x = +\infty$$

Hay una asíntota horizontal por la derecha de ecuación $y = 0$

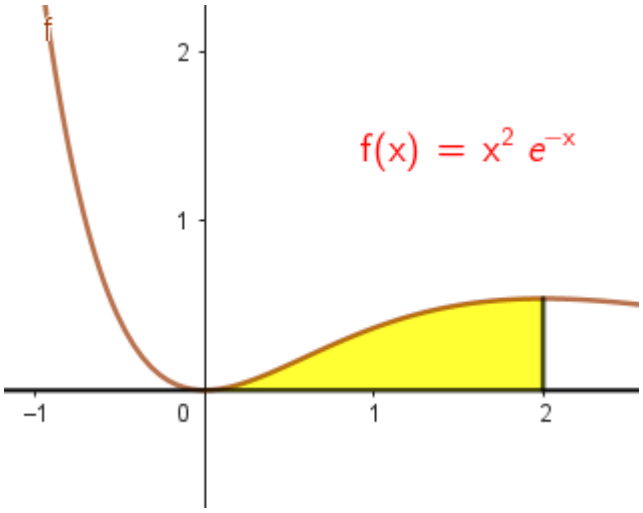
No hay asíntotas oblicuas

BY NC SA

En resumen, la función $f(x) = x^2e^{-x}$ tiene por dominio $\mathbb{R}$, crece en el intervalo $(0, 2)$, decrece en el resto, tiene un mínimo en $(0,0)$, un máximo en $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ y una asíntota por la derecha de ecuación $y = 0$.

b)

Visto el apartado anterior, la representación gráfica de la función es:



Hallamos la integral indefinida

$$\int (x^2e^{-x})dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \\ dv = e^{-x}dx \\ du = 2xdx \\ v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2e^{-x} - \int (-e^{-x})\, 2xdx = -x^2e^{-x} + 2\int (xe^{-x})\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int -e^{-x}\, dx\right) = -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) =$$

$$= (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C$$

El área de la región pedida es

$$\int_0^2 (x^2e^{-x})dx = [(-x^2 - 2x - 2)e^{-x}]_0^2 = (-2^2 - 2\cdot 2 - 2)e^{-2} - (-2) = -\frac{10}{e^2} + 2 \cong 0.6466$$

En resumen, el área encerrada entre la función y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$ es $2 - \frac{10}{e^2}$

BY NC SA

APARTADO 3:(elegir UN problema)

Problema 3A:(Propuesto por la Comunidad Valenciana, julio 2023)

Sean el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$ y la recta $r \equiv (x, y, z) = (1,1,0) + t(-1, -1,2), t \in \mathbb{R}$

a) Determinar la posición relativa de r y π en función de m. **(1,5 puntos)**

b) Para $m = 1$ calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. **(1 punto)**

Solución:

a) Un vector perpendicular al plano π es $\vec{u}(5, m, 1)$ y un vector director de la recta r es $\vec{v}(-1, -1,2)$. Cuando estos vectores son perpendiculares, la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano. Hacemos el producto escalar para saber los valores de m para los que los vectores son perpendiculares

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 - m + 2 = 0 \Longrightarrow m = -3$$

Por tanto, si $m \neq -3$ la recta y el plano se cortan en un punto. Si $m = -3$, el plano es $5x - 3y + z = 2$. Para saber si la recta y el plano son paralelos o la recta está contenida en el plano, solo hay que sustituir las coordenadas del punto $P(1,1,0)$, que pertenece a la recta, en la ecuación del plano:

$$5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 0 = 2$$

Como el punto $P \in r$ pertenece al plano π, la recta está enteramente contenida en el plano

En resumen, si $m \neq -3$, la recta y el plano se cortan en un punto. Si $m = -3$, la recta está contenida en el plano

b) El plano es $5x + y + z = 2$. Un vector perpendicular al plano es $\vec{u}(5,1,1)$ y un vector director y un punto de la recta r son $\vec{v}(-1, -1,2)$ y $P(1,1,0)$. La ecuación el plano tiene por vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y pasa por el punto P. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3x - 11y - 4z + 8 = 0$$

El plano π' que contiene a r y es perpendicular a π es $3x - 11y - 4z + 8 = 0$

BY NC SA

Problema 3B

Sean el plano $\pi \equiv x + y - z = 2$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la ecuación de un plano π' paralelo al plano π y que esté a una distancia de $2\sqrt{3}$ unidades de la recta r. ¿Es único ese plano? Justifica la respuesta. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la ecuación de un plano π'' perpendicular al plano π y que pasa por los puntos $P(1,0,1)$ y $Q(0,1,0)$.

Solución:

a) En primer lugar comprobamos que la recta y el plano son paralelos.

Un vector perpendicular al plano π es $\vec{u}(1,1,-1)$ y un punto y un vector director de la recta r son $M(1,0,2)$ y $\vec{v}(-3,2,-1)$. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares porque su producto escalar es cero:

$$1(-3) + 1 \cdot 2 + (-1)(-1) = 0$$

Además, el punto M no pertenece al plano π porque

$$1 + 0 - 2 = -1 \neq 2$$

En consecuencia, la recta es paralela al plano.

Todos los planos paralelos al plano π son de la forma $\pi' \equiv x + y - z + k = 0$. Vamos a hallar los planos cuya distancia al punto $M(1,0,2)$ es $2\sqrt{3}$ unidades:

$$d(M,\pi') = \frac{|1 + 0 - 2 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow |-1 + k| = 6 \Rightarrow \begin{cases} -1 + k = 6 \\ -1 + k = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 7 \\ k = -5 \end{cases}$$

En resumen: Hay dos planos paralelos al plano π situados a una distancia $2\sqrt{3}$ de la recta r que son $x + y - z + 7 = 0$ y $x + y - z - 5 = 0$.

b) El plano π'' tiene por vectores directores $\vec{u}(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1)$$

La ecuación del plano es

$$\pi'' = \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2y + 2z - 2 = 0$$

El plano perpendicular al plano π y que pasa por los puntos P y Q es $y + z - 1 = 0$

BY NC SA

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A

El tamaño de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 28 cm y desviación típica de 6 cm.

a) Calcular el porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm. **(1,5 puntos)**

b) Sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, ¿cuál es la probabilidad de que midiera más de 42 cm? **(1 punto)**

Solución

a) Es una distribución normal $N(28,6)$. Hay que calcular $p(19 < X < 40)$

$$p(19 < X < 40) = p(X < 40) - p(X < 19) = p\left(Z < \frac{40-28}{6}\right) - p\left(Z < \frac{19-28}{6}\right) =$$

$$= p(Z < 2) - p(Z < -1.5) = 0.9772 - p(Z > 1.5) = 0.9772 - (1 - p(Z \leq 1.5)) =$$

$$= 0.9772 - (1 - 0.9332) = 0.9104$$

El porcentaje de truchas entre 19 cm y 40 cm es del 91.04 %

b) Hay que calcular $p(X > 38)$ y $p(X > 42)$

$$p(X > 38) = p\left(Z > \frac{38-28}{6}\right) = p(Z > 1.67) = 1 - p(Z \leq 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475$$

$$p(X > 42) = p\left(Z > \frac{42-28}{6}\right) = p(Z > 2.33) = 1 - p(Z \leq 2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$$

De entre las truchas de más de 38 cm, la probabilidad de que alguna de ellas mida más de 42 cm es:

$$\frac{p(X > 42)}{p(X > 38)} = \frac{0.0099}{0.0475} = 0.2084$$

La probabilidad de que, sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, la trucha mida más de 42 cm es 0.2084.

Problema 4B

Un grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de un gimnasio de judo, está compuesto por un 55% de mujeres y el resto hombres. Se sabe que el 15% del grupo es cinturón verde y que una quinta parte de las mujeres es cinturón verde.

a) ¿Qué porcentaje de hombres son cinturón verde? **(1 punto)**

b) Si el grupo recibe un mensaje enviado por un cinturón verde, calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer. **(0,75 puntos)**

c) Si el mensaje no tiene información sobre el sexo y el color del cinturón del remitente, calcular la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde. **(0,75 puntos)**

Solución

Sean los sucesos

$$M = \{ser\ mujer\}$$

$$H = \{ser\ hombre\}$$

$$V = \{tener\ el\ cinturón\ verde\}$$

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades

$$p(M) = 0.55; p(H) = 0.45; p(V) = 0.15; p(V/M) = 0.20$$

a) Hay que calcular $p(V/H)$.

$$p(V \cap M) = p(M)p(V/M) = 0.55 \cdot 0.2 = 0.11$$

$$p(V) = p(V \cap M) + p(V \cap H) \Longrightarrow 0.15 = 0.11 + p(V \cap H) \Longrightarrow p(V \cap H) = 0.15 - 0.11 = 0.04$$

$$p(V/H) = \frac{p(V \cap H)}{p(H)} = \frac{0.04}{0.45} = \frac{4}{45} \cong 0.0889$$

El porcentaje de hombres con cinturón verde es del 8.89%.

b) Hay que calcular $p(M/V)$

$$p(M/V) = \frac{p(V \cap M)}{p(V)} = \frac{0.11}{0.15} = \frac{11}{15}$$

La probabilidad de que un mensaje enviado por un cinturón verde sea una mujer es $\frac{11}{15}$

c)

Como se ha visto en el apartado a) la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde ($p(V \cap H)$) es 0.04.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Generalitat Catalunya

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Ejercicio 1

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

a) Determine los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con los ejes de coordenadas, y las ecuaciones de sus posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. [1 punto]

b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=f(x)$ en los puntos $x=0$ y $x=2$. ¿Estas dos rectas son paralelas? Justifique la respuesta. [1 punto]

c) Hay algún punto donde la recta tangente a *f(x)* tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntrelo. [0.5 puntos]

Ejercicio 2:

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} y-z&=p+3\\ p^2x-z&=5\\ x-y&=3\end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro *p*. [1.25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $p=-1$. [0,5 puntos]

c) Para el caso $p=-1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy=10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntrelas todas. [0,75 puntos]

Ejercicio 3:

Ejercicio 3

Una empresa produce dos tipos de prendas, de hierro y de acero. El 60% de la producción total corresponde a piezas de hierro y el resto son de acero. Sabemos que el 95% de las piezas de hierro producidas no tienen ningún defecto, mientras que el 3% de las piezas de acero son defectuosas.

a) Si tomamos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? [0,75 puntos]

b) La empresa pronto diversificará la producción y empezará a producir también piezas de titanio, que se venderán en paquetes de 5. Si la probabilidad de que una pieza de titanio sea defectuosa es un valor desconocido *p*, y cada pieza es defectuosa independientemente de las otras, compruebe que la expresión que nos da la probabilidad de que en un paquete función de *p*) es $f(p)=5\left(p^4-p^5\right)$ [0,75 puntos]

c) Considere la función *f(p)* del apartado anterior. Determine el valor máximo que toma *f(p)* cuando $p\geq 0$. [1 punto]

BY NC SA

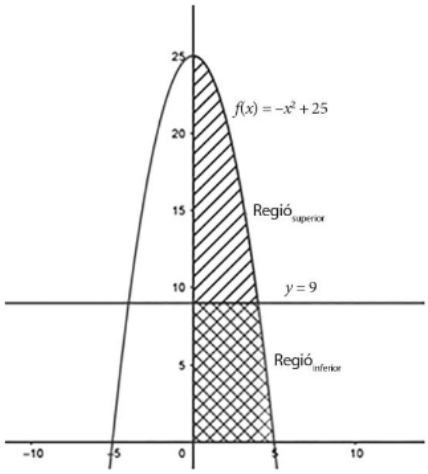
Ejercicio 4:

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

La vela mayor de un velero tiene forma semiparabólica y está delimitada por las gráficas de $f(x)=-x^2+25$, $y=0$ y $x=0$ tal como se indica en la figura siguiente:



La vela tiene dos partes separadas por la recta $y=9$. Para su construcción, se emplea un tejido de nylon en la parte superior, que cuesta 50 €/u^2, y un tejido de poliéster en la parte inferior, que cuesta 70 €/u^2. Calcule el coste total del material que se necesita para construir esta vela. [2.5 puntos]

OPCIÓN B

Considere el plano π de ecuación $x+y=0$.

a) Calcule la ecuación del plano π´ que es perpendicular a π y contiene los puntos $P=(1,-1,2)$ y $Q=(3,-3,6)$. [1 punto]

b) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π´ y que contiene los puntos de π´ que están a la misma distancia de P que de Q. [1.5 puntos]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

Ejercicio 1

Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$.

a) Determine los puntos de corte de la curva $y=f(x)$ con los ejes de coordenadas, y las ecuaciones de sus posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. [1 punto]

b) Calcule las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y=f(x)$ en los puntos $x=0$ y $x=2$. ¿Estas dos rectas son paralelas? Justifique la respuesta. [1 punto]

c) Hay algún punto donde la recta tangente a *f(x)* tenga pendiente 1? En caso afirmativo, encuéntrelo. [0.5 puntos]

Solución:

a) Determinamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1} \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-2x}{x-1}=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{A(0,0)} \\ x-2=0 \rightarrow x=2 \rightarrow \boxed{B(2,0)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1} \\ Eje\,OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0}{0-1}=0 \Rightarrow \boxed{A(0,0)}$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son A(0, 0) y B(2, 0).

Determinamos las asíntotas de la función.

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
El dominio es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{x-1}=\frac{1-2}{1-1}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2-2x}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty} 1=1$$

BY NC SA

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

La función tiene a la recta $y=x-1$ como asíntota oblicua.

b) La recta tangente a la curva en $x=0$ tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-1\cdot(x^2-2x)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-\cancel{2x}+2-x^2+\cancel{2x}}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(0)=\frac{0^2-2\cdot0+2}{(0-1)^2}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}f(0)=\dfrac{0^2-2\cdot0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0\\ f'(0)=2\\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=2x\Rightarrow \boxed{y=2x}$$

La recta tangente a la curva en $x=2$ tiene ecuación $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l}f(2)=\dfrac{2^2-2\cdot2}{2-1}=0\\ f'(2)=\dfrac{2^2-2\cdot2+2}{(2-1)^2}=2\\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=2(x-2)\Rightarrow \boxed{y=2x-4}$$

Las dos rectas tangentes obtenidas son paralelas pues tienen la misma pendiente $f'(0)=f'(2)=2$.

c) Para que la pendiente de la recta tangente sea 1 la derivada de la función debe valer 1. Buscamos esa posibilidad.

$$f'(x)=1\Rightarrow\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}=1\Rightarrow x^2-2x+2=(x-1)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+2=x^2+1-2x\Rightarrow 2=1\ \text{¡Imposible!}$$

No existe ninguna tangente a la gráfica de la función que tenga pendiente 1.

Ejercicio 2:

Ejercicio 2

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} y-z &= p+3 \\ p^2x-z &= 5 \\ x-y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro p. [1.25 puntos]

b) Resuelva el sistema para el caso $p=-1$. [0,5 puntos]

c) Para el caso $p=-1$, ¿hay alguna solución que cumpla, además, $xy=10$? En caso afirmativo, indique cuántas hay y encuéntrelas todas. [0,75 puntos]

Solución:

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & p+3 \\ p^2 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ p^2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0-1+p^2-0-0-0=p^2-1$$

$$|A|=0\Rightarrow p^2-1=0\Rightarrow p^2=1\Rightarrow \boxed{p=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $p\neq -1$ **y** $p\neq 1$**.**

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $p=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\{Fila\,2^a\leftrightarrow Fila\,1^a\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \end{array} \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} + \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \end{matrix}}^{A/B} & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $p = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{Fila\,2^{a} \leftrightarrow Fila\,1^{a}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \end{array} \\ \hline 0 \quad -1 \quad 1 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} + \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \end{matrix}}^{A/B} & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Para $p \neq -1$ **y** $p \neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $p = -1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $p = 1$ el sistema es **incompatible.**

b) Resolvemos el sistema para $p = -1$. Por lo visto en el apartado anterior sabemos que el sistema es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos partiendo de la matriz triangular equivalente obtenida en el apartado a).

$$\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}1 & 0 & -1 & 5\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}}^{A/B}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-z=5\\ y-z=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x=5+z\\ y=2+z\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}x=5+\lambda\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\lambda\end{cases}$.

c) Añadimos la condición $xy=10$ al sistema y vemos si existe alguna solución que lo cumpla.

$$\left.\begin{array}{l}xy=10\\ \begin{cases}x=5+\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (5+\lambda)(2+\lambda)=10 \Rightarrow 10+5\lambda+2\lambda+\lambda^2=10 \Rightarrow \lambda^2+7\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda+7)=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda=0 \rightarrow \begin{cases}x=5+0=5\\ y=2+0=2\\ z=0\end{cases}\\ \lambda+7=0 \rightarrow \lambda=-7 \rightarrow \begin{cases}x=5-7=-2\\ y=2-7=-5\\ z=-7\end{cases}\end{cases}$$

Hay dos soluciones. Una es $x=5,\ y=2,\ z=0$ y otra es $x=-2,\ y=-5,\ z=-7$.

BY NC SA

Ejercicio 3:

Ejercicio 3

Una empresa produce dos tipos de prendas, de hierro y de acero. El 60% de la producción total corresponde a piezas de hierro y el resto son de acero. Sabemos que el 95% de las piezas de hierro producidas no tienen ningún defecto, mientras que el 3% de las piezas de acero son defectuosas.

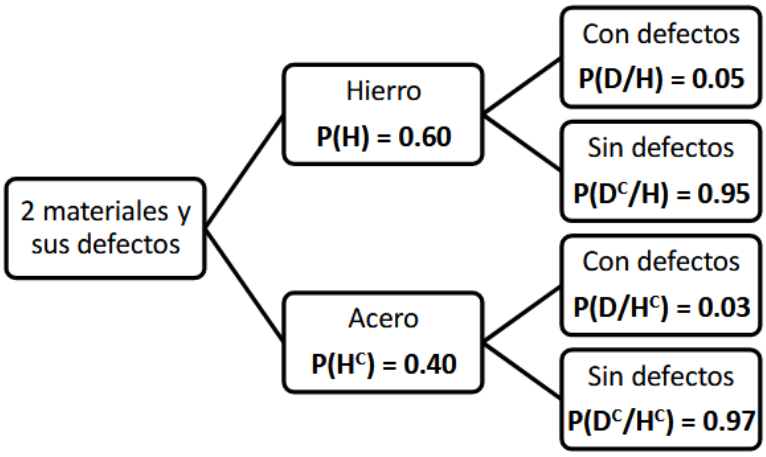
a) Si tomamos una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa? [0,75 puntos]

b) La empresa pronto diversificará la producción y empezará a producir también piezas de titanio, que se venderán en paquetes de 5. Si la probabilidad de que una pieza de titanio sea defectuosa es un valor desconocido p, y cada pieza es defectuosa independientemente de las otras, compruebe que la expresión que nos da la probabilidad de que en un paquete función de p) es $f(p)=5\left(p^4-p^5\right)$ [0,75 puntos]

c) Considere la función *f(p)* del apartado anterior. Determine el valor máximo que toma *f(p)* cuando $p\geq 0$. [1 punto]

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Debemos calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(H)P(D/H)+P(H^C)P(D/H^C)=0.6\cdot 0.05+0.4\cdot 0.03=\boxed{0.042}$$

b) Consideramos la variable aleatoria X = Número de piezas defectuosas en un paquete de 5 piezas. X = B(5, p). Calculamos la expresión de $P(X=4)$.

$$P(X=4)=\binom{5}{4}p^4\cdot(1-p)^1=5p^4(1-p)=5\left(p^4-p^5\right)$$

Se cumple que $f(p)=P(X=4)=5\left(p^4-p^5\right)$.

c) Derivamos la función y vemos cuando se anula la derivada, siempre cumpliendo que $p\geq 0$.

$$f(p)=5\left(p^4-p^5\right)\Rightarrow f'(p)=5\left(4p^3-5p^4\right)=5p^3(4-5p)$$

$$f'(p)=0\Rightarrow 5p^3(4-5p)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{p=0}\\ 4-5p=0\Rightarrow 5p=4\Rightarrow \boxed{p=\frac{4}{5}=0.8}\end{cases}$$

Estudiamos la evolución de la función antes y después de $p=0.8$.

- En el intervalo $(0,0.8)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=5\cdot 0.5^3(4-5\cdot 0.5)=0.9375>0$. La función crece en $(0,0.8)$.
- En el intervalo $(0.8,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=5\cdot 1^3(4-5\cdot 1)=-5<0$. La función decrece en $(0.8,+\infty)$.

La función crece antes y decrece después de $p=0.8$. La función tiene un máximo relativo y absoluto en $p=0.8$. Este valor máximo de la función es $f(p)=5\left(0.8^4-0.8^5\right)=0.4096$

f(p) = 0,4096

BY NC SA

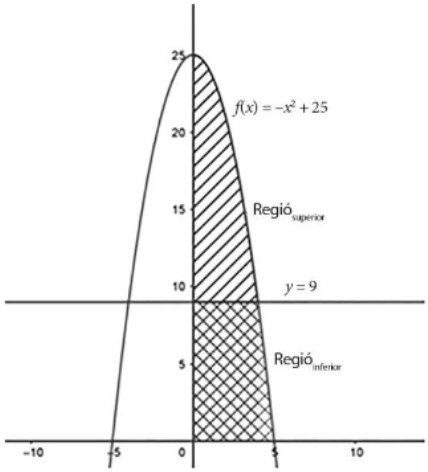
Ejercicio 4:

Ejercicio 4

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

La vela mayor de un velero tiene forma semiparabólica y está delimitada por las gráficas de $f(x)=-x^2+25$, $y=0$ y $x=0$ tal como se indica en la figura siguiente:



La vela tiene dos partes separadas por la recta $y=9$. Para su construcción, se emplea un tejido de nylon en la parte superior, que cuesta 50 €/u^2, y un tejido de poliéster en la parte inferior, que cuesta 70 €/u^2. Calcule el coste total del material que se necesita para construir esta vela. [2.5 puntos]

OPCIÓN B

Considere el plano π de ecuación $x+y=0$.

a) Calcule la ecuación del plano π´ que es perpendicular a π y contiene los puntos $P=(1,-1,2)$ y $Q=(3,-3,6)$. [1 punto]

b) Calcule la ecuación paramétrica de la recta contenida en π´ y que contiene los puntos de π´ que están a la misma distancia de P que de Q. [1.5 puntos]

Solución Opción A:

Hallamos el área total de la vela como la integral definida entre 0 y 5 de la función $f(x)=-x^2+25$.

$$Área\,total=\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^5 -x^2+25dx=\left[\frac{-x^3}{3}+25x\right]_0^5=$$

$$=\left[\frac{-5^3}{3}+25\cdot 5\right]-\left[\frac{-0^3}{3}+25\cdot 0\right]=125-\frac{125}{3}=\boxed{\frac{250}{3}\,u^2}$$

Calculamos el valor del área superior como como el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia entre $f(x)=-x^2+25$ e $y=9$.

$$Área\,superior=\int_0^4 -x^2+25-9dx=\int_0^4 -x^2+16dx=\left[\frac{-x^3}{3}+16x\right]_0^4=$$

$$=\left[\frac{-4^3}{3}+16\cdot 4\right]-\left[\frac{-0^3}{3}+16\cdot 0\right]=64-\frac{64}{3}=\boxed{\frac{128}{3}\,u^2}$$

BY NC SA

El área de la parte inferior la obtenemos restando al área total el área de la parte superior.

$$\text{Área inferior} = \frac{250}{3} - \frac{128}{3} = \boxed{\frac{122}{3}\ u^2}$$

Una vez que tenemos el valor del área de cada trozo calculamos el coste total del material.

$$\text{Coste} = 50 \cdot \frac{128}{3} + 70 \cdot \frac{122}{3} = 4980\,€$$

El coste de todo el material necesario para hacer la vela es de 4980 euros.

Coste = 4980 euros

Ejercicio 4: Solución Opción B

a) El plano perpendicular a π tiene como uno de sus vectores directores el vector normal de π. El otro vector director del plano π´ es el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\pi: x+y=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,0) \qquad \overrightarrow{PQ}=(3,-3,6)-(1,-1,2)=(2,-2,4)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{n}=(1,1,0)\\ \vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(2,-2,4)=(1,-1,2)\\ P(1,-1,2)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2-z+2-z+2-2y-2=0\Rightarrow 2x-2y-2z=0\Rightarrow \boxed{\pi': x-y-z=0}$$

El plano π´ que es perpendicular a π y contiene los puntos $P=(1,-1,2)$ y $Q=(3,-3,6)$ tiene ecuación $\pi': x-y-z=0$.

b) Los puntos que equidistan de P y Q constituyen una recta. El vector director de esta recta es perpendicular al vector normal del plano π´ pues la recta está contenida en el plano, también es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}$.. Podemos tomar como vector director de la recta el producto vectorial del vector $\vec{n}'$ y $\overrightarrow{PQ}$. Además, esta recta pasa por el punto medio del segmento PQ.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(2,-2,4)\\ \pi': x-y-z=0\rightarrow \vec{n}'=(1,-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}'\times\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-4i-2j-2k+2k-4j-2i=-6i-6j=(-6,-6,0)$$

Hallamos el punto medio del segmento PQ y la ecuación de la recta *r* pedida.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(3,-3,6)+(1,-1,2)}{2}=(2,-2,4)\in r\\ \vec{v}_r=\frac{1}{-6}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{-6}(-6,-6,0)=(1,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=4\end{cases}$$

La recta que buscamos tiene ecuación $r:\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=-2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=4\end{cases}$.

BY NC SA

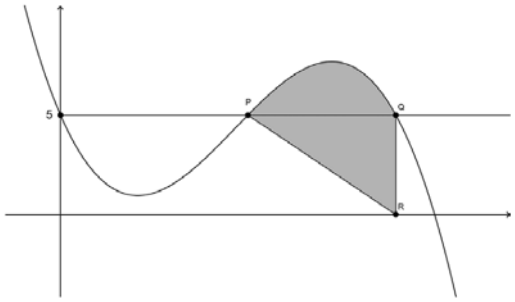
Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA EN CATALÁN

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

1. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, en el qual es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P, Q i R que s'indiquen a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR.
[1,25 punts]

b) Calculeu la superfície del terreny.

Solución:

Sèrie 0

1. (a) Tal com es veu en el dibuix, les abscisses dels punts $(0, 5)$, P , i Q són les tres solucions de l'equació $f(x) = 5$:

$$-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \;\rightarrow\; x(-x^2 + 7x - 6) = 0$$
$$x = 0, \qquad x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 6. \end{cases}$$

Per tant, les coordenades dels punts que es demana són $P = (1,5)$, $Q = (6,5)$, i $R = (6,0)$.

Ara, la recta r que passa pels punts $P = (1,5)$ i $R = (6,0)$ té pendent $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$, per tant és $y = -x + n$ i, com que passa pel punt $R = (6,0)$, tenim que $n = 6$; es tracta de la recta $y = -x + 6$.

(b) L'àrea del terreny, és la integral definida entre els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 6$ de la funció $f(x)$ menys la recta:

$$A = \int_1^6 \big(f(x) - r(x)\big)\,dx =$$
$$= \int_1^6 \big((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)\big)\,dx =$$
$$= \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x\right]_1^6 =$$
$$= \left(-\tfrac{6^4}{4} + \tfrac{7}{3}6^3 - \tfrac{5}{2}6^2 - 6\right) - \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{3} - \tfrac{5}{2} - 1\right) = \tfrac{1025}{12} = 85.416\ldots\ u^2.$$

Alternativament, es pot integrar només $f(x)$ entre 1 i 6, i restar-ne el triangle inferior no inclòs al terreny:

$$A = \int_1^6 f(x)\,dx - \tfrac{5\cdot 5}{2} = \int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 6x + 5)\,dx - \tfrac{25}{2} = \left[-\tfrac{x^4}{4} + \tfrac{7}{3}x^3 - 3x^2 + 5x\right]_1^6 - \tfrac{25}{2} = \left(-\tfrac{6^4}{4} + \tfrac{7}{3}6^3 - 3\cdot 6^2 + 5\cdot 6\right) - \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{7}{3} - 3 + 5\right) - \tfrac{25}{2} = \tfrac{1175}{12} - \tfrac{25}{2} = 85.416\ldots\ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 per plantejar bé l'equació, 0,25 per resoldre-la, 0,25 per donar les coordenades dels tres punts i 0,5 per l'equació de la recta. (b) Compteu 0,5 pel plantejament de la integral i 0,75 pel càlcul.

Comentaris: Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, si són correctes i estan ben explicades.

BY NC SA

Ejercicio 2:

2 Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} 4x+2y-z&=4\\ x-y+kz&=3\\ 3x+3y&=1 \end{aligned}\right\},$$

on k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k, i resoleu-lo per a $kk = 0$.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per k = 1

c) Per a $k = -1$, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.
[0,75 punts]

Solución:

2. (a) La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculem el determinant de coeficients i l'igualem a zero, obtenim

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 6k - 3 - 12k = -6k - 6 = 0,$$

és a dir, $k = -1$. Per tant, si $k \neq -1$ tindrem $rang(M) = rang(\overline{M}) = 3$, que coincideix amb el número d'incògnites, i el sistema és compatible determinat. En canvi, si $k = -1$, el sistema queda

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z &= 4\\ x - y - z &= 3\\ 3x + 3y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

I, com que la tercera equació és la resta de la primera menys la segona, és un sistema compatible indeterminat.

La solució per a $k = 0$ la podem calcular per la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-6} = \frac{-4}{3},$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-4 + 18 + 12 + 12 - 36 - 2}{-6} = 0.$$

(b) Per al cas $k = -1$, i eliminant la tercera equació perquè és redundant, obtenim

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - z &= 4\\ x - y - z &= 3 \end{aligned}\right\}.$$

BY NC SA

Restant, obtenim $3x + 3y = 1$. Fent $x = \lambda$, tenim $y = \frac{1}{3} - \lambda$ i llavors $z = x - y - 3 = \lambda - \frac{1}{3} + \lambda - 3 = 2\lambda - \frac{10}{3}$. Totes les solucions del sistema són, doncs, de la forma

$$(x, y, z) = \left(\lambda,\ \frac{1}{3} - \lambda,\ 2\lambda - \frac{10}{3}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Com hem notat, en el cas $k = -1$, la tercera equació és redundant perquè és la resta de la primera menys la segona. Si modifiquem el terme independent posant, per exemple, $3x + 3y = 2$ tindrem la incongruència $1 = 2$ i el sistema serà incompatible. Dit d'una altra manera, és incompatible perquè la matriu de coeficients no ha canviat, i té rang 2, mentre que ara la matriu ampliada té rang 3 ja que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 9 + 12 - 2 = -3 \neq 0.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel determinant, 0,25 per la discussió i 0,5 per la solució del cas $k = 0$. (b) Compteu 0,75 per l'expressió paramètrica de totes les solucions. (c) Compteu 0,25 per la nova equació i 0,5 per la justificació que ara és incompatible.

Ejercicio 3:

3. a) L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa.

A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure'n la segona).Calculeu la probabilitat que les dues boles tinguin lletres diferents.
[0,75 punts]

b) L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrere l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar-ne la següent). Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A.
[0,75 punts]

c) Estudieu els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement, de la funció $f(x) = 2\frac{\ln^x}{x}$, $definida\ per\ x > 0$.

[1 punt]

Solución:

3. (a) Calculem primer la probabilitat que les dues boles tinguin la mateixa lletra. Això només pot passar si són dues A o dues S.

$$P(dues\ A) = P(primera\ A\ i\ segona\ A) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(dues\ S).$$

Per tant, $P(dues\ diferents) = 1 - P(dues\ iguals) = 1 - 2\cdot\frac{1}{36} = \frac{17}{18} = 0.944\ldots$.

Alternativament, ho podem argumentar directament de la manera següent: si la primera bola no és ni A ni S, segur que les dues lletres són diferents; si la primera bola és una A, hi ha 7 boles favorables per a la segona extracció (totes menys l'altra A); i anàlogament, si la primera bola és una S, hi ha també 7 boles favorables per a la segona extracció. Per tant,

$$\begin{aligned} &P(dues\ diferents) \\ &\quad = P(primera\ no\ és\ ni\ A\ ni\ S) + P(primera\ A\ i\ segona\ no\ A) \\ &\quad + P(primera\ S\ i\ segona\ no\ S) = \\ &\quad = \frac{5}{9} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} + \frac{2}{9}\cdot\frac{7}{8} = \frac{17}{18}. \end{aligned}$$

BY NC SA

(b) El nombre de boles A extretes segueix una llei binomial amb $n = 5$ i $p = \frac{2}{9}$. Passant al complementari, tenim

$$P(almenys\ 2\ A) = 1 - P(una\ A) - P(cap\ A) = 1 - \binom{5}{1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^4 - \left(\frac{7}{9}\right)^5 =$$
$$= 0.308\ldots .$$

(c) Si derivem la funció i la igualem a zero,

$$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = 2\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0,$$

ens queda l'equació $\ln x = 1$; per tant, f té només un punt crític, $x = e$. Resulta que és un màxim ja que la derivada segona és negativa:

$$f''(x) = 2\frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \ln x)\cdot 2x}{x^4}, \qquad f''(e) = 2\frac{-e}{e^4} = -2e^{-3} < 0.$$

Com que només té un màxim, la funció és creixent en l'interval $(0, e)$ i decreixent en $(e, +\infty)$, cosa que també podem veure directament mirant el signe de la derivada.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (b) Compteu 0,5 pel plantejament i 0,25 pel càlcul. (c) Compteu 0,5 pel càlcul de la derivada, 0,25 per determinar el màxim i 0,25 per les zones de creixement i decreixement.

Comentaris: És un mètode més llarg però a l'apartat (b) es pot respondre també calculant amb la binomial $P(2A) + P(3A) + P(4A) + P(5A)$; doneu també aquestes respostes com a correctes si estan ben argumentades.

Ejercicio 4A:

4. OPCIÓ A Considereu els punts $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-3, -2, 3)$.

a) Calculeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta AB i que passa pel punt mitjà entre A i B. Justifiqueu que aquest pla és format, precisament, pels punts $P = (x, y, z)$, que estan situats a la mateixa distància de A que de B, és a dir, $d(P, A) = d(P, B)$.
[1 punt]

b) Calculeu les distàncies de A i de B al pla π i comproveu que són iguals. És casualitat? Raoneu la resposta.
[0,75 punts]

c) Sigui $C = (-7, 6, 3)$. El triangle ABC és isòsceles? Calculeu-ne l'àrea.
[0,75 punts]

Solución 4A:

4A. (a) El pla buscat ha de ser perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3,-2,3) - (1,2,3) = (-4,-4,0) \sim (1,1,0)$, per tant, té equació de la forma $x + y + 0z + D = 0$. A més, ha de passar pel punt mig $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$; per tant, $-1 + D = 0$ i es tracta del pla d'equació $x + y + 1 = 0$.

Geomètricament és clar que aquest pla π està format, precisament pels punts a igual distància de A que de B. Efectivament, per un punt arbitrari $P = (x, y, z)$, l'equació $d(P, A) = d(P, B)$ és equivalent a

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2},$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \\ = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9, \end{aligned}$$

$$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y,$$

$$-8x - 8y - 8 = 0$$

que simplificant-la és, precisament, l'equació del pla π, $x + y + 1 = 0$.

(b) Usant la fórmula de la distància punt-pla, tenim

$$d(A, \pi) = \frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}, \qquad d(B, \pi) = \frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

No és casualitat que doni el mateix resultat: les projeccions ortogonals de A i de B al pla π són, precisament el punt mig $\frac{1}{2}(A + B) = (-1, 0, 3)$ per on hem fet passar el pla π, perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$.

(c) El punt $C = (-7, 6, 3)$ compleix $-7 + 6 + 1 = 0$ i per tant pertany al pla π de l'apartat anterior. Això vol dir que $d(C, A) = d(C, B)$ i, per tant, el triangle ABC té almenys dos costats iguals; per tant, és isósceles.

Per calcular la seva àrea només necessitem la longitud de la base $d(A, B) = 2\frac{4}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$, i la seva alçada, que és la distància de C al punt mig entre A i B:

$$h = d\big((-7, 6, 3), (-1, 0, 3)\big) = \sqrt{6^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Per tant el triangle ABC té àrea

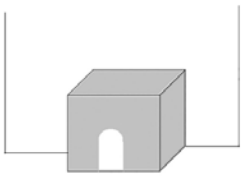
$$\text{Àrea} = \frac{4\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}{2} = 24 \ u^2.$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,5 per calcular l'equació del pla π, i 0,5 per justificar que es tracta dels punts equidistants de A i de B. (b) Compteu 0,25 per calcular una distància, 0,25 per l'altra, i 0,25 per justificar que no és casualitat que donin el mateix resultat. (c) Compteu 0,25 per raonar que el triangle és isòsceles, 0,25 per calcular la base i 0,25 per calcular l'alçada.

BY NC SA

Ejercicio 4B:

4 OPCIÓ B. Volem construir un petit cobert de fusta de 6 m³ de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 €/m². Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



a) Comproveu que el cost de construcció del cobert és determinat per la funció $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, on x és la fondària del cobert en metres.
[1,25 punts]

b) Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?
[1,25 punts]

Solución 4B:

4B. (a) Com s'indica a l'enunciat, denotem per x la fondària del cobert, i denotem per h l'alçada; l'amplada serà $3x$. El volum del cobert ha de ser de 6 m^3, és a dir, $3x \cdot x \cdot h = 6$ i per tant $h = \frac{2}{x^2}$. El cost de construcció ve donat per

$$C(x) = 30 \cdot (3xh + xh + xh) + 50 \cdot 3x^2 + 35 = 150xh + 150x^2 + 35 =$$

$$= 150x \cdot \frac{2}{x^2} + 150x^2 + 35 = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35.$$

(b) Per minimitzar la funció $C(x)$, calculem la seva derivada:

$$C'(x) = \frac{-300}{x^2} + 300x$$

Si resolem l'equació $C'(x) = 0$ obtenim $\frac{300}{x^2} = 300x$ o, equivalentment, $x^3 = 1$, que té com a única solució real $x = 1$. Com que $C''(x) = \frac{600}{x^3} + 300$ i $C''(1) > 0$, comprovem fàcilment que es tracta d'un mínim de la funció. Així doncs, les dimensions del cobert han de ser $x = 1$ metre de fondària, $3x = 3$ metres d'amplada, i $h = \frac{2}{1^2} = 2$ metres d'alçada. Per aquestes dimensions el cost de construcció és de $C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$ euros.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0,25 pel planteig correcte de les variables (amplada, fondària i alçada), 0,5 per expressar la lligadura que representa el volum fixat, i 0,5 per l'expressió final del cost. (b) Compteu 0,25 per la derivada, 0,25 per aïllar correctament, 0,25 per justificar que es tracta d'un mínim, 0,25 per les tres dimensions demanades, i 0,25 pel càlcul del cost total.

Comentaris: Poden plantejar que l'amplada és x i la fondària $\frac{x}{3}$; els càlculs seran diferents però doneu els punts corresponents de cada part sempre que estigui ben feta i ben argumentada. La justificació que es tracta d'un mínim pot fer-se també sense la derivada segona, analitzant el signe de la derivada primera; compteu-ho bé si ho fan així, sempre que estigui ben argumentat.

BY NC SA

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

El examen consta de CUATRO ejercicios obligatorios. Realice los ejercicios 1, 2 y 3 respondiendo a TODAS las cuestiones que plantean. En el ejercicio 4, elija UNA de las dos opciones (A o B) propuestas.
En todas las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara.
Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos capaces de almacenar datos o de transmitir o recibir información.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Ejercicio 1:

1º) Una familia quiere comprar un terreno para hacerse una casa rodeada de acantilados con vistas al mar. En esa zona de la costa, los acantilados siguen las rectas de ecuaciones $y = 0$ e $y = 3x$. Además, la familia quiere que el terreno sea triangular y que el tercer lado del triángulo pase por el punto $P(1, 1)$, tal y como puede verse en la figura.

$a)$ Plantee la ecuación de la recta r que define el tercer lado del triángulo en función de su pendiente m, y compruebe que el área del terreno viene dada por la siguiente expresión: $S(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}$.

$b)$ Calcule el valor de m que hace que el área de este terreno (y, por tanto, su precio) sea mínima. ¿Cuál es el valor de esta área?

Ejercicio 2:

2º) Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\left.\begin{matrix} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{matrix}\right\}$.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema para el caso $m = 1$.

$c)$ Resuelva el sistema cuando éste tenga infinitas soluciones.

Ejercicio 3:

3º) La lesión por sesamoiditis (inflamación del hueso sesamoide del pie) es relativamente habitual entre la población que practica deportes de impacto (atletismo, baloncesto, tenis, ···). En una población de deportistas, se ha realizado un estudio diferenciando entre los que practican deportes de impacto y los que practican deportes sin impacto brusco (como natación, pilates, senderismo, ···). Se ha podido determinar que el 45 % practican deportes de impacto. Entre ellos, un 10 % sufren lesiones por sesamoiditis, mientras que entre los que no practican deportes de impacto sólo un 3 % presentan esta lesión. Escogemos a un deportista al azar:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sufra sesamoiditis?

$b)$ Si el deportista elegido tiene una lesión por sesamoiditis, ¿cuál es la probabilidad de que practique deportes de impacto?

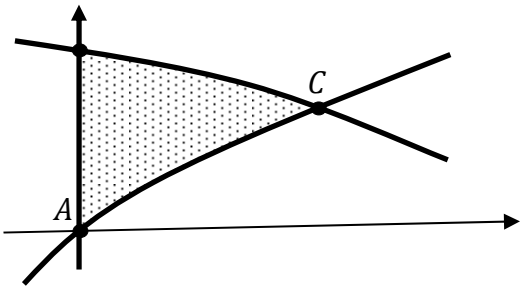
Una empresa de calzado deportivo ha creado una zapatilla con amortiguación para minimizar las lesiones por sesamoiditis. Los beneficios generados por la venta de esta producto, en miles de euros,

siguen una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, donde x son los años transcurridos desde que la zapatilla salió a la venta y a, b, c son constantes reales.

c) Calcule los valores a, b y c sabiendo que el primer año se obtuvieron el máximo de beneficios, con un valor de 8.000 euros, y que en el segundo año hubo un punto de inflexión en los beneficios.

Ejercicio 4:

4A) Un vidriero está reparando una de las vidrieras de La Sagrada Familia cuya forma es la de la parte sombreada de la figura adjunta. Se ha dado cuenta de que Gaudí lo diseñó de forma que uno de los lados sigue la función $y = f(x) = 3 \cdot sen\ \frac{x}{4}$ y otro sigue la función $y = g(x) = 3 \cdot cos\ \frac{x}{4}$, donde x e y están expresadas en metros.



a) Razone a qué función corresponde cada gráfica y calcula las coordenadas de los puntos B y C señalados en la figura (teniendo en cuenta que A es el origen de coordenadas).

b) Calcula el precio de la vidriera sabiendo que cuesta 750 euros cada metro cuadrado.

Ejercicio 4B:

4B) Considere el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 5$ y el punto $P(0, 1, 3)$.

a) Compruebe que la distancia del punto P al plano π es $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

b) Encuentre la ecuación general de un plano π' paralelo a π y que pase por el punto P. ¿Cuánto vale la distancia entre π' y π?

c) Encuentre la ecuación general de un segundo plano π_2, diferente de π', que sea paralelo a π y que esté a una distancia $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π.

BY NC SA

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Ejercicio 1:

1º) Una familia quiere comprar un terreno para hacerse una casa rodeada de acantilados con vistas al mar. En esa zona de la costa, los acantilados siguen las rectas de ecuaciones $y = 0$ e $y = 3x$. Además, la familia quiere que el terreno sea triangular y que el tercer lado del triángulo pase por el punto $P(1, 1)$, tal y como puede verse en la figura.

$a)$ Plantee la ecuación de la recta r que define el tercer lado del triángulo en función de su pendiente m, y compruebe que el área del terreno viene dada por la siguiente expresión: $S(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}$.

$b)$ Calcule el valor de m que hace que el área de este terreno (y, por tanto, su precio) sea mínima. ¿Cuál es el valor de esta área?

Solución:

$a)$ El haz de rectas γ que contienen al punto $P(1,1)$ es $\gamma \equiv y - 1 = m(x - 1)$, por lo cual, la expresión de la recta r es: $\underline{r \equiv y - 1 = m(x-1) \Rightarrow y = m(x-1) + 1.}$

La intersección de $r \in \gamma$ con la recta $y = 3x$ tiene la siguiente abscisa:

$$\left.\begin{matrix} y - 1 = m(x-1) \\ y = 3x \end{matrix}\right\} \Rightarrow m(x-1) + 1 = 3x;\ \ m(x-1) = 3x - 1;$$

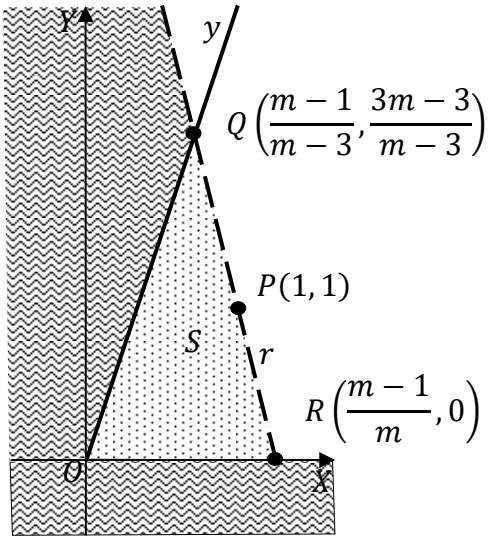
$$mx - m = 3x - 1;\ \ mx - 3x = m - 1;\ \ x(m-3) = m - 1;\ \ x = \frac{m-1}{m-3}.$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{m-1}{m-3}, \frac{3m-3}{m-3}\right)$

El punto de corte con el eje de abscisas de la recta r es el siguiente:

$$y = 0 \Rightarrow m(x-1) + 1 = 0;$$

$$mx - m = -1;\ \ x = \frac{m-1}{m} \Rightarrow R\left(\frac{m-1}{m}, 0\right).$$



La superficie del terreno en función de m es la siguiente:

$$S(m) = \frac{base \times altura}{2} = \frac{\overline{AP} \times h}{2} = \frac{\frac{m-1}{m} \cdot \frac{3m-3}{m-3}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)^2}{m(m-3)} \Rightarrow \underline{S(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{m^2-2m+1}{m^2-3m}.}$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ lo\ pedido.}$$

$b)$ Una función tiene un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(m) = \frac{3}{2} \cdot \frac{[2 \cdot (m-1) \cdot 1] \cdot (m^2-3m) - (m-1)^2 \cdot (2m-3)}{(m^2-3m)^2} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1) \cdot [2m^2-6m-(m-1)(2m-3)]}{(m^2-3m)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1) \cdot [2m^2-6m-(2m^2-3m-2m+3)]}{(m^2-3m)^2} =$$

BY NC SA

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)\cdot(2m^2-6m-2m^2+5m-3)}{(m^2-3m)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)\cdot(-m-3)}{(m^2-3m)^2} \Rightarrow S'(m) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)\cdot(m+3)}{(m^2-3m)^2}.$

$S'(m) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \cdot \frac{(m-1)\cdot(m+3)}{(m^2-3m)^2} = 0;\ \ (m-1)\cdot(m+3) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, m_2 = -3.$

$S'(m) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{m^2+2m-3}{(m^2-3m)^2}.$

$S''(m) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{(2m+2)\cdot(m^2-3m)^2-(m^2+2m-3)\cdot[2\cdot(m^2-3m)\cdot(2m-3)]}{(m^2-3m)^4} =$

$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{(2m+2)\cdot(m^2-3m)-2(m^2+2m-3)\cdot(2m-3)}{(m^2-3m)^3} =$

$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2m^3-6m^2+2m^2-6m-2(2m^3-3m^2+4m^2-6m-6m+9)}{(m^2-3m)^3} =$

$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{2m^3-4m^2-6m-2(2m^3+m^2-12m+9)}{(m^2-3m)^3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2m^3-4m^2-6m-4m^3-2m^2+24m-18}{(m^2-3m)^3} =$

$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{-2m^3-6m^2+18m-18}{(m^2-3m)^3} \Rightarrow S''(m) = 3 \cdot \frac{m^3+3m^2-9m+9}{(m^2-3m)^3}.$

$S''(1) = 3 \cdot \frac{1^3+3\cdot1^2-9\cdot1+9}{(1^2-3\cdot1)^3} = 3 \cdot \frac{1+3-9+9}{(1-3)^3} = 3 \cdot \frac{4}{(-2)^3} < 0 \Rightarrow Máximo.$

$S''(-3) = 3 \cdot \frac{(-3)^3+3\cdot(-3)^2-9\cdot(-3)+9}{[(-3)^2-3\cdot(-3)]^3} = 3 \cdot \frac{-27+27+27+9}{(18)^3} = 3 \cdot \frac{36}{18^3} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Mínimo\ para\ m = -3.$

El precio del terreno es mínimo para $m = -3$.

$S(-3) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(-3)^2-2\cdot(-3)+1}{(-3)^2-3\cdot(-3)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{9+6+1}{9+9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{18} = \frac{1}{1} \cdot \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \cong 1{,}33.$

El área mínima es $\frac{4}{3}\ u^2 \cong 1{,}33\ u^2$.

BY NC SA

Ejercicio 2:

2º) Considere el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\left.\begin{matrix} x+3y+z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=m \end{matrix}\right\}$.

$a)$ Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro m.

$b)$ Resuelva el sistema para el caso $m=1$.

$c)$ Resuelva el sistema cuando éste tenga infinitas soluciones.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ 0 & m & -1 \end{vmatrix}=m^2-2m+3m=0;\ m^2+m=0;\ m(m+1)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow m_1=0, m_2=-1.$

$$\boldsymbol{Para\ \left\{\begin{matrix} m\neq 0 \\ m\neq -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=0 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-2F_3\} \Rightarrow Rang\ A'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ m=0 \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ m=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ A' \Rightarrow \{Por\ Gauss\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2\rightarrow F_2+F_1 \\ F_3\rightarrow -F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2\leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3\rightarrow F_3-3F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ A'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ m=-1 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$ Para $m=1$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} x+3y+z=5 \\ x+2z=0 \\ y-z=1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

BY NC SA

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}}{1^2+1}=\frac{6-10}{2}=\frac{-4}{2}=-2. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1-2+5}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{2}=\frac{5-3}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

$\boldsymbol{Solución: x=-2,\ y=2, z=1.}$

$c)$ Para $m=0$ el sistema resulta $\begin{cases}x+3y+z=5\\ 2z=0\\ -z=0\end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases}x+3y=5\\ z=0\end{cases}$.

Haciendo, por ejemplo, $y=\lambda$:

$\boldsymbol{Solución: x=5-3\lambda, y=\lambda, z=0, \forall \lambda \in R.}$

BY NC SA

Ejercicio 3:

3º) La lesión por sesamoiditis (inflamación del hueso sesamoide del pie) es relativamente habitual entre la población que practica deportes de impacto (atletismo, baloncesto, tenis, ···). En una población de deportistas, se ha realizado un estudio diferenciando entre los que practican deportes de impacto y los que practican deportes sin impacto brusco (como natación, pilates, senderismo, ···). Se ha podido determinar que el 45 % practican deportes de impacto. Entre ellos, un 10 % sufren lesiones por sesamoiditis, mientras que entre los que no practican deportes de impacto sólo un 3 % presentan esta lesión. Escogemos a un deportista al azar:

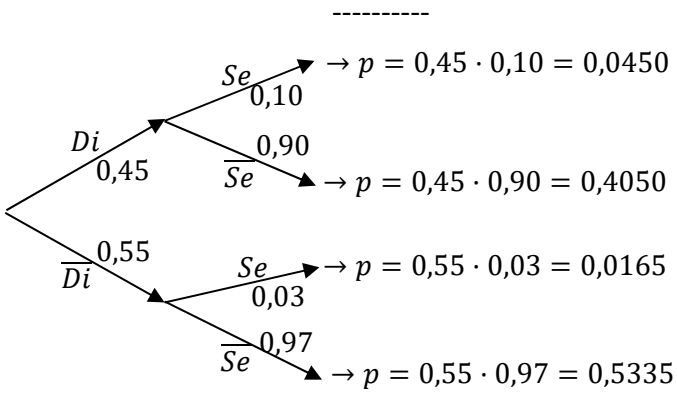
$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sufra sesamoiditis?

$b)$ Si el deportista elegido tiene una lesión por sesamoiditis, ¿cuál es la probabilidad de que practique deportes de impacto?

Una empresa de calzado deportivo ha creado una zapatilla con amortiguación para minimizar las lesiones por sesamoiditis. Los beneficios generados por la venta de esta producto, en miles de euros, siguen una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, donde x son los años transcurridos desde que la zapatilla salió a la venta y a, b, c son constantes reales.

$c)$ Calcule los valores a, b y c sabiendo que el primer año se obtuvieron el máximo de beneficios, con un valor de 8.000 euros, y que en el segundo año hubo un punto de inflexión en los beneficios.

Solución:



$a)\ P(Se) = P(Di \cap Se) + P(\overline{Di} \cap Se) =$

$= P(Di) \cdot P(Se/Di) + P(\overline{Di}) \cdot P(Se/\overline{Di}) = 0{,}45 \cdot 0{,}10 + 0{,}55 \cdot 0{,}03 =$

$= 0{,}0450 + 0{,}0165 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{P(Se) = 0{,}0615.}$$

$b)\qquad P(Di/Se) = \frac{P(Di \cap Se)}{P(Se)} = \frac{P(Di) \cdot P(Se/Di)}{P(Se)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}10}{0{,}0615} = \frac{0{,}0450}{0{,}0615} = \underline{0{,}7317}.$

$c)$ Por tener un máximo de 8.000 euros para $x = 1$ es $f(1) = 8$.

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 = 8;\ \ a + b + c = 8. \quad (1)$$

BY NC SA

Por tener un máximo en $x = 1$ es $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c = 0;\ \ 3a + 2b + c = 0.$ (2)

Por tener el segundo año un punto de inflexión es $f''(2) = 0$.

$f''(x) = 6ax + 2b.$

$f''(2) = 0 \Rightarrow 6a \cdot 2 + 2b = 0;\ \ 6a + b = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{matrix} a + b + c = 8 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = -6a \Rightarrow \left.\begin{matrix} a - 6a + c = 8 \\ 3a + 2 \cdot (-6a) + c = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -5a + c = 8 \\ -9a + c = 0 \end{matrix}\right\};$$

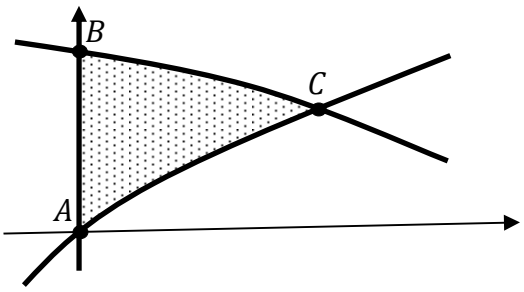
$$\left.\begin{matrix} -5a + c = 8 \\ 9a - c = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4a = 8;\ \ a = 2;\ \ b = -12;\ \ 2 - 12 + c = 8;\ \ c = 18.$$

Solución: $a = 2, b = -12, c = 18$.

BY NC SA

Ejercicio 4A:

4A) Un vidriero está reparando una de las vidrieras de La Sagrada Familia cuya forma es la de la parte sombreada de la figura adjunta. Se ha dado cuenta de que Gaudí lo diseñó de forma que uno de los lados sigue la función $y = f(x) = 3 \cdot sen\ \frac{x}{4}$ y otro sigue la función $y = g(x) = 3 \cdot cos\ \frac{x}{4}$, donde x e y están expresadas en metros.



a) Razone a qué función corresponde cada gráfica y calcula las coordenadas de los puntos B y C señalados en la figura (teniendo en cuenta que A es el origen de coordenadas).

b) Calcula el precio de la vidriera sabiendo que cuesta 750 euros cada metro cuadrado.

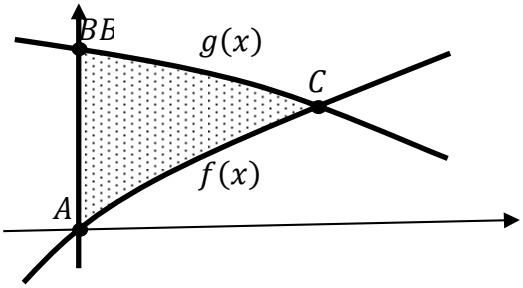
Solución opción A:

a) Teniendo en cuenta que para $x = 0$ los valores de las funciones son:

$$f(0) = 3 \cdot sen\ \frac{0}{4} = 3 \cdot sen\ 0 = 3 \cdot 0 = 0,$$

$$g(0) = 3 \cdot cos\ \frac{0}{4} = 3 \cdot cos\ 0 = 3 \cdot 1 = 3,$$

las funciones son las que se indican en el gráfico adjunto.



b) Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3sen\ \frac{x}{4} = 3cos\ \frac{x}{4};\ \ sen\ \frac{x}{4} = cos\ \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x}{4} = 45° = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \pi.$$

Lógicamente y de la observación de la figura dada, se ha tomado la primera solución de las infinitas soluciones que corresponden a dos funciones periódicas.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{\pi} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^{\pi} \left(3 \cdot cos\ \frac{x}{4} - 3 \cdot sen\ \frac{x}{4}\right) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = t \\ dx = 4 \cdot dt \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} x = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{matrix} \Rightarrow S = 3 \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (cos\ t - sen\ t) \cdot dt =$$

$$= 12 \cdot [sen\ t + cos\ t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 12 \cdot \left[\left(sen\ \frac{\pi}{4} + cos\ \frac{\pi}{4}\right) - (sen\ 0 + cos\ 0)\right] =$$

$$= 12 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0 + 1)\right] \Rightarrow S = 12 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) m^2 \cong 4{,}97\ m^2.$$

$$Coste = S \cdot 550 = 12 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 750 = 9.000 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cong 3.727{,}92.$$

El precio de la vidriera es, aproximadamente, 3.727,92 euros.

Ejercicio 4B:

4B) Considere el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 5$ y el punto $P(0, 1, 3)$.

$a)$ Compruebe que la distancia del punto P al plano π es $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$b)$ Encuentre la ecuación general de un plano π' paralelo a π y que pase por el punto P. ¿Cuánto vale la distancia entre π' y π?

$c)$ Encuentre la ecuación general de un segundo plano π_2, diferente de π', que sea paralelo a π y que esté a una distancia $\frac{\sqrt{6}}{2}$ de π.

Solución opción B:

$a)$ La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv 2x - y + z - 5 = 0$ y a al punto $P(0, 1, 3)$:

$$d(\pi, P) = \frac{|2\cdot 0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|0 - 1 + 3 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \underline{d(\pi, P) = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u.}$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ lo\ pedido.}$$

$b)$ El haz de planos β, paralelos al plano $\pi \equiv 2x - y + z - 5 = 0$ tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π' es el que contiene al punto dado, $P(0, 1, 3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv 2x - y + z + D = 0 \\ P(0, 1, 3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 0 - 1 + 3 + D = 0;\ \ 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2.$$

$$\boldsymbol{\underline{\pi' \equiv 2x - y + z - 2 = 0.}}$$

La distancia entre los planos paralelos $\left.\begin{matrix} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ viene dada por la fórmula $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula a los planos paralelos $\left.\begin{matrix} \pi \equiv 2x - y + z - 5 = 0 \\ \pi' \equiv 2x - y + z - 2 = 0 \end{matrix}\right\}$:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|-2 - (-5)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-2 + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{d(\pi, \pi') = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u}}$$

$c)$ La expresión del segundo plano es de la forma $\pi_2 \equiv 2x - y + z + D_2 = 0$.

BY NC SA

$\pi \equiv 2x - y + z - 5 = 0.$

$d(\pi, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $\frac{|D_2-(-5)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $\frac{|D_2+5|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$; $|D_2 + 5| = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} D_2 + 5 = 3 \rightarrow D_2' = -2 \rightarrow \pi' \\ D_2 + 5 = -3 \rightarrow D_2'' = -8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D_2 = -8.$$

$$\boldsymbol{\pi_2 \equiv 2x - y + z - 8 = 0.}$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.
El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen. Los ejercicios 1,2 y 3 tienen dos opciones A y B. Solo hay que contestar una de las dos opciones (A o B). Si se contesta a las dos se corregirá solo la que aparezca en primer lugar, salvo que esté tachada. El ejercicio 4 es único y obligatorio. CADA EJERCICIO COMPLETO PUNTUARÁ 2,5 PUNTOS MÁXIMO. En cada apartado se indica la correspondiente puntuación. Se adjunta al final tabla de la distribución NORMAL por si hiciera falta para algún ejercicio. Todas las instrucciones son las recogidas en los criterios generales de evaluación ya publicados junto con los modelos de exámenes. Indicamos a modo de recordatorio y resumen: Criterios generales. Las respuestas de los ejercicios deberán realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución con el rigor y la precisión necesaria, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados. Se valorará con un máximo de 0,25 puntos en cada ejercicio. Ortografía y redacción. Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica y la presentación. Se deducirá 0,10 puntos por cada falta a partir de la tercera. Se podrá deducir hasta 1 punto máximo en la puntuación final. Materiales. Se permitirá una calculadora no gráfica y no programable, según el anexo aprobado y publicado.

BLOQUE 1

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in R$: $\begin{cases} x+ky+z=2+k \\ 2x-y-kz=1-k \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k.
b) Resolver para el caso k=1.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in R$

a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2 - A = B$.
b) Calcular m para que la matriz A+B-I tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.
c) Para m=2 obtener la inversa de la matriz A+B-I.

BLOQUE 2

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

Dada la función $f(x)= (x-1)e^{-x}$ a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x). b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de f(x). c) Calcula la ecuación de la recta tangente a f(x) para x=1.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b)1,25 puntos.
Dadas las funciones f(x) =2 y $g(x)= x^3+x^2-2x$

a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de g(x) y el eje X.

BY NC SA

BLOQUE 3

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

a) Comprobar que el plano π= x+y-z=3 y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.

c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto (0,1,-1).

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos A(1,0,2), B(1,m,6), C(2,1,4) y D(4,3,2). Se pide:

a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.

b) Obtener la ecuación general del plano ACD.

c) Para m=2, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

BLOQUE 4

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

a) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm

b) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?

c) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE 1

Ejercicio 1A

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $k \in R$: $\begin{cases} x+ky+z=2+k \\ 2x-y-kz=1-k \\ x-y-z=-1 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro k.
b) Resolver para el caso k=1.

Solución:

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 & 2+k \\ 2 & -1 & -k & 1-k \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & -1 & -k \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=1-k^2-2+1+2k-k=-k^2+k$$

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2+k=0 \Rightarrow k(-k+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{k=0} \\ \boxed{k=1} \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos la matriz.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \\ -2 \quad 0 \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{Bmatrix}$$

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}} - \text{Fila } 1^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}} - \text{Fila } 2^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & 0 & 1}^{A} & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A y el de A/B son iguales a 2 y menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{\text{ª}} - 2 \cdot \text{Fila } 1^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -6 \\ \hline 0 & -3 & -3 & -6 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{ª}}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{\text{ª}} - \text{Fila } 1^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \\ \hline 0 & -2 & -2 & -4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}3 \cdot \text{Fila } 3^{\text{ª}} - 2 \cdot \text{Fila } 2^{\text{ª}} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & 6 & 6 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{ª}}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{1 & 1 & 1}^{A} & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A y el de A/B es 2, son iguales, pero menores que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 0$ y $k \neq 1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ o $k=1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

BY NC SA

b) Para $k=1$ hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Obtenemos la expresión de esas infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{A \mid B} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ -3y-3z=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ \boxed{z=2-y} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+2-y=3 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \quad ;\alpha\in\mathbb{R} \\ z=2-\alpha \end{cases}}$$

Para $k=1$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \quad ;\alpha\in\mathbb{R} \\ z=2-\alpha \end{cases}$.

BY NC SA

BLOQUE 2

Ejercicio 1B

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,75 puntos, c) 0,75 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $m \in R$

a) Calcular el valor de m para que se verifique la igualdad $A^2-A=B$.
b) Calcular m para que la matriz A+B-I tenga inversa siendo I la matriz unidad de orden 2.
c) Para m=2 obtener la inversa de la matriz A+B-I.

Solución:

a) Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$A^2-A=B \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2+0 & m-m \\ 0+0 & 0+m^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 & 0 \\ 0 & m^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-m & -1 \\ 0 & m^2+m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2-m=0 \rightarrow m(m-1)=0 \rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \rightarrow \boxed{m=1} \end{cases} \\ m^2+m=2 \rightarrow m^2+m-2=0 \rightarrow m=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1+3}{2}=\boxed{1=m} \\ \dfrac{-1-3}{2}=-2=m \end{cases} \end{cases}$$

Para que se cumplan las dos igualdades debe ser $m=1$.
Se cumple la igualdad $A^2-A=B$ para $m=1$.

b) Para que la matriz $A+B-I$ tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.
Determinamos la expresión de $A+B-I$.

$$A+B-I=\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & -m \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A+B-I|=\begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & -m+1 \end{vmatrix}=(m-1)(-m+1)$$

$$|A+B-I|=0 \Rightarrow (m-1)(-m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m-1=0 \rightarrow m=1 \\ -m+1=0 \rightarrow \boxed{m=1} \end{cases}$$

La matriz $A+B-I$ tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1.

BY NC SA

c) Para $m=2$ la matriz queda $A+B-I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Tiene inversa. La calculamos.

$$|A+B-I|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$(A+B-I)^{-1}=\frac{Adj\left((A+B-I)^{T}\right)}{|(A+B-I)|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=A+B-I$$

BY NC SA

Ejercicio 2A

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

Dada la función $f(x)=(x-1)e^{-x}$

a) Determina los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*.

b) Determina la curvatura (concavidad y convexidad) y puntos de inflexión de *f(x)*.

c) Calcula la ecuación de la recta tangente a *f(x)* para $x=1$.

Solución:

a) Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

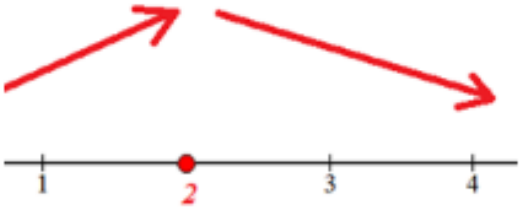
$$f(x)=(x-1)e^{-x} \Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x-1)\cdot(-1)e^{-x}=(1-x+1)e^{-x}=(2-x)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (2-x)e^{-x}=0 \Rightarrow \{e^{-x}\neq 0\} \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes y después de $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty,2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=(2-0)e^{-0}=2>0$. La función crece en $(-\infty,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=(2-3)e^{-3}=-e^{-3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,2)$ y decrece en $(2,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(2)=(2-1)\cdot e^{-2}=\frac{1}{e^2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(2,\frac{1}{e^2}\right)$.

b) Para estudiar la curvatura averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x)=(2-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x)=(-1)e^{-x}+(2-x)(-1)e^{-x}=(-1-2+x)e^{-x}=(x-3)e^{-x}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow (x-3)e^{-x}=0 \Rightarrow \{e^{-x}\neq 0\} \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 3$.

- En el intervalo $(-\infty,3)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=(0-3)e^{-0}=-3<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,3)$.

BY NC SA

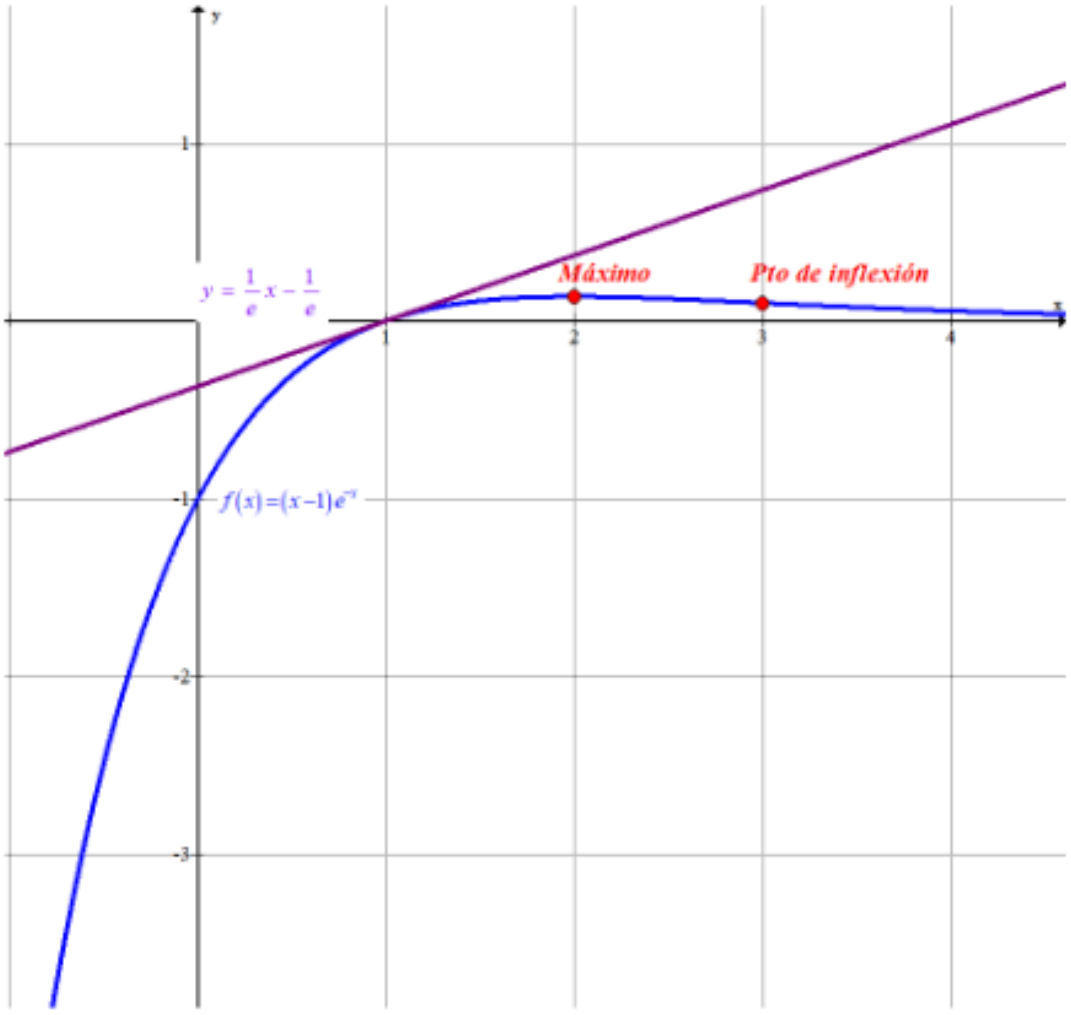
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada segunda vale $f''(4)=(4-3)e^{-3}=e^{-3}>0$. La función es convexa (∪) en $(3,+\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = 3$. Para dicho valor tenemos que $f(3)=(3-1)e^{-3}=\frac{2}{e^3}$ por lo que el punto de inflexión tiene coordenadas $\left(3,\frac{2}{e^3}\right)$.

c) La ecuación de la recta tangente es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(1)=f'(1)(x-1) \\ f(1)=(1-1)e^{-1}=0 \\ f'(1)=(2-1)e^{-1}=\frac{1}{e} \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=\frac{1}{e}(x-1)\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}}$$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ para $x=1$ es $y=\frac{1}{e}x-\frac{1}{e}$.



BY NC SA

Ejercicio 2B

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b)1,25 puntos.
Dadas las funciones f(x) =2 y g(x)= x^3+x^2-2x

a) Calcular $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de g(x) y el eje X.

Solución:

a) Calculamos la integral pedida.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \frac{2}{x^3+x^2-2x}dx = \ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^3+x^2-2x = x\left(x^2+x-2\right) = \ldots = x(x-1)(x+2)$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\frac{2}{x^3+x^2-2x} = \frac{2}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

$$2 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow 2=-2A \rightarrow A=-1 \\ x=1 \rightarrow 2=3B \rightarrow B=\frac{2}{3} \\ x=-2 \rightarrow 2=-6C \rightarrow C=\frac{-1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x^3+x^2-2x} = \frac{-1}{x}+\frac{2/3}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}$$

$$\ldots = \int \frac{-1}{x}+\frac{2/3}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}dx = \int \frac{-1}{x}dx+\int \frac{2/3}{x-1}dx+\int \frac{-1/3}{x+2}dx =$$

$$= \boxed{-\ln x+\frac{2}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{3}\ln(x+2)+C}$$

b) Hallamos los posibles puntos de corte de la gráfica de *g(x)* y el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x^3+x^2-2x \\ Eje\,X \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3+x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=1} \\ \boxed{x=-2} \end{cases}$$

BY NC SA
Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

La región de la cual queremos hallar el área la dividimos en dos partes y su área la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre –2 y 0 de la función más el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

$$\int_{-2}^{0} g(x)dx = \int_{-2}^{0} x^3 + x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-2}^{0} =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right] = 0 - \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] = \boxed{\frac{8}{3} \simeq 2.6667}$$

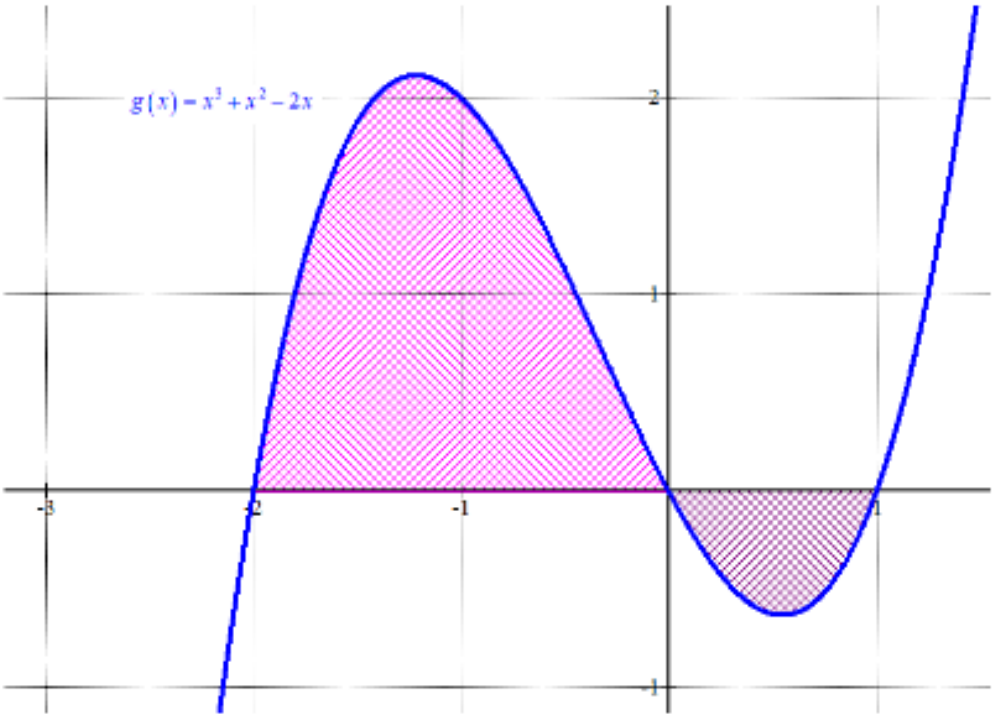
El área del primer trozo de la región tiene un valor de $\frac{8}{3}$ unidades cuadradas.

$$\int_{0}^{1} g(x)dx = \int_{0}^{1} x^3 + x^2 - 2x dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3} - 1^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} + \frac{0^3}{3} - 0^2\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \boxed{\frac{-5}{12} \simeq -0.4167}$$

El área del segundo trozo de la región tiene un valor de $\frac{5}{12}$ unidades cuadradas.

El área del recinto limitado por la gráfica de *g(x)* y el eje X tiene un valor de $\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12} = 3.083$ unidades cuadradas.



BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 3A

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos.

a) Comprobar que el plano π= x+y-z=3 y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ no se cortan.

b) Calcular la distancia entre el plano π y la recta r del apartado anterior.

c) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta r y que pase por el punto (0,1,-1).

Solución:

a) Obtenemos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,-1) \\ \vec{v}_r = (3,-1,2) \end{cases}$$

Obtenemos el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,-1)$$

Para que la recta sea paralela al plano deben ser perpendiculares el vector director de la recta y el vector normal del plano. Para que esto se cumpla debe ser su producto escalar nulo.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = (1,1,-1) \\ \vec{v}_r = (3,-1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{v}_r = (1,1,-1)(3,-1,2) = 3-1-2 = 0$$

Como vector director de recta y normal del plano tienen producto escalar nulo el plano y la recta son paralelos o la recta está contenida en el plano. Comprobamos si el punto $P_r(0,1,-1)$ de la recta pertenece al plano.

$$\left.\begin{matrix} P_r(0,1,-1) \\ \pi \equiv x+y-z=3 \\ ¿P_r \in \pi? \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿0+1-(-1)=3? \Rightarrow \text{No se cumple}$$

El punto de la recta no pertenece al plano y la recta es paralela al plano.
La recta y el plano no se cortan en ningún punto.

b) Como la recta es paralela al plano la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano.

$$\left.\begin{matrix} P_r(0,1,-1) \in r \\ \pi \equiv x+y-z-3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d(r,\pi) = d(P_r,\pi) = \frac{|0+1+1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades}$$

c) El plano π´ perpendicular a la recta *r* y que pase por el punto (0,1,-1) tiene como vector normal el vector director de la recta $\vec{v}_r = (3,-1,2)$.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n'} = \vec{v}_r = (3,-1,2) \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi': 3x-y+2z+D=0 \\ (0,1,-1) \in \pi' \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0-1+2(-1)+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1-2+D=0 \rightarrow D=3 \Rightarrow \boxed{\pi': 3x-y+2z+3=0}$$

El plano π´ perpendicular a la recta *r* y que pasa por el punto (0,1,-1) tiene ecuación implícita $\pi': 3x-y+2z+3=0$.

BY NC SA

Ejercicio 3B

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 0,5 puntos, c) 1 punto

Dados los puntos A(1,0,2), B(1,m,6), C(2,1,4) y D(4,3,2). Se pide:

a) Calcular m para que los 4 puntos sean coplanarios.
b) Obtener la ecuación general del plano ACD.
c) Para m=2, calcular un vector perpendicular al plano ABC de módulo 4 y calcular el área del triángulo ABC.

Solución:

a) Hallamos el plano π que contiene los puntos A, C y D.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,2)\in\pi \\ C(2,1,4)\in\pi \\ D(4,3,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(2,1,4)-(1,0,2)=(1,1,2) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AD}=(4,3,2)-(1,0,2)=(3,3,0) \\ A(1,0,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0+6y+3\cancel{(z-2)}-3\cancel{(z-2)}+0-6(x-1)=0 \Rightarrow 6y-6x+6=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x-y-1=0}$$

Para que los cuatro puntos estén en el mismo plano el punto B debe pertenecer al plano π definido por los puntos A, C y D..

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-y-1=0 \\ B(1,m,6)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1-m-1=0 \Rightarrow \boxed{m=0}$$

Para $m=0$.los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) La hemos obtenido en el apartado anterior y es $\pi: x-y-1=0$.

c) Para $m=2$ los puntos tienen coordenadas A(1,0,2), B(1,2,6), C(2,1,4) .
Un vector perpendicular al plano ABC es el vector normal del plano ABC. Este vector lo podemos obtener con el producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,2) \\ B(1,2,6) \\ C(2,1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,2,6)-(1,0,2)=(0,2,4) \\ \overrightarrow{AC}=(2,1,4)-(1,0,2)=(1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=4i+4j-2k-4i=4j-2k=(0,4,-2)$$

Hemos obtenido un vector perpendicular al plano ABC que es $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(0,4,-2)$.
También cumplen dicha propiedad todos los vectores $\vec{v}$ con coordenadas proporcionales a este: $\vec{v}=a\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)=(0,4a,-2a)$.
Hacemos que su módulo valga 4.

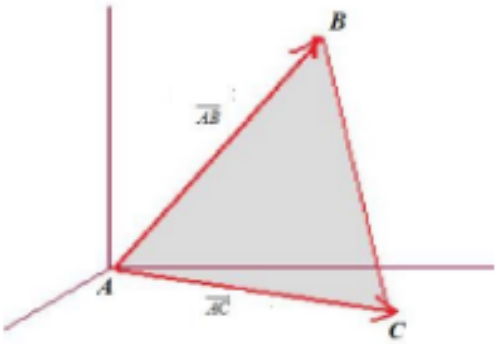
$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=(0,4a,-2a) \\ |\vec{v}|=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{0^2+(4a)^2+(-2a)^2}=4 \Rightarrow \sqrt{16a^2+4a^2}=4 \Rightarrow \sqrt{20a^2}=4 \Rightarrow$$

BY NC SA

$$\Rightarrow \sqrt{20}\cdot a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \vec{v} = \left(0, 4\frac{2\sqrt{5}}{5}, -2\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$$

El vector que buscamos es $\vec{v} = \left(0, \frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$.

Calculamos el área del triángulo ABC.
Utilizamos la fórmula del área de un triángulo definido por dos vectores.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,2,4)\\ \overrightarrow{AC} = (1,1,2)\\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (0,4,-2)\end{array}\right\} \Rightarrow Área\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \boxed{\sqrt{5}\ u^2}$$

El área del triángulo que forman A, B y C tiene un valor de $\sqrt{5}$ unidades cuadradas.

BY NC SA

BLOQUE 4

Ejercicio 4

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 1 punto, b) 1 punto c) 0,5 puntos

Se sabe que la altura de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 174 cm y desviación típica 12 cm.

a) Calcular el porcentaje de estudiantes cuya altura está entre 162 cm y 186 cm

b) ¿Qué altura tendrá un alumno si el 67% de los estudiantes miden más que él?

c) Si tomamos una muestra de 1000 estudiantes de esa población ¿cuántos tendrán una altura superior a 170 cm?

Solución:

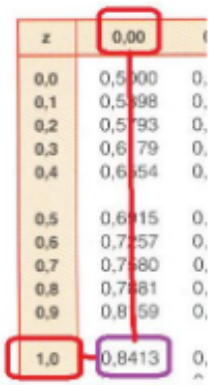
Sea X = altura en centímetros de los estudiantes de segundo de bachillerato de una cierta población. $X = N(174, 12)$

a) Calculamos $P(162 \le X \le 186)$.

$$P(162 \le X \le 186) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{162-174}{12} \le Z \le \frac{186-174}{12}\right) =$$

$$= P(-1 \le Z \le 1) = P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = P(Z \le 1) - P(Z \ge 1) =$$

$$= P(Z \le 1) - [1 - P(Z \le 1)] = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 0.8413 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.6826}$$



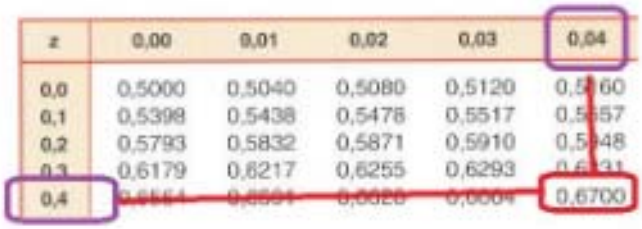
b) Deseamos saber el valor de "a" para el que se cumple $P(X \ge a) = 0.67$.

$$P(X \ge a) = 0.67 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \ge \frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{0.67 > 0.5 \rightarrow \frac{a-174}{12} < 0\right\} \Rightarrow P\left(Z \le -\frac{a-174}{12}\right) = 0.67 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{a-174}{12} = 0.44 \Rightarrow -a + 174 = 5.28 \Rightarrow \boxed{a = 174 - 5.28 = 168.72}$$

BY NC SA



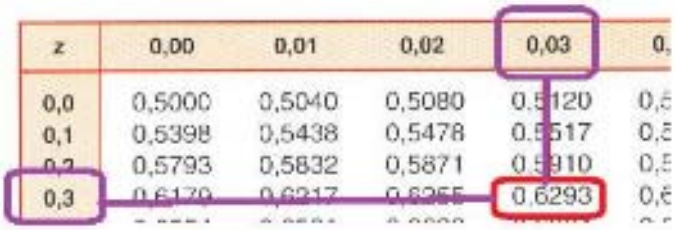
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4					0,6700

El alumno mide 168.72 centímetros de altura.

c) Hallamos la probabilidad de que un alumno tenga una altura superior a 170 centímetros.

$$P(X>170)=\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z>\frac{170-174}{12}\right)=P(Z>-0.33)=$$

$$=P(Z\leq 0.33)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.6293}$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6

De una muestra de 1000 alumnos podemos encontrar $1000 \cdot 0.6293 = 629$ alumnos que midan más de 170 centímetros.

BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con $m \in \mathrm{R}$: $\begin{cases} mx + 7y + 5z = 0 \\ x + my + z = 3 \\ y + z = -2 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro *m*.

b) Resolver para el caso $m = 1$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Obtener la inversa de la matriz $A^T + I$ donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Resolver la ecuación matricial $A^T X - I = 2B - X$. (A^T es la matriz traspuesta de A)

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

a) Dada la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x^3}$, calcula los valores de *a* y *b* sabiendo que *f(x)* tiene un máximo relativo en el punto P(1,2).

b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular $a = 2$, $b = -2$.

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b)1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = x + 3$. a) Calcula la primitiva de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ que pase por el punto (5, 0) b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f(x)* y *g(x)*.

BY NC SA

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dados los puntos $A=(1,2,3)$, $B=(2,3,4)$, $C=(3,4,3)$

a) ¿Están A, B y C alineados?

b) Halla un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y de módulo $\sqrt{2}$.

c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dada la recta $s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0}$, el plano $\pi \equiv x-2y+3z-6=0$ y el punto $P(1,-1,0)$

a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta *s* que pase por P.

b) Calcular la distancia del punto P a la recta *s*.

c) Calcular el ángulo que forma la recta *s* con el plano π.

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto

Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión "La Revuelta". La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:

a) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.

b) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.

c) Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa "El Hormiguero" y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1º:

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos] a) 1,5 puntos, b) 1 punto.

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, con $m \in \mathrm{R}$: $\begin{cases} mx+7y+5z=0 \\ x+my+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$

a) Discutir el sistema en función del parámetro m.
b) Resolver para el caso $m=1$.

Solución:

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} m & 7 & 5 & 0 \\ 1 & m & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 7 & 5 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m^2+0+5-0-7-m=m^2-m-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{1+3}{2}=\boxed{2=m} \\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=m} \end{cases}$$

Analizamos los tres casos diferentes que se nos plantean.

CASO 1. $m \neq -1$ y $m \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Triangulamos la matriz.

BY NC SA

$$A/B=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a}+\text{Fila } 1^{a}\\ 1\quad -1\quad 1\quad 3\\ -1\quad 7\quad 5\quad 0\\ \hline 0\quad 6\quad 6\quad 3\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5 & 0\\ 0 & 6 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a}-6\cdot\text{Fila } 3^{a}\\ 0\quad 6\quad 6\quad 3\\ 0\quad -6\quad -6\quad 12\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 15\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{-1 & 7 & 5}^{A/B} & 0\\ 0 & 6 & 6 & 3\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 15\end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Lo rangos son distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Analizamos los rangos de A y A/B.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Triangulamos el sistema.

$$A/B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 1^{a}-2\cdot\text{Fila } 2^{a}\\ 2\quad 7\quad 5\quad 0\\ -2\quad -4\quad -2\quad -6\\ \hline 0\quad 3\quad 3\quad -6\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 7 & 5 & 0\\ 0 & 3 & 3 & -6\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a}-3\cdot\text{Fila } 3^{a}\\ 0\quad 3\quad 3\quad -6\\ 0\quad -3\quad -3\quad 6\\ \hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc}\overbrace{2 & 7 & 5}^{A/B} & 0\\ 0 & 3 & 3 & -6\\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0\end{array}\right)$$

El rango de A y el de A/B es 2. Son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: **Si $m\neq -1$ y $m\neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $m=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $m=-1$ el sistema es incompatible (sin solución)..**

.

b) Para $m=1$ hemos visto que el sistema es compatible determinado (CASO 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+7y+5z=0 \\ x+y+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7y+5z=0 \\ x+y+z=3 \\ z=-2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7y+5(-2-y)=0 \\ x+y-2-y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+7y-10-5y=0 \\ \boxed{x=5} \end{cases} \Rightarrow 5+2y-10=0 \Rightarrow 2y=5 \Rightarrow \boxed{y=\frac{5}{2}} \Rightarrow \boxed{z=-2-\frac{5}{2}=\frac{-9}{2}}$$

Para $m=1$ las soluciones del sistema son $x=5, y=\frac{5}{2}, z=\frac{-9}{2}$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B

EJERCICIO 1B. **[2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.**

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}0&2&3\\2&3&5\\1&3&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\2&1&-3\end{pmatrix}$

a) Obtener la inversa de la matriz A^T+I donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) Resolver la ecuación matricial $A^TX-I=2B-X$. (A^T es la matriz traspuesta de A)

Solución:

a) Obtenemos la expresión de la matriz A^T+I, comprobamos que es invertible y calculamos su inversa.

$$A^T+I=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&3&3\\3&5&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&3\\3&5&2\end{pmatrix}$$

$$\left|A^T+I\right|=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&3\\3&5&2\end{vmatrix}=8+18+10-12-8-15=36-35=1\neq 0$$

$$\left(A^T+I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^T+I\right)^T\right)}{\left|A^T+I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\1&3&2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&5\\3&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&5\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&3\\3&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&3\\4&5\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\2&5\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A^T+I\right)^{-1}=\begin{pmatrix}8-15&-4+5&6-4\\-(4-9)&2-3&-(3-2)\\10-12&-(5-6)&4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7&1&2\\5&-1&-1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^TX-I=2B-X\Rightarrow A^TX-X=2B+I\Rightarrow\left(A^T-I\right)X=2B+I\Rightarrow X=\left(A^T-I\right)^{-1}\left(2B+I\right)$$

Obtenemos la expresión de X.

$$2B+I=2\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&1\\2&1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\0&-2&2\\4&2&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&-1&2\\4&2&-5\end{pmatrix}$$

BY NC SA

$$X=\left(A^T-I\right)^{-1}\left(2B+I\right)=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 2\\ 5 & -1 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}7+0+8 & 0-1+4 & -14+2-10\\ -5+0-4 & 0+1-2 & 10-2+5\\ 2+0+0 & 0-1+0 & -4+2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 3 & -22\\ -9 & -1 & 13\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}15 & 3 & -22\\ -9 & -1 & 13\\ 2 & -1 & -2\end{pmatrix}$**.**

BY NC SA

Ejercicio 2A:

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b) 1,25 puntos.

a) Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x^3}$, calcula los valores de *a* y *b* sabiendo que *f(x)* tiene un máximo relativo en el punto P(1,2).

b) Estudia los extremos relativos, el crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función anterior para el caso particular $a=2$, $b=-2$.

Solución:

a) La función pasa por el punto P(1, 2), por lo que $f(1)=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x^3} \\ f(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a\cdot 1^2+b}{1^3}=2 \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

La función tiene un máximo relativo en $x=1$, por lo que la derivada debe anularse para $x=1$ → $f'(1)=0$.

$$f(x)=\frac{ax^2+b}{x^3} \Rightarrow f'(x)=\frac{2ax\cdot x^3-3x^2\left(ax^2+b\right)}{x^6}=\frac{2ax^4-3x^2\left(ax^2+b\right)}{x^6}=\frac{2ax^2-3\left(ax^2+b\right)}{x^4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{2ax^2-3\left(ax^2+b\right)}{x^4} \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2a\cdot 1^2-3\left(a\cdot 1^2+b\right)}{1^4}=0 \Rightarrow 2a-3\left(a+b\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a-3b=0 \Rightarrow \boxed{-3b=a}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos

$$\left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ a=-3b \end{array}\right\} \Rightarrow -3b+b=2 \Rightarrow -2b=2 \Rightarrow \boxed{b=-1} \Rightarrow \boxed{a=-3(-1)=3}$$

Los valores buscados son $a=3$ y $b=-1$.

b) Para $a=2$, $b=-2$ la función queda $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x^3}$.

Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

BY NC SA

$$f(x)=\frac{2x^2-2}{x^3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\cdot x^3-3x^2\left(2x^2-2\right)}{x^6}=\frac{4x^4-6x^4+6x^2}{x^6}=\frac{-2x^2+6}{x^4}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x^2+6}{x^4}=0\Rightarrow -2x^2+6=0\Rightarrow 2x^2=6\Rightarrow x^2=3\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ y $x=+\sqrt{3}$.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

  $f'(-2)=\frac{-2\cdot(-2)^2+6}{(-2)^4}=\frac{-2}{16}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.

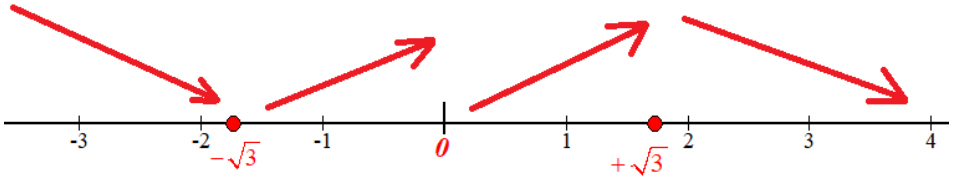
- En el intervalo $\left(-\sqrt{3},0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

  $f'(-1)=\frac{-2\cdot(-1)^2+6}{(-1)^4}=4>0$. La función crece en $\left(-\sqrt{3},0\right)$.

- En el intervalo $\left(0,+\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{-2\cdot 1^2+6}{1^4}=4>0$. La función crece en $\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-2\cdot 2^2+6}{2^4}=\frac{-2}{16}<0$. La función decrece en $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x=-\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x=+\sqrt{3}$.

Como $f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2\left(-\sqrt{3}\right)^2-2}{\left(-\sqrt{3}\right)^3}=\frac{-4\sqrt{3}}{9}$

el mínimo relativo tiene coordenadas $\left(-\sqrt{3},\frac{-4\sqrt{3}}{9}\right)$.

BY NC SA

Como $f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{2\left(\sqrt{3}\right)^2-2}{\left(\sqrt{3}\right)^3}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

el máximo relativo tiene coordenadas $\left(\sqrt{3},\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\right)$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-2}{x^3}=\frac{2\cdot 0^2-2}{0^3}=\frac{-2}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

La función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

BY NC SA

Ejercicio 2b:

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos] a) 1,25 puntos, b)1,25 puntos.

Dadas las funciones $f(x)=x^2-4x+3$ y $g(x)=x+3$. a) Calcula la primitiva de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ que pase por el punto (5, 0) b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f(x)* y *g(x)*.

Solución:

a) Calculamos la integral indefinida.

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx=\int \frac{x+3}{x^2-4x+3}dx=\ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\dfrac{4+2}{2}=3=x\\ \dfrac{4-2}{2}=1=x\end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x^2-4x+3}=\frac{x+3}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$x+3=A(x-3)+B(x-1)\Rightarrow\begin{cases}x=3\rightarrow 6=2B\rightarrow B=3\\ x=1\rightarrow 4=-2A\rightarrow A=-2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{x+3}{x^2-4x+3}=\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-3}$$

$$\ldots=\int\frac{-2}{x-1}+\frac{3}{x-3}dx=\int\frac{-2}{x-1}dx+\int\frac{3}{x-3}dx=\boxed{-2\ln|x-1|+3\ln|x-3|+C}$$

Hallamos el valor de C tal que la primitiva $F(x)=-2\ln|x-1|+3\ln|x-3|+C$ pase por el punto (5. 0).

$$\left.\begin{aligned}&F(x)=-2\ln|x-1|+3\ln|x-3|+C\\&F(5)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow -2\ln|5-1|+3\ln|5-3|+C=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\ln 2-2\ln 2^2+C=0\Rightarrow 3\ln 2-4\ln 2+C=0\Rightarrow -\ln 2+C=0\Rightarrow\boxed{C=\ln 2}$$

La primitiva buscada es $F(x)=-2\ln|x-1|+3\ln|x-3|+\ln 2$.

BY NC SA

b) Hallamos los posibles puntos de corte de las dos gráficas.

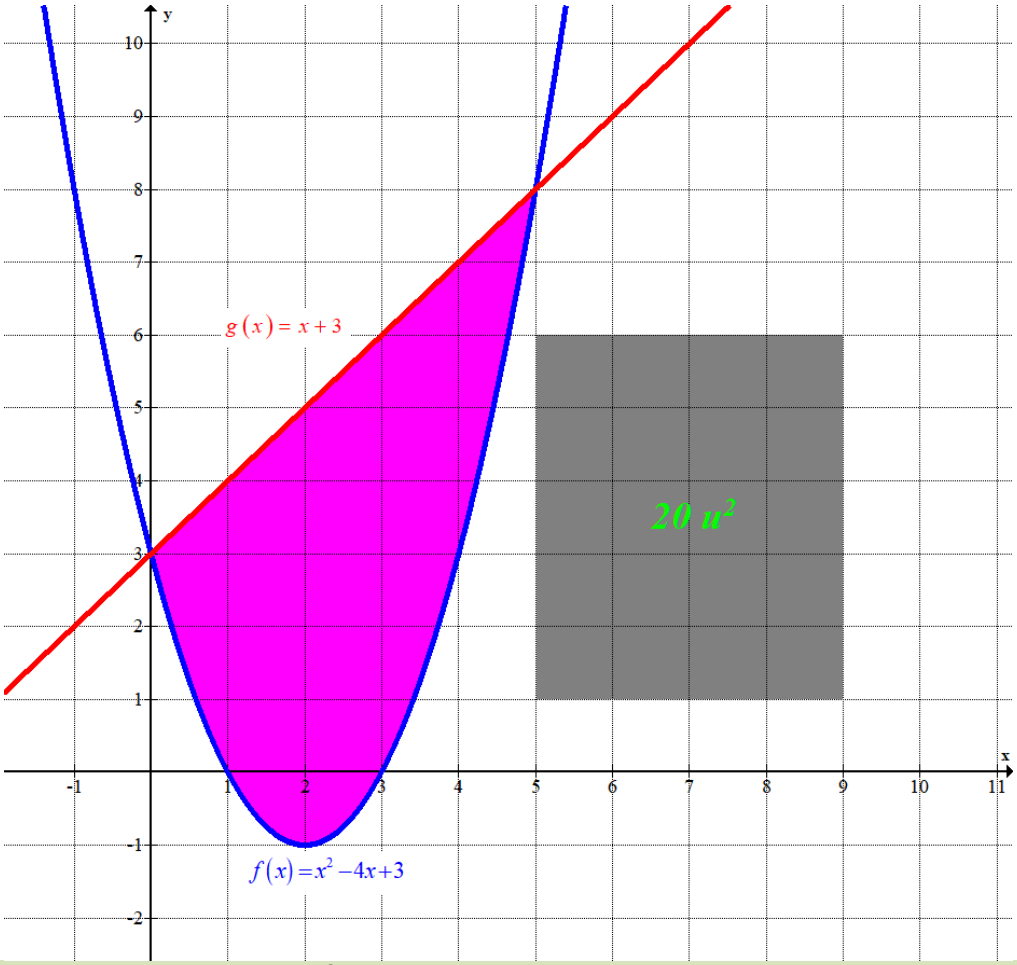
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-4x+3 \\ g(x)=x+3 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-4x+3=x+3 \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=5} \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos gráficas la obtenemos como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 5 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\int_0^5 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^5 x^2-4x+3-(x+3)\,dx=\int_0^5 x^2-5x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right]_{-2}^{0}=$$

$$=\left[\frac{5^3}{3}-\frac{5\cdot 5^2}{2}\right]-\left[\frac{0^3}{3}-\frac{5\cdot 0^2}{2}\right]=\frac{125}{3}-\frac{125}{2}=\boxed{\frac{-125}{6}\approx -20.8333}$$

El área del recinto limitado por las gráficas de *f(x)* y *g(x)* tiene un valor de $\frac{125}{6}\approx 20.8333$ unidades cuadradas.



Área = 20,8333 u²

Ejercicio 3a:

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dados los puntos $A=(1,2,3)$, $B=(2,3,4)$, $C=(3,4,3)$

a) ¿Están A, B y C alineados?

b) Halla un vector que sea ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, y de módulo $\sqrt{2}$.

c) Halla el punto simétrico del punto A respecto del punto B.

Solución:

a) Para que los tres puntos estén alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales (están en la misma dirección).

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,2,3) \\ B=(2,3,4) \\ C=(3,4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,3,4)-(1,2,3)=(1,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(3,4,3)-(1,2,3)=(2,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{0}$$

Los vectores no tienen coordenadas proporcionales y

los puntos A, B y C no están alineados.

b) Un vector ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ es su producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=2j+2k-2k-2i=(-2,2,0)$$

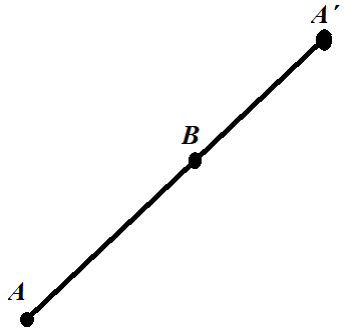
Obtenemos el módulo del vector $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Consideramos el vector $\vec{w}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$. Este vector es ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y tiene módulo $\left|\vec{w}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$.

Vector = (-1, 1, 0)

c) Obtenemos las coordenadas del punto A´ del dibujo. Este cumple que los puntos A, B y A´ están alineados y la distancia de A a B es la misma que de A´ a B.



El punto A´ lo obtenemos sumando al punto B el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$A'=B+\overrightarrow{AB}=(2,3,4)+(1,1,1)=(3,4,5)$$

El punto A´ simétrico del punto A respecto del punto B tiene coordenadas $A'=(3,4,5)$.

BY NC SA

Ejercicio 3b:

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 1 punto c) 0,75 puntos.

Dada la recta $s \equiv \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{0}$, el plano $\pi \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0$ y el punto $P(1,-1,0)$

a) Obtener la ecuación del plano perpendicular a la recta *s* que pase por P.
b) Calcular la distancia del punto P a la recta *s*.
c) Calcular el ángulo que forma la recta *s* con el plano π.

Solución:

a) El plano π´ perpendicular a la recta *s* que pasa por P tiene como vector normal el vector director de la recta.

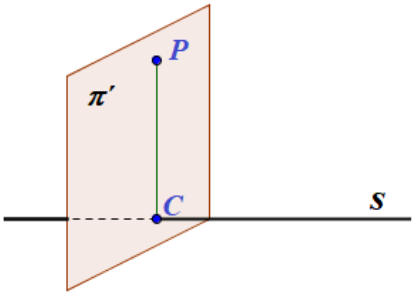
$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \vec{v_s} = (-4,3,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n'} = \vec{v_s} = (-4,3,0) \\ P(1,-1,0) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi': -4x+3y+D=0 \\ P(1,-1,0) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow -4\cdot 1 + 3(-1) + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4-3+D=0 \Rightarrow D=7 \Rightarrow \boxed{\pi': -4x+3y+7=0}$$

La ecuación del plano perpendicular a la recta *s* que pasa por P es $\pi': -4x+3y+7=0$.

b) La distancia del punto P a la recta *s* es la distancia del punto P al punto C de corte de la recta con el plano π´.



Hallamos el punto C de corte de recta y plano.

$$s \equiv \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_s} = (-4,3,0) \\ Q_r(0,1,-1) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1+3\alpha \\ z = -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi': -4x+3y+7=0 \\ s: \begin{cases} x = -4\alpha \\ y = 1+3\alpha \\ z = -1 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -4(-4\alpha) + 3(1+3\alpha) + 7 = 0 \Rightarrow 16\alpha + 3 + 9\alpha + 7 = 0 \Rightarrow$$

BY NC SA

$$\Rightarrow 25\alpha+10=0\Rightarrow \alpha=\frac{-10}{25}=\frac{-2}{5}\Rightarrow \begin{cases} x=-4\dfrac{-2}{5}=\dfrac{8}{5} \\ y=1+3\dfrac{-2}{5}=\dfrac{-1}{5}\Rightarrow \boxed{C\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{-1}{5},-1\right)} \\ z=-1 \end{cases}$$

Hallamos la distancia del punto P al C como el módulo del vector que los une.

$$\left.\begin{matrix} C\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{-1}{5},-1\right) \\ P(1,-1,0) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PC}=\left(\frac{8}{5},\frac{-1}{5},-1\right)-(1,-1,0)=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\right)$$

$$d(P,s)=d(P,C)=\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+(-1)^2}=\boxed{\sqrt{2}\approx 1.41u}$$

d(P, s) = 1,41… u

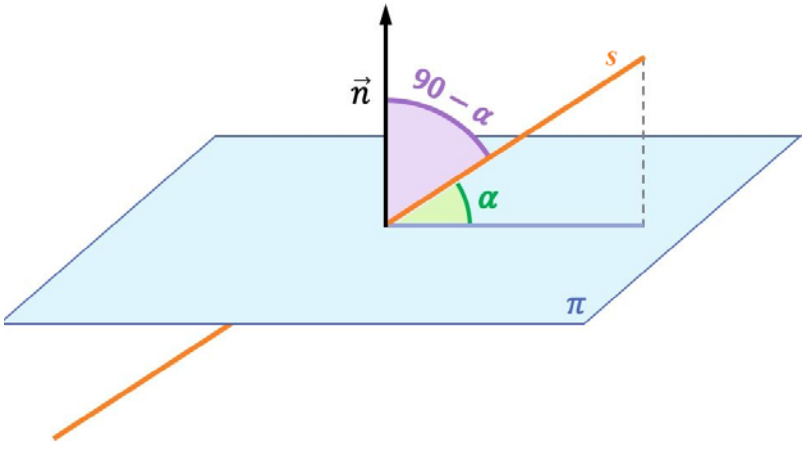
c) Hallamos el ángulo que forma el vector director de la recta con el vector normal del plano.

$$\left.\begin{matrix} \pi\equiv x-2y+3z-6=0\rightarrow \vec{n}=(1,-2,3) \\ \vec{v_s}=(-4,3,0) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{v_s}\right)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{v_s}\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v_s}\right|}=$$

$$=\frac{\left|(1,-2,3)(-4,3,0)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}}=\frac{|-4-6|}{5\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{14}=\frac{\sqrt{14}}{7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\vec{n},\vec{v_s}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{14}}{7}\right)\approx 57^{\circ}}$$

El ángulo que forman recta y plano es de 90º – 57º = 33º.



Ejercicio 4:

EJERCICIO 4. [2,5 puntos] a) 0.75 puntos, b) 0.75 puntos, c) 1 punto
Se sabe que el 30% de una población de la Comarca Villuercas-Ibores-Jara ve el programa de televisión "La Revuelta". La productora El Terrat, empresa encargada de llevar a cabo dicho programa, decide llamar por teléfono, al azar, a 10 personas de esa población:
a) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas.
b) Calcula la probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas.
c) Se sabe que, en la misma población, el 35% ve el programa "El Hormiguero" y se sabe también que el 40% no ve ninguno de los dos. Si se elige una persona al azar ¿Cuál es la probabilidad de que vea los dos programas?

Solución:

Sea X = número de personas de un grupo de 10 que están viendo "La Revuelta".
Esta variable es una binomial de parámetros n = 10 y p = 0.30. X = B(10, 0.3)

a) Calculamos $P(X>8)$.

$$P(X>8)=P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{9}0.3^9\cdot 0.7^1+\binom{10}{10}0.3^{10}\cdot 0.7^0=$$

$$=10\cdot 0.3^9\cdot 0.7+0.3^{10}=\boxed{0.00014}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa más de 8 personas vale 0.00014.

b) Debemos calcular $P(X\geq 1)$. Usamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}0.3^0\cdot 0.7^{10}=1-0.7^{10}\square\ \boxed{0.9718}$$

La probabilidad de que estuvieran viendo el programa alguna de las 10 personas vale 0.9718.

c) Hacemos una tabla de contingencia.

	Ve "La Revuelta"	No ve "La Revuelta"	
Ve "El Hormiguero"			35
No ve "El hormiguero"		40	
	30		100

Completamos la tabla.

	Ve "La Revuelta"	No ve "La Revuelta"	
Ve "El Hormiguero"	**5**	**30**	35
No ve "El hormiguero"	**25**	40	**65**
	30	**70**	100

En la tabla observamos que un 5% de los habitantes del pueblo ve los dos programas.

La probabilidad de que la persona elegida al azar vea los dos programas es 0.05.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE OBLIGATORIO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

Ejercicio 1. CONTEXTO

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65% de sus clientes son estudiantes, el 25% personal de la universidad y el 10% restante son personas ajenas a la universidad.

Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30% de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70% para el personal de la universidad, mientras que el 80% de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

1.2. Calcular la probabilidad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.

1.3. Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

Ejercicio 2.1:

2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$ donde I y 0 son las matrices identidad y cero respectivamente.

2.1.2. Calcule la matriz cuadrada X tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Son iguales XA y AX?

Ejercicio 2.2:

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

Ejercicio 3.1:

3.1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} kx^2+2x & si \quad x\leq 1 \\ x^2-m & si \quad x>1 \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en x=1?

3.1.2. ¿Para qué valores de k y m es f derivable en $x=1$?

Ejercicio 3.2:

3.2. Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x)=\sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas $x=0$, $x=4$. Luego, calcule su área.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

Ejercicio 4.1:

4.1. Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$$\pi_1: kx+y+\frac{1}{4}z+2=0 \text{ y } \pi_2: 3x+4y+z+3=0$$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

Ejercicio 4.2:

4.2. Considérense el punto P(0,1,0) y la recta *r:* $(x,y,z)=(2,0,3)+\lambda(1,2,3), \lambda \in \mathbb{R}$.

4.2.1. Determine la ecuación continua de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto P.

4.2.2. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

Ejercicio 1: CONTEXTO

Las cafeterías universitarias son espacios en los que, además de poder consumir alimentos y bebidas, en numerosas ocasiones se emplean como puntos de encuentro para otros eventos. Según los datos recogidos por la dirección de la cafetería de una facultad, el 65% de sus clientes son estudiantes, el 25% personal de la universidad y el 10% restante son personas ajenas a la universidad.

Con el objetivo de estudiar si es necesario realizar modificaciones en la cafetería, sus responsables han analizado datos sobre el tiempo de espera hasta que un cliente ha sido atendido y sobre la forma de realizar los pagos. Puede suponerse que el tiempo de espera hasta que un cliente es atendido sigue una distribución aproximadamente normal, con media igual a 5 minutos y de tal modo que el 90% de los clientes son atendidos antes de 8 minutos. Por los datos recogidos, han llegado a la conclusión de que el 30% de los estudiantes efectúan los pagos en efectivo, siendo este porcentaje igual al 70% para el personal de la universidad, mientras que el 80% de los pagos realizados por personas ajenas a la universidad se hacen en efectivo.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos?

1.2. Calcular la probabilidad de que un pago en esta cafetería no haya sido realizado en efectivo.

1.3. Si un pago se hizo en efectivo, ¿qué es más probable, que haya sido realizado por estudiantes o por personal de la universidad?

Solución:

Definimos los sucesos: E “los clientes son Estudiantes”. P(E)=0.65

U: “los clientes son personal de la Universidad”. P(U)=0.25

A: “los clientes son personas Ajenas a la universidad”. P(A)=0.1

Definimos la variable: X: “tiempo de espera hasta que el cliente es atendido, en minutos”.

1.1. $X \equiv N(5,\sigma) \implies Z = \frac{X-5}{\sigma} \equiv N(0,1)$

$$P(X<8) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{8-5}{\sigma}\right) = 0.9 \Rightarrow P\left(Z < \frac{3}{\sigma}\right) = 0.9$$

Buscamos en la tabla de la $N(0,1)$ de forma inversa

1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

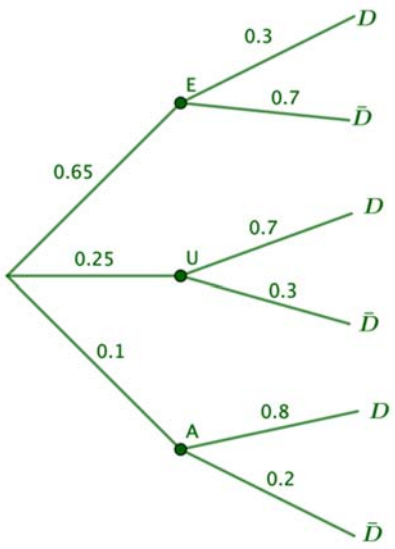
$\frac{3}{\sigma} = 1.285 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma = 2,33}$

$$P(X<4) = P\left(Z < \frac{4-5}{2.33}\right) = P(Z<-0.43) = 1 - P(Z \le 0.43) = 1 - 0.6664 = 0.3336$$

La probabilidad de que un cliente sea atendido antes de 4 minutos es 0.3336 (33.36%)

1.2. Definimos el suceso D: "pagar con efectivo" y representamos el diagrama de árbol.

Aplicamos el teorema de la probabilidad total:



$$P(\bar{D}) = P(E) \cdot P(\bar{D}/E) + P(U) \cdot P(\bar{D}/U) + P(A) \cdot P(\bar{D}/A) =$$

$$= 0.65 \cdot 0.7 + 0.25 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.55$$

La probabilidad de que el pago no se realice en efectivo es 0.55.

1.3. Aplicamos el teorema de Bayes

$$P(E/D) = \frac{P(E \cap D)}{P(D)} = \frac{0.6500.3}{1 - 0.55} = 0.4\hat{3}$$

$$P(U/D) = \frac{P(U \cap D)}{P(D)} = \frac{0.25 \cdot 0.7}{1 - 0.55} = 0.3\hat{8}$$

Si el pago se hizo en efectivo es más probable que lo haya realizado un estudiante (0.43)

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

Ejercicio 2.1:

2.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

2.1.1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ halle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$, donde I y 0 son las matrices identidad y cero, respectivamente.

2.1.2. Calcule la matriz cuadrada *X* tal que *XA* = *B*, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.¿Son iguales *XA* y *AX*?

Solución:

2.1.1. $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha & 5\alpha \\ 2\alpha & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos $\begin{pmatrix} 14 + 2\alpha + \beta & 5 + 5\alpha \\ 2 + 2\alpha & 11 - \alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Resolvemos } \begin{cases} 14 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 5 + 5\alpha = 0 \\ 2 + 2\alpha = 0 \\ 11 - \alpha + \beta = o \end{cases} \begin{matrix} \\ \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \\ \alpha = -1 \\ \\ \beta = -12 \end{matrix}$$

Recordar comprobar que se verifican las cuatro ecuaciones.

$$\boldsymbol{\alpha = -1, \beta = -12}$$

2.1.2. *X* tal que $XA = B$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que A es invertible. $|A| = 1 \neq 0 \implies \exists\, A^{-1}$

$$XA = B \Longrightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Longrightarrow X = BA^{-1}$$

$$Adj\, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿XA=AX? Esto se reduce a comprobar si AX=B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq B$$

BY NC SA

Ejercicio 2.2:

2.2. Discuta, según los valores del parámetro *m*, el sistema $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$

Solución:

Expresamos el sistema en forma matricial y estudiamos el rango de la matriz de coeficientes (A) y el de la ampliada (A*) .El teorema de Rouché-Frobenius nos permitirá calcular el número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

$$AX = B \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2$$

Resolvemos, utilizando la regra de Ruffini $-m^3 + 3m - 2 = 0$ obteniendo m=1 (solución doble) y m=-2

	-1	0	3	-2
1		-1	-1	2
	-1	-1	2	0

$-m^2 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 1, m = -2$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para m=1

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Todas las filas son iguales, por lo tanto rang A*=1 y rango A =1

Estudiamos el rango de la matriz ampliada para m=-2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rang\ A^* = 3$$

Rang A=2 $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$

Por el teorema de Rouché-Frobenius:

$m \neq 1, m \neq -2, rang\ A = rang\ A^*$ =nº incógnitas ⇒ Sist. Compatible Determinado.

m = 1, $rang\ A = rang\ A^* = 1 \neq$ nº incógnitas ⇒ Sist. Compatible Indeterminado.

m = -2, $rang\ A \neq rang\ A^*$ ⇒ Sist. Incompatible.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos).Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

Ejercicio 3.1:

3.1. Dada la función $f(x)=\begin{cases} kx^2+2x & xi\ x\leq 1 \\ x^2-m & si\ x>1 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.1.1. ¿Qué condición deben cumplir k y m para que f sea continua en x = 1?

3.1.2. ¿Para qué valores de k y m es f derivable en x = 1?

Solución:

3.1.1 La función debe cumplir las tres condiciones para ser continua en x=1:

1) $\exists\, f(1)=k+2$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} kx^2+2x=k+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-m=1-m\end{array}\right] \exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow\ k+2=1-m$

3) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x) \Leftrightarrow\ k+2=1-m$

f es continua en x = 1 $\Leftrightarrow k+m=-1$

3.1.2. Para estudiar la derivabilidad en x=1:

1) f es continua en x=1 $\Leftrightarrow k+m=-1$

2) Estudiamos las derivadas laterales. (Más correcto sería utilizar la definición de derivadas laterales pero se da por válido este procedimiento).

$$f'(x)=\begin{cases} 2kx+2 & xi\ x<1 \\ 2x & si\ x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2k+2 \\ f'(1^+)=2. \end{array}\right] \quad f'(1^-)=f'(1^+) \Leftrightarrow 2k+2=2 \Leftrightarrow k=0$$

$$k+m=-1 \Rightarrow \mathrm{m}=-1$$

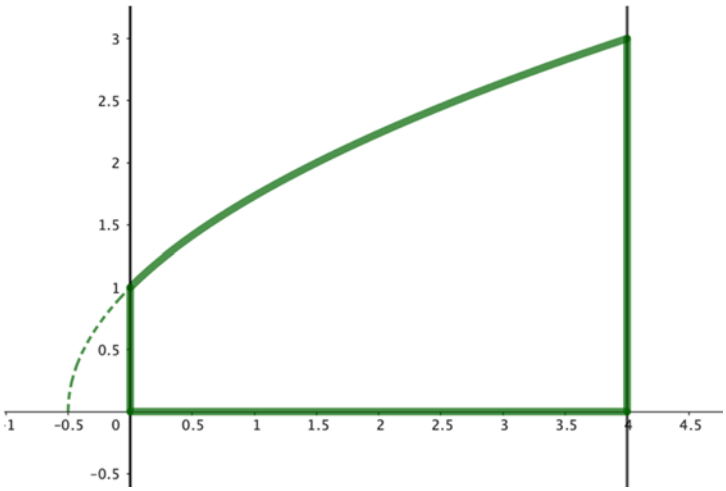
f es derivable en x = 1 $\Leftrightarrow k=0, m=-1$

BY NC SA

Ejercicio 3.2:

3.2. Dibuje la región encerrada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{2x+1}$, el eje X y las rectas x = 0 , x = 4. Luego, calcule su área.

Solución:



Estudiamos el dominio.

$$Dom\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} / 2x+1 \geq 0\} = [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

Puntos corte con eje abscisas (y=0) , $\sqrt{2x+1} = 0 \Rightarrow (-\frac{1}{2}, 0)$

Puntos de corte con eje de ordenadas (x=0) ⇒ $(0,1)$

Estudiamos la monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in Dom\, f(x)$$

La función es creciente en (0,4).

La integral puede resolverse como una integral "casi" inmediata.

$$A = \int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 2\sqrt{2x+1}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}\Big]_0^4 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}\, u^2$$

Área =26/3 u^2

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

Ejercicio 4.1:

4.1. Determine el valor que debe tomar k para que los planos

$\pi_1: kx + y + \frac{1}{4}z + 2 = 0 \quad , \quad \pi_2: 3x + 4y + z + 3 = 0$

sean paralelos. Calcule también el valor de k que hace que esos mismos planos sean perpendiculares.

Solución:

$\pi_1 \parallel \pi_2 \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{4}}{1} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$

$\pi_1 \perp \pi_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} \Rightarrow \left(k, 1, \frac{1}{4}\right) \cdot (3,4,1) = 0 \Rightarrow 3k + 4 + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow k = -\frac{17}{12}$

También podemos hacerlo estudiando los rangos: $\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1/4 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \end{array}\right)$

$$rang\ A = 1 \quad , \quad \begin{vmatrix} k & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 3/4$$

$$rang\ A^* = 2 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\boldsymbol{\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}}$$

$$\boldsymbol{\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow k = \frac{-17}{12}}$$

BY NC SA

Ejercicio 4.2:

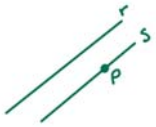
4.2. Considérense el punto P(0,1,0) y la recta r: (x, y, z) = (2,0,3) + λ(1,2,3), λ ∈ ℝ.

4.2.1. Determine la ecuación continua de la recta s que es paralela a r y pasa por el punto P.

4.2.2. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

Solución:

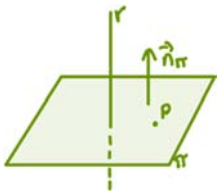
4.2.1.



$\overrightarrow{v_s} = (1,2,3)$
P(0,1,0)

$$\boldsymbol{s}: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3} \textbf{si}$$

4.2.2.



$\overrightarrow{u_r} \parallel \overrightarrow{n_\pi}$

$$\pi: x + 2y + 3z + D = 0$$
$$P(0,1,0) \in \pi \Rightarrow 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$\boldsymbol{\pi: x + 2y + 3z - 2 = 0}$$

BY NC SA

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1: ***ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos) CONTEXTO***

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

1.2. Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

1.3. Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos “ser blancas” y “ser de diseño” son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos) Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.

Ejercicio 2:

2.1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible.

2.1.2. Para k = 0, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A.

BY NC SA

Ejercicio 3:

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} x & +my+ & z=m \\ x & + & (3-m)z=2m \\ & my+ & 2z=3m \end{cases}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos) Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

Ejercicio 4:

3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

3.1.2. Calcule $\int e^x \cos 3x \ dx$.

Ejercicio 5:

3.2. Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & si \quad x<0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en x = 0.

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en x = 0.

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en x = −1.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

Ejercicio 6:

4.1. Considérense los planos π: $2x+3y+z+1=0$ y π': $x+z-1=0$ y los puntos $A(2,1,0)$ y $B(-1,-2,3)$.

4.1.1. Calcule la distancia del punto A al plano paralelo a π que pasa por B.

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

Ejercicio 7

4.2. Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$ y s: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{2}$

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas r y s.

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

En los últimos años, hay una tendencia que sigue en aumento: emplear calzado deportivo no únicamente para realizar actividad física, sino como calzado de uso diario. Los motivos principales son su versatilidad y comodidad, ya que pueden combinarse con casi cualquier atuendo al mismo tiempo que permiten realizar movimientos naturales.

Antón es un apasionado de este tipo de calzado, del que tiene 60 pares, guardando cada par en su correspondiente caja. El 80% son zapatillas tradicionales y el 20% zapatillas de diseño. Entre las zapatillas de diseño, el 75% están en buen estado, pero solo el 50% de las zapatillas tradicionales están en buen estado. Un día que se levantó con el tiempo justo, para no llegar tarde al trabajo, cogió al azar una caja y se calzó las zapatillas de esa caja.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Cuál es la probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado?

1.2. Al salir del trabajo, Antón decide ir al cine con dos amigos. Antón no quiere llevar calzadas zapatillas que no estén en buen estado ni zapatillas tradicionales, ¿cuál sería la probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas?

1.3. Antón tiene 8 pares de zapatillas tradicionales de color blanco. Sabiendo que al escoger al azar una caja de sus zapatillas los sucesos "ser blancas" y "ser de diseño" son sucesos independientes, ¿cuántos pares de zapatillas blancas de diseño tiene Antón?

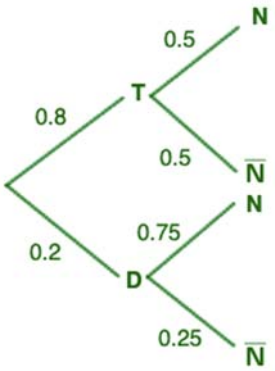
Solución:

Definimos los sucesos:

T:" zapatillas **T**radicionales". N: "zapatillas en buen estado" *(**N**uevas).*

D: "zapatillas de **D**iseño". *B: "Zapatillas **B**lancas".*

1.1. Podemos ayudarnos de un diagrama de árbol.



$$P(T \cup N) = P(T) + P(N)^* - P(T \cap N) = P(T) + P(N) - P(T)P(N/T)$$

$$= 0.8 + 0.55 - 0.8 \cdot 0.5 = \ 0.95$$

$* \ P(N) = 0.8 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.75 = 0.55$ *(teorema de la probabilidad total)*

La probabilidad de que Antón vaya calzado con zapatillas tradicionales o zapatillas en buen estado es 0.95.

1.2. En este apartado es muy importante leer detalladamente el enunciado. Nos piden probabilidad de llevar zapatillas de diseño y que estén en buen estado**.**

$$P(D \cap N) = 0.2 \cdot 0.75 = 0.15$$

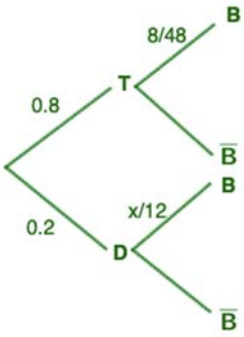
La probabilidad de que no tenga que pasar por su casa a cambiar las zapatillas porque lleva las zapatillas que quiere es 0.15.

1.3. Necesitamos conocer cuántos pares tiene de cada tipo, para ello:

80% de 60: tiene 48 pares de zapatillas tradicionales.

20% de 60: tiene 12 pares de zapatillas de diseño.

Recurrimos a un diagrama de árbol para organizar la información, llamando "x" al número de zapatillas blancas de diseño que tiene Antón.



Sabemos que "ser blancas" y "ser de diseño" son sucesos independientes $\Longrightarrow P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D)$

Aplicamos el teorema de las probabilidades totales para el cálculo de P(B).

$$0.2 \cdot \frac{x}{12} = \left(0.8 \cdot \frac{8}{48} + 0.2 \cdot \frac{x}{12}\right) \cdot 0.2$$

Operando: $\frac{0.2x}{12} = \frac{2}{75} + \frac{0.04x}{12} \Longrightarrow \frac{1}{75}x = \frac{2}{75} \Longrightarrow x = 2$

Antón tiene dos pares de zapatillas blancas de diseño.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2.1:

2.1. Dadas las matrices

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \boldsymbol{k}\end{pmatrix} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

2.1.1. ¿Qué condición tiene que cumplir k para que A sea invertible? Calcule A^{-1} cuando sea posible.

2.1.2. Para k = 0, calcule la matriz X que satisfaga la igualdad $AX - A = B^2 + A^T$ siendo A^T la traspuesta de A.

Solución:

2.1.1. $\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = 4k + 2 - 1 - 4k = 1 \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$

Calculamos la inversa

$$AdjA=\begin{pmatrix}4k-1 & -2k+1 & -2\\ -2K & K & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow (AdjA)^t=\begin{pmatrix}4k-1 & -2k & 2\\ -2k+1 & k & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot (AdjA)^t=\begin{pmatrix}4k-1 & -2k & 2\\ -2k+1 & k & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}}$$

2.1.2. $X - A = B^2 + A^T \Rightarrow AX = B^2 + A^T + A \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}(B^2 + A^T + A) \Rightarrow$

$$X = A^{-1}(B^2 + A^T + A)$$

$$B^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B^2+A^T+A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 4 & 9 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 4 & 9 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{X}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

BY NC SA

Ejercicio 2.2:

2.2. Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema

$$\begin{cases} x & +my+ & z=m \\ x & + & (3-m)z=2m \\ & my+ & 2z=3m \end{cases}$$

Solución: Estudiamos el rango de la de coeficientes (A) y de la ampliada ($\boldsymbol{A^*}$)

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 0 & 3-m & 2m \\ 0 & m & 2 & 3m \end{array}\right)$$

$|A| = m - m(3-m) - 2m = m^2 - 4m$

$|A| = 0 \implies m(m-4) = 0 \implies m = 0, m = 4$

$m \neq 0, m \neq 4 \quad rang\ A = 3$

Estudiamos los rangos para $\underline{\underline{m = 0}}$

Rang A=2 , $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \implies rang\ A^* = 2 \implies SCI$

Estudiamos los rangos para $\underline{\underline{m = 4}}$

Rang A=2 , $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \implies rang\ A^* = 3 \implies SI$

Resumiendo, aplicando el teorema de Rouché- Frobenius:

$\boldsymbol{m \neq 0, m \neq 4, \quad rango\ A = rango\ A^* = \text{n° incógnitas} = 3}$

$\boldsymbol{\implies Sist.Compatible\ Determinado\ (SCD)}$

m=0, $\boldsymbol{rango\ A = rango\ A^* = 2 \neq n° incógnitas \implies}$

$\boldsymbol{Sist.Compatible\ Indeterminado\ (SCI)}$

$\boldsymbol{m = 4, rango\ A \neq rango\ A^* \implies Sist.Inncompatible\ (SI)}$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (2,5 puntos) Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.

Ejercicio 3.1:

3.1. Responda a las dos cuestiones siguientes:

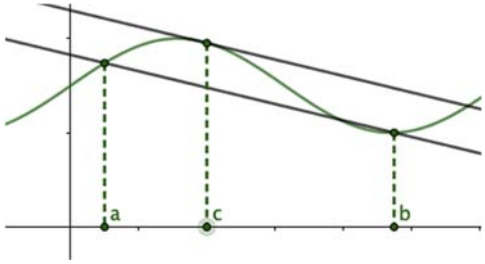
3.1.1. Enuncie el teorema del valor medio del cálculo diferencial.

3.1.2. Calcule $\int e^x \cos 3x \ dx$.

Solución:

3.1.1. Sea f una función continua en el intervalo [a,b] y derivable en (a,b), entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b) \ / \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Esto significa que existe al menos un punto en el intervalo (a, b) en el que la tangente es paralela (tienen la misma pendiente) a la recta que une los puntos en la gráfica de a y b.



3.1.2. $\int e^x \cos 3x \ \mathrm{dx}$

La resolvemos por partes, para ello consideramos:

$u = e^x \Rightarrow du = e^x \mathrm{dx}$

$dv = \cos 3x \ \mathrm{dx} \Rightarrow v = \frac{1}{3} sen\ 3x$

$\int e^x \cos 3x \ \mathrm{dx} = \frac{1}{3} e^x sen 3x - \frac{1}{3} \int e^x sen 3x \ \mathrm{dx}$

Volvemos a aplicar el método por partes.

$u = e^x \Rightarrow du = e^x \mathrm{dx}$

$dv = sen 3x \ \mathrm{dx} \Rightarrow v = -\frac{1}{3} \cos 3x$

$$\int e^x \cos 3x \ \mathrm{dx} = \frac{1}{3} e^x sen 3x \ - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3} e^x \cos 3x - \frac{1}{3} e^x \cos 3x \ \mathrm{dx} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} e^x sen 3x + \frac{1}{9} e^x cos 3x \ - \frac{1}{9} \int e^x \cos 3x \ \mathrm{dx} \Rightarrow$$

Es una integral cíclica, por lo tanto: $\frac{10}{9} \int e^x \cos 3x \ \mathrm{dx} = \frac{1}{3} e^x sen 3x + \frac{1}{9} e^x \cos 3x \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\int e^x \cos 3x \ \mathrm{dx} = \frac{3e^x sen 3x + e^x cos 3x}{10} + C}$$

BY NC SA

Ejercicio 3.2:

3.2. Dada la función $f(x)=\begin{cases} xe^{4x} & si \quad x<0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$, se pide responder a las siguientes cuestiones:

3.2.1. Estudie la continuidad de la función $f(x)$ en x = 0.

3.2.2. Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ en x = 0.

3.2.3. Calcule la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en x = −1.

Solución:

3.2.1. Continuidad en x=0. Estudiamos las tres condiciones de continuidad.

- f(0)=0
- $\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 0^-} xe^{4x}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=0\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$
- $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

La función f(x) es continua en x=0

3.2.2. Derivabilidad en x=0.

$$f'(x)=\begin{cases} e^{4x}+4xe^{4x} & si\ x<0 \\ \frac{1}{1+x}(1+x)-\ln(1+x) & si\ x>0 \\ \hline (1+x)^2 \end{cases} = \begin{cases} e^{4x}+4xe^{4x} & si\ x<0 \\ \frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2} & si\ x>0 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=1 \end{matrix}\right\}\Longrightarrow f'(0^-)=f'(0^+)$ Por lo tanto, f es derivable en x=0.

Un procedimiento más correcto sería el estudio por definición de las derivadas laterales, pero se da por válido este.

La función f(x) es derivable en x=0

3.2.3. La ecuación de la recta tangente en el punto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$ viene dada por su expresión punto-pendiente:

$$\boldsymbol{y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)}$$

$$x_0=-1 \Longrightarrow f(-1)=-e^{-4}$$

$$f'(-1)=e^{-4}-4e^{-4}=-3e^{-4}$$

$$\boldsymbol{y+e^{-4}=-3e^{-4}(x+1)}$$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. GEOMETRÍA. (2,5 puntos). Responda uno de estos dos apartados: 4.1. o 4.2.

Ejercicio 4.1:

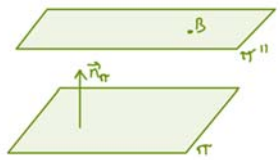
4.1. Considérense los planos π: $2x + 3y + z + 1 = 0$ y π': $x + z - 1 = 0$ y los puntos $A(2,1,0)$ y $B(-1,-2,3)$.

4.1.1. Calcule la distancia del punto A al plano paralelo a π que pasa por B.

4.1.2. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π y π'.

Solución:

4.1.1. Calculamos el plano paralelo a $\boldsymbol{\pi}$ pasando por B.



$\overrightarrow{n_\pi} = (2,3,1)$

$$\pi'': 2x + 3y + z + D = 0$$

$$B(-1,-2,3) \in \pi'' \Rightarrow -2 - 6 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = 5$$

Por lo tanto $\pi'': 2x + 3y + z + 5 = 0$

Determinamos $d(A,\pi'') = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|4+3+5|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{12}{\sqrt{14}} = \frac{6\sqrt{14}}{7}\ u.$

$$\boldsymbol{d(A,\pi'') = \frac{6\sqrt{14}}{7}\ u.}$$

4.1.2. $\left.\begin{matrix}\pi: 2x + 3y + z + 1 = 0 \\ \pi': x + z - 1 = 0\end{matrix}\right\}$ Resolvemos el sistema compatible indeterminado.

$$x = 1 - z$$
$$y = \frac{1}{3}(z - 3)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos son:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 1 - \lambda} \\ \boldsymbol{y = -1 + \frac{\lambda}{3}} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases}$$

BY NC SA

Ejercicio 4.2:

4.2. Dadas las rectas r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$ y s: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{2}$

4.2.1. Calcule la posición relativa de las rectas r y s.

4.2.2. Obtenga la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s.

Solución:

4.2.1. Estudiamos los vectores directores de las rectas:

$\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$ por lo tanto, las rectas son paralela o coincidentes.

Comprobamos si un punto de r pertenece a s, en ese caso serían coincidentes, en caso contrario paralelas.

$P_r(1,2,1)$

$P_r \notin s$, $\frac{1-2}{4} \neq \frac{2-1}{-2}$

Las rectas r y s son paralelas.

4.2.2. El plano queda determinado si conocemos dos vectores y un punto. Para ello determinamos el vector $\vec{u}=\overrightarrow{P_rP_s}$

$P_r(1,2,1)$, $P_s(2,1,1)$

$\overrightarrow{d_r}=(2,-1,1)$

$\vec{u}=\overrightarrow{P_rP_s}=(1,-1,0)$

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 1(x-1)+1(y-2)-(z-1)=0$$

$$\boldsymbol{\pi: x+y-z-2=0}$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

a) (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x)=-x^2+\alpha x+11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que *f(x)* tenga un máximo relativo en $x=1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas *f(x)* y *f ´(x)*.

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 3x+2y-mz=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de *m* el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de *m* que lo haga compatible indeterminado.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

BY NC SA

$$\left(A-\frac{1}{3}A^T\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A-\lambda I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\2&1&3&1\\0&1&-1&2\\0&0&4&-1\end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX=b$ siendo $b=\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix}^T$?. Nota, b^T denota la matriz traspuesta de *b*.

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos sub apartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Obtén el valor del *m* para el cual las rectas $r\equiv x=y=z-m$ y

$$s\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{2y}{3}=2z-2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de *r* y *s* para el valor de *m* calculado.

b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P=(0,2,-1)$ y $Q=(2,-2,1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

4.2 Responda a los dos sub apartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dada la recta *r*, $r\equiv x-2=y+1=-z$, calcula la ecuación de la recta *s* que corta a *r* perpendicularmente y que pasa por $Q=(2,-2,1)$.

b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx+2y-3z-1=0$ y $2x-4y+6z+5=0$ halla los valores de *m* para que sean:
i) paralelos.
ii) perpendiculares.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Ejercicio 1:

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$. Los datos históricos indican que solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha, mientras que en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha.

a) (1.75 puntos) Calcula la media y la desviación típica de la distribución.

b) (0.75 puntos) Calcula la probabilidad de que la producción supere los 8500 kg/ha en un año elegido al azar.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X = N(\mu,\sigma)$.

a) Nos dicen que "solo en el 2% de los años la producción supera los 9000 kg/ha" → $P(X > 9000) = 0.02$. También sabemos que "en el 56% de los años queda por debajo de los 8315 kg/ha" → $P(X < 8315) = 0.56$.

$$P(X > 9000) = 0.02 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{9000-\mu}{\sigma}\right) = 0.02 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{9000-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.02 = 0.98 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9000-\mu}{\sigma} = \frac{2.05+2.06}{2} = 2.055 \Rightarrow 9000 - \mu = 2.055\sigma \Rightarrow \boxed{9000 - 2.055\sigma = \mu}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803

BY NC SA

$$P(X<8315)=0.56 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z<\frac{8315-\mu}{\sigma}\right)=0.56 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{8315-\mu}{\sigma}=0.15 \Rightarrow \boxed{8315-\mu=0.15\sigma}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix}9000-2.055\sigma=\mu\\ 8315-\mu=0.15\sigma\end{matrix}\right\} \Rightarrow 8315-9000+2.055\sigma=0.15\sigma \Rightarrow -685=-1.905\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{685}{1.905}\approx 359.58} \Rightarrow \boxed{\mu=9000-2.055\cdot\frac{685}{1.905}\approx 8261.06}$$

La media de producción tiene un valor aproximado de 8261 kg por hectárea y la desviación típica es de 359 kg/ha.

b) X = La producción de vino por hectárea (ha) de terreno en una comarca. $X=N(8261,359)$.
Nos piden calcular $P(X>8500)$.

$$P(X>8500)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{8500-8261}{359}\right)=P(Z>0.666)=$$

$$=1-P(Z\le 0.666)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.7454=\boxed{0.2546}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	

a) Media = 8261 kg/ha; Desviación típica = 359 kg/ha

b) P(X > 8500) = 0,2546

BY NC SA

ANÁLISIS

Ejercicio 2:

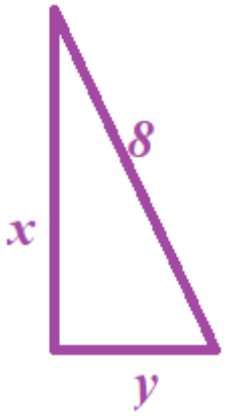
APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) La vela de un barco tiene forma de triángulo. Si la hipotenusa mide 8 m, calcula las dimensiones para que la superficie de la vela sea máxima.

2.2 (2.5 puntos) Sea la función $f(x)=-x^2+\alpha x+11$, donde α es un parámetro real. Calcula el valor de α para que *f(x)* tenga un máximo relativo en $x=1/2$. Para ese valor de α calcula el área encerrada entre las gráficas *f(x)* y *f ´(x)*.

Solución 2.1:

Como se habla de hipotenusa suponemos que el triángulo es rectángulo.



Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $x^2+y^2=8^2 \rightarrow y^2=64-x^2 \rightarrow y=\sqrt{64-x^2}$.
El área del triángulo rectángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(x,y)=\frac{xy}{2}$$

Sustituimos en la expresión del área "y" por la expresión obtenida $y=\sqrt{64-x^2}$.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=\dfrac{xy}{2} \\ y=\sqrt{64-x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=\frac{x\sqrt{64-x^2}}{2}$$

Derivamos la función área obtenida y averiguamos cuando se anula la derivada (puntos críticos)

BY NC SA

$$A(x)=\frac{x\sqrt{64-x^2}}{2}\Rightarrow A'(x)=\frac{\sqrt{64-x^2}+x\dfrac{-2x}{2\sqrt{64-x^2}}}{2}=\frac{\sqrt{64-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}}{2}$$

$$A'(x)=0\Rightarrow\frac{\sqrt{64-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}}{2}=0\Rightarrow\sqrt{64-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{64-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{64-x^2}}\Rightarrow\left(\sqrt{64-x^2}\right)^2=x^2\Rightarrow 64-x^2=x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64=2x^2\Rightarrow x^2=32\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{32}}$$

Comprobamos si este punto crítico es máximo o mínimo estudiando el signo de la derivada antes y después $x=\sqrt{32}$.

- En el intervalo $\left(0,\sqrt{32}\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

  $A'(1)=\dfrac{\sqrt{64-1^2}-\dfrac{1^2}{\sqrt{64-1^2}}}{2}=\dfrac{31\sqrt{7}}{21}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{32}\right)$.

- En el intervalo $\left(\sqrt{32},8\right)$ tomamos $x=7$ y la derivada vale

  $A'(7)=\dfrac{\sqrt{64-7^2}-\dfrac{7^2}{\sqrt{64-7^2}}}{2}=\dfrac{-17\sqrt{15}}{15}<0$. La función decrece en $\left(\sqrt{32},8\right)$.

Como la función crece antes y decrece después podemos afirmar que en $x=\sqrt{32}$ hay un máximo relativo. Para este valor tenemos $y=\sqrt{64-x^2}=\sqrt{64-\left(\sqrt{32}\right)^2}=\sqrt{32}$

La superficie de la vela es máxima con $x=\sqrt{32}$ e $y=\sqrt{32}$.

BY NC SA

Solución 2.2:

Si la función tiene un máximo relativo en $x=1/2$ entonces la derivada se anula para este valor.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+\alpha x+11 \Rightarrow f'(x)=-2x+\alpha \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-2\frac{1}{2}+\alpha \Rightarrow \alpha-1=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

El valor buscado es $\alpha=1$. La función queda $f(x)=-x^2+x+11$.

Calculamos la derivada de la función $f'(x)=-2x+1$.

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas *f(x)* y *f ´(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+x+11 \\ f'(x)=-2x+1 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+x+11=-2x+1 \Rightarrow 0=x^2-3x-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(-10)}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{3+7}{2}=\boxed{5=x} \\ \frac{3-7}{2}=\boxed{-2=x}\end{cases}$$

El área encerrada entre las gráficas *f(x)* y *f ´(x)* es el valor absoluto de la integral definida entre –2 y 5 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-2}^{5} f(x)-f'(x)\,dx=\int_{-2}^{5} -x^2+x+11-(-2x+1)\,dx=\int_{-2}^{5} -x^2+3x+10dx=$$

$$=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+10x\right]_{-2}^{5}=\left[\frac{-5^3}{3}+\frac{3\cdot 5^2}{2}+10\cdot 5\right]-\left[\frac{-(-2)^3}{3}+\frac{3(-2)^2}{2}+10(-2)\right]=$$

$$=-\frac{125}{3}+\frac{75}{2}+50-\frac{8}{3}-6+20=-\frac{133}{3}+\frac{75}{2}+64=\boxed{\frac{343}{6}\approx 57.16}$$

El área tiene un valor de $\frac{343}{6}\approx 57.16$ unidades cuadradas.

Área = 57,16 u²

BY NC SA

NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Ejercicios 3:

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2
3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.
a) (1.25 puntos) Dado el sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{cases} 3x+y-z=0 \\ 3x+2y-mz=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

Indica para qué valores de *m* el sistema tiene solamente la solución trivial. Resuelve el sistema anterior para un valor de *m* que lo haga compatible indeterminado.

b) (1.25 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resuelve el sistema

$$\left(A-\frac{1}{3}A^T\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A.

3.2 Responda a los dos sub apartados siguientes.
a) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Estudia el rango de la matriz $A-\lambda I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde *I* es la matriz identidad de orden 3.
b) (1.25 puntos) Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula su determinante, ¿Qué solución tiene el sistema $AX=b$ siendo $b=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$?.
Nota, b^T denota la matriz traspuesta de *b*.

Solución 3.1:

a) Al ser el sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada siempre coinciden, por lo que el sistema siempre es compatible. Este sistema tiene la solución trivial y solo hay dos opciones tiene solo esta solución o tiene infinitas soluciones (incluyendo la trivial).
Para que el sistema tenga solo la solución trivial el rango de la matriz de coeficientes debe ser 3, coincidiendo con el número de incógnitas, por lo que el determinante de esta matriz debe ser distinto de cero.

BY NC SA

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -m\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=-6-m+3+2+3-3m=-4m+2$$

$$|A|=0\Rightarrow -4m+2=0\Rightarrow 4m=2\Rightarrow \boxed{m=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}$$

La solución es la trivial para cualquier valor de m distinto de $\frac{1}{2}$.

El sistema es compatible indeterminado para $m=\frac{1}{2}$. Lo resolvemos para este valor.

$$\begin{cases}3x+y-z=0\\ 3x+2y-\frac{1}{2}z=0\\ x-y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y-z=0\\ 6x+4y-z=0\\ x-y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y=z\\ 6x+4y-z=0\\ x-y-z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}6x+4y-3x-y=0\\ x-y-3x-y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+3y=0\\ -2x-2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\ x+y=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y=0\Rightarrow y=-x\Rightarrow z=3x-x=2x\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=2\lambda\end{cases}}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión $\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=2\lambda\end{cases}$ **.**

b) Obtenemos la expresión de la matriz $A-\frac{1}{3}A^T$.

$$A-\frac{1}{3}A^T=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

BY NC SA

El sistema que debemos resolver es $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

El sistema queda $\left.\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ 3x+2y+3z=7 \\ 3x-y=1 \end{array}\right\}$. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ 3x+2y+3z=7 \\ 3x-y=1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2x-y-z=0 \\ 3x+2y+3z=7 \\ 3x-1=y \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2x-(3x-1)-z=0 \\ 3x+2(3x-1)+3z=7 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2x-3x+1-z=0 \\ 3x+6x-2+3z=7 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 1-x-z=0 \\ 9x+3z=9 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x=1-z \\ 3x+z=3 \end{array}\right\}\Rightarrow 3(1-z)+z=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-3z+z=3\Rightarrow -2z=0\Rightarrow \boxed{z=0}\Rightarrow \boxed{x=1-0=1}\Rightarrow \boxed{y=3\cdot 1-1=2}$$

La solución es $x=1,\ y=2,\ z=0$.

x = 1, y = 2, z = 0

BY NC SA

Solución 3.2:

3.2 Obtenemos la expresión de $A-\lambda I$.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&-1\\1&0&3-\lambda\end{pmatrix}$$

Para que su rango sea 3 su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&1\\1&1-\lambda&-1\\1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(3-\lambda)-(1-\lambda)=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda)-1\right]=$$

$$=(1-\lambda)\left[3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-1\right]=(1-\lambda)\left[\lambda^2-4\lambda+2\right]$$

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow(1-\lambda)\left[\lambda^2-4\lambda+2\right]=0\Rightarrow\begin{cases}1-\lambda=0\rightarrow\boxed{\lambda=1}\\ \lambda^2-4\lambda+2=0\rightarrow\lambda=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2}}{2}=\\ =\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\boxed{2\pm\sqrt{2}=\lambda}\end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

Situación 1. $\lambda\neq1$ y $\lambda\neq2\pm\sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es no nulo y el rango de $A-\lambda I$ es 3.

Situación 2. $\lambda=1$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A-1\cdot I=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna (nula) → $\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=2+1=3\neq0$.

El rango de $A-\lambda I$ es 2.

Situación 3. $\lambda=2+\sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

BY NC SA

La matriz queda $A-\left(2+\sqrt{2}\right)I=\begin{pmatrix}-1-\sqrt{2} & 0 & 1\\ 1 & -1-\sqrt{2} & -1\\ 1 & 0 & 1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1-\sqrt{2}\end{vmatrix}=1-\sqrt{2}+1=2-\sqrt{2}\neq 0$. El rango de $A-\lambda I$ es 2.

Situación 4. $\lambda=2-\sqrt{2}$

En esta situación el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A-\left(2-\sqrt{2}\right)I=\begin{pmatrix}-1+\sqrt{2} & 0 & 1\\ 1 & -1+\sqrt{2} & -1\\ 1 & 0 & 1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la primera fila y la segunda columna → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1+\sqrt{2}\end{vmatrix}=1+\sqrt{2}+1=2+\sqrt{2}\neq 0$. El rango de $A-\lambda I$ es 2.

Resumiendo: **Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 2\pm\sqrt{2}$ el rango de $A-\lambda I$ es 3. Si $\lambda=1$ o $\lambda=2\pm\sqrt{2}$ el rango de $A-\lambda I$ es 2.**

b) Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 2^{\text{a}}-2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}\\ 2\quad 1\quad 3\quad 1\\ -2\quad 2\quad -4\quad 0\\ \hline 0\quad 3\quad -1\quad 1\rightarrow \text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}\end{matrix}\right\}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=3-0+4-0-1-24=\boxed{-18}$$

Como el determinante de A vale –18 distinto de cero esta matriz tiene inversa. La podemos utilizar para despejar X en la ecuación $AX=b$.

$$AX=b\Rightarrow X=A^{-1}b=A^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

BY NC SA

GEOMETRÍA

Ejercicios 4:

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2
4.1 Responda a los dos sub apartados siguientes.
a) (1.25 puntos) Obtén el valor del *m* para el cual las rectas $r \equiv x = y = z - m$ y

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y}{3} = 2z - 2$$

se cortan. Calcula el punto de corte de *r* y *s* para el valor de *m* calculado.
b) (1.25 puntos) Se consideran los puntos $P = (0,2,-1)$ y $Q = (2,-2,1)$. Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.
4.2 Responda a los dos sub apartados siguientes.
a) (1.25 puntos) Dada la recta $r \equiv x-2 = y+1 = -z$, calcula la ecuación de la recta *s* que corta a *r* perpendicularmente y que pasa por $Q = (2,-2,1)$.
b) (1.25 puntos) Dados los planos $mx+2y-3z-1=0$ y $2x-4y+6z+5=0$ halla los valores de *m* para que sean:
i) paralelos.
ii) perpendiculares.

Solución: 4.1:

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-m}{1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ P_r(0,0,m) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = m + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3/2} = \frac{z-1}{1/2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow \overrightarrow{w_s} = 2\overrightarrow{v_s} = (4,3,1) \\ Q_s(1,0,1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales (distinta dirección).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{w_s} = (4,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

Las dos rectas se cortan o cruzan. Para que las dos rectas se corten debe ser nulo el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{P_r Q_s}\right]$.

BY NC SA

$$\left.\begin{matrix} P_r(0,0,m) \\ Q_s(1,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,0,1)-(0,0,m) = (1,0,1-m)$$

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{u_r} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{w_s} = (4,3,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,0,1-m) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1-m \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-m)+1+0-3-4(1-m)-0 = 3-3m+1-3-4+4m = m-3$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{w_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = 0 \Rightarrow m-3=0 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

Para $m=3$ las rectas r y s se cortan.

Para $m=3$ las rectas quedan $r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=3+\alpha \end{cases} ;\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad s \equiv \begin{cases} x=1+4\beta \\ y=3\beta \\ z=1+\beta \end{cases} ;\beta \in \mathbb{R}$.

Hallamos su punto A de corte.

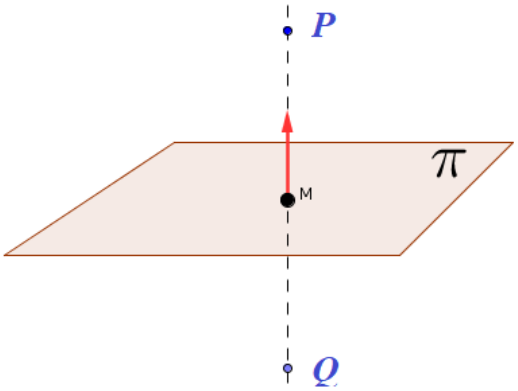
$$\left.\begin{matrix} r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=3+\alpha \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x=1+4\beta \\ y=3\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1+4\beta \\ \alpha = 3\beta \\ 3+\alpha = 1+\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+4\beta = 3\beta \\ 3+1+4\beta = 1+\beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 3\beta = -3 \end{cases} \rightarrow \boxed{\beta=-1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4(-1) = -3 \\ y = 3(-1) = -3 \\ z = 1-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3,-3,0)}$$

Las rectas *r* y *s* se cortan en $A(-3,-3,0)$.

b) Si los dos puntos P y Q son simétricos respecto del plano π el plano debe contener al punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Además, el vector $\overrightarrow{PQ}$ es un vector normal del plano.

BY NC SA



$$\left.\begin{array}{l} P=(0,2,-1) \\ Q=(2,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} M=\dfrac{(0,2,-1)+(2,-2,1)}{2}=(1,0,0) \\ \overrightarrow{PQ}=(2,-2,1)-(0,2,-1)=(2,-4,2) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} M(1,0,0)\in\pi \\ \vec{n}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{2}(2,-4,2)=(1,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M(1,0,0)\in\pi \\ \pi: x-2y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

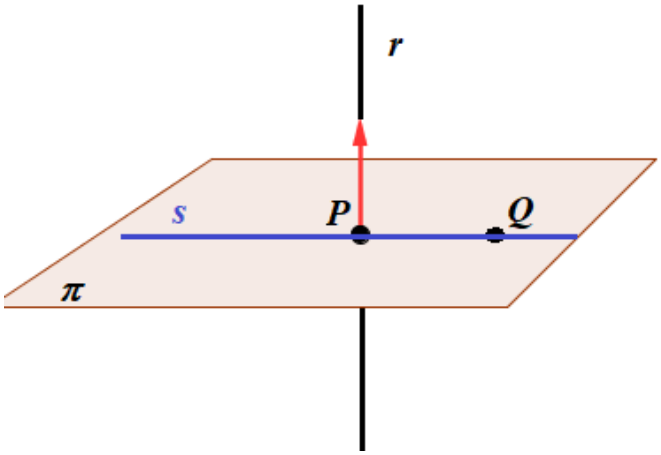
$$\Rightarrow 1-0+0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2y+z-1=0}$$

El plano $\pi: x-2y+z-1=0$ cumple que los puntos P y Q son simétricos respecto a él.

BY NC SA

Solución: 4.2:

a) Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto Q. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta.



$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \vec{v_r} = (1,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} Q = (2,-2,1) \in \pi \\ \vec{n} = \vec{v_r} = (1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} Q = (2,-2,1) \in \pi \\ \pi : x + y - z + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - 2 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y - z + 1 = 0}$$

Hallamos el punto P de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : x + y - z + 1 = 0 \\ r \equiv x - 2 = y + 1 = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi : x + y - z + 1 = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} x - 2 = -z \rightarrow x = 2 - z \\ y + 1 = -z \rightarrow y = -1 - z \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - z - 1 - z - z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3z = -2 \Rightarrow \boxed{z = \frac{2}{3}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}} \\ \boxed{y = -1 - \frac{2}{3} = \frac{-5}{3}} \end{array}\right. \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La recta que buscamos es la que pasa por los puntos P y Q.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{4}{3},\frac{-5}{3},\frac{2}{3}\right)\in s \\ Q(2,-2,1)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(2,-2,1)-\left(\frac{4}{3},\frac{-5}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=3\overrightarrow{PQ}=(2,-1,1) \\ Q(2,-2,1)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s:\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-2-\lambda\,;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}}$$

La recta *s* que corta a *r* perpendicularmente y que pasa por $Q=(2,-2,1)$ tiene ecuación:

$$s:\begin{cases} x=2+2\lambda \\ y=-2-\lambda\,;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

b) Hallamos los vectores normales de cada plano.

$$\pi: mx+2y-3z-1=0 \Rightarrow \vec{n}=(m,2,-3)$$

$$\pi': 2x-4y+6z+5=0 \Rightarrow \vec{n'}=(2,-4,6)$$

b.i) Para que los planos sean paralelos sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(m,2,-3) \\ \vec{n'}=(2,-4,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6} \Rightarrow \frac{m}{2}=\frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

Para $m=-1$ los planos son paralelos o coincidentes. Los planos quedan $-x+2y-3z-1=0$ y $2x-4y+6z+5=0$. Multiplicamos la ecuación del primer plano por –2 y nos queda $2x-4y+6z+2=0$, observamos que las ecuaciones de los dos planos no son las mismas y los planos no son coincidentes y por tanto, son paralelos.

b.ii) Para que lo planos sean perpendiculares los vectores normales deben ser perpendiculares, esto implica que su producto escalar debe ser igual a cero.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(m,2,-3) \\ \vec{n'}=(2,-4,6) \\ \vec{n}\cdot\vec{n'}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (m,2,-3)(2,-4,6)=0 \Rightarrow 2m-8-18=0 \Rightarrow 2m-26=0 \Rightarrow \boxed{m=13}$$

Para $m=13$ los planos son perpendiculares.

BY NC SA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE OBLIGATORIO. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Ejercicio 1:

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

a) la desviación típica de la distribución, (1 punto).

b) cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos).

c) el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1: ANÁLISIS

Ejercicio 2:

APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2, A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Ejercicio 3:

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)

Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases} 2X - 3Y = A, \\ X - Y = B. \end{cases}$$

BY NC SA

b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar.una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 6 & -7\end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1}=B$.

b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b, con $a,b\in\mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases}2x+y-3z=a\\ -2x-y+3z=b\end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3: GEOMETRÍA

Ejercicio 4:

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+y-z=4\\ mx+y+3z=6\\ x-2z=m\end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{5}$ al plano $\pi:-x-3y+z+4=0$.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0.5 puntos) Dado el punto $P\equiv(0,2,1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi:2x-5y+z+3=0$.

b) (0.5 puntos) Dado el punto $P\equiv(1.0,-3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r:

$$r\equiv\begin{cases}5x+y-z=4\\ 2x-2y-z=5\end{cases}$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1\\ z=8+2\lambda\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}x=2+3\mu\\ y=2-\mu\\ z=-1+4\mu\end{cases}$$

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Ejercicio 1:

APARTADO 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (2,5 puntos)

Para iluminar una estancia se requiere instalar focos. El tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 2000 horas. Se sabe que, tomando un foco al azar la probabilidad de que luzca más de 1800 horas es 0.8289. Calcula:

a) la desviación típica de la distribución, (1 punto).

b) cuántas horas de vida debe tener un foco para estar en el percentil 90, (0.5 puntos).

c) el porcentaje de focos que no tendrán una duración aceptable, considerando como duración aceptable al menos 1600 horas, (1 punto).

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución:

X = El tiempo, en horas, de vida de un foco. $X = N(2000, \sigma)$.

a) Nos dicen que "la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca más de 1800 horas es 0.8289." → $P(X > 1800) = 0.8289$.

$$P(X > 1800) = 0.8289 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z > \frac{1800 - 2000}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{-200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{200}{\sigma}\right) = 0.8289 \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{200}{\sigma} = 0.95 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{200}{0.95} = \frac{4000}{19} \approx 210.53 \text{ horas}}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289

b) Nos piden hallar "t" tal que $P(X < t) = 0.90$.

BY NC SA

$$P(X<t)=0.90 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z<\frac{t-2000}{4000/19}\right)=0.90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t-2000}{4000/19}=1.28 \Rightarrow t-2000=\frac{4000\cdot 1.28}{19} \Rightarrow \boxed{t=\frac{43120}{19}\ \square\ 2269.47}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997

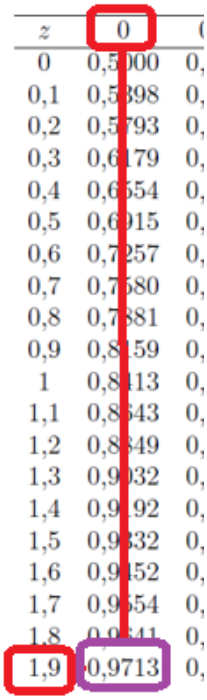
El percentil 90 está situado en las 2269.47 horas de duración.

b) Calculamos $P(X>1600)$.

$$P(X>1600)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{1600-2000}{4000/19}\right)=P(Z>-1.9)=$$

$$=P(Z\le 1.9)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.9713}$$

BY NC SA



z	0	
0	0,5000	0,
0,1	0,5398	0,
0,2	0,5793	0,
0,3	0,6179	0,
0,4	0,6554	0,
0,5	0,6915	0,
0,6	0,7257	0,
0,7	0,7580	0,
0,8	0,7881	0,
0,9	0,8159	0,
1	0,8413	0,
1,1	0,8643	0,
1,2	0,8849	0,
1,3	0,9032	0,
1,4	0,9192	0,
1,5	0,9332	0,
1,6	0,9452	0,
1,7	0,9554	0,
1,8	0,9641	0,
1,9	0,9713	0,

El 97.13% de los focos tienen una duración aceptable.

97,13 %

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1: ANÁLISIS

Ejercicio 2:

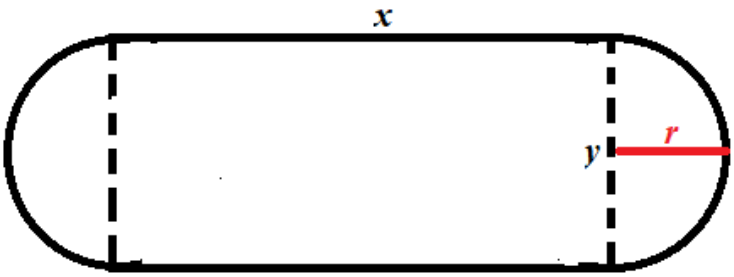
APARTADO 2. ANÁLISIS (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 2.1 o 2.2

2.1 (2.5 puntos) Un campo de atletismo de 1 km de perímetro consiste en un rectángulo con un semicírculo en cada uno de los dos lados opuestos. Hallar las dimensiones del campo para que el área de la parte rectangular sea lo mayor posible.

2.2 (2.5 puntos) Sea la curva $y = Ax - x^2, A \in \mathbb{R}^+$. Determina el valor de A para que el área encerrada entre la curva y y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva.

Solución 2.1:

Hacemos un dibujo del campo de atletismo y damos nombre a cada uno de sus componentes.



El radio del semicírculo es la mitad del lado corto del campo: $y = 2r$.

El perímetro vale 1 km → $2x + 2\pi r = 1 \rightarrow 2\pi r = 1 - 2x \Rightarrow r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi}$.

Obtenemos la expresión del área de la parte rectangular.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = xy \\ y = 2r \\ r = \frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x) = 2xr = 2x\left(\frac{1}{2\pi} - \frac{x}{\pi}\right) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi}$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x) = \frac{x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi} \Rightarrow A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} = 0 \Rightarrow 1 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4} = 0.25\,km}$$

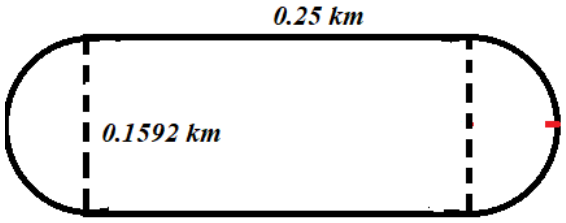
Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$A'(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{4x}{\pi} \Rightarrow A''(x) = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow A''(0.25) = -\frac{4}{\pi} < 0$$

BY NC SA

Al ser negativa la segunda derivada podemos decir que el área tiene un máximo relativo en $x=0.25$. Para este valor tenemos que $y=2\left(\frac{1}{2\pi}-\frac{1/4}{\pi}\right)=2\left(\frac{2}{4\pi}-\frac{1}{4\pi}\right)=2\frac{1}{4\pi}=\frac{1}{2\pi}\approx 0.1592$.

El campo con área máxima en su parte rectangular tiene el lado recto de longitud 0.25 km y $\frac{1}{2\pi}\approx 0.1592$ km en el lado situado en la parte del semicírculo.



Rectángulo de lados 0,25 km y 0,1592 km

BY NC SA

Solución 2.2:

Averiguamos los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y = Ax - x^2, A \in \mathbb{R}^+ \\ Eje\,OX \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Ax - x^2 = 0 \Rightarrow x(A-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ A - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = A > 0} \end{cases}$$

El área encerrada entre la curva *y* y el eje de abscisas es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y A de la función.

$$\int_0^A Ax - x^2 dx = \left[\frac{Ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^A = \left[\frac{A \cdot A^2}{2} - \frac{A^3}{3}\right] - \left[\frac{A \cdot 0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{A^3}{2} - \frac{A^3}{3} = \frac{A^3}{6} > 0$$

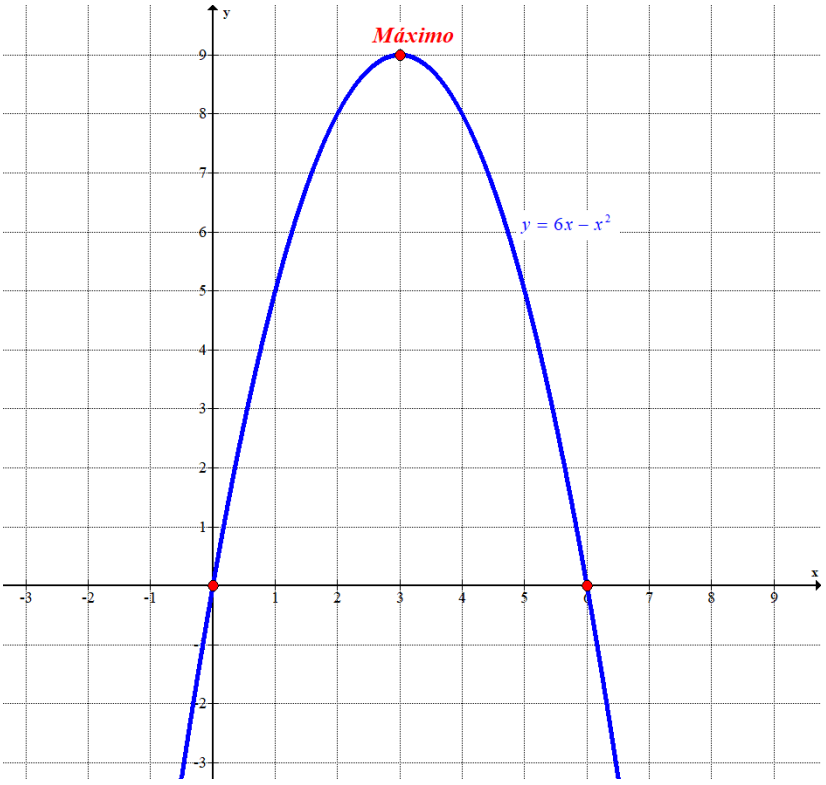
El área tiene un valor de $\frac{A^3}{6}$ unidades cuadradas.

Igualamos el área a 36 y obtenemos el valor de *A*.

$$\frac{A^3}{6} = 36 \Rightarrow A^3 = 6^3 \Rightarrow \boxed{A = 6}$$

Para $A=6$ el área encerrada entre la curva *y* y el eje de abscisas vale 36 unidades cuadradas.

Dibujamos la gráfica de la curva $y = 6x - x^2$. Su gráfica es una parábola con puntos de corte con el eje da abscisas A(0, 0) y B(6, 0). Por lo que el vértice está situado en $x=3$. El vértice tiene coordenadas V(3, 9) y es el máximo absoluto de la función.



BY NC SA

NÚMEROS Y ÁLGEBRA

Ejercicio 3:

APARTADO 3. NÚMEROS Y ALGEBRA (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 3.1 o 3.2

3.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}$. Halla las matrices X e Y soluciones del sistema,

$$\begin{cases}2X-3Y=A,\\ X-Y=B.\end{cases}$$

b) (1.25 puntos) En una fábrica se produce queso y mantequilla. Para fabricar.una unidad de queso se precisan 10 unidades de leche y 6 horas de mano de obra. Para la mantequilla, se necesitan 5 unidades de leche y 8 horas de mano de obra por unidad. Sabiendo que tenemos disponibles cada día 100000 unidades de leche y 110000 horas de mano de obra, calcular la producción posible de queso y de mantequilla considerando que utilizamos todo lo disponible.

3.2 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}8 & -9\\ 6 & -7\end{pmatrix}$, halla las matrices X y X^{-1} tal que $XAX^{-1}=B$.

b) (1.25 puntos) Determina la relación entre a y b, con $a,b\in\mathbb{R}$ conocidos, para que el sistema

$$\begin{cases}2x+y-3z=a\\ -2x-y+3z=b\end{cases}$$

sea compatible. ¿Puede ser compatible determinado?

Solución 3.1:

b) Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases}2X-3Y=A,\\ X-Y=B.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2X-3Y=A\\ X=B+Y\end{cases}\Rightarrow 2(B+Y)-3Y=A\Rightarrow 2B+2Y-3Y=A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2B-Y=A\Rightarrow Y=2B-A=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-1 & 0-5\\ 6-4 & 12-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-3 & 0-5\\ 3+2 & 6+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 5 & 16\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 2 & 10\end{pmatrix}$.

BY NC SA

b) Llamamos "x" al número de unidades de queso e "y" al número de unidades de mantequilla que se fabrican diariamente. Ponemos los datos en una tabla.

	Leche	Horas de mano de obra
Unidades de queso (x)	10x	6x
Unidades de mantequilla (y)	5y	8y
TOTALES	$10x+5y$	$6x+8y$

"Disponemos cada día de 100000 unidades de leche y 110000 unidades de mano de obra. Considerando que utilizamos todo lo disponible" → $10x+5y=100000;\ 6x+8y=110000$.

Resolvemos el sistema formado por estas dos ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix}10x+5y=100000\\6x+8y=110000\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2x+y=20000\\3x+4y=55000\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}y=20000-2x\\3x+4y=55000\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+4\left(20000-2x\right)=55000\Rightarrow 3x+80000-8x=55000\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25000=5x\Rightarrow \boxed{x=5000}\Rightarrow \boxed{y=20000-2\cdot 5000=10000}$$

Se producen 5 000 unidades de queso y 10 000 unidades de mantequilla.

BY NC SA

Solución 3.2:

a) Consideramos $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$XAX^{-1}=B \Rightarrow XAX^{-1}X=BX \Rightarrow XA=BX \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 2c & -d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8a-9c & 8b-9d \\ 6a-7c & 6b-7d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=8a-9c \\ -b=8b-9d \\ 2c=6a-7c \\ -d=6b-7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a=-9c \\ -9b=-9d \\ 9c=6a \\ 6d=6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{9}{6}c=\frac{3}{2}c \\ b=d \\ \frac{9}{6}c=a \\ d=b \end{cases} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}}$$

Como debe existir la inversa de la matriz X su determinante debe ser distinto de cero.

$$\left.\begin{matrix} |X|=\begin{vmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{vmatrix}=\frac{3bc}{2}-bc=\frac{bc}{2} \\ |X|\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{bc}{2}\neq 0 \Rightarrow b\neq 0,\ c\neq 0$$

Determinamos la inversa de X.

$$X^{-1}=\frac{Adj\left(X^T\right)}{|X|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 3c/2 & c \\ b & b \end{pmatrix}}{bc/2}=\frac{2}{bc}\begin{pmatrix} b & -b \\ -c & 3c/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $X=\begin{pmatrix} 3c/2 & b \\ c & b \end{pmatrix}$ y $X^{-1}=\begin{pmatrix} 2/c & -2/c \\ -2/b & 3/b \end{pmatrix}$, siendo $b\neq 0$ y $c\neq 0$.

b) Sumamos a la segunda ecuación la primera.

$$\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ -2x-y+3z=b \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lllll} \text{Ecuación } 2^{\text{a}}+\text{Ecuación } 1^{\text{a}} & & & & \\ -2x & -y & +3z & =b & \\ 2x & +y & -3z & =a & \\ \hline & & 0 & =b+a \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^{\text{a}} & \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 0=a+b \end{cases}$$

El sistema es compatible cuando $a+b=0 \rightarrow b=-a$.
El sistema nunca puede ser compatible determinado pues hay 3 incógnitas y solo 2 ecuaciones. El rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada nunca puede ser igual al número de incógnitas (3), como mucho pueden ser iguales a 2 y obtener un sistema compatible indeterminado.

BY NC SA

GEOMETRÍA. BLOQUE CON OPTATIVIDAD

Ejercicio 4:

APARTADO 4. GEOMETRÍA (2.5 puntos)
Responda a uno de los dos apartados 4.1 o 4.2

4.1 Responda a los dos subapartados siguientes.

a) (1.25 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ mx+y+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases}$$

Determina el valor del parámetro m para que los planos se corten en un punto. En este caso, determina el punto de corte.

b) (1.25 puntos) Calcula la distancia de la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{5}$ al plano $\pi : -x-3y+z+4=0$.

4.2 Responda a los tres subapartados siguientes.

a) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (0,2,1)$, halla la ecuación del plano que contiene a P y es paralelo a $\pi : 2x-5y+z+3=0$.

b) (0.5 puntos) Dado el punto $P \equiv (1.0,-3)$ halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r:

$$r \equiv \begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=5 \end{cases}$$

c) (1.5 puntos) Calcula la distancia entre las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-1 \\ z=8+2\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=2+3\mu \\ y=2-\mu \\ z=-1+4\mu \end{cases}$$

Solución 4.1:

a) Son 4 planos y su punto de corte, si existe, se obtiene de la resolución del sistema formado por sus ecuaciones. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=4 \\ mx+y+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x-z \\ 2x+y-z=4 \\ mx+y+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2-x-z-z=4 \\ mx+2-x-z+3z=6 \\ x-2z=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=2z \\ (m-1)x+2z=4 \\ x-2z=m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-1)x+x-2=4 \\ x-x+2=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx=6 \\ \boxed{2=m} \end{cases} \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3} \Rightarrow 3-2=2z \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{y=2-3-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}}$$

BY NC SA

El sistema tiene solución cuando $m=2$ y la solución es el punto $P\left(3,\frac{-3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

b) Estudiamos la posición relativa de la recta y el plano. Comprobamos si el vector director de la recta es perpendicular al vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{5} \\ \pi:-x-3y+z+4=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{u_r}=(-1,2,5)\\ \vec{n}=(-1,-3,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u_r}\cdot\vec{n}=(-1,2,5)(-1,-3,1)=1-6+5=0$$

El vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares y por tanto la recta o está contenida en el plano o es paralela al plano. En cualquiera de los dos casos podemos calcular la distancia de la recta al plano como la distancia de cualquiera de sus puntos al plano. Sabemos que $P_r(3,1,-2)$ es un punto de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(3,1,-2) \\ \pi:-x-3y+z+4=0 \end{array}\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|-3-3\cdot1-2+4|}{\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{11}}=\frac{4\sqrt{11}}{11}\approx 1.21u$$

La distancia de la recta *r* al plano π es de $\frac{4\sqrt{11}}{11}\approx 1.21$ unidades.

D = 1,21 u

BY NC SA

Solución 4.2:

a) Un plano π´ paralelo a $\pi: 2x-5y+z+3=0$ tiene ecuación $\pi': 2x-5y+z+D=0$.
Determinamos el valor de D que hace que el plano paralelo contenga el punto $P\equiv(0,2,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} P\equiv(0,2,1)\in\pi' \\ \pi': 2x-5y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 0-5\cdot 2+1+D=0\Rightarrow -9+D=0\Rightarrow \boxed{D=9}$$

El plano que buscamos tiene ecuación $\pi': 2x-5y+z+9=0$.

b) El plano perpendicular a la recta *r* tiene como vector normal el vector director de la recta.
Hallamos el vector director de la recta.

$$r\equiv\begin{cases} 5x+y-z=4 \\ 2x-2y-z=5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 5x+y-4=z \\ 2x-2y-z=5 \end{cases}\Rightarrow 2x-2y-5x-y+4=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x-3y=1\Rightarrow -1-3x=3y\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{3}-x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=5x-\frac{1}{3}-x-4=\frac{-13}{3}+4x}\Rightarrow r\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{-1}{3}-\lambda \\ z=\dfrac{-13}{3}+4\lambda \end{cases}\Rightarrow \vec{v_r}=(1,-1,4)$$

Hallamos la ecuación del plano que contiene el punto P y con vector normal $\vec{v_r}=(1,-1,4)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\vec{v_r}=(1,-1,4) \\ P\equiv(1.0,-3)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} \pi: x-y+4z+D=0 \\ P\equiv(1.0,-3)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow 1-0+4(-3)+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11+D=0\Rightarrow D=11\Rightarrow \boxed{\pi: x-y+4z+11=0}$$

El plano que contiene a *P* y es perpendicular a la recta *r* tiene ecuación
$\pi: x-y+4z+D=0$.

c) Estudiamos la posición relativa de las rectas. Determinamos primero un punto y un vector director de cada recta.

BY NC SA

$$r\equiv\begin{cases}x=5+\lambda\\y=-1\\z=8+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P_r(5,-1,8)\\\vec{v_r}=(1,0,2)\end{cases}\qquad s\equiv\begin{cases}x=2+3\mu\\y=2-\mu\\z=-1+4\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q_s(2,2,-1)\\\vec{u_s}=(3,-1,4)\end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_r}=(1,0,2)\\\vec{u_s}=(3,-1,4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{1}{3}\neq\frac{0}{-1}\neq\frac{2}{4}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el valor del producto mixto $\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{matrix}P_r(5,-1,8)\\Q_s(2,2,-1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{P_rQ_s}=(2,2,-1)-(5,-1,8)=(-3,3,-9)$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_r}=(1,0,2)\\\vec{u_s}=(3,-1,4)\\\overrightarrow{P_rQ_s}=(-3,3,-9)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&-1&4\\-3&3&-9\end{vmatrix}=9+0+18-6-0-12=9\neq0$$

Al ser el producto mixto distinto de cero las rectas se cruzan.

Calculamos su distancia entre las rectas *r* y *s* con la fórmula $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]\right|}{\left|\vec{v_r}\times\vec{u_s}\right|}$.

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_r}=(1,0,2)\\\vec{u_s}=(3,-1,4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\vec{v_r}\times\vec{u_s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&0&2\\3&-1&4\end{vmatrix}=0+6j-k+0-4j+2i=2i+2j-k=(2,2,-1)$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]\right|}{\left|\vec{v_r}\times\vec{u_s}\right|}=\frac{|9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\boxed{3u}$$

La distancia entre las rectas *r* y *s* vale 3 unidades.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Javier Rodrigo Hitos

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

Examen Matemáticas II del 2025:

https://www.youtube.com/watch?v=hI-kThLEppI

https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM

Noticias:

Un ingeniero, tras resolver el examen de Matemáticas II de la PAU de Madrid: "Lo siento mucho por los chavales"

¿Por qué ha sido tan difícil el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la PAU andaluza? | Sociedad | Cadena SER

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE OBLIGATORIO

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función *f(x)* en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?
b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva *f(x)*?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&3&0\\3&2&2\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda=5$, calcular un vector no nulo $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x+2y-3z=1$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.
b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.
c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x+y=2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.
b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 4

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7)=P(3)=\frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.
Se consideran los sucesos $A=\{7,11,13,19\}$, $B=\{2,5,7,13,17\}$ y $C=\{3,5,7,11,13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P\left(\left(\overline{A-C}\right)\cap B\right)$.
b) (1.25 puntos) $P\left(\left(A\cap B\right)/\overline{C}\right)$.

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1:

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Solución 1.1:

Llamamos x, y, z al número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido.

Obtenemos las ecuaciones que surgen del enunciado.

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres → $0.80x+0.50\cdot 2y+0.40\cdot 3z=80$.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos → $\frac{y}{3}=\frac{x+z}{5}$.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos → $2z=x+y-5$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 0.80x+0.50\cdot 2y+0.40\cdot 3z=80 \\ \frac{y}{3}=\frac{x+z}{5} \\ 2z=x+y-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.8x+y+1.2z=80 \\ \Rightarrow 5y=3x+3z \\ 2z=x+y-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=80-0.8x-1.2z \\ \Rightarrow 5y=3x+3z \\ 2z=x+y-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5(80-0.8x-1.2z)=3x+3z \\ 2z=x+80-0.8x-1.2z-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 400-4x-6z=3x+3z \\ 3.2z=0.2x+75 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 400=7x+9z \\ 16z=x+375 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 400=7x+9z \\ 16z-375=x \end{array}\right\} \Rightarrow 400=7(16z-375)+9z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 400=112z-2625+9z \Rightarrow 3025=121z \Rightarrow \boxed{z=\frac{3025}{121}=25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=16\cdot 25-375=25} \Rightarrow \boxed{y=80-0.8\cdot 25-1.2\cdot 25=30}$$

En el partido se realizaron 25 lanzamientos de 1 punto, 30 de 2 puntos y 25 de 3 puntos.

x = 25; y = 30; z = 25.

BY NC SA

Llamando: x - Lanzamientos de 1
y - Lanzamientos de 2
z - Lanzamientos de 3

Antonio Malaver
@ a.malaver

1ª condición:

$$1 \cdot 0'8 \cdot x + 2 \cdot 0'5 \cdot y + 3 \cdot 0'4 \cdot z = 80 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0'8 \cdot x + y + 1'2 \cdot z = 80$$

2ª condición:

$$\frac{1}{3} y = \frac{1}{5}(x+z) \rightarrow 3x - 5y + 3z = 0$$

3ª condición:

$$2z = x + y - 5 \rightarrow x + y - 2z = 5$$

Así, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 0'8 \cdot x + y + 1'2z = 80 \\ 3 \cdot x - 5y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 5 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{array}}$$

BY NC SA

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&3&0\\3&2&2\end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda=5$, calcular un vector no nulo $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$.

Solución 1.2

a) Calculamos la expresión de la matriz $A-\lambda I$ y la de su determinante.

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}4&1&0\\2&3&0\\3&2&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-\lambda&1&0\\2&3-\lambda&0\\3&2&2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$P(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}4-\lambda&1&0\\2&3-\lambda&0\\3&2&2-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)-2(2-\lambda)=$$

$$=(2-\lambda)\left[(4-\lambda)(3-\lambda)-2\right]=(2-\lambda)\left[12-4\lambda-3\lambda+\lambda^2-2\right]=$$

$$=(2-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+10\right]=2\lambda^2-14\lambda+20-\lambda^3+7\lambda^2-10\lambda=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20$$

Tenemos que el polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=-\lambda^3+9\lambda^2-24\lambda+20$.

Determinamos las raíces de este polinomio.

$$\left.\begin{array}{l}P(\lambda)=(2-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+10\right]\\P(\lambda)=0\end{array}\right\}\Rightarrow(2-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+10\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2-\lambda=0\rightarrow\boxed{\lambda=2}\\\lambda^2-7\lambda+10=0\rightarrow\lambda=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-40}}{2}=\dfrac{7\pm3}{2}=\begin{cases}\dfrac{7+3}{2}=\boxed{5=\lambda}\\\dfrac{7-3}{2}=\boxed{2=\lambda}\end{cases}\end{cases}$$

Las raíces del polinomio son $\lambda=2$ y $\lambda=5$.

BY NC SA

a) $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda)$

¿Qué es este ejercicio? ¡Sí: son autovalores y autovectores!

$= (12 - 7\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) - 4 + 2\lambda$

$= (24 - 14\lambda + 2\lambda^2 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3) - 4 + 2\lambda$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 26\lambda + 24 - 4 + 2\lambda$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$ //

Antonio Malaver
@a.malaver

Hallamos las raíces igualando a 0:

$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$ ¡Aparece 2 veces!

Así, las raíces son $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = 2}$ (con multiplicidad 2).

λ = 5; λ = 2

Así, las raíces son $\boxed{\lambda_1 = 5 \text{ y } \lambda_2 = 2}$ (con multiplicidad 2).

b) Para $\lambda = 5$

$(A - 5I)\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

No tiene sentido preguntar esto en selectividad... ¡Esto se da en primero de carrera!

Reducimos la matriz a forma escalonada:

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 + 3f_1]{f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Así: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x + y = 0 \\ 5y - 3z = 0 \end{matrix}$

Poniendo todo en función de z:

$\begin{matrix} x = y \\ y = 3/5\, z \\ z \end{matrix} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 3/5\, z \\ 3/5\, z \\ z \end{pmatrix}$

Cogiendo $z = 1$ por ejemplo:

$\vec{v}(z=1) = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ //

BY NC SA

b) Para $\lambda = 5$ la matriz $A - \lambda I$ queda $A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Hemos visto que tiene determinante nulo y la situación planteada tiene infinitas soluciones.
Resolvemos la ecuación matricial planteada.

$$(A-5I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x+y=0 \\ 2x-2y=0 \\ 3x+2y-3z=0 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} -x+y=0 \\ \Rightarrow x-y=0 \\ 3x+2y-3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 1^{\text{a}} = \text{Ecuación } 2^{\text{a}}\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=0 \\ 3x+2y-3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=y \\ 3x+2y-3z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3y+2y-3z=0 \Rightarrow 5y-3z=0 \Rightarrow 5y=3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{5}{3}y \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \frac{5}{3}\alpha \end{pmatrix};\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Si tomamos $\alpha = 3$ tenemos el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ que cumple lo pedido.

v = (3α/5, 3αz/5, α); v = (3, 3, 5)

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Bloque 2:

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

a) (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función *f(x)* en el intervalo $[0,12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0,12]$ contenida completamente en el muro?

b) (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.

c) (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva *f(x)*?

Solución:

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2 \Rightarrow f'(x)=-sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)\cdot\frac{\pi}{9}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{\pi}{9}sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)=0 \Rightarrow sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{9}=0 \rightarrow \boxed{x=0} \\ \frac{\pi x}{9}=\pi \rightarrow \boxed{x=9} \\ \frac{\pi x}{9}=2\pi \rightarrow x=18 \notin [0,12] \\ \dots \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo $[0,12]$ y en los puntos críticos obtenidos.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\cos\left(\frac{\pi\cdot 0}{9}\right)+2=3 \ \textit{Máximo} \\ f(9)=\cos\left(\frac{9\pi}{9}\right)+2=1 \ \textit{Mínimo} \\ f(12)=\cos\left(\frac{12\pi}{9}\right)+2=1.5 \end{array}\right\}$$

El valor máximo es 3 y se alcanza en $x=0$ y el valor mínimo es 1 y se alcanza en $x=9$.

Como el coseno de un ángulo toma como valor mínimo -1 y máximo 1 la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2$ toma como valor mínimo $-1+2=1$ y como valor máximo $1+2=3$.

Por lo que la curva está contenida en el muro en el intervalo $[0,12]$.

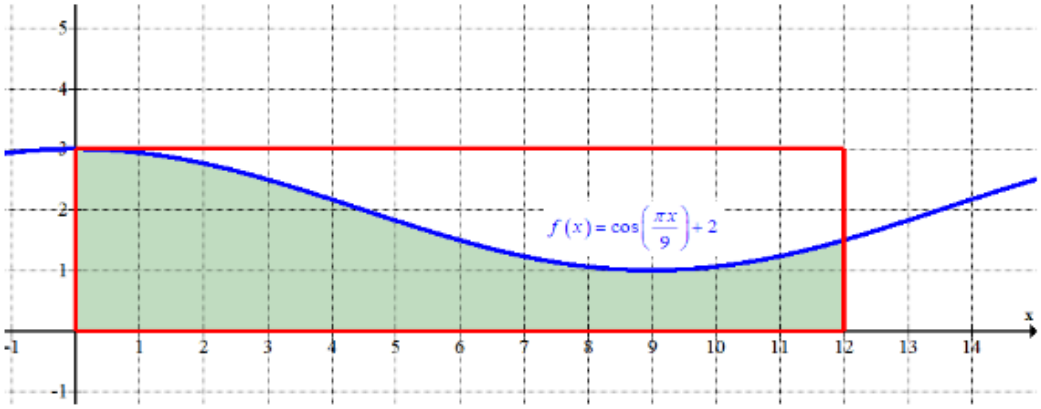
b) El muro se divide en dos partes una por debajo de la curva y otra por encima de la curva. Hallamos el área de la parte de muro situada por debajo de la curva como la integral definida de la función entre 0 y 12.

BY NC SA

$$\int_0^{12} f(x)dx = \int_0^{12} \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2dx = \left[\frac{9}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{9}\right)+2x\right]_0^{12} =$$

$$= \left[\frac{9}{\pi}sen\left(\frac{12\pi}{9}\right)+24\right]-\left[\frac{9}{\pi}sen\left(\frac{\pi\cdot 0}{9}\right)+2\cdot 0\right] = \boxed{24+\frac{9}{\pi}sen\left(\frac{12\pi}{9}\right)\simeq 21.52}$$

La parte de muro situada por debajo de la curva tiene un área aproximada de 21.52 metros cuadrados.
Como el muro tiene una superficie de $3 \cdot 12 = 36$ metros cuadrados la parte superior tiene una superficie aproximada de $36 - 21.52 = 14.48$ metros cuadrados.



c) Debemos pintar 21.52 metros cuadrados de muro. Como con cada bote de pintura se pintan 3 metros cuadrados de muro, entonces $\frac{21.52}{3} \simeq 7.17$. Para pintar toda el área bajo la curva *f(x)* se necesitarán, por lo menos, 8 botes de pintura, con 7 nos faltaría un trocito de muro por pintar y con 8 nos sobra un poco de pintura.

Máximo: (0, 3); Mínimo: (9, 1). Hacen falta 8 botes, aunque sobra algo de pintura. Con 7 no hay bastante

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Bloque 3:

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi : x+2y-3z=1$, se pide:

a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π.
b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r.
c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0,1,1)$ y el plano $\pi : x+y=2$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π.
b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π.
c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

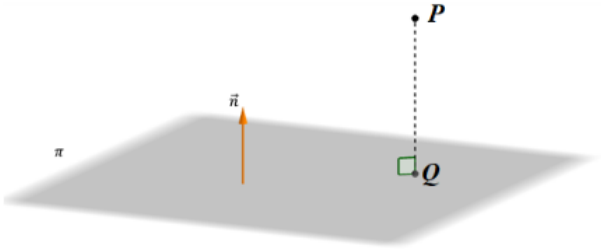
Solución:

a) Calculamos la distancia pedida.

$$\left.\begin{matrix}\pi : x+y-2=0 \\ P(0,1,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow d(\pi,P) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ unidades$$

La distancia del punto P al plano π tiene un valor de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.

b) Debemos hallar el punto Q del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P. Esta recta tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x+y-2=0 \rightarrow \vec{n} = (1,1,0)$$

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{u_s} = \vec{n} = (1,1,0) \\ P(0,1,1)\end{matrix}\right\} \Rightarrow s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

Este punto Q que buscamos pertenece al plano y pertenece a la recta s.

$$\left.\begin{matrix}\pi : x+y=2 \\ s : \begin{cases} x=\alpha \\ y=1+\alpha \\ z=1 \end{cases}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha+1+\alpha=2 \Rightarrow 2\alpha=1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)}$$

BY NC SA

El punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π tiene coordenadas $Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$.

c) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y=2\\ Eje\ OX \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y=2\\ Eje\ OY \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(0,2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y=2\\ Eje\ OZ \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 0=2 \Rightarrow \textit{No hay punto de corte con } OZ$$

Los vértices del triángulo son $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $P(0,1,1)$.

El área del triángulo ABP es la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores que unan dos de sus lados adyacentes.

$$\left.\begin{array}{l}A(2,0,0)\\ B(0,2,0)\\ P(0,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\overline{AB}=(0,2,0)-(2,0,0)=(-2,2,0)\\ \overline{AP}=(0,1,1)-(2,0,0)=(-2,1,1)\end{cases}$$

$$\overline{AB}\times\overline{AP}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2i-2k+4k+2j=2i+2j+2k=(2,2,2)$$

$$\textit{Área } ABP=\frac{\left|\overline{AB}\times\overline{AP}\right|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\boxed{\sqrt{3}\ u^2}$$

El área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Área = $\sqrt{3}$ u²

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Bloque 4:

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7)=P(3)=\frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A=\{7,11,13,19\}$, $B=\{2,5,7,13,17\}$ y $C=\{3,5,7,11,13\}$. Se pide calcular:

a) (1.25 puntos) $P\left(\overline{(A-C)}\cap B\right)$.

b) (1.25 puntos) $P\left((A\cap B)/\overline{C}\right)$.

Solución:

Como $P(7)=P(3)=\frac{1}{4}$, $P(E)=1$ y $P(2)=P(5)=P(11)=P(13)=P(17)=P(19)=p$

entonces $6p+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1\Rightarrow 6p+\frac{1}{2}=1\Rightarrow 6p=\frac{1}{2}\Rightarrow p=\frac{1}{12}$.

Tenemos que $P(2)=P(5)=P(11)=P(13)=P(17)=P(19)=\frac{1}{12}$

a) Obtenemos el suceso $\overline{(A-C)}\cap B$.

$$\left.\begin{array}{l}A=\{7,11,13,19\}\\C=\{3,5,7,11,13\}\end{array}\right\}\Rightarrow A-C=\{19\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{A-C}=E-\{19\}=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}-\{19\}=\{2,3,5,7,11,13,17\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A-C}=\{2,3,5,7,11,13,17\}\\B=\{2,5,7,13,17\}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{(A-C)}\cap B=B=\{2,5,7,13,17\}$$

Hallamos la probabilidad pedida.

$$P\left(\overline{(A-C)}\cap B\right)=P(2)+P(5)+P(7)+P(13)+P(17)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\boxed{\frac{7}{12}}$$

b) Determinamos el suceso $(A\cap B)/\overline{C}$.

$$\left.\begin{array}{l}A=\{7,11,13,19\}\\B=\{2,5,7,13,17\}\end{array}\right\}\Rightarrow A\cap B=\{7,13\}$$

$$\left.\begin{array}{l}C=\{3,5,7,11,13\}\\E=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{C}=E-C=\{2,17,19\}$$

$$\left.\begin{array}{l}A\cap B=\{7,13\}\\\overline{C}=\{2,17,19\}\end{array}\right\}\Rightarrow (A\cap B)/\overline{C}=\varnothing$$

El suceso $(A\cap B)/\overline{C}$ es un suceso imposible y su probabilidad es cero: $P\left((A\cap B)/\overline{C}\right)=0$

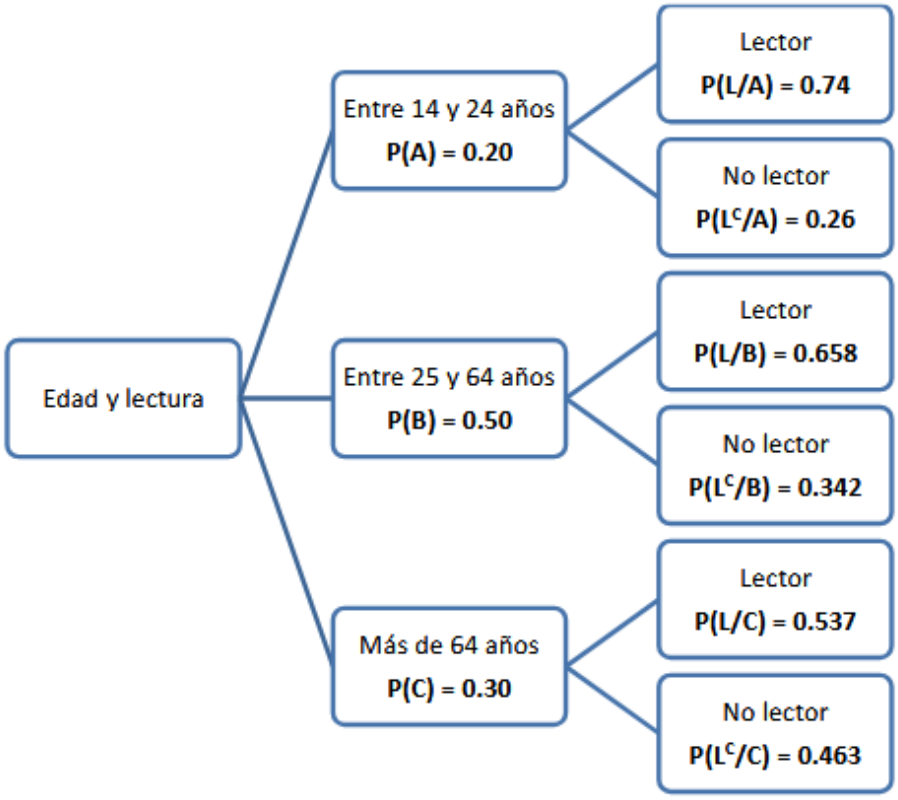
BY NC SA

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.

b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información. Llamamos A, B y C a los sucesos "edad entre 14 y 24 años", "edad entre 25 y 64" y "mayor de 64 años", respectivamente. También llamamos L a "ser lector habitual".



a) Nos piden calcular $P(L)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(L)=P(A)P(L/A)+P(B)P(L/B)+P(C)P(L/C)=$$

$$=0.2\cdot 0.74+0.5\cdot 0.658+0.3\cdot 0.537=\boxed{0.6381}$$

b) Nos piden calcular $P(B/L^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/L^c)=\frac{P(B\cap L^c)}{P(L^c)}=\frac{P(B)P(L^c/B)}{1-P(L)}=\frac{0.5\cdot 0.342}{1-0.6381}=\boxed{\frac{1710}{3619}\simeq 0.4725}$$

a) P(lector habitual) = 0,6381; b) P = 0,4725

BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $k=0$.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA=\left(A+A^2\right)B$.

b) (1 punto) Con la matriz $A_1=A$, se consideran las matrices $A_2=A_1^{\,2}+A_1$, $A_3=A_2^{\,2}+A_2$, $A_4=A_3^{\,2}+A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 2:

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D.
¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3:

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$.

a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.

b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.

b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4:

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.

c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.

b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1:

Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k.
b) (1 punto) Resolver el sistema para $k=0$.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA=\left(A+A^2\right)B$.

b) (1 punto) Con la matriz $A_1=A$, se consideran las matrices $A_2=A_1^{\,2}+A_1$, $A_3=A_2^{\,2}+A_2$, $A_4=A_3^{\,2}+A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}.

Solución 1.1:

a) El sistema es $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}$. La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 0 \\ k+1 & 1 & -k & k \\ 1 & k+1 & 0 & 2k \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & -k \\ 1 & k+1 & 0 \end{vmatrix}=0-k+\left(k+1\right)^2-1-0+k^2\left(k+1\right)=$$

$$=-k+k^2+1+2k-1+k^3+k^2=k^3+2k^2+k=k\left(k^2+2k+1\right)$$

$$|A|=0\Rightarrow k\left(k^2+2k+1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{k=0}\\ k^2+2k+1=0\rightarrow\boxed{k=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}=-1}\end{cases}$$

Establecemos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq 0$ y $k\neq -1$.

En este caso el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

BY NC SA

CASO 2. $k=0$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$.

$$A/B=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\{\text{Fila } 2^a\leftrightarrow\text{Fila } 1^a\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^a-\text{Fila } 1^a\\1\quad 1\quad 0\quad 0\\-1\quad -1\quad 0\quad 0\\\hline 0\quad 0\quad 0\quad 0\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{matrix}\overbrace{1&1&0&0}^{A/B}\\0&1&1&0\\\underbrace{0&0&0}_{A}&0\end{matrix}\right)$$

El rango de A y de A/B es 2, tienen el mismo rango y es menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 1. $k=-1$

En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&1&1&-1\\1&0&0&-2\end{pmatrix}$.

$$A/B=\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&1&1&-1\\1&0&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 1^a\\1\quad 0\quad 0\quad -2\\-1\quad 1\quad 1\quad 0\\\hline 0\quad 1\quad 1\quad -2\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\0&1&1&-1\\0&1&1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{Fila } 3^a-\text{Fila } 2^a\\0\quad 1\quad 1\quad -2\\0\quad -1\quad -1\quad 1\\\hline 0\quad 0\quad 0\quad -1\rightarrow\text{Nueva Fila } 3^a\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{matrix}\overbrace{-1&1&1&0}^{A/B}\\0&1&1&-1\\\underbrace{0&0&0}_{A}&-1\end{matrix}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

Resumiendo: Si $k\neq 0$ y $k\neq -1$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k=0$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y si $k=-1$ el sistema es incompatible (sin solución).

b) Hemos visto en el apartado anterior que para $k=0$ el sistema tiene infinitas soluciones. Las determinamos partiendo el sistema equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+y=0\\y+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x=-y\\z=-y\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=-\lambda\\y=\lambda\\z=-\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=-\lambda\\y=\lambda\\z=-\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=-\lambda\\y=\lambda\\z=-\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$.

BY NC SA

Solución 1.2:

a) Calculamos la expresión de la matriz $A+A^2$.

$$A+A^2=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-5 & 5-15\\ -1+3 & -5+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Consideramos la matriz simétrica $B=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$. Resolvemos la igualdad planteada.

$$BA=\left(A+A^2\right)B\Rightarrow\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a-b & 5a-3b\\ b-c & 5b-3c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3a-5b & -3b-5c\\ a+b & b+c\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a-b=-3a-5b\\ 5a-3b=-3b-5c\\ b-c=a+b\\ 5b-3c=b+c\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4a+4b=0\\ 5a=-5c\\ -c=a\\ 4b-4c=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b=-a\\ a=-c\\ -c=a\\ b=c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b=-a\\ -a=c\\ b=c\end{array}\right\}\Rightarrow b=c=-a\Rightarrow\boxed{B=\begin{pmatrix}a & -a\\ -a & -a\end{pmatrix}}$$

Las matrices B que cumplen lo pedido son $B=\begin{pmatrix}a & -a\\ -a & -a\end{pmatrix}$, siendo a cualquier número real.

b) Tenemos que $A_1=A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

$$A_2=A_1^2+A_1=A^2+A=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_2=A_1^2+A_1=A^2+A=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_3=A_2^2+A_2=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}9-5 & 15-5\\ -3+1 & -5+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=A_1$$

$$A_4=A_3^2+A_3=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-5 & 5-15\\ -1+3 & -5+9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}=A_2$$

La secuencia que hemos observado es la siguiente:

$$A_1,\ A_2,\ A_3=A_1,\ A_4=A_2,\ A_5=A_1,\ A_6=A_2,\ldots.$$

En las posiciones impares aparece A_1 y en las pares aparece A_2.

Como 2025 es impar tenemos que $A_{2025}=A_1=A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

BY NC SA

BLOQUE SIN OPTATIVIDAD

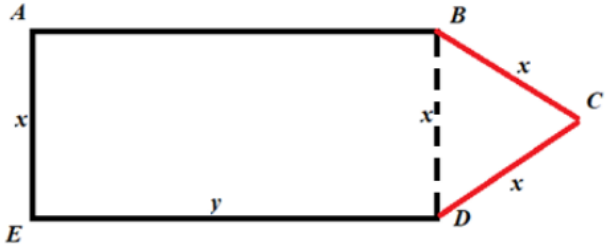
Ejercicio 2:

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E. Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D.
¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

Solución:

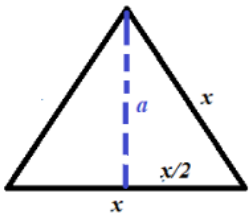
a) Dibujamos la parcela.



El perímetro de la parcela es $3x+2y$. Como debe tener 120 metros de longitud obtenemos una igualdad de la que despejamos "y".

$$3x+2y=120 \Rightarrow 2y=120-3x \Rightarrow \boxed{y=60-\frac{3}{2}x}$$

El área de la parcela es el área del rectángulo más el área del triángulo equilátero.



Hallamos el valor de la altura del triángulo equilátero para poder hallar su área.

$$x^2=a^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2=a^2+\frac{x^2}{4} \Rightarrow a^2=x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4} \Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\text{Área } BCD=\frac{x\cdot a}{2}=\frac{x\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

El área del rectángulo vale $xy=x\left(60-\frac{3}{2}x\right)=60x-\frac{3}{2}x^2$

El área total de la parcela es la suma de las dos áreas obtenidas.

BY NC SA

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+60x-\frac{3}{2}x^2=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+60x\text{, siendo } 0\le x\le 40$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x)=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+60x\Rightarrow A'(x)=\frac{\sqrt{3}-6}{2}x+60$$

$$A'(x)=0\Rightarrow\frac{\sqrt{3}-6}{2}x+60=0\Rightarrow\left(\sqrt{3}-6\right)x+120=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-120}{\sqrt{3}-6}=\frac{120\sqrt{3}+720}{36-3}=\frac{40\sqrt{3}+240}{11}=28.12\,metros$$

Comprobamos si para este valor la segunda derivada es negativa.

$$A'(x)=\frac{\sqrt{3}-6}{2}x+60\Rightarrow A''(x)=\frac{\sqrt{3}-6}{2}\Rightarrow A''(28.12)=\frac{\sqrt{3}-6}{2}<0$$

La segunda derivada es negativa y el área es máxima para $x=\frac{40\sqrt{3}+240}{11}\simeq 28.12$ metros.

Para este valor determinamos el valor de y.

$$y=60-\frac{3}{2}\left(\frac{40\sqrt{3}+240}{11}\right)=60-\frac{60\sqrt{3}+360}{11}=\frac{300-60\sqrt{3}}{11}\simeq 17.83\text{ metros.}$$

El área de la parcela es máxima cuando situamos el punto B a17.83 metros de A y el E a 28.12 metros de A.

BY NC SA

Ejercicio 3:

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Sean los puntos $A(1,1,2)$, $B(2,-1,0)$, $C(-2,0,3)$ y $D(2,-3,-1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$.

a) (0.5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.

b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Pregunta 3.2. Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,0,1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.

b) (1.5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

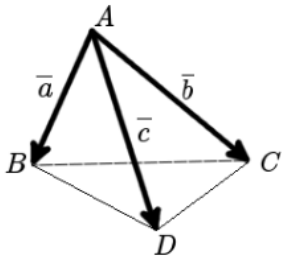
Solución 3.1:

a) Hallamos los vectores que definen el tetraedro ABCD. Si su volumen es nulo quiere decir que los puntos son coplanarios y no definen un tetraedro. Si el volumen es distinto de cero es que los puntos no son coplanarios y definen un tetraedro.
El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$.

$$\left.\begin{matrix} A(1,1,2) \\ B(2,-1,0) \\ C(-2,0,3) \\ D(2,-3,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (2,-1,0)-(1,1,2) = (1,-2,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,3)-(1,1,2) = (-3,-1,1) \\ \overrightarrow{AD} = (2,-3,-1)-(1,1,2) = (1,-4,-3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 3-2-24-2+18+4 = -3 \neq 0$$

El producto mixto es distinto de cero y los puntos A, B, C y D no son coplanarios.
El volumen del tetraedro definido por ellos vale $\frac{3}{6} = 0.5$ unidades cúbicas.



b) La cara ABC es un triángulo hallamos su área como la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB} = (1,-2,-2) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2i+6j-k-6k-j-2i =$$

BY NC SA

$$= -4i + 5j - 7k = (-4, 5, -7)$$

$$Área\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-7)^2}}{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{10}}{2} = 4.74\ u^2}$$

Si dividimos el volumen del paralelepípedo ABCD entre el área del rectángulo de la base tendremos el valor de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

$$Altura = \frac{Volumen\ paralelepípedo\ ABCD}{Área\ Base\ ABC} = \frac{\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{10} \simeq 0.3162u}$$

c) La recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1}$ tiene como vector director $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1)$.

La recta s determinada por los puntos B y D tiene como vector director $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BD}$.

$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{BD} = (2, -3, -1) - (2, -1, 0) = (0, -2, -1)$$

Las rectas tienen vectores con coordenadas no proporcionales, por lo que se cortan o se cruzan (no son ni paralelas ni coincidentes).

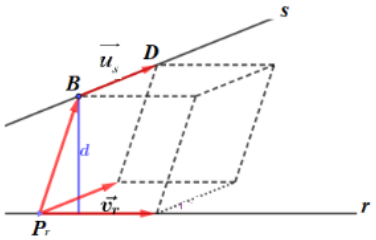
Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rB}\right]$.

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1) \\ P_r(1, -1, 0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} P_r(1, -1, 0) \\ B(2, -1, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rB} = (2, -1, 0) - (1, -1, 0) = (1, 0, 0)$$

$$\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rB}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 0 - 2 - 0 - 0 = -3 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan y la distancia entre ellas se obtiene con la fórmula $d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s}\right|}$.



$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{u_s} = (0, -2, -1) \\ \overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3i - 2j + 4k = (3, -2, 4)$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s}\right|} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{3}{\sqrt{29}} = \boxed{\frac{3\sqrt{29}}{29} \simeq 0.557\ unidades}$$

La distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D tiene un valor de $\frac{3\sqrt{29}}{29} = 0.557$ unidades.

BY NC SA

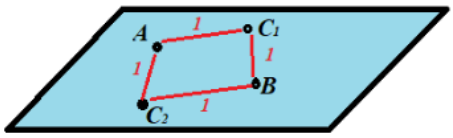
Solución 3.2.:

a) El eje OZ es una recta con vector director $\vec{v}=(0,0,1)$. El plano paralelo al eje OZ tiene como uno de sus vectores directores el vector $\vec{v}=(0,0,1)$. Otro de sus vectores directores es el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,0,1)-(0,0,1)=(1,0,0)\\ \vec{v}=(0,0,1)\\ A(0,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y & z-1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=y=0$$

El plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B tiene ecuación $\pi: y=0$.

b) La recta perpendicular al plano $z=1$ tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n}=(0,0,1)$. Para definir la recta solo falta un punto por el que pase. Este punto puede ser un punto del plano $z=1$ que diste una unidad tanto del punto A como del punto B. Determinamos las coordenadas de este punto o puntos.



$$\left.\begin{array}{l}A(0,0,1)\\ B(1,0,1)\\ C\in z=1\Rightarrow C(a,b,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(a,b,1)-(0,0,1)=(a,b,0)\\ \overrightarrow{BC}=(a,b,1)-(1,0,1)=(a-1,b,0)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}d(A,C)=1\\ d(B,C)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}|\overrightarrow{AC}|=1\\ |\overrightarrow{BC}|=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\sqrt{a^2+b^2+0^2}=1\\ \sqrt{(a-1)^2+b^2+0^2}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a^2+b^2=1\\ (a-1)^2+b^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b^2=1-a^2\\ (a-1)^2+b^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow(a-1)^2+1-a^2=1\Rightarrow a^2+1-2a+1-a^2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2a=0\Rightarrow\boxed{a=\frac{1}{2}}\Rightarrow b^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\Rightarrow\boxed{b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}C_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)\\ C_2\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2},1\right)\end{array}\right.$$

Una de las rectas que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n}=(0,0,1)$ y pasa por el punto $C_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(0,0,1)\\ C_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r:\left\{\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ z=1+\alpha\end{array}\right.,\ \alpha\in\mathbb{R}}$$

La otra recta que cumple lo pedido tiene como vector director $\vec{n}=(0,0,1)$ y pasa por el punto $C_2\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2},1\right)$

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\vec{n}=(0,0,1)\\ C_2\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2},1\right)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ z=1+\lambda\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 4:

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75.67 y desviación típica 11.05. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.

c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0.08 y en un día seco es de 0.004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0.032. Hoy un corredor ha salido. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.

b) (1.25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

Solución 4.1:

Llamamos X a la variable aleatoria que da la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población. $X = N(75.67, 11.05)$

a) Nos piden calcular $P(60 \le X \le 80)$.

$$P(60 \le X \le 80) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{60-75.67}{11.05} \le Z \le \frac{80-75.67}{11.05}\right) =$$

$$= P(-1.42 \le Z \le 0.39) = P(Z \le 0.39) - P(Z \le -1.42) =$$

$$= P(Z \le 0.39) - P(Z \ge 1.42) = P(Z \le 0.39) - [1 - P(Z \le 1.42)] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.6517 - 1 + 0.9222 = \boxed{0.5739}$$

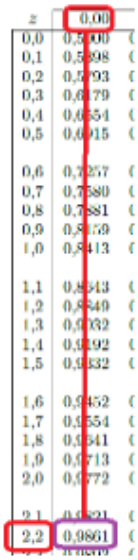
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319

BY NC SA

b) Nos piden calcular $P(X>100)$.

$$P(X>100)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{100-75.67}{11.05}\right)=P(Z>2.2)=$$

$$=1-P(Z\le 2.2)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.9861=\boxed{0.0139}$$



z	0,00
0,0	0,5000
0,1	0,5398
0,2	0,5793
0,3	0,6179
0,4	0,6554
0,5	0,6915
0,6	0,7257
0,7	0,7580
0,8	0,7881
0,9	0,8159
1,0	0,8413
1,1	0,8643
1,2	0,8849
1,3	0,9032
1,4	0,9192
1,5	0,9332
1,6	0,9452
1,7	0,9554
1,8	0,9641
1,9	0,9713
2,0	0,9772
2,2	0,9861

c) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de hombres que superan los 100 kilogramos de un grupo de 10. Esta variable es una binomial de parámetros n = 10 y p = 0.0139. Y = B(10, 0.0139).
Nos piden hallar $P(Y\le 1)$.

$$P(Y\le 1)=P(Y=0)+P(Y=1)=\binom{10}{0}0.0139^0\cdot 0.9861^{10}+\binom{10}{1}0.0139^1\cdot 0.9861^9=$$

$$=0.9861^{10}+10\cdot 0.0139\cdot 0.9861^9=\boxed{0.9919}$$

P = 0,9919

BY NC SA

Solución 4.2:

Llamamos L al suceso "Llueve ese día" y C a "el corredor sufre una caída".
Nos dicen que $P(C/L)=0.08$, $P\left(C/\overline{L}\right)=0.004$ y $P(L\cap C)=0.032$.
Obtenemos la probabilidad de que llueva un día cualquiera:

$$P(C/L)=\frac{P(L\cap C)}{P(L)}\Rightarrow 0.08=\frac{0.032}{P(L)}\Rightarrow P(L)=\frac{0.032}{0.08}=0.4$$

a) Nos piden hallar el valor de $P\left(\overline{C}\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(\overline{C}\right)=P(L)P\left(\overline{C}/L\right)+P\left(\overline{L}\right)P\left(\overline{C}/\overline{L}\right)=$$

$$=P(L)\left[1-P(C/L)\right]+\left[1-P(L)\right]\left[1-P\left(C/\overline{L}\right)\right]=$$

$$=0.4(1-0.08)+(1-0.4)(1-0.004)=\boxed{0.9656}$$

La probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído es de 0.9656.

b) Nos piden calcular $P\left(\overline{L}/C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(\overline{L}/C\right)=\frac{P\left(\overline{L}\cap C\right)}{P(C)}=\frac{P\left(\overline{L}\right)P\left(C/\overline{L}\right)}{1-P\left(\overline{C}\right)}=\frac{(1-0.4)0.004}{1-0.9656}=\boxed{\frac{3}{43}\simeq 0.0698}$$

La probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo vale $\frac{3}{43}\simeq 0.0698$.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Región de Murcia	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m>0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por *m* más el sueldo de Darío (sin multiplicar por *m*) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por *m*) es 600 €.

a) **[0,75]** Denotando por *x* el sueldo de Darío, por *y* el sueldo de Hugo y por *z* el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25]** Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de *m*).

c) **[1,5]** Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de *m*), y lo que cobra cada uno para $m=2$.

1B) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}$.

a) **[1,25]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,25]** Resuelva la ecuación $A^tXB=C$, donde A^t es la traspuesta de *A*.

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos *x* e *y* cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) **[0,5]** Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) **[2]** Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

2B) Considere la función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)dx$

b) **[1]** Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

BY NC SA

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) Considere las rectas

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=5+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x=7+3\mu \\ y=-5+\mu \\ z=7 \end{cases}$$

a) **[0,5]** Compruebe que se cruzan.
b) **[1,5]** Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
c) **[0,5]** Calcule la distancia entre *r* y *s*.

3B) Considere los planos $\pi_1 : x-y+z=0$ y $\pi_2 : x+y-z=2$

a) **[1]** Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2.

b) **[0,75]** Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2.

c) **[0,75]** Calcule la proyección ortogonal de *P* en π_1

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2, tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1, depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2. Calcule la probabilidad de que:
a) **[0,5]** Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.
b) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.
c) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2.
d) **[0,5]** Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2.

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.
a) **[1]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
b) **[1,5]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A:

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m>0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por *m* más el sueldo de Darío (sin multiplicar por *m*) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por *m*) es 600 €.

a) **[0,75]** Denotando por *x* el sueldo de Darío, por *y* el sueldo de Hugo y por *z* el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25]** Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de *m*).

c) **[1,5]** Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de *m*), y lo que cobra cada uno para $m=2$.

Solución 1A:

a) Obtenemos las ecuaciones asociadas al ejercicio.

El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m>0 \rightarrow x=my$.

El sueldo de Hugo es el doble del de José → $y=2z$.

La suma del sueldo de José multiplicado por *m* más el sueldo de Darío (sin multiplicar por *m*) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por *m*) es 600 € → $mz+x+y=600$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x=my \\ y=2z \\ mz+x+y=600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-my=0 \\ y-2z=0 \\ x+y+mz=600 \end{array}\right\}$$

b) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & m & 600 \end{pmatrix}$.

Determinamos la expresión del determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m+2m+0-0-0+2=3m+2$$

Esta expresión del determinante de A nunca se anula pues $m>0 \rightarrow 3m>0 \rightarrow 3m+2>0$.

El rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado para cualquier valor de $m>0$.

BY NC SA

c) Intentamos resolver el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = my \\ y = 2z \\ mz + x + y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = m\cdot 2z \\ mz + x + 2z = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2mz \\ (m+2)z + x = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m+2)z + 2mz = 600 \Rightarrow (m+2+2m)z = 600 \Rightarrow (3m+2)z = 600 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m > 0 \Rightarrow 3m+2 \neq 0\} \Rightarrow \boxed{z = \frac{600}{3m+2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 2m\frac{600}{3m+2} = \frac{1200m}{3m+2}} \\ \boxed{y = 2\frac{600}{3m+2} = \frac{1200}{3m+2}} \end{cases}$$

El sueldo de Darío es $\frac{1200m}{3m+2}$, el de Hugo es $\frac{1200}{3m+2}$ y el de José es $\frac{600}{3m+2}$. Todos dependen del valor de *m*.

Para $m = 2$ los sueldos quedan: El sueldo de Darío es $\frac{1200\cdot 2}{3\cdot 2+2} = 300$ euros, el de Hugo es $\frac{1200}{3\cdot 2+2} = 150$ euros y el de José es $\frac{600}{3\cdot 2+2} = 75$ euros

x = 300 €, y = 150 €, z = 75 €.

BY NC SA

Ejercicio 1B:

1B) Considere las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}$.

a) **[1,25]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,25]** Resuelva la ecuación $A^tXB=C$, donde A^t es la traspuesta de A.

Solución 1B:

a) Para que las matrices sean invertibles su determinante debe ser distinto de cero. Lo comprobamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-1=5\neq 0$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$$

Ambas matrices son invertibles. Determinamos la matriz inversa de cada una de ellas.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{5}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5 & -1/5\\ -1/5 & 2/5\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

b) Como la matriz A es simétrica se cumple que $A^t=A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^tXB=C\Rightarrow AXB=C\Rightarrow AX=CB^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$$

Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15-5 & 0+0\\ -5+10 & 0+0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10+0 & 0+0\\ 5-0 & 0+0\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}10 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD

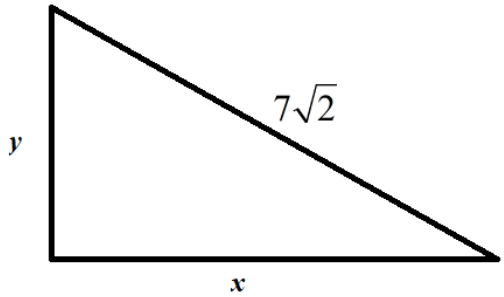
Ejercicio 2A:

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):
2A) Considere el triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.
a) **[0,5]** Demuestre que su área viene dada por la expresión

$$f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) **[2]** Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

Solución:



a) Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo del dibujo.

$$x^2+y^2=\left(7\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow x^2+y^2=98\Rightarrow y^2=98-x^2\Rightarrow y=\sqrt{98-x^2}$$

El área del triángulo rectángulo ($f(x)$) es la mitad del producto de la base (x) por la altura (y).

$$f(x)=\frac{xy}{2}=\frac{x\sqrt{98-x^2}}{2}=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}$$

b) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función área.

$$f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{98-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{98-x^2}+\frac{1}{2}x\frac{-2x}{2\sqrt{98-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{98-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{98-x^2}{2\sqrt{98-x^2}}-\frac{x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{98-x^2-x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{98-2x^2}{2\sqrt{98-x^2}}=\frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{49-x^2}{\sqrt{98-x^2}}=0\Rightarrow 49-x^2=0\Rightarrow x^2=49\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{49}=7}$$

No consideramos el valor negativo de la raíz pues se trata de la longitud.
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=7$.

BY NC SA

- En el intervalo $(0,7)$ consideramos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{49-1^2}{\sqrt{98-1^2}}=\dfrac{48}{\sqrt{97}}>0$.

  La función crece en $(0,7)$.

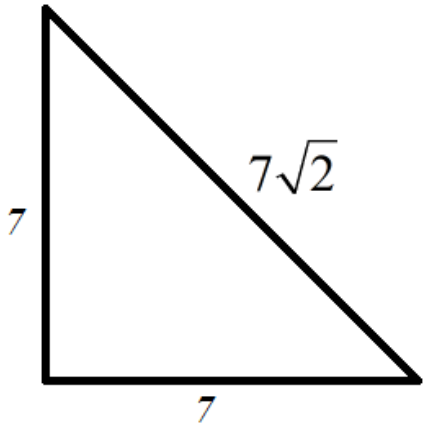
- En el intervalo $\left(7,7\sqrt{2}\right)$ consideramos $x=8$ y la derivada vale

  $f'(8)=\dfrac{49-8^2}{\sqrt{98-8^2}}=\dfrac{-15\sqrt{34}}{34}<0$. La función decrece en $\left(7,7\sqrt{2}\right)$.

Como la función crece antes y decrece después de $x=7$ podemos afirmar que el área presenta un máximo relativo en dicho valor.

Para $x=7$ el valor del otro cateto es $y=\sqrt{98-7^2}=7$. El triángulo rectángulo cumpliendo las condiciones con área máxima tiene ambos catetos iguales y de longitud 7 cm.

Este valor máximo del área es $f(7)=\dfrac{7\cdot 7}{2}=24.5$ centímetros cuadrados.



$$\textbf{Área} = \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2}}\ \boldsymbol{u^2}$$

BY NC SA

Ejercicio 2B:

2B) Considere la función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[1]** Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

Solución 2B:

a) Calculamos la integral usando las propiedades de los logaritmos.

$$\int f(x)\,dx=\int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx=\int \ln(x+1)-\ln x\,dx=\int \ln(x+1)\,dx-\int \ln x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln(x+1)\to du=\frac{1}{x+1}dx\\ dv=dx\to v=\int dx=x\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=dx\to v=\int dx=x\end{array}\right\}=$$

$$=x\ln(x+1)-\int x\frac{1}{x+1}dx-\left[x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx\right]=$$

$$=x\ln(x+1)-\int \frac{x}{x+1}dx-x\ln x+\int dx=x\ln(x+1)-\int \frac{x+1-1}{x+1}dx-x\ln x+x=$$

$$=x+x\ln(x+1)-x\ln x-\int \frac{x+1}{x+1}dx-\int \frac{-1}{x+1}dx=x+x\ln(x+1)-x\ln x-\int dx+\int \frac{1}{x+1}dx=$$

$$=\cancel{x}+x\ln(x+1)-x\ln x-\cancel{x}+\ln(x+1)=\boxed{(x+1)\ln(x+1)-x\ln x+C}$$

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x)\,dx=(x+1)\ln(x+1)-x\ln x+C$ **..**

b) Buscamos los posibles puntos de corte de la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\\ Eje\ OX\to y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=0\Rightarrow \frac{x+1}{x}=1\Rightarrow x+1=x\Rightarrow 1=0$$

BY NC SA

La gráfica de la función no corta el eje OX. En el intervalo (1, 2) la función es positiva, pues si tomamos un valor del intervalo, por ejemplo $x=1.5$ y sustituimos tenemos que $f(1.5)=\ln\left(\frac{1.5+1}{1.5}\right)\approx 0.51>0$.

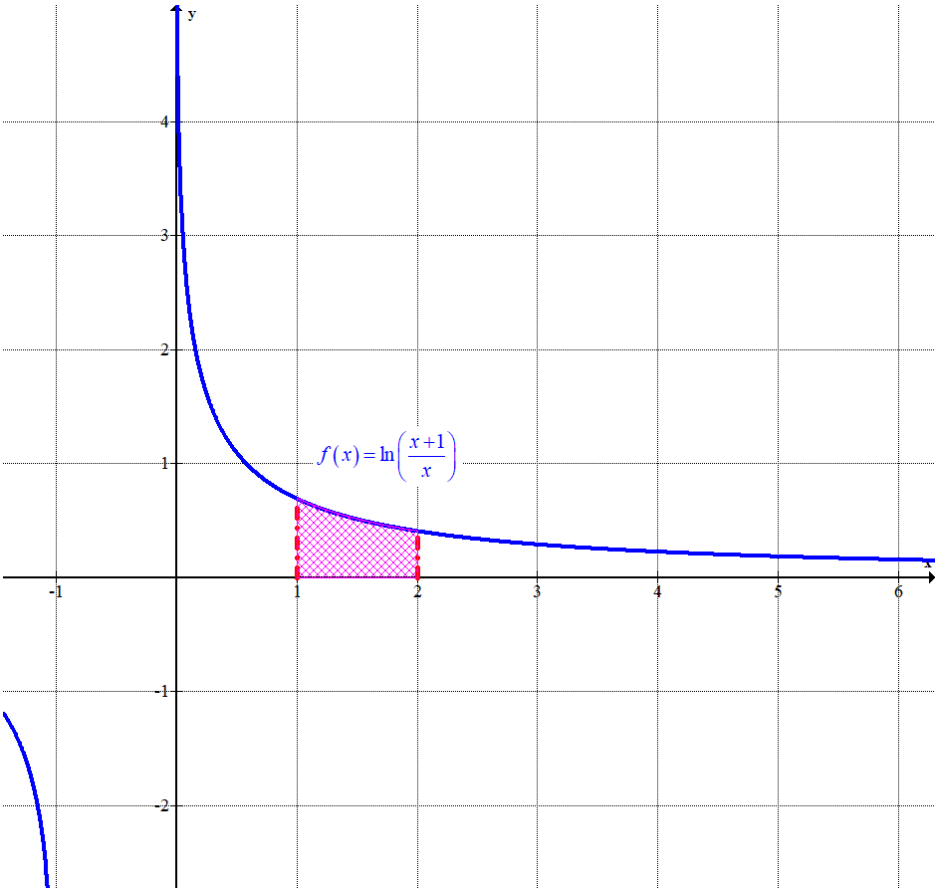
El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=1$ y $x=2$ es el valor de la integral definida de la función entre 1 y 2.

$$Área=\int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx=\Big[(x+1)\ln(x+1)-x\ln x\Big]_1^2=$$

$$=\Big[(2+1)\ln(2+1)-2\cdot\ln 2\Big]-\Big[(1+1)\ln(1+1)-1\cdot\ln 1\Big]=$$

$$=3\ln 3-2\ln 2-2\ln 2=3\ln 3-4\ln 2=\ln 3^3-\ln 2^4=\ln 27-\ln 16=\boxed{\ln\left(\frac{27}{16}\right)}$$

Se cumple lo indicado en el ejercicio.



BY NC SA

Ejercicio 3A:

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):
3A) Considere las rectas

$$r:\begin{cases}x=1\\y=5+\lambda\\z=\lambda\end{cases}\quad \text{y}\quad s:\begin{cases}x=7+3\mu\\y=-5+\mu\\z=7\end{cases}$$

a) **[0,5]** Compruebe que se cruzan.
b) **[1,5]** Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
c) **[0,5]** Calcule la distancia entre *r* y *s*.

Solución 3A:

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases}x=1\\y=5+\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}\vec{u_r}=(0,1,1)\\P_r(1,5,0)\end{cases}\qquad s:\begin{cases}x=7+3\mu\\y=-5+\mu\\z=7\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}\vec{v_s}=(3,1,0)\\Q_s(7,-5,7)\end{cases}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes pes tienen vectores directores con coordenadas no proporcionales.

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_s}=(3,1,0)\\\vec{u_r}=(0,1,1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \frac{3}{0}\neq\frac{1}{1}\neq\frac{0}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $\left[\vec{u_r},\vec{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{matrix}P_r(1,5,0)\\Q_s(7,-5,7)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(7,-5,7)-(1,5,0)=(6,-10,7)$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{u_r}=(0,1,1)\\\vec{v_s}=(3,1,0)\\\overrightarrow{P_rQ_s}=(6,-10,7)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left[\vec{u_r},\vec{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}0&1&1\\3&1&0\\6&-10&7\end{vmatrix}=0+0-30-6-21-0=-57\neq 0$$

Como el valor de este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

b) Hallamos el vector director de la recta *t* perpendicular a ambas como el producto vectorial de los vectores directores de *r* y *s*.

$$\left.\begin{matrix}\vec{u_r}=(0,1,1)\\\vec{v_s}=(3,1,0)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \vec{w_t}=\vec{u_r}\times\vec{v_s}=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&1&1\\3&1&0\end{vmatrix}=0+3j+0-3k-0-i=-i+3j-3k=(-1,3,-3)$$

BY NC SA

Hallamos la ecuación del plano π que contiene a la recta *r* y que también tiene como vector director $\overrightarrow{w_t}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_t}=(-1,3,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ P_r(1,5,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y-5 & z\\ -1 & 3 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 3(x-1)-0-z+0+y-5+3(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-3-z+y-5+3x-3=0\Rightarrow \boxed{\pi: 6x+y-z-11=0}$$

Hallamos la ecuación del plano π ´ que contiene a la recta *s* y que también tiene como vector director $\overrightarrow{w_t}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_t}=(-1,3,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(3,1,0)\\ Q_s(7,-5,7)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-7 & y+5 & z-7\\ -1 & 3 & -3\\ 3 & 1 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0-9(y+5)-z+7-9(z-7)-0+3(x-7)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y-45-z+7-9z+63+3x-21=0\Rightarrow \boxed{\pi': 3x-9y-10z+4=0}$$

La recta *t* buscada es la intersección de los dos planos $\pi: 6x+y-z-11=0$ y $\pi': 3x-9y-10z+4=0$.

$$t:\begin{cases}6x+y-z-11=0\\ 3x-9y-10z+4=0\end{cases}$$

c) Para hallar la distancia entre las dos rectas *r* y *s* que se cruzan determinamos el plano π´´ que contiene a la recta *r* y que es paralelo a la recta *s*. La distancia entre las rectas *r* y *s* es el valor de la distancia de un punto de la recta *s* al plano π´´.
Hallamos la ecuación del plano π´´ que contiene a la recta *r* y tiene como otro de sus vectores directores el director de la recta *s*. Este plano tiene como vector normal el vector director de la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n''}=\overrightarrow{w_t}=(-1,3,-3)\\ P_r(1,5,0)\in\pi''\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi'': -x+3y-3z+D=0\\ P_r(1,5,0)\in\pi''\end{array}\right\}\Rightarrow -1+3\cdot 5-3\cdot 0+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14+D=0\Rightarrow D=-14\Rightarrow \boxed{\pi'': -x+3y-3z-14=0}$$

Hallamos la distancia de $Q_s(7,-5,7)$ al plano $\pi'': -x+3y-3z-14=0$.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l} Q_s(7,-5,7) \\ \pi'': -x+3y-3z-14=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(r,s)=d(Q_s,\pi'')=\frac{|-7+3(-5)-3\cdot 7-14|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}}=\frac{57}{\sqrt{19}}=3\sqrt{19}$$

La distancia entre *r* y *s* tiene un valor de $3\sqrt{19}$ unidades.

$$\mathbf{d(r,s)=3\sqrt{19}\ u}$$

BY NC SA

Ejercicio 3B:

3B) Considere los planos $\pi_1 : x-y+z=0$ y $\pi_2 : x+y-z=2$

a) **[1]** Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2.

b) **[0,75]** Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2.

c) **[0,75]** Calcule la proyección ortogonal de P en π_1

Solución 3B:

a) La ecuación implícita de la recta donde se cortan los planos es $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$. Obtenemos la ecuación paramétrica de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y-z+y-z=2 \Rightarrow 2y-2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x=1+z-z=1 \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

La ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2 es $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

b) Comprobamos que el punto P no pertenece a ninguno de los dos planos.

$$\left.\begin{matrix} ¿P(1,2,3)\in\pi_1\,? \\ \pi_1 : x-y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿1-2+3=0\,? \Rightarrow ¿2=0\,?$$

$$\left.\begin{matrix} ¿P(1,2,3)\in\pi_2\,? \\ \pi_2 : x+y-z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ¿1+2-3=2\,? \Rightarrow ¿0=2\,?$$

La recta s que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 es la recta paralela a la recta r que pasa por el punto P.

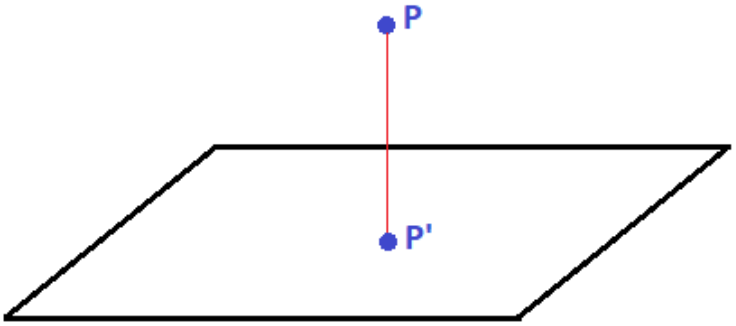
$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \Rightarrow \vec{u_r}=(0,1,1) \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3)\in s \\ \vec{v_s}=\vec{u_r}=(0,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=3+\alpha \end{cases}$$

BY NC SA

La recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2 tiene ecuación $s:\begin{cases}x=1\\y=2+\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}\\z=3+\alpha\end{cases}$

c) Debemos hallar las coordenadas del punto P´ perteneciente al plano tal que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sea paralelo a su vector normal.



$$\left.\begin{matrix}\pi_1: x-y+z=0\\ P'(a,b,c)\in\pi_1\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-b+c=0\Rightarrow a=b-c\Rightarrow P'(b-c,b,c)$$

$$\overrightarrow{PP'}=(b-c,b,c)-(1,2,3)=(b-c-1,b-2,c-3)$$

$$\pi_1: x-y+z=0\Rightarrow \vec{n_1}=(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{PP'}\parallel\vec{n_1}\Rightarrow\frac{b-c-1}{1}=\frac{b-2}{-1}=\frac{c-3}{1}\Rightarrow b-c-1=2-b=c-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b-c-1=2-b\\2-b=c-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2b=c+3\\5-b=c\end{cases}\Rightarrow 2b=5-b+3\Rightarrow 3b=8\Rightarrow b=\frac{8}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}\Rightarrow a=\frac{8}{3}-\frac{7}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow\boxed{P'\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)}$$

La proyección ortogonal de *P* en π_1 tiene coordenadas $P'\left(\frac{1}{3},\frac{8}{3},\frac{7}{3}\right)$.

BY NC SA

Ejercicio 4º:

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2, tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1, depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2. Calcule la probabilidad de que:

a) **[0,5]** Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.

b) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.

c) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2.

d) **[0,5]** Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2.

Solución 4A:

a) Si sale roja de la urna U1 entonces la urna U2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U2 es de $\frac{7}{10}=0.7$.

b) Si sale roja de la urna U1 entonces la urna U2 pasa a tener 7 bolas rojas y 3 verdes por lo que la probabilidad de extraer una bola roja de la urna U2 es de $\frac{3}{10}=0.3$.

c) Aplicamos el teorema de la probabilidad total. Sumamos las probabilidades de sacar verde en urna U2 sacando previamente de la urna U1 una bola roja y la probabilidad de sacar verde en urna U2 sacando previamente de la urna U1 una bola verde.

$$P(V_2)=P(V_1)P(V_2/V_1)+P(R_1)P(V_2/R_1)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{10}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=\boxed{0.36}$$

d) Nos piden calcular $P(R_1/R_2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R_1/R_2)=\frac{P(R_1\cap R_2)}{P(R_2)}=\frac{P(R_1)P(R_2/R_1)}{1-P(V_2)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}}{1-0.36}=\boxed{\frac{7}{16}=0.4375}$$

BY NC SA

Ejercicio 4B:

4B) El 2% de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.
a) **[1]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.
b) **[1,5]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

Solución 4B:

a) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo n = 10 y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. X = B(10, 0.98).
Existen 10 repeticiones del experimento "ver si la pieza está en buen estado" y cada repetición es independiente de las demás.
La media es $n\cdot p = 10\cdot 0.98 = 9.8$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{10\cdot 0.98\cdot 0.02} \approx 0.4427$.
Para que haya exactamente 1 pieza defectuosa debe haber 9 piezas en buen estado. Debemos calcular $P(X=9)$.

$$P(X=9) = \binom{10}{9} 0.98^9 \cdot 0.02^1 = 10\cdot 0.98^9 \cdot 0.02 \approx \boxed{0.16667}$$

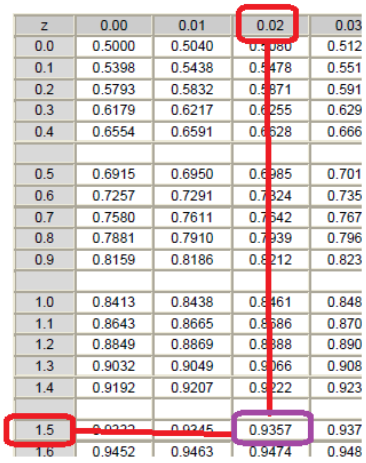
La probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa en un lote de 10 piezas vale 0.16667

b) Denominamos X = Número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo n = 2000 y p = probabilidad de que una pieza esté en buen estado = 0.98. X = B(2000, 0.98).
Para el cálculo de probabilidades dado el elevado número de elementos de la muestra aproximamos la distribución binomial a una normal Y, siendo su media $\mu = n\cdot p = 2000\cdot 0.98 = 1960$ y su desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2000\cdot 0.98\cdot 0.02} \approx 6.26$. Y = N(1960, 6.26).
Esta aproximación es buena pues $n\cdot p = 1960 > 5$ y $n\cdot q = 2000\cdot 0.02 = 40 > 5$.
Para que haya menos de 50 piezas defectuosas debe de haber más de 1950 piezas en buen estado. Nos piden calcular $P(X > 1950)$.

$$P(X>1950) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 1950.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{1950.5-1960}{6.26}\right) = P(Z \geq -1.52) = P(Z \leq 1.52) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9357}$$

BY NC SA



z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	[illegible]	0.512
0.1	0.5398	0.5438	[illegible]	0.551
0.2	0.5793	0.5832	[illegible]	0.591
0.3	0.6179	0.6217	[illegible]	0.629
0.4	0.6554	0.6591	[illegible]	0.666
0.5	0.6915	0.6950	[illegible]	0.701
0.6	0.7257	0.7291	[illegible]	0.735
0.7	0.7580	0.7611	[illegible]	0.767
0.8	0.7881	0.7910	[illegible]	0.796
0.9	0.8159	0.8186	[illegible]	0.823
1.0	0.8413	0.8438	[illegible]	0.848
1.1	0.8643	0.8665	[illegible]	0.870
1.2	0.8849	0.8869	[illegible]	0.890
1.3	0.9032	0.9049	[illegible]	0.908
1.4	0.9192	0.9207	[illegible]	0.923
1.5	[illegible]	[illegible]	0.9357	0.937
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.948

La probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas en un lote de 2 000 piezas vale 0.9357.

BY NC SA

Región de Murcia	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, sólo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{cases}$$

a) **[1]** Discute el sistema en función del parámetro k.

b) **[0,5]** Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.

c) **[1]** Calcule su solución (expresada en función de k) para cualquier valor de k para el que el sistema sea compatible determinado.

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

a) **[0,75]** Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$ y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) **[0,75]** Demuestre que la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

c) **[1]** Resuelva la ecuación matricial $X+AX=A$ expresando X en función de A.

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)$

b) **[0,5]** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$

c) **[1]** $\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)$

2B) Considere la función $f(x)=tg^3(x)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[0,75]** Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$.

c) **[0,25]** Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

BY NC SA

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

3A) a) **[1,25]** Determine el valor de a y b para que el plano $\pi : 2x + y + az = b$ contenga a la recta

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

b) **[1,25]** ¿Para qué valores de a y b corta a π? Halle el punto de corte en el caso $a = 0$ y $b = 7$.

3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1,2,1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi : x + y + 3z = 0$.

a) **[1]** Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π.
b) **[0,75]** Halle dicho punto.
c) **[0,75]** Calcule la distancia que debe recorrer.

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

a) **[1]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.
b) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.
c) **[1]** Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.

a) **[0,5]** Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
b) **[0,75]** Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
c) [0,5] Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
d) [0,75] Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1A:

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{cases}$$

a) **[1]** Discute el sistema en función del parámetro *k*.

b) **[0,5]** Calcule su solución en el caso en el que sea compatible indeterminado.

c) **[1]** Calcule su solución (expresada en función de *k*) para cualquier valor de *k* para el que el sistema sea compatible determinado.

Solución 1A:

a) Este sistema tiene asociado la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 2 \\ 1 & k & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & k \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix}=\cancel{6}+k+2k-2-\cancel{6}-k^2=-k^2+3k-2$$

$$|A|=0\Rightarrow -k^2+3k-2=0\Rightarrow k=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{2(-1)}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-3+1}{-2}=\boxed{1=k}\\ \dfrac{-3-1}{-2}=\boxed{2=k}\end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq 1$ y $k\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

BY NC SA

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&1&2\\1&1&3&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila }2^{\text{a}}&-&2\cdot\text{Fila }1^{\text{a}}&\\2&2&1&2\\-2&-2&-2&-2\\\hline0&0&-1&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }2^{\text{a}}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila }3^{\text{a}}&-&\text{Fila }1^{\text{a}}&\\1&1&3&0\\-1&-1&-1&-1\\\hline0&0&2&-1\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }3^{\text{a}}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&0\\0&0&2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila }3^{\text{a}}&+2\cdot&\text{Fila }2^{\text{a}}&\\0&0&2&-1\\0&0&-2&0\\\hline0&0&0&-1\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }3^{\text{a}}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}1&1&1\\0&0&-1\\\underbrace{0}_{A}&\underbrace{0}_{}&\underbrace{0}_{}\end{matrix}}^{A/B}&\begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $k=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la matriz ampliada. La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}$.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\1&2&3&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila }2^{\text{a}}&-&2\cdot\text{Fila }1^{\text{a}}&\\2&2&2&2\\-2&-2&-2&-2\\\hline0&0&0&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }2^{\text{a}}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila }3^{\text{a}}&-&\text{Fila }1^{\text{a}}&\\1&2&3&0\\-1&-1&-1&-1\\\hline0&1&2&-1\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }2^{\text{a}}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{Fila\,2^{\text{a}}\leftrightarrow Fila\,3^{\text{a}}\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}1&1&1\\0&1&2\\\underbrace{0}_{A}&\underbrace{0}_{}&\underbrace{0}_{}\end{matrix}}^{A/B}&\begin{matrix}1\\-1\\0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

BY NC SA

El rango de A es 2, al igual que el de A/B. Los rangos son iguales pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución), si $k = 1$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) El sistema es compatible indeterminado para $k = 2$. Hallamos la expresión de sus infinitas soluciones partiendo del sistema triangular equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ y+2z=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ y=-1-2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x-1-2z+z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2+z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-2\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=-1-2\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema para valores $k \neq 1$ y $k \neq 2$.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+2y+kz=2 \\ x+ky+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2\cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} & & & \\ 2x & +2y & +kz & =2 \\ -2x & -2y & -2z & =-2 \\ \hline & & (k-2)z & =0 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} & & & \\ x & +ky & +3z & =0 \\ -x & -y & -z & =-1 \\ \hline & (k-1)y & +2z & =-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ (k-2)z=0 \\ (k-1)y+2z=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \{k-2\neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \boxed{z=0} \\ (k-1)y+2z=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y+0=1 \\ (k-1)y+2\cdot 0=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ (k-1)y=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \{k-1\neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ \boxed{y=\dfrac{1}{1-k}} \end{array}\right. \Rightarrow x+\frac{1}{1-k}=1 \Rightarrow x=1-\frac{1}{1-k}=\frac{1-k-1}{1-k} \Rightarrow \boxed{x=\frac{k}{k-1}}$$

La solución del sistema es $x=\dfrac{k}{k-1}$, $y=\dfrac{1}{1-k}$, $z=0$, para cualquier valor de *k* distinto de 1 y 2.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1B:

1B) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 que cumple que $A^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 3 (todos sus elementos son cero).

a) **[0,75]** Demuestre que $(A+I)^2 = 2A+I$ y que $(A+I)^3 = 3A+I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

b) **[0,75]** Demuestre que la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

c) **[1]** Resuelva la ecuación matricial $X+AX=A$ expresando X en función de A.

Solución:

a) Demostramos la igualdad $(A+I)^2 = 2A+I$.

$$(A+I)^2 = (A+I)(A+I) = A^2 + A\cdot I + I\cdot A + I\cdot I = O + 2A + I = 2A + I$$

Demostramos la igualdad $(A+I)^3 = 3A+I$.

$$(A+I)^3 = (A+I)^2(A+I) = (2A+I)(A+I) = 2A^2 + 2A + A + I\cdot I = 2O + 3A + I = 3A + I$$

b) Realizamos el producto $(I-A)(I+A)$ y comprobamos que se obtiene como resultado la matriz identidad.

$$(I-A)(I+A) = I\cdot I + I\cdot A - A\cdot I - A^2 = I + A - A - O = I$$

Se cumple que el producto da como resultado la matriz identidad y la matriz $I-A$ es inversa de la matriz $I+A$.

c) Resolvemos la ecuación matricial $X+AX=A$.

$$X + AX = A \Rightarrow X(I+A) = A \Rightarrow X(I+A)(I-A) = A(I-A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\cdot I = A - A^2 \Rightarrow X = A - O \Rightarrow \boxed{X = A}$$

BY NC SA

Ejercicio 2A:

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):
2A) Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)$

b) **[0,5]** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}$

c) **[1]** $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)$

Solución:

a) Calculamos el primer límite.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{sen(x)}\right)=\frac{1}{0^+}-\frac{1}{sen(0^+)}=\frac{1}{0^+}-\frac{1}{0^+}=+\infty-\infty=In\det er\min ación=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)-x}{xsen(x)}=\frac{sen(0)-0}{0\cdot sen(0)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{sen(x)+x\cos(x)}=\frac{\cos(0)-1}{sen(0)+0\cdot\cos(0)}=\frac{0}{0}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen(x)}{\cos(x)+\cos(x)-xsen(x)}=\frac{-sen(0)}{\cos(0)+\cos(0)-0\cdot sen(0)}=\frac{0}{2}=\boxed{0}$$

b) Calculamos el segundo límite.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{9x^2+5}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}}}{18x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{36x\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{9\sqrt{2x^2+1}}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

c) Calculamos el tercer límite.

BY NC SA

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)=(+\infty)\left(e^{1/\infty}-1\right)=(+\infty)\left(e^{0}-1\right)=(+\infty)(0)=$$

$$=\mathit{In}\det er\min ación=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}=\frac{e^{1/\infty}-1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{e^{0}-1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\mathit{In}\det er\min ación(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{x^2}e^{1/x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}=e^{1/\infty}=e^{0}=\boxed{1}$$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 2B:

2B) Considere la función $f(x)=tg^3(x)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$

b) **[0,75]** Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{4}$.

c) **[0,25]** Demuestre, sin aproximar con números decimales, que el área pedida en el apartado anterior es igual a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

Solución:

a) Calculamos la integral utilizando equivalencias trigonométricas y realizando un cambio de variable.

$$\int f(x)\,dx=\int tg^3(x)\,dx=\int tg^2(x)\,tg(x)\,dx=\ldots$$

$$tg^2(x)=\frac{sen^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}-1$$

$$\ldots=\int\left(\frac{1}{\cos^2(x)}-1\right)tg(x)\,dx=\int\frac{1}{\cos^2(x)}tg(x)\,dx-\int tg(x)\,dx=\ldots$$

$$1^a\rightarrow\int\frac{1}{\cos^2(x)}tg(x)\,dx=\left\{\begin{array}{l}t=tg(x)\\dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx\end{array}\right\}=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}=\frac{tg^2(x)}{2}$$

$$2^a\rightarrow\int tg(x)\,dx=\int\frac{sen(x)}{\cos(x)}dx=\left\{\begin{array}{l}t=\cos(x)\\dt=-sen(x)\,dx\rightarrow\frac{dt}{-sen(x)}=dx\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{sen(x)}{t}\frac{dt}{-sen(x)}=-\int\frac{1}{t}dt=-\ln t=-\ln\left|\cos(x)\right|$$

$$\ldots=\frac{tg^2(x)}{2}-\left(-\ln\left|\cos(x)\right|\right)=\frac{tg^2(x)}{2}+\ln\left|\cos(x)\right|+C$$

BY NC SA

Hemos obtenido la integral indefinida: $\int f(x)\,dx = \frac{tg^2(x)}{2} + \ln\left|\cos(x)\right| + C$ **.**

b) La función tangente no se anula entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ y además es una función positiva.

El área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es el valor de la integral definida de la función entre estos dos valores.

$$Área = \int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = \left[\frac{tg^2(x)}{2} + \ln\left|\cos(x)\right|\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left[\frac{tg^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} + \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right] - \left[\frac{tg^2(0)}{2} + \ln\left|\cos(0)\right|\right] = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \ln 1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \ln 1 - \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2} - \ln 2^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{1}{2}(1 - \ln 2)}$$

c) Comprobamos si el valor obtenido $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$ es igual a $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$.

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

Es cierta la igualdad y el valor del área se puede expresar como $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right)$**.**

BY NC SA

Ejercicio 3A:

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):
3A) a) **[1,25]** Determine el valor de a y b para que el plano $\pi: 2x+y+az=b$ contenga a la recta

$$r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$$

b) **[1,25]** ¿Para qué valores de a y b corta a π? Halle el punto de corte en el caso $a=0$ y $b=7$.

Solución:

a) Para que el plano contenga a la recta debe contener a todos los puntos de la recta.

$$r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ z=x+2y \end{cases} \Rightarrow x+y+x+2y=1 \Rightarrow 2x+3y=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=1-3y \Rightarrow x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y \Rightarrow z=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y+2y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \end{cases}}$$

$$\lambda=1 \rightarrow \left.\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1 \\ y=1 \\ z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \end{cases} \rightarrow A_r(-1,1,1)\right\}$$

$$\lambda=-1 \rightarrow \left.\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2 \\ y=-1 \\ z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \rightarrow B_r(2,-1,0)\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y+az=b \\ A_r(-1,1,1)\in\pi \\ B_r(2,-1,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -2+1+a=b \\ 4-1=b \rightarrow \boxed{b=3} \end{cases} \Rightarrow 3=-1+a \Rightarrow \boxed{a=4}$$

Los valores buscados son $a=4$ y $b=3$.

b) La recta corta al plano cuando el vector director de la recta no es perpendicular al vector normal del plano. Para ello el producto escalar de ambos vectores no debe ser cero.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x+y+az=b \rightarrow \vec{n}=(2,1,a) \\ r:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda\end{cases} \rightarrow \vec{v_r}=\left(\dfrac{-3}{2},1,\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right\} \rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(2,1,a)\left(\frac{-3}{2},1,\frac{1}{2}\right)=-3+1+\frac{a}{2}=\frac{a}{2}-2$$

$$\vec{n}\cdot\vec{v_r}\neq 0 \Rightarrow \frac{a}{2}-2\neq 0 \Rightarrow a-4\neq 0 \Rightarrow \boxed{a\neq 4}$$

Para cualquier valor de *a* distinto de 4 la recta corta el plano.

Para $a=0$ y $b=7$ la recta corta al plano en un punto P ($a\neq 4$). Determinamos las coordenadas de ese punto resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x+y=7 \\ r:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\lambda\right)+\lambda=7 \Rightarrow 1-3\lambda+\lambda=7 \Rightarrow -2\lambda=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=-3 \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}(-3)=5 \\ y=-3 \\ z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(-3)=-1\end{cases} \Rightarrow \boxed{P(5,-3,-1)}$$

La recta corta al plano en el punto $P(5,-3,-1)$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 3B:

3B) Un helicóptero situado en el punto $P(1,2,1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x+y+3z=0$.

a) **[1]** Calcule la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que lo lleve al punto más cercano a π.

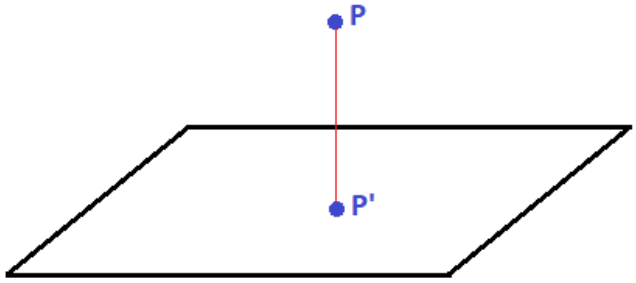
b) **[0,75]** Halle dicho punto.

c) **[0,75]** Calcule la distancia que debe recorrer.

Solución:

a) Debemos calcular la proyección ortogonal del punto P en el plano.

Hallamos la trayectoria que es la recta perpendicular al plano que pasa por P. Al ser ortogonal al plano el vector director de la recta es el vector normal del plano.



$$\pi: x+y+3z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,1)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}}$$

La ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que sigue el helicóptero para llegar al punto más cercano a π es:

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}.$$

b) El punto P′ al que llega el helicóptero lo determinamos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de recta y plano.

BY NC SA

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{3}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+\alpha\\y=2+\alpha\\z=1+3\alpha\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+3z=0\\ r:\begin{cases}x=1+\alpha\\y=2+\alpha\\z=1+3\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\alpha+2+\alpha+3(1+3\alpha)=0\Rightarrow 1+\alpha+2+\alpha+3+9\alpha=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11\alpha=-6\Rightarrow\alpha=\frac{-6}{11}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}\\y=2-\frac{6}{11}=\frac{16}{11}\Rightarrow\boxed{P'\left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right)}\\z=1-\frac{18}{11}=\frac{-7}{11}\end{cases}$$

El punto donde aterriza el helicóptero tiene coordenadas $P'\left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right)$.

c) La distancia que debe recorrer es el valor del módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\left.\begin{array}{l}P'\left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right)\\P(1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{PP'}=\left(\frac{5}{11},\frac{16}{11},\frac{-7}{11}\right)-(1,2,1)=\left(\frac{-6}{11},\frac{-6}{11},\frac{-18}{11}\right)$$

$$d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{\left(\frac{-6}{11}\right)^2+\left(\frac{-6}{11}\right)^2+\left(\frac{-18}{11}\right)^2}=\sqrt{\frac{396}{121}}=\boxed{\frac{6\sqrt{11}}{11}\approx 1.8\,unidades}$$

d(P, P') = 1.8 u

BY NC SA

Ejercicio 4º:

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) En un cine hay tres salas. En la sala S1 hay 240 espectadores, en la sala S2 hay 180 y en la sala S3 hay 80. Se sabe que la película de la sala S1 gusta al 40% de los espectadores, la de la sala S2 al 50% y la de la sala S3 al 90%. Cuando acaban las tres películas se elige a un espectador al azar.

a) **[1]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado la película.

b) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que le haya gustado si ha estado en la sala S3.

c) **[1]** Calcule la probabilidad de que haya estado en la sala S3 si le ha gustado.

Solución:

Ponemos estos datos en una tabla para obtener la información implícita y tener más cómodo acceso a toda la información.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$		240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$		180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$		80
TOTALES			

Completamos la tabla.

	Gusta la película	No gusta la película	
Sala S1	$0.4 \cdot 240 = 96$	**144**	240
Sala S2	$0.5 \cdot 180 = 90$	**90**	180
Sala S3	$0.9 \cdot 80 = 72$	**8**	80
TOTALES	**258**	**242**	**500**

a) De los 500 espectadores le gustó la película a 258. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que al espectador elegido al azar le guste la película vale $\frac{258}{500} = 0.516$.

b) A los espectadores de la sala S3 le ha gustado la película al 90%. La probabilidad de que al elegir un espectador de la sala S3 le guste la película vale 0.9.

c) La película le ha gustado a 258 espectadores y de estos solo 72 estuvieron en la sala S3. La probabilidad de que el espectador al que le ha gustado la película haya estado en la sala S3 vale $\frac{72}{258} = \frac{12}{43} \approx 0.28$

BY NC SA

Ejercicio 4B:

4B) Un avión tiene capacidad para 260 pasajeros. Sin embargo, la compañía aérea ha vendido para un día 280 billetes. La compañía sabe que el 95% de los que compran un billete se presenta en el aeropuerto el día correspondiente. Consideramos el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes.
a) **[0,5]** Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica.
b) **[0,75]** Calcule la probabilidad de que falten plazas en el avión.
c) **[0,5]** Calcule la probabilidad de que no falten plazas en el avión.
d) **[0,75]** Calcule la probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión.

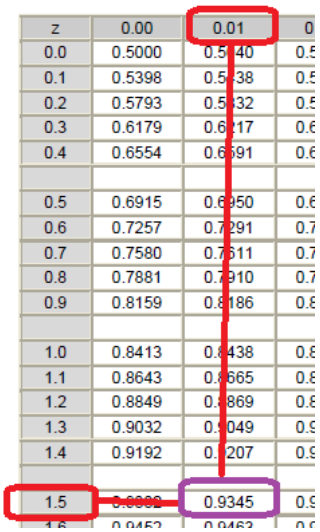
Solución:

a) Denominamos X = el número de pasajeros que se presentan el día en el que se vendieron los 280 billetes. Esta distribución de probabilidad es una binomial siendo n = 280 y p = probabilidad de que un pasajero se presente = 0.95. X = B(280, 0.95).
Existen 280 repeticiones del experimento "el pasajero se presenta" y cada repetición es independiente de las demás.
La media es $n\cdot p = 280\cdot 0.95 = 266$ y la desviación típica vale $\sqrt{npq} = \sqrt{280\cdot 0.95\cdot 0.05} \approx 3.647$.
Como el número de repeticiones es muy alto para el cálculo de probabilidades aproximamos esta binomial a una normal de media 266 y desviación típica 3.647. Y = N(266, 3.647).
Esta aproximación es buena pues $np = 266 > 5$ y $nq = 280\cdot 0.05 = 14 > 5$.

b) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten 261 pasajeros o más. Determinamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X \geq 261) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 260.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{260.5 - 266}{3.647}\right) = P(Z \geq -1.51) = P(Z \leq 1.51) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9345}$$



z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9

La probabilidad de que falten plazas en el avión es de 0.9345.

BY NC SA

c) La probabilidad pedida es la del suceso contrario al suceso "faltan plazas en el avión". La probabilidad de que no falten vale 1 – 0.9345 = 0.0655.

d) Nos piden calcular la probabilidad de que se presenten exactamente 260 pasajeros.

$$P(X=260)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(259.5\le Y\le 260.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(\frac{259.5-266}{3.647}\le Z\le\frac{260.5-266}{3.647}\right)=P(-1.78\le Z\le -1.51)=$$

$$=P(Z\le -1.51)-P(Z\le -1.78)=P(Z\ge 1.51)-P(Z\ge 1.78)=$$

$$=\left[1-P(Z\le 1.51)\right]-\left[1-P(Z\le 1.78)\right]=P(Z\le 1.78)-P(Z\le 1.51)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.9625-0.9345=\boxed{0.028}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9625

La probabilidad de que ni sobren ni falten plazas en el avión es de 0.028.

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

VÍDEOS

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBFccP66b44M

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DG8LIfgQwYew

BY NC SA

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema P1:

Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Problema P2:

P2) Siendo $p(t)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\overline{p}$ de la luz entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$, sabiendo que el valor medio de una función continua f en el intervalo [a, b] (a < b) es: (1.25 puntos)

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Problema A1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}\left(m^2-3m\right)x-my+2mz=3\\ \left(m^2-3m\right)x+3y+3mz=m+9\\ \left(3m-m^2\right)x+my-mz=0\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema A2:

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A|=\frac{1}{4}$ y $|B|=2$. Calcula |C| sabiendo que

$$C=2\cdot\left(A\cdot B^t\right)^2\cdot\left(B^t\right)^{-1}$$

(2,5 puntos)

BY NC SA

Autores: Juan Antonio Martínez García y Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema B1:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta *t* que pasa por el punto P(2, 0,−1) y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x-3z-8=0 \end{cases} \qquad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Problema B2:

B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos A(1, 0,−1) y B(1, 4, 2) y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto P(6,−4,−4).

(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A. (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Problema C1:

C1) Sea $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot \ln\left(x^2+x-5\right)$.

a) Demuestra que *f* es continua en [2, 3]. (0,75 puntos)

b) Demuestra que existe un punto c en (2, 3) tal que f ′(c) = 0. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Problema C2:

C2) Se considera la función $f(x) = \frac{3x^3}{x^2-4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales. (2,5 puntos)

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema P1:

Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

P1) Para la realización de un trabajo se precisan de 80 horas haciendo uso de una sola máquina. Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso. Sabiendo además que por cada hora que dure el trabajo hay que pagar 18 euros a un único operario que supervisa la tarea, calcula el número de máquinas a usar para que el gasto sea mínimo. Justifica su condición de mínimo. (Observación: el tiempo necesario para realizar el trabajo es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas). (2,5 puntos)

Solución:

Llamamos "x" al número de máquinas que se usan.

Como 1 máquina tarda 80 horas, con 2 máquinas tardaremos $\frac{90}{2}=45$ horas y si utilizamos "x" máquinas tardaremos $\frac{90}{x}$ horas en realizar el trabajo.

Hallamos la expresión de la función gasto *G(x)* que depende del número de máquinas en uso.
Cada máquina en funcionamiento genera unos gastos de 10 euros por puesta en marcha y de otros 5 euros por cada hora de uso → $G(x)=10x+5\frac{80}{x}x=10x+400$.

Hay que sumarle el gasto del operario que cobra 18 euros por hora.

$$G(x)=10x+400+18\frac{80}{x}=\frac{1440}{x}+10x+400$$

Hallamos la derivada de la función y vemos cuando se anula.

$$G(x)=\frac{1440}{x}+10x+400\Rightarrow G'(x)=\frac{-1440}{x^2}+10$$

$$G'(x)=0\Rightarrow\frac{-1440}{x^2}+10=0\Rightarrow\frac{1440}{x^2}=10\Rightarrow 1440=10x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1440}{10}=144\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{144}=12}$$

Como estamos hablando de número de máquinas no nos sirve el valor negativo de la raíz.
Sustituimos $x=12$ en la segunda derivada para decidir si es máximo o mínimo.

$$G'(x)=\frac{-1440}{x^2}+10=-1440x^{-2}+10\Rightarrow G''(x)=2880x^{-3}=\frac{2880}{x^3}\Rightarrow G''(12)=\frac{2880}{12^3}>0$$

Como la segunda derivada toma valor positivo podemos afirmar que en $x=12$ hay un mínimo relativo de la función gasto.
Con 12 máquinas se consigue un mínimo gasto.

BY NC SA

Problema P2:

P2) Siendo $p(t)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)$ el precio del kilowatio/hora de la luz doméstica entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$:

(a) Calcula los instantes en los que el precio ha sido máximo y en los que ha sido mínimo. (1,25 puntos)

(b) Calcula el precio medio $\overline{p}$ de la luz entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$, sabiendo que el valor medio de una función continua *f* en el intervalo [a, b] (a < b) es: (1.25 puntos)

$$\overline{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Observación: Recuerda la necesidad de trabajar en radianes.

Solución:

a) Derivamos la función y averiguamos cuando se anula.

$$p(t)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t)=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right]\Rightarrow\left\{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p'(t)=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right]=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1\right]$$

$$p'(t)=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\left[3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1\right]=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=0\rightarrow\begin{cases}\frac{\pi}{2}\cdot t=0\rightarrow\boxed{t=0}\\ \frac{\pi}{2}\cdot t=\pi\rightarrow t=2\end{cases}\\ 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)-1=0\rightarrow 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=1\rightarrow\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=\frac{1}{3}\rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=\sqrt{\frac{1}{3}}\\ \rightarrow\frac{\pi}{2}\cdot t=\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\rightarrow\boxed{t=\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=0.60817}\end{cases}$$

Tenemos dos extremos relativos. Valoramos la función en los extremos del intervalo y en estos dos valores y determinamos los valores máximo y mínimo del precio.

BY NC SA

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)=0.15 \\ p(0.60817)=0.15+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}=0.5349 \\ p(1)=0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)=0.15 \end{array}\right\}$$

El valor máximo se produce en $t=\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=0.60817$ y el mínimo se produce en $t_0=0$ y $t_1=1$.

b) Calculamos lo pedido.

$$\overline{p}=\frac{1}{1-0}\int_0^1 p(t)dt=\int_0^1 0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int 0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=0.15t+\int \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)=x\rightarrow dx=\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=\frac{2}{\pi}dx\end{array}\right\}=$$

$$=0.15t+\int\frac{2}{\pi}x^2dx=0.15t+\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}=0.15t+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)+C$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida.

$$\overline{p}=\int_0^1 0.15+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)dt=\left[0.15t+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\right]_0^1=$$

$$=\left[0.15\cdot 1+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\right]-\left[0.15\cdot 0+\frac{2}{3\pi}\sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)\right]=0.15+\frac{2}{3\pi}=0.3622$$

El precio medio $\overline{p}$ de la luz entre los instantes $t_0=0$ y $t_1=1$ es de 0.3622 por kilowatio/hora

BY NC SA

Problema A1:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} \left(m^2-3m\right)x - my + 2mz = 3 \\ \left(m^2-3m\right)x + 3y + 3mz = m+9 \\ \left(3m-m^2\right)x + my - mz = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m \\ m^2-3m & 3 & 3m \\ 3m-m^2 & m & -m \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ m^2-3m & 3 & 3m & m+9 \\ 3m-m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ m^2-3m & 3 & 3m & m+9 \\ 3m-m^2 & m & -m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a & & & \\ m^2-3m & 3 & 3m & m+9 \\ \hline -m^2+3m & m & -2m & -3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a & & & \\ 3m-m^2 & m & -m & 0 \\ m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ \hline 0 & 0 & m & 3 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 \\ 0 & 0 & m & 3 \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2-3m & -m & 2m \\ 0 & 3+m & m \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = m(3+m)\left(m^2-3m\right) = m(3+m)m(m-3) =$$

$$= m^2(3+m)(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ 3+m=0 \rightarrow \boxed{m=-3} \\ m-3=0 \rightarrow \boxed{m=3} \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -3$, $m = 0$ y cuando $m = 3$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -3$, $m \neq 0$ y $m \neq 3$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

BY NC SA

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} m^2-3m & -m & 2m & 3 \\ 0 & 3+m & m & m+6 \\ 0 & 0 & m & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+2mz=3 \\ (3+m)y+mz=m+6 \\ mz=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \{m\neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+2mz=3 \\ (3+m)y+mz=m+6 \\ \boxed{z=\frac{3}{m}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+2m\frac{3}{m}=3 \\ (3+m)y+m\frac{3}{m}=m+6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my+6=3 \\ (3+m)y+3=m+6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my=-3 \\ (3+m)y=m+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{m+3\neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-3m)x-my=-3 \\ \boxed{y=\frac{m+3}{m+3}=1} \end{array}\right\} \Rightarrow (m^2-3m)x-m=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2-3m)x=m-3 \Rightarrow \{m^2-3m\neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{m-3}{m^2-3m}=\frac{m-3}{m(m-3)}=\frac{1}{m}}$$

La solución es $x=\frac{1}{m}$, $y=1$, $z=\frac{3}{m}$

CASO 2. $m=0$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B=\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ (A | B; A)

Por lo que el rango de A es 1 y el de la ampliada es 2. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible**.

CASO 3. $m=3$

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{cccc} 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$ (A | B; A)

BY NC SA

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B=\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}0&-3&6&3\\0&6&3&9\\0&0&3&3\end{array}}^{A/B}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-3y+6z=3\\6y+3z=9\\3z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-3y+6z=3\\6y+3z=9\\\boxed{z=1}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-3y+6=3\\6y+3=9\end{array}\right\}\Rightarrow\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-3y=-3\\6y=6\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{y=1}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\lambda\\y=1\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=1\end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=\lambda\\y=1\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}.\\z=1\end{cases}$

CASO 4. $m=-3$

La matriz ampliada queda

$$A/B=\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}18&3&-6&3\\0&0&-3&3\\0&0&-3&3\end{array}}^{A/B}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a}-\text{Fila } 2^{a}\\\begin{array}{cccc}0&0&-3&3\\0&0&3&-3\end{array}\\\hline\begin{array}{cccc}0&0&0&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}18&3&-6&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&0\end{array}}^{A/B}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B=\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}18&3&-6&3\\0&0&-3&3\\0&0&-3&3\end{array}}^{A/B}\right)\Rightarrow\left.\begin{array}{r}18x+3y-6z=3\\-3z=3\\-3z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}18x+3y-6z=3\\-3z=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}18x+3y-6z=3\\\boxed{z=\dfrac{3}{-3}=-1}\end{array}\right\}\Rightarrow 18x+3y+6=3\Rightarrow 18x+3y=-3\Rightarrow 6x+y=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-1-6x\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\lambda\\y=-1-6\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=-1\end{cases}}$$

BY NC SA
Autores: Juan Antonio Martínez García y Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-6\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$.

Resumiendo: Si $m\neq -3$, $m\neq 0$ y $m\neq 3$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=\frac{1}{m}$, $y=1$, $z=\frac{3}{m}$, si $m=-3$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-6\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$, si $m=0$ el sistema es incompatible y si $m=3$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x=\lambda \\ y=1;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=1 \end{cases}$.

BY NC SA

Problema A2:

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A|=\frac{1}{4}$ y $|B|=2$. Calcula |C| sabiendo que $C=2\cdot\left(A\cdot B^t\right)^2\cdot\left(B^t\right)^{-1}$

(2,5 puntos)

Solución:

Simplificamos la matriz C.

$$C=2\cdot\left(A\cdot B^t\right)^2\cdot\left(B^t\right)^{-1}=2\cdot\left(A\cdot B^t\right)\left(A\cdot B^t\right)\cdot\left(B^t\right)^{-1}=$$

$$=2\cdot A\cdot B^t\cdot A\cdot B^t\cdot\left(B^t\right)^{-1}=\left\{B^t\cdot\left(B^t\right)^{-1}=Id\right\}=2\cdot A\cdot B^t\cdot A$$

Calculamos el determinante de C.

$$|C|=\left|2\cdot A\cdot B^t\cdot A\right|=\left\{\begin{matrix}A\cdot B^t\cdot A\text{ es}\\ \text{una matriz }3\times3\end{matrix}\right\}=2^3\left|A\cdot B^t\cdot A\right|=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Determinante de un}\\ \text{producto de matrices es igual al}\\ \text{producto de sus determinantes}\end{matrix}\right\}=$$

$$=8\cdot|A|\cdot\left|B^t\right|\cdot|A|=\left\{\left|B^t\right|=|B|\right\}=8\frac{1}{4}\cdot|B|\cdot\frac{1}{4}=8\cdot\frac{1}{4}\cdot2\cdot\frac{1}{4}=1$$

BY NC SA

Problema B1:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P(2, 0,−1) y corta a las siguientes rectas: (2,5 puntos)

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x-3z-8=0 \end{cases} \qquad r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$$

Solución:

Debemos buscar un punto A de la recta r y un punto B de la recta s tales que los puntos A, B y P estén alineados.
Hallamos las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,1,1) \\ P_r(-1,0,-2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = -1+2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2+\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1+2\alpha,\alpha,-2+\alpha)}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x-3z-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-3z-6=0 \\ 2x=3z+8 \end{cases} \Rightarrow \cancel{3z}+8+y-\cancel{3z}-6=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4+\frac{3}{2}\lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{B\left(4+\frac{3}{2}\lambda,-2,\lambda\right)}$$

Para que los puntos A, B y P estén alineados los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{matrix} A(-1+2\alpha,\alpha,-2+\alpha) \\ B\left(4+\frac{3}{2}\lambda,-2,\lambda\right) \\ P(2,0,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \overrightarrow{AP} = P(2,0,-1)-(-1+2\alpha,\alpha,-2+\alpha) = (3-2\alpha,-\alpha,1-\alpha) \\ \overrightarrow{BP} = P(2,0,-1)-\left(4+\frac{3}{2}\lambda,-2,\lambda\right) = \left(-2-\frac{3}{2}\lambda,2,-1-\lambda\right) \end{matrix}\right\}$$

$$\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{BP} \Rightarrow \frac{3-2\alpha}{-2-\frac{3}{2}\lambda} = \frac{-\alpha}{2} = \frac{1-\alpha}{-1-\lambda} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-2\alpha}{-2-\frac{3}{2}\lambda} = \frac{-\alpha}{2} \rightarrow 6-4\alpha = 2\alpha+\frac{3}{2}\alpha\lambda \\ \frac{-\alpha}{2} = \frac{1-\alpha}{-1-\lambda} \rightarrow \alpha+\alpha\lambda = 2-2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6-6\alpha = \frac{3}{2}\alpha\lambda \\ 3\alpha+\alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12-12\alpha = 3\alpha\lambda \\ 3\alpha+\alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-4\alpha = \alpha\lambda \\ 3\alpha+\alpha\lambda = 2 \end{cases} \Rightarrow 3\alpha+4-4\alpha = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \begin{cases} A(3,2,0) \\ 6+2\lambda = 2 \rightarrow 2\lambda = -4 \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow B(1,-2,-2) \end{cases}$$

Hallamos la recta que pasa por A, B y P.

BY NC SA
Autores: Juan Antonio Martínez García y Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$$\left.\begin{array}{l} A(3,2,0)\in t \\ B(1,-2,-2)\in t \\ P(2,0,-1)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,-2,-2)-(3,2,0)=(-2,-4,-2) \\ P(2,0,-1)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_t}=\dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{-1}{2}(-2,-4,-2)=(1,2,1) \\ P(2,0,-1)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}}$$

La ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P y corta a las rectas r y s es $t:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.

BY NC SA

Problema B2:

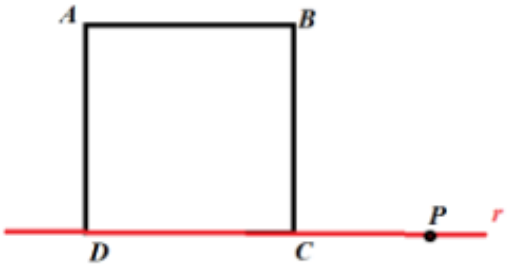
B2) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos A(1, 0,−1) y B(1, 4, 2) y los otros dos vértices están contenidos en la recta que pasa por el punto P(6,−4,−4).

(a) Calcula la ecuación de dicha recta. (0,5 puntos)

(b) Calcula la ecuación del plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A. (0,75 puntos)

(c) Calcula los otros dos vértices del cuadrado. (1,25 puntos)

Solución:



(a) Hallamos el vector $\vec{AB}$ que será el vector director de la recta r que contiene los puntos C y D.

$$\left.\begin{matrix} A(1,0,-1) \\ B(1,4,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AB} = (1,4,2)-(1,0,-1) = (0,4,3)$$

Hallamos la ecuación de la recta que contiene los puntos C y D.

$$\left.\begin{matrix} \overline{v_r} = \overline{AB} = (0,4,3) \\ P(6,-4,-4) \in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4+4\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases}$$

(b) El plano perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por A tiene como vector normal $\vec{AB}$.

$$\left.\begin{matrix} \overline{n} = \overline{AB} = (0,4,3) \\ A(1,0,-1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi: 4y+3z+D=0 \\ A(1,0,-1) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3+D=0 \Rightarrow D=3 \Rightarrow \boxed{\pi: 4y+3z+3=0}$$

(c) El punto de corte de la recta y el plano es el vértice D del cuadrado.

$$\left.\begin{matrix} r: \begin{cases} x = 6 \\ y = -4+4\lambda \\ z = -4+3\lambda \end{cases} \\ \pi: 4y+3z+3=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4(-4+4\lambda)+3(-4+3\lambda)+3=0 \Rightarrow -16+16\lambda-12+9\lambda+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25\lambda-25=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4+4=0 \\ z = -4+3=-1 \end{cases} \Rightarrow D(6,0,-1)$$

Tenemos que $D(6,0,-1)$. El vértice C lo hallamos sumando al punto D el vector $\overline{AB}$.

$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} = (0,4,3) \\ D(6,0,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow C = D+\overline{AB} = (6,0,-1)+(0,4,3) = (6,4,2)$$

El cuarto vértice del cuadrado es $C(6,4,2)$.

BY NC SA

Problema C1:

C1) Sea $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln\left(x^2+x-5\right)$.

a) Demuestra que *f* es continua en [2, 3]. (0,75 puntos)
b) Demuestra que existe un punto c en (2, 3) tal que f ′(c) = 0. Enuncia el resultado teórico utilizado, y justifica su uso. (1,75 puntos)

Solución:

a) Para que sea continua debe ser $x^2+x-5>0$.

$$x\in[2,3]\Rightarrow 2\le x\le 3\Rightarrow 2^2\le x^2\le 3^2\Rightarrow 2^2+2\le x^2+x\le 3^2+3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^2+2-5\le x^2+x-5\le 3^2+3-5\Rightarrow 1\le x^2+x-5\le 7$$

Por lo que existe el logaritmo neperiano y la función es un producto de funciones continuas en el intervalo $[2,3]$ y por tanto continua en dicho intervalo.

b) Vamos a comprobar si se cumple las condiciones del teorema de Rolle.
La función es continua en $[2,3]$.
Tenemos que $f(2)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2\right)\cdot\ln\left(2^2+2-5\right)=\cos(\pi)\ln 1=-1\cdot 0=0$ y
$f(3)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3\right)\cdot\ln\left(3^2+3-5\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\ln 7=0\cdot\ln 7=0$, por lo que $f(2)=f(3)$.
La función es derivable, siendo su derivada
$f'(x)=-\frac{\pi}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln\left(x^2+x-5\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-5}$. Esta derivada no plantea ningún problema en el intervalo (2, 3) pues $x^2+x-5>0$.
Podemos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\cdot\ln\left(x^2+x-5\right)$ en el intervalo $[2,3]$ y afirmar que existe un punto c en (2, 3) tal que f ′(c) = 0.

BY NC SA

Problema C2:

C2) Se considera la función $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^2-4}$. Estudia sus asíntotas y simetrías.

Estudia la aproximación de la función a sus asíntotas verticales. (2,5 puntos)

Solución:

Estudiamos la simetría.

$$f(-x)=\frac{3(-x)^3}{(-x)^2-4}=\frac{-3x^3}{x^2-4}=-\frac{3x^3}{x^2-4}=-f(x)$$

La función es impar.
Estudiamos sus asíntotas.
El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3(-2)^3}{(-2)^2-4}=\frac{-24}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3\cdot 2^3}{2^2-4}=\frac{24}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}3x=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^3}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^3}{x^2-4}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x^3+12x}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x}=\frac{12}{\infty}=0$$

La recta $y=3x$ es asíntota oblicua de la función.

Estudiamos la aproximación de la función a sus asíntotas verticales.

BY NC SA

$x=-2$ es asíntota vertical.

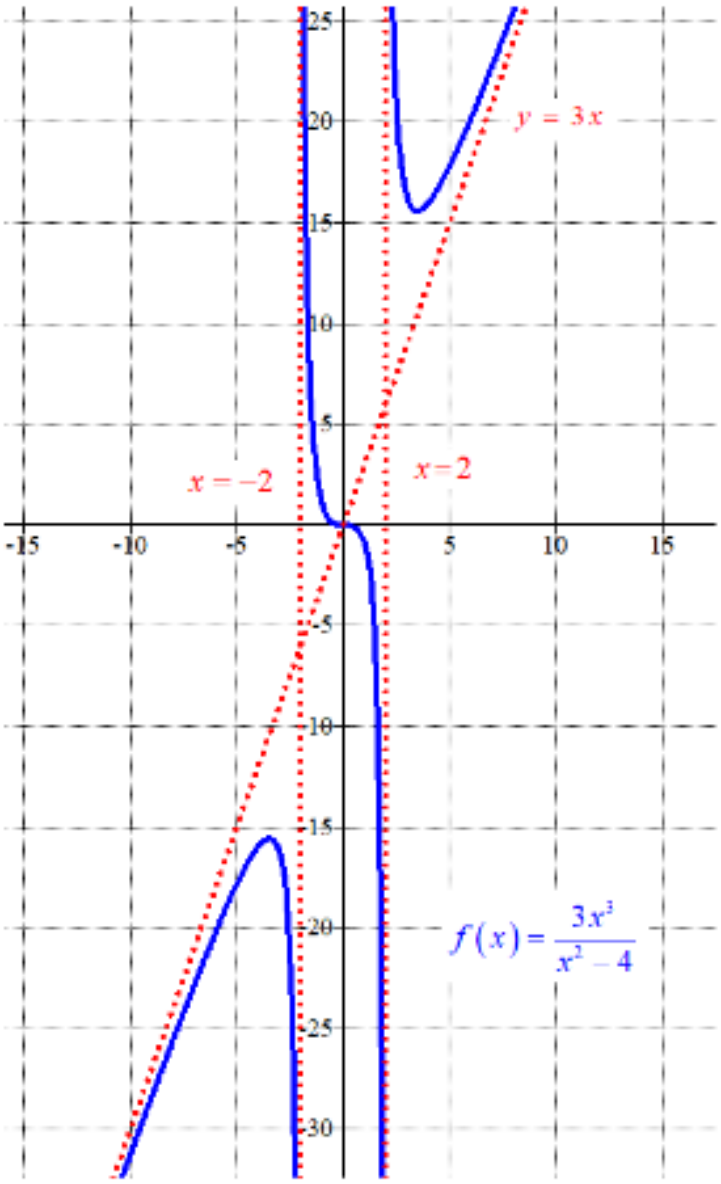
$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3(-2)^3}{(-2)^2-4}=\frac{-24}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3(-2)^3}{(-2)^2-4}=\frac{-24}{0^-}=+\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3\cdot 2^3}{2^2-4}=\frac{24}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^3}{x^2-4}=\frac{3\cdot 2^3}{2^2-4}=\frac{24}{0^+}=+\infty$$



BY NC SA

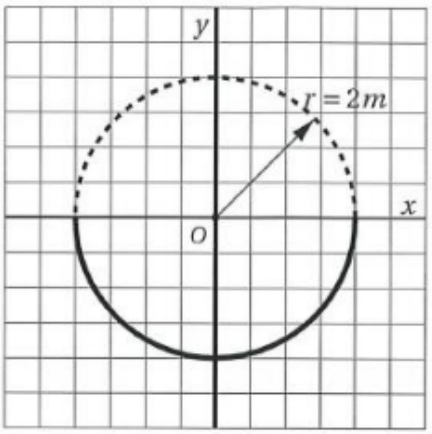
upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

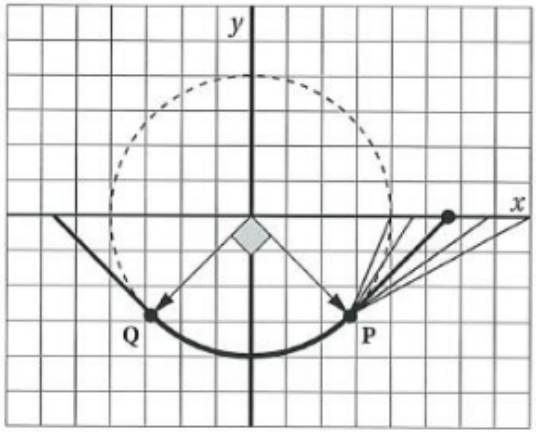
Elige una pregunta de cada bloque P, A, B y C y respóndelas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema P1:

P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



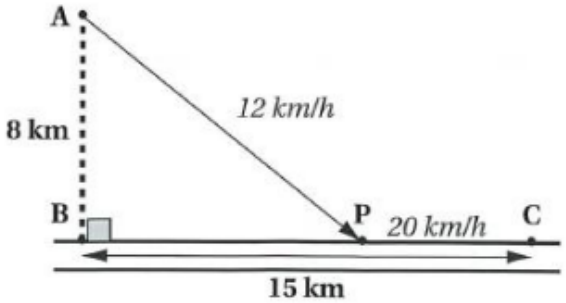


(a) Calcula el punto P. (0.5 puntos)

(b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

Problema P2:

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible. (2.5 puntos)



BY NC SA

Problema A:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}(m^2-m)x+(m+2)y-z=1-m^2\\(m^2-m)x+(2m+1)y=2\\(m-m^2)x-(2m+1)y+(m+2)z=2m+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A|=\frac{1}{3}$ y $|B|=3$. Calcula |C| sabiendo que

$$C=3\cdot(A^t)^2\cdot(A\cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Problema B:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s, siendo: (2,5 puntos)

$$r\equiv\begin{cases}x+y-2z-10=0\\x+z-3=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$$

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2.5 puntos)

Problema C:

C1) Sea $f(x)=e^{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}$.

(a) Demuestra que existe un punto c en (2, 3) tal que $f(c)=\frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

(b) Demuestra que existe un punto d en (0, 2) tal que $f'(c)=0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

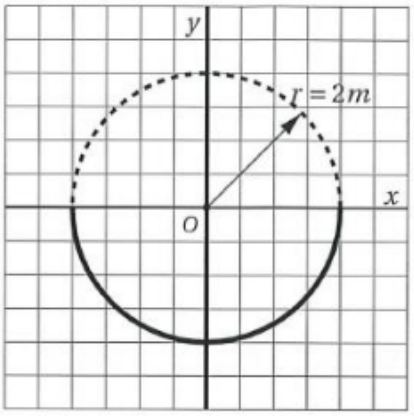
C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x)=\sin(\pi x)$ y $g(x)=x^3-x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas. (2,5 puntos)

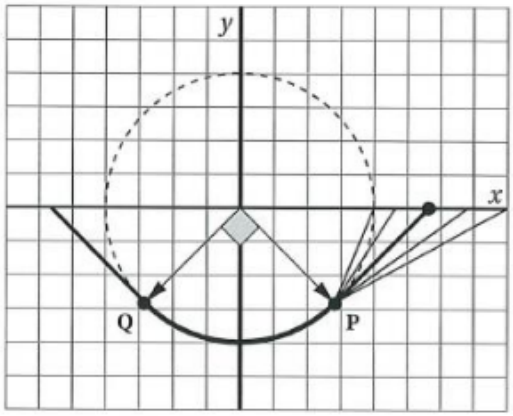
BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema P1:

P1) El ayuntamiento de Baigorri quiere modificar la estructura del skate park que obedece a la función negativa $y = f(x)$ correspondiente a la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, pasando este de ser un semicírculo de 2 metros de radio a tener la siguiente forma (simétrica respecto al eje OY):



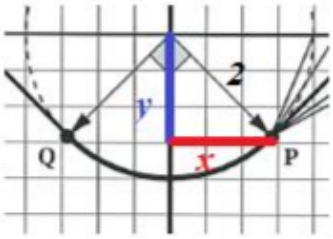


(a) Calcula el punto P. (0.5 puntos)

(b) De entre todas las rectas que prolongan el arco de circunferencia QP y pasan por P, calcula la ecuación de aquella que permite que la trayectoria del skate no se vea alterada al pasar de la curva a la recta (no hay baches). (2 puntos)

Solución:

(a) Si el ángulo QOP es de 90º y la figura es simétrica el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto al eje OY es de la mitad de 90º: $(\overrightarrow{OP}, OY) = 45º$, por lo que las coordenadas del punto P son $P(x, -x)$.



Como P está en la circunferencia debe cumplir la ecuación que la define $x^2 + y^2 = 4$.

$$\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 = 4 \\ P(x, -x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 + (-x)^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})}$$

Las coordenadas del punto P son $P(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y las del punto Q son $Q(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

BY NC SA

(b) Para que la trayectoria no se vea alterada la recta debe ser tangente a la curva.

La curva tiene ecuación $x^2+y^2=4\rightarrow y^2=4-x^2\rightarrow y=-\sqrt{4-x^2}$. Tomamos la raíz negativa pues la función es negativa.

Hallamos la tangente a la función en $f(x)=-\sqrt{4-x^2}$ en $x=\sqrt{2}$.

$$f(x)=-\sqrt{4-x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{-(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

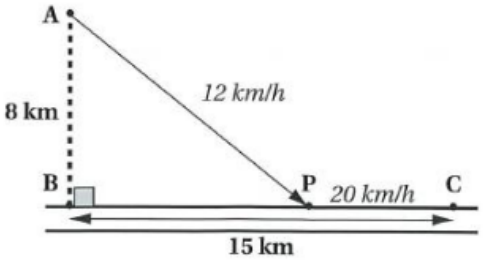
$$\left.\begin{array}{l} f\left(\sqrt{2}\right)=-\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\sqrt{4-2}=-\sqrt{2} \\ f'\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1 \\ y-f\left(\sqrt{2}\right)=f'\left(\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \end{array}\right\}\Rightarrow y+\sqrt{2}=1\left(x-\sqrt{2}\right)\Rightarrow \boxed{y=x-2\sqrt{2}}$$

La recta que pasa por el punto P y cumple lo pedido es la recta tangente al círculo y que pasa por P, que tiene ecuación $y=x-2\sqrt{2}$.

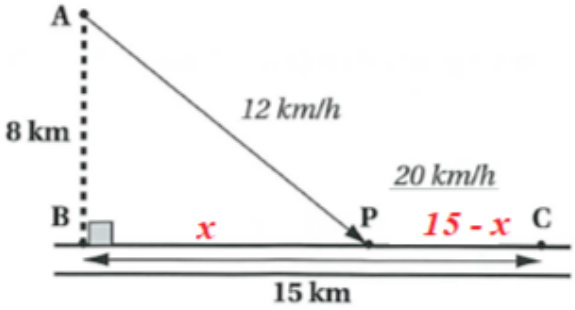
BY NC SA

Problema P2:

P2) Un ciclista de montaña quiere ir de un punto A, localizado en el monte a 8 km de una pista recta, a un punto C ubicado al final de la misma. Sabiendo que por la pista circulará a 20 km/h y fuera de ella a 12 km/h, calcula a qué distancia de B debe unirse a la pista para llegar a C en el menor tiempo posible. (2.5 puntos)



Completamos el dibujo para establecer la función tiempo total en hacer el recorrido en función.



La distancia de A a P es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 8 y "x".

$$\overline{AP}^2 = x^2 + 8^2 \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{64 + x^2}$$

Esta distancia la recorre a 12 km/h por lo que tarda en recorrerla $\dfrac{\sqrt{64+x^2}}{12}$ horas.

BY NC SA

Solo consideramos el valor positivo de la raíz pues estamos trabajando con una distancia que debe ser positiva. Y menor o igual a 15.
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

Antes de $x=6$ tomamos $x=5$ y la derivada vale $f'(5)=\dfrac{5}{12\sqrt{64+5^2}}-\dfrac{1}{20}=-0.005<0$.

Después de $x=6$ tomamos $x=7$ y la derivada vale $f'(7)=\dfrac{7}{12\sqrt{64+7^2}}-\dfrac{1}{20}=0.005>0$.

La función decrece antes de $x=6$ y crece después. La función tiene un mínimo relativo para este valor.
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para decidir donde se sitúa el valor mínimo absoluto.

$$f(0)=\frac{1}{12}\sqrt{64+0^2}+\frac{15-0}{20}=\frac{8}{12}+\frac{15}{20}=\frac{17}{12}\simeq 1.4167$$

$$f(6)=\frac{1}{12}\sqrt{64+6^2}+\frac{15-6}{20}=\frac{10}{12}+\frac{9}{20}=\frac{77}{60}\simeq 1.283 \text{ mínimo absoluto}$$

$$f(15)=\frac{1}{12}\sqrt{64+15^2}+\frac{15-15}{20}=\frac{8}{12}=\frac{17}{12}\simeq 1.4167$$

La distancia de P a C vale $15-x$. Se tarda en recorrerla $\dfrac{15-x}{20}$.
El tiempo que tarda en ir de A a C pasando por P es la suma de los dos tiempos obtenidos.

$$f(x)=\frac{\sqrt{64+x^2}}{12}+\frac{15-x}{20},\ x\in[0,15]$$

Derivamos la función obtenida y obtenemos sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{1}{12}\sqrt{64+x^2}+\frac{15-x}{20}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{12}\frac{2x}{2\sqrt{64+x^2}}+\frac{-1}{20}=\frac{x}{12\sqrt{64+x^2}}-\frac{1}{20}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x}{12\sqrt{64+x^2}}-\frac{1}{20}=0\Rightarrow\frac{x}{12\sqrt{64+x^2}}=\frac{1}{20}\Rightarrow 20x=12\sqrt{64+x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{5}{3}x=\sqrt{64+x^2}\Rightarrow\frac{25}{9}x^2=64+x^2\Rightarrow\frac{16}{9}x^2=64\Rightarrow x^2=36\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{36}=6}$$

La distancia pedida es de 6 km.

BY NC SA

Problema A:

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases}(m^2-m)x+(m+2)y-z=1-m^2\\(m^2-m)x+(2m+1)y=2\\(m-m^2)x-(2m+1)y+(m+2)z=2m+2\end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

A2) Sean A y B dos matrices cuadradas 3×3 tales que $|A|=\frac{1}{3}$ y $|B|=3$. Calcula |C| sabiendo que

$$C=3\cdot\left(A^t\right)^2\cdot(A\cdot B)^{-1}$$

(2,5 puntos)

Solución A1:

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}m^2-m & m+2 & -1\\ m^2-m & 2m+1 & 0\\ m-m^2 & -(2m+1) & m+2\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix}m^2-m & m+2 & -1 & 1-m^2\\ m^2-m & 2m+1 & 0 & 2\\ m-m^2 & -(2m+1) & m+2 & 2m+2\end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B=\begin{pmatrix}m^2-m & m+2 & -1 & 1-m^2\\ m^2-m & 2m+1 & 0 & 2\\ m-m^2 & -(2m+1) & m+2 & 2m+2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 2^a\\ m-m^2 \quad -(2m+1) \quad m+2 \quad 2m+2\\ m^2-m \quad 2m+1 \quad 0 \quad 2\\ \hline 0 \quad 0 \quad m+2 \quad 2m+4\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{Fila } 2^a-\text{Fila } 1^a\\ m^2-m \quad 2m+1 \quad 0 \quad 2\\ -m^2+m \quad -m-2 \quad 1 \quad -1+m^2\\ \hline 0 \quad m-1 \quad 1 \quad m^2+1 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}m^2-m & m+2 & -1 & 1-m^2\\ 0 & m-1 & 1 & m^2+1\\ 0 & 0 & m+2 & 2m+4\end{pmatrix}$$

BY NC SA

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} m^2-m & m+2 & -1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & m+2 \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)(m^2-m) = (m+2)(m-1)m(m-1) =$$

$$= m(m+2)(m-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=0} \\ m+2=0 \rightarrow \boxed{m=-2} \\ m-1=0 \rightarrow \boxed{m=1} \end{cases}$$

Se anula cuando $m = -2$, $m = 0$ y cuando $m = 1$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq -2$, $m \neq 0$ y $m \neq 1$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc} m^2-m & m+2 & -1 & 1-m^2 \\ 0 & m-1 & 1 & m^2+1 \\ 0 & 0 & m+2 & 2m+4 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-m)x+(m+2)y-z=1-m^2 \\ (m-1)y+z=m^2+1 \\ (m+2)z=2(m+2) \end{array}\right\} \Rightarrow \{m+2\neq 0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-m)x+(m+2)y-z=1-m^2 \\ (m-1)y+z=m^2+1 \\ \boxed{z=\dfrac{2(m+2)}{m+2}=2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-m)x+(m+2)y-2=1-m^2 \\ (m-1)y+2=m^2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-m)x+(m+2)y=3-m^2 \\ (m-1)y=m^2-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \{m-1\neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (m^2-m)x+(m+2)y=3-m^2 \\ \boxed{y=\dfrac{m^2-1}{m-1}=\dfrac{(m-1)(m+1)}{m-1}=m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2-m)x+(m+2)(m+1)=3-m^2 \Rightarrow (m^2-m)x+m^2+2+m+2m=3-m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m^2-m)x=1-3m-2m^2 \Rightarrow \{m(m-1)\neq 0\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{-3m^2-3m+1}{m^2-m}}$$

La solución es $x=\dfrac{-3m^2-3m+1}{m^2-m}$, $y=m+1$, $z=2$.

BY NC SA

CASO 2. $m=0$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix}0&2&-1&1\\0&-1&1&1\\0&0&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\cdot\text{Fila }2^{\text{a}}+\text{Fila }1^{\text{a}}\\0\quad-2\quad2\quad2\\0\quad2\quad-1\quad1\\\hline0\quad0\quad1\quad3\rightarrow\text{Nueva fila }2^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&2&-1&1\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^{\text{a}}-2\cdot\text{Fila }2^{\text{a}}\\0\quad0\quad2\quad4\\0\quad0\quad-2\quad-6\\\hline0\quad0\quad0\quad-2\rightarrow\text{Nueva fila }3^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{0&2&-1&1}^{A/B}\\0&0&1&3\\\underbrace{0&0&0}_{A}&-2\end{pmatrix}$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $m=1$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. Triangulamos la matriz ampliada.

$$A/B=\begin{pmatrix}0&3&-1&0\\0&0&1&2\\0&0&3&6\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^{\text{a}}-3\cdot\text{Fila }2^{\text{a}}\\0\quad0\quad3\quad6\\0\quad0\quad-3\quad-6\\\hline0\quad0\quad0\quad0\rightarrow\text{Nueva fila }3^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{0&3&-1&0}^{A/B}\\0&0&1&2\\\underbrace{0&0&0}_{A}&0\end{pmatrix}$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix}\overbrace{0&3&-1&0}^{A/B}\\0&0&1&2\\\underbrace{0&0&0}_{A}&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3y-z=0\\\boxed{z=2}\end{array}\right\}\Rightarrow3y-2=0\Rightarrow\boxed{y=\frac{2}{3}}\Rightarrow\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=\frac{2}{3};\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=2\end{array}\right.}$$

Las soluciones del sistema son $\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\y=\frac{2}{3};\ \lambda\in\mathbb{R}\\z=2\end{array}\right.$.

CASO 4. $m=-2$

En este caso el determinante de A es 0 y su rango no es 3. Estudiamos el rango de A y de A/B. La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}\overbrace{6&0&-1&-3}^{A/B}\\0&-3&1&5\\\underbrace{0&0&0}_{A}&0\end{pmatrix}$

BY NC SA

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B=\left(\overbrace{\begin{matrix}6 & 0 & -1 & -3\\ 0 & -3 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix}}^{A/B}\right)\Rightarrow \left.\begin{matrix}6x-z=-3\\ -3y+z=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}6x+3=z\\ -3y+z=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3y+6x+3=5\Rightarrow 6x-2=3y\Rightarrow y=-\frac{2}{3}+2x\Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\frac{2}{3}+2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+6\lambda\end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\frac{2}{3}+2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+6\lambda\end{cases}$.

Resumiendo: Si $m\neq -2$, $m\neq 0$ y $m\neq 1$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=\frac{-3m^2-3m+1}{m^2-m}$, $y=m+1$, $z=2$.

Si $m=1$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases}x=\lambda\\ y=\frac{2}{3};\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=2\end{cases}$,

Si $m=0$ el sistema es incompatible.

Si $m=-2$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\frac{2}{3}+2\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+6\lambda\end{cases}$.

BY NC SA

Solución A2:

Como no tenemos las matrices A ni B solo podemos utilizar las propiedades de los determinantes para determinar el valor de |C|.

$$|C| = \left|3\cdot\left(A^t\right)^2\cdot(A\cdot B)^{-1}\right| = 3^3\left|\left(A^t\right)^2\cdot(A\cdot B)^{-1}\right| = 3^3\left|\left(A^t\right)^2\right|\cdot\left|(A\cdot B)^{-1}\right| =$$

$$= 27\cdot\left|A^t\right|^2\cdot\frac{1}{|A\cdot B|} = 27\cdot|A|^2\cdot\frac{1}{|A|\cdot|B|} = \frac{27\cdot\cancel{|A|}\cdot|A|}{\cancel{|A|}\cdot|B|} = \frac{27|A|}{|B|} = \frac{27\cdot\frac{1}{3}}{3} = \frac{9}{3} = \boxed{3}$$

He utilizado varias propiedades de los determinantes.

1. Si M es una matriz 3×3 entonces $Det(3M) = 3^3\,Det(M)$.
2. Si M y N son dos matrices entonces $Det(M\cdot N) = Det(M)\cdot Det(N)$.
3. Si M es una matriz entonces $Det\left(M^t\right) = Det(M)$.
4. Si M es una matriz invertible entonces $Det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{Det(M)}$.

BY NC SA

Problema B:

B1) Calcula la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s, siendo: (2,5 puntos)

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z-10=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$$

B2) Calcula la ecuación del plano que equidista de los puntos $A(3,3,5)$ y $B(1,-1,1)$. Calcula la ecuación de los planos que distan del plano anterior $6u$. (2.5 puntos)

Solución B1:

Hallamos un punto, un vector director y las ecuaciones paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-2z-10=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z-10=0 \\ x=3-z \end{cases} \Rightarrow 3-z+y-2z-10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=7+3z \Rightarrow r: \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=7+3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-1,3,1) \\ P_r(3,7,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-0}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(-1,1,-1) \\ Q_s(4,-1,0) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=4-\alpha \\ y=-1+\alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z=-\alpha \end{cases}$$

Debemos determinar la posición relativa de las dos rectas.
Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{v_r}=(-1,3,1) \\ \overrightarrow{u_s}=(-1,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1}$$

BY NC SA

Las rectas se cortan o se cruzan. Obtenemos el valor del producto mixto $\left[\vec{v_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left.\begin{matrix} P_r(3,7,0) \\ Q_s(4,-1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (4,-1,0)-(3,7,0) = (1,-8,0)$$

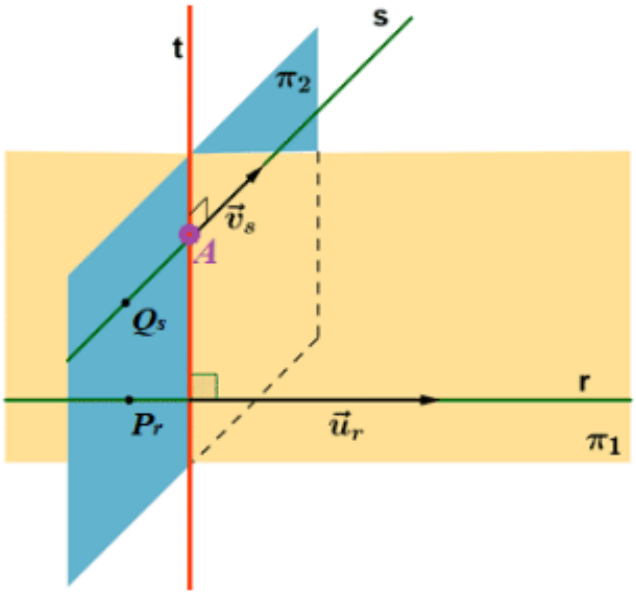
$$\left.\begin{matrix} \vec{v_r} = (-1,3,1) \\ \vec{u_s} = (-1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (1,-8,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0-3+8-1-0+8 = 12 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas no se cortan. Las rectas se cruzan.

Un vector director de la recta *t* perpendicular común a ambas rectas es el producto vectorial de los vectores directores de las rectas *r* y *s*.

$$\left.\begin{matrix} \vec{v_r} = (-1,3,1) \\ \vec{u_s} = (-1,1,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{v_r} \times \vec{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4i-2j+2k = (-4,-2,2)$$

Tomamos como vector director de la recta *t* el vector $\vec{w_t} = \frac{-1}{2}\vec{v_r} \times \vec{u_s} = \frac{-1}{2}(-4,-2,2) = (2,1,-1)$.



BY NC SA

Hallamos la ecuación del plano π_1 que contiene a la recta r y que tiene como otro de sus vectores directores el vector director de la recta t.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{w_t}=(2,1,-1)\\ \vec{v}=\vec{v_r}=(-1,3,1)\\ P_r(3,7,0)\in\pi_1\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1:\begin{vmatrix}x-3 & y-7 & z\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+y-7+6z+z-2y+14+3x-9=0\Rightarrow \boxed{\pi_1:4x-y+7z-5=0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano π_1 y la recta s.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1:4x-y+7z-5=0\\ s:\begin{cases}x=4-\alpha\\ y=-1+\alpha\\ z=-\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 4(4-\alpha)+1-\alpha-7\alpha-5=0\Rightarrow 16-4\alpha+1-\alpha-7\alpha-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12\alpha+12=0\Rightarrow\alpha=1\Rightarrow\begin{cases}x=4-1=3\\ y=-1+1=0\Rightarrow\boxed{A(3,0,-1)}\\ z=-1\end{cases}$$

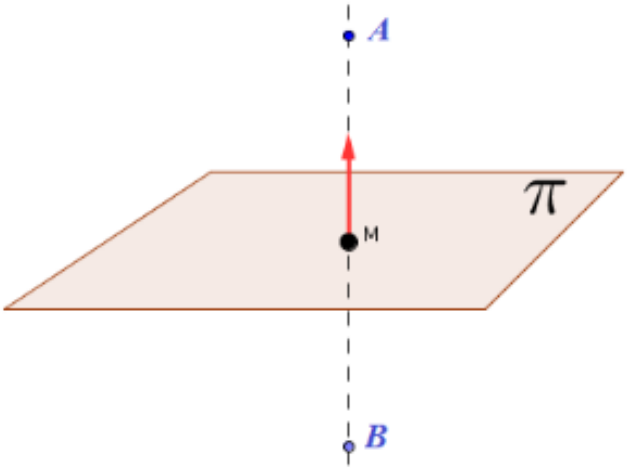
La ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s es la ecuación de la recta que pasa por A con vector director $\vec{w_t}=(2,1,-1)$.

$$\left.\begin{array}{l}A(3,0,-1)\in t\\ \vec{w_t}=(2,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{t:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}}.$$

La recta t que corta perpendicularmente a las rectas r y s tiene ecuación $t:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

BY NC SA

Solución B2:



El plano que equidista de los puntos A y B contiene el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y tiene como vector normal el vector $\overline{AB}$ o un vector proporcional (en la misma dirección).

$$\left.\begin{matrix} A(3,3,5) \\ B(1,-1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AB} = (1,-1,1)-(3,3,5) = (-2,-4,-4)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = \dfrac{-1}{2}\overline{AB} = \dfrac{-1}{2}(-2,-4,-4) = (1,2,2) \\ M = \dfrac{(1,-1,1)+(3,3,5)}{2} = (2,1,3) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi : x+2y+2z+D=0 \\ M=(2,1,3)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+2\cdot 1+2\cdot 3+D=0 \Rightarrow 10+D=0 \Rightarrow D=-10 \Rightarrow \boxed{\pi : x+2y+2z-10=0}$$

La ecuación del plano que equidista de los puntos A y B es $\pi : x+2y+2z-10=0$.

Un plano π´ paralelo a π tienen ecuación $\pi' : x+2y+2z+D=0$.
Como el punto M pertenece al plano π determinamos el valor de D para que la distancia del punto M a otro plano π ´ paralelo a él valga 6 unidades.

$$\left.\begin{matrix} \pi' : x+2y+2z+D=0 \\ M=(2,1,3) \\ d(M,\pi')=6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{|2+2\cdot 1+2\cdot 3+D|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 6 \Rightarrow \frac{|10+D|}{3} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |10+D| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 10+D=18 \rightarrow D=8 \rightarrow \boxed{\pi_1 : x+2y+2z+8=0} \\ 10+D=-18 \rightarrow D=-28 \rightarrow \boxed{\pi_2 : x+2y+2z-28=0} \end{cases}$$

Los planos que equidistan 6 unidades del plano π son $\pi_1 : x+2y+2z+8=0$ y $\pi_2 : x+2y+2z-28=0$.

BY NC SA

Problema C:

C1) Sea $f(x)=e^{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}$.

(a) Demuestra que existe un punto c en (2, 3) tal que $f(c)=\frac{1}{2}$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

(b) Demuestra que existe un punto d en (0, 2) tal que $f'(c)=0$. Enuncia y justifica el resultado teórico empleado. (1,25 puntos)

C2) Calcula los tres puntos de corte entre $f(x)=\sin(\pi x)$ y $g(x)=x^3-x$. Calcula el área encerrada entre ambas curvas. (2,5 puntos)

Solución C1:

a) Vamos a utilizar el teorema de los valores intermedios (teorema de Darboux):

> Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces, para todo valor u comprendido entre *f(a)* y *f(b)* se tiene que existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=u$.

La función $f(x)=e^{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}$ es una función continua pues el exponente es producto de funciones continuas. La función es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo [0, 3].

Si consideramos el intervalo $[0,3]$ tenemos que $f(0)=e^{0\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)}=e^0=1$ y

$f(3)=e^{3\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{3(-1)}=e^{-3}=\frac{1}{e^3}\simeq 0.0498$.

Como $f(1)\simeq 0.0498<\frac{1}{2}<1=f(0)$ podemos aplicar el teorema de Darboux y afirmar que existe $c\in(0,3)$ tal que $f(c)=\frac{1}{2}$.

b) Vamos a utilizar el teorema de Rolle.

> Sea *f(x)* una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), Si $f(a)=f(b)$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

La función $f(x)=e^{x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}$ es continua en $[0,2]$ y derivable en $(0,2)$. Como $f(0)=1$ y $f(2)=e^{2\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2}\right)}=e^{2\cdot\sin(\pi)}=e^0=1$ se cumple que $f(0)=f(2)$ por lo que aplicando el teorema de Rolle podemos afirmar que existe $c\in(0,2)$ tal que $f'(c)=0$.

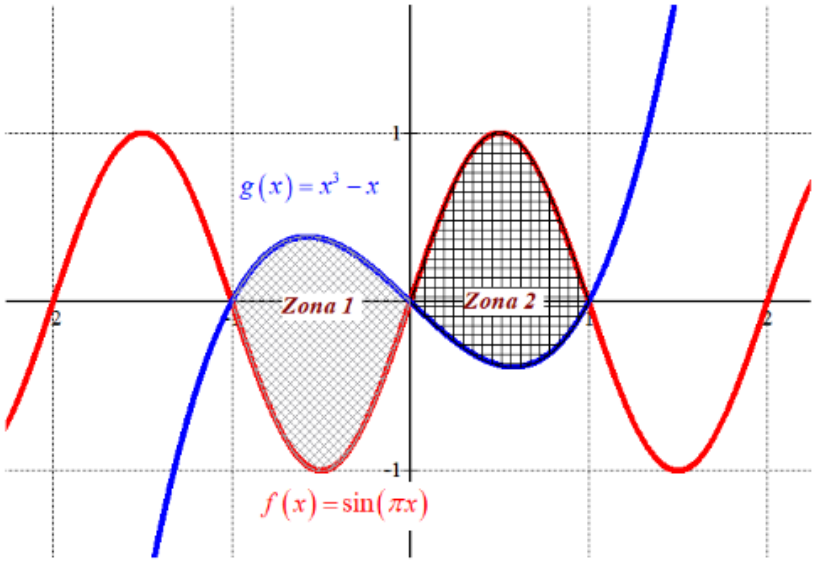
BY NC SA

Solución C2:

Hallamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\sin(\pi x) \\ g(x)=x^3-x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \sin(\pi x)=x^3-x=x(x^2-1) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \sin(\pi\cdot 0)=0=0^3-0 \\ x=1 \rightarrow \sin(\pi)=0=1\cdot(1^2-1) \\ x=-1 \rightarrow \sin(-\pi)=0=(-1)\left((-1)^2-1\right) \end{cases}$$

Los tres puntos de corte son A(0, 0), B(–1, 0) y C(1, 0).
Dibujamos las funciones para establecer los límites de integración.



Hallamos el área de la zona 1.

$$Área\ 1=\int_{-1}^{0} x^3-x-\sin(\pi x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cos(\pi\cdot 0)\right]-\left[\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}+\frac{1}{\pi}\cos(\pi(-1))\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\cos(-\pi)}{\pi}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi}=\boxed{\frac{2}{\pi}+\frac{1}{4}}$$

Hallamos el área de la zona 2.

BY NC SA

$$Área\ 2 = \int_0^1 \sin(\pi x) - x^3 + x dx = \left[\frac{-1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{-1}{\pi}\cos(\pi) - \frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{-1}{\pi}\cos(\pi \cdot 0) - \frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \boxed{\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}}$$

El área encerrada entre ambas curvas es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$Área = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi} + \frac{1}{4} = \frac{4}{\pi} + \frac{1}{2} = 1.77 u^2$$

BY NC SA

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

País Vasco

https://www.youtube.com/watch?v=NtkcCwJWlkQ

https://www.tiktok.com/discover/examen-selectividad-pais-vasco-resuelto

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Problema 1: OBLIGATORIO

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en "Anales Españoles de Pediatría" respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

(a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.

(b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.

(c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

Problema 2A

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.

(b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.

(c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

Problema 2B

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b.

(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a = 1$ y $b = 2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3A

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x-3y-2z+7=0$ y la recta r_2.

Problema 3B

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4,4,1)$ y $B(1,0,-1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2,7,-1)$ y $D(2,3,-1)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Problema 4A

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x)=x^4+Ax^3+x^2+Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Problema 4B

(4B) En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

Problema 5A

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x\cos(2x+5)\,dx.$

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx.$

Problema 5B

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y=(x-1)^2$, $y=(x+1)^2$ e $y=7-3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1: OBLIGATORIO

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Los estudios publicados en "Anales Españoles de Pediatría" respecto a las curvas de desarrollo fetal de los recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 revelan que el peso de los 9476 recién nacidos sigue una distribución normal con media 3372g y desviación típica de 405g.

(a) **(1 punto)** Elegido al azar un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024, calcula la probabilidad de que su peso haya sido superior a 3kg.

(b) **(1 punto)** Calcula el número probable de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 cuyo peso esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg.

(c) **(0,5 puntos)** Utilizando únicamente los resultados de los apartados anteriores, razona si es correcto afirmar que la cantidad de recién nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 con un peso en el rango comprendido entre 3,1kg y 3,3kg debería estar entre 4500 y 4700.

Solución:

EJERCICIO OBLIGATORIO. La variable X = "peso de un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024" sigue una distribución normal $N(3372; 405)$. Representamos por Z una variable que sigue una distribución normal tipificada.

(a) La probabilidad de que el peso de un recién nacido haya sido superior a 3kg es

$$\begin{aligned} P(X > 3000) &= P\left(Z > \frac{3000 - 3372}{405}\right) \\ &= P(Z > -0,92) = P(Z < 0,92) = 0,8212. \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que el peso de un recién nacido esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg es

$$\begin{aligned} P(3000 < X < 3500) &= P\left(\frac{3000 - 3372}{405} < Z < \frac{3500 - 3372}{405}\right) \\ &= P(-0,92 < Z < 0,32) = P(Z < 0,32) - P(Z < -0,92) \\ &= 0,6255 - (1 - 0,8212) = 0,4467. \end{aligned}$$

El número probable de recién nacidos cuyo peso está en dicho rango es el total de niños nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 multiplicado por la probabilidad obtenida, $9476 \times 0,4467 \sim 4233$.

(c) La probabilidad de un subconjunto no puede ser mayor que la del conjunto en el que está incluido. Se ha obtenido que $P(3000 < X < 3500) = 0,4467$, y $(3100, 3300)$ es un subconjunto de $(3000, 3500)$. Por tanto, $P(3100 < X < 3300) < 0,4467$ y el número de recién nacidos con un peso entre 3,1kg y 3,3kg no debería ser mayor que 4233.

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 2A

SEGUNDO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(2A) Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \alpha x - 2y + z = \alpha \\ x - 2y + \alpha z = \alpha \\ -2x + y + \alpha z = -2. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra los valores del parámetro α para los que el sistema tiene una única solución.

(b) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución? Razona tu respuesta.

(c) **(0,75 puntos)** ¿Hay algún valor del parámetro α para el que el sistema tiene más de una solución? Si la respuesta es afirmativa, calcula esos valores de α y, para cada uno de ellos, encuentra dos soluciones distintas del sistema.

Solución 2A:

SEGUNDO EJERCICIO

(2A) La matriz de coeficientes del sistema dado es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) El determinante de esa matriz es $|A| = -3(\alpha - 1)^2$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema tiene una única solución.

(b) Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada también, por tanto, no hay ningún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución.

(c) El sistema tiene más de una solución cuando $\alpha = 1$ y, en ese caso, las soluciones cumplen $y = z$ y $x = 1 + 2y - z$. Dando valores a y (o a z), se obtienen las diferentes soluciones. Por ejemplo, tomando $y = 0$, se tiene la solución $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; y tomando $y = 1$ se obtiene $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$. Claramente, con otras elecciones de y o z se obtendrán otras soluciones.

Textos Marea Verde

Problema 2B

(2B) Sean a y b dos números reales y sea

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 2a \\ 2b & a+b \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,75 puntos)** Decide si existe la inversa de A en función de los valores de los parámetros a y b.

(b) **(1,75 puntos)** En el caso particular en que $a = 1$ y $b = 2$ resuelve, si es posible, la ecuación matricial

$$AX - A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución 2B:

(2B) El determinante de la matriz dada es $|A| = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$, por lo tanto, la matriz tiene inversa si $a \neq b$.

Si $a = 1$ y $b = 2$, la matriz A tiene inversa y se puede resolver la ecuación matricial planteada, que se reescribe como

$$AX = A^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1}A^3 + A^{-1}I_2 = A^2 + A^{-1}.$$

La matriz A, su cuadrado y su inversa son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$X = A^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

BY NC SA

Problema 3A

TERCER EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(3A) (2,5 puntos) Se consideran las siguientes rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2x-3y+z=1 \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=2+t \end{cases}$$

Calcula la ecuación del plano que contiene a r_1 y pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x-3y-2z+7=0$ y la recta r_2.

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4,4,1)$ y $B(1,0,-1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2,7,-1)$ y $D(2,3,-1)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Solución 3A:

TERCER EJERCICIO

(3A) El punto de corte del plano de ecuación $x-3y-2z+7=0$ con la recta r_2 es $P(0,1,2)$, y P no está en la recta r_1. Por otro lado, tomando dos puntos distintos Q y R de la recta r_1, por ejemplo, $Q=(1/5,-1/5,0)$ y $R=(2/5,0,1/5)$, el plano que se pide es el que contiene a P, Q y R. Su ecuación es $4x-11y+7z-3=0$.

Otra manera de resolver el problema es la siguiente: el haz de planos que contiene a la recta r_1 es $x+y-2z+t(2x-3y+z-1)=0$. Entonces, sustituimos el punto $P(0,1,2)$ en la ecuación del haz de planos y obtenemos $t=-3/2$; por tanto, la ecuación del plano pedido es $4x-11y+7z-3=0$.

Textos Marea Verde

Problema 3B

(3B) Se consideran la recta r que pasa por los puntos $A(-4,4,1)$ y $B(1,0,-1)$ y la recta s que pasa por los puntos $C(-2,7,-1)$ y $D(2,3,-1)$.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula la posición relativa de la recta r con respecto de la recta s.

(b) **(1 punto)** En caso de ser paralelas o cruzarse, calcula la distancia entre ambas. Si se cortan, calcula el punto de intersección.

Solución 3B:

(3B)

(a) Los vectores directores de las rectas r y s son $\vec{v}_r = (5,-4,-2)$ y $\vec{v}_s = (4,-4,0)$, respectivamente. Como no existe ninguna constante k tal que $\vec{v}_s = k\vec{v}_r$, las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Para ver si las rectas r y s se cortan o se cruzan, tomamos un punto de cada una de las rectas, por ejemplo los puntos A y C y calculamos el vector $\vec{AC} = (2,3,-2)$. El producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}] \neq 0$, por lo tanto, las rectas se cruzan.

Textos Marea Verde

Problema 4:

CUARTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) **(1 punto)** Calcula los valores de los parámetros A y B para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales.

(b) **(1,5 puntos)** Con los valores de A y B que has obtenido en el apartado anterior, estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(4B) En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula:

(a) **(2 puntos)** cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible;

(b) **(0,5 puntos)** a cuánto ascenderá la factura.

Solución 4A:

CUARTO EJERCICIO

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) Para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales, la derivada de la función en esos puntos debe ser nula.

Como $f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2x + B$,

$$\begin{cases} f'(0) = B = 0 \\ f'(1) = 4 + 3A + 2 + B = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = -2, B = 0.$$

(b) Con los valores de A y B obtenidos en el apartado anterior, la función f y su derivada son

$$\begin{aligned} f(x) =& x^4 - 2x^3 + x^2, \\ f'(x) =& 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1). \end{aligned}$$

f' es positiva si $x \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$ y negativa si $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$. Por tanto, f es creciente en los intervalos $(0, 1/2)$ y $(1, +\infty)$; y f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1/2, 1)$.

Textos Marea Verde

Solución 4B:

(4B) Se denota por x la longitud de los lados horizontales de los marcos y por y la longitud de los lados verticales.

(a) El coste de un marco viene dado por la función $g(x,y) = 12 \times 2x + 10 \times 2y = 24x + 20y$. La superficie de cada cuadro es $xy = 0,3\text{m}^2$, por tanto $y = 0,3/x$. Sustituyendo esta condición en la función g obtenemos la función de una variable que se quiere optimizar,

$$f(x) = 24x + 20\frac{0,3}{x} = 24x + \frac{6}{x}.$$

Buscamos los puntos donde se anula la derivada:

$$f'(x) = 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \implies x = \pm\frac{1}{2}.$$

Las medidas deben ser positivas, por tanto, el único punto a considerar es $x_0 = 1/2$. Para comprobar si la función tiene un mínimo en x_0 calculamos la segunda derivada de f en ese punto, que debe ser positiva:

$$f''(x) = \frac{12}{x^3} \implies f''(x_0) > 0.$$

Como f es continua en $(0,\infty)$ y no tiene más puntos críticos en ese intervalo, el mínimo absoluto de f se alcanza en $x_0 = 1/2$ y las dimensiones de los cuadros deben ser $x = 0,5$m la longitud de sus lados horizontales e $y = 0,3/0,5 = 0,6$m la longitud de sus lados verticales.

(b) El precio de cada cuadro es $g(x,y) = g(1/2, 3/5) = 24$€ y el precio de los 274 cuadros se obtiene multiplicando el precio unitario por la cantidad de cuadros, luego la factura ascenderá a 6.576€.

BY NC SA

Problema 5:

QUINTO EJERCICIO (2,5 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int 2x\cos(2x+5)\,dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \dfrac{x+495}{x^2-2025}\,dx$.

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y=(x-1)^2$, $y=(x+1)^2$ e $y=7-3x$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del recinto del apartado anterior.

Solución 5A:

QUINTO EJERCICIO

(5A)

(a) La primera integral se resuelve por partes, tomando

$$u=2x, \quad dv=\cos(2x+5)dx,$$
$$du=2dx, \quad v=\frac{\sin(2x+5)}{2}.$$

Entonces,

$$\int 2x\cos(2x+5)\,dx = 2x\frac{\sin(2x+5)}{2} - \int 2\frac{\sin(2x+5)}{2}\,dx$$
$$= x\sin(2x+5) - \int \sin(2x+5)\,dx = x\sin(2x+5) + \frac{\cos(2x+5)}{2} + k.$$

(b) Como $2025=45^2$, el integrando se descompone como suma de dos fracciones simples

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{6}{x-45} - \frac{5}{x+45}$$

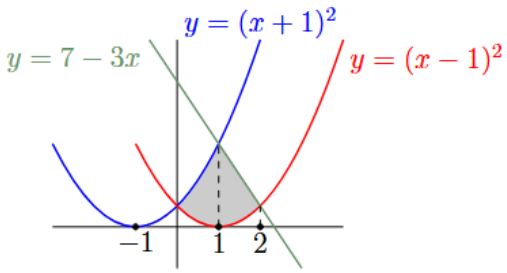
y, por tanto,

$$\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx = 6\ln|x-45| - 5\ln|x+45| + k.$$

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Solución 5B:

(5B) Las parábolas de ecuaciones $y=(x-1)^2$ e $y=(x+1)^2$ se cortan cuando $x=0$. La parábola de ecuación $y=(x-1)^2$ y la recta se cortan cuando $x=2$ y cuando $x=-3$. Por último, la parábola de ecuación $y=(x+1)^2$ y la recta se cortan cuando $x=-6$ y $x=1$. El recinto limitado por las tres curvas es



El área de ese recinto es

$$A=\int_0^1\left((x+1)^2-(x-1)^2\right)dx+\int_1^2\left(7-3x-(x-1)^2\right)dx=\frac{25}{6}u^2.$$

BY NC SA

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 5 partes, de 2,5 cada una. Se debe responder a 4 de ellas, y una pregunta de cada parte

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Según estimación de cifras de cáncer en 2024, el número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos, lo que supone un ligero incremento del 2,65 % respecto a 2023 con 279.260 casos, según el informe "Las cifras del cáncer en España 2024", elaborado por la Sociedad Española de Oncología Médica (SEOM) y Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).

La estimación por edad y sexo es la siguiente: 5,56 % menores de 45 años, de los cuales el 62,86 % son mujeres; 59,77 % mayores de 65 años, de los cuales el 39,11 % son mujeres; del resto, el 42,25 % son mujeres.

(a) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que sea mujer.

(b) **(0,75 puntos)** Calcula el número probable de mujeres que han tenido cáncer en 2024 que son mayores de 65 años.

(c) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una mujer que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que tenga 65 años o menos.

(d) **(0,25 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, ¿qué es más probable, que sea mujer o que no lo sea? Razona tu respuesta teniendo en cuenta únicamente los resultados anteriores.

Problema 2:

(2A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+3z=3+\alpha y \\ z+\alpha x+y-2=0 \\ x+2z-y=1 \end{cases}$$

(a) **(1,5 puntos)** Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α.

(b) **(1 punto)** Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha=0$.

(2B) Sea α un número real y

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,5 puntos)** Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.

(b) **(2 puntos)** En el caso particular en que $\alpha=0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025}.

BY NC SA

Problema 3:

(3A) (2,5 puntos) Halla el punto P' simétrico de $P(4,-3,0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2,0,1)$ y $B(-2,-1,0)$.

(3B) Sean π el plano que pasa por los puntos $A(2,3,4)$, $B(3,-1,-2)$, $C(5,-1,2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D(6,-5,-4)$, $E(7,1,4)$.

(a) (1,5 puntos) Calcula el ángulo entre el plano π y la recta r, expresando el resultado en grados, minutos y segundos.

(b) (1 punto) En caso de que r y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta r y el plano π.

Problema 4:

(4A) Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$.

(a) **(1 punto)** Encuentra las asíntotas de la función f.

(b) **(1 punto)** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=0$.

(4B) Nos han pedido que hagamos un estudio para la fabricación de tazas cilíndricas. Como condición han impuesto que deben tener una capacidad de 216π cm^3. La empresa quiere que la fabricación sea lo más económica posible.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula las especificaciones de medidas que deben enviar a fabricación para lograr el objetivo.

(b) **(1 punto)** Las tazas irán coloreadas por el exterior con un material cuyo coste es de 3 €/m^2. Calcula el coste de imprimación de una taza.

Problema 5:

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int (2x+5)e^{2x}dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}dx$.

(5B) Se consideran la parábola de ecuación $y=x^2-3x$ y la recta $x+y=8$.

(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto limitado por esas dos curvas.

(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del trozo de ese recinto que queda en el primer cuadrante.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

EJERCICIO OBLIGATORIO (2,5 puntos). Según estimación de cifras de cáncer en 2024, el número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos, lo que supone un ligero incremento del 2,65 % respecto a 2023 con 279.260 casos, según el informe "Las cifras del cáncer en España 2024", elaborado por la Sociedad Española de Oncología Médica (SEOM) y Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).
La estimación por edad y sexo es la siguiente: 5,56 % menores de 45 años, de los cuales el 62,86 % son mujeres; 59,77 % mayores de 65 años, de los cuales el 39,11 % son mujeres; del resto, el 42,25 % son mujeres.

(a) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que sea mujer.

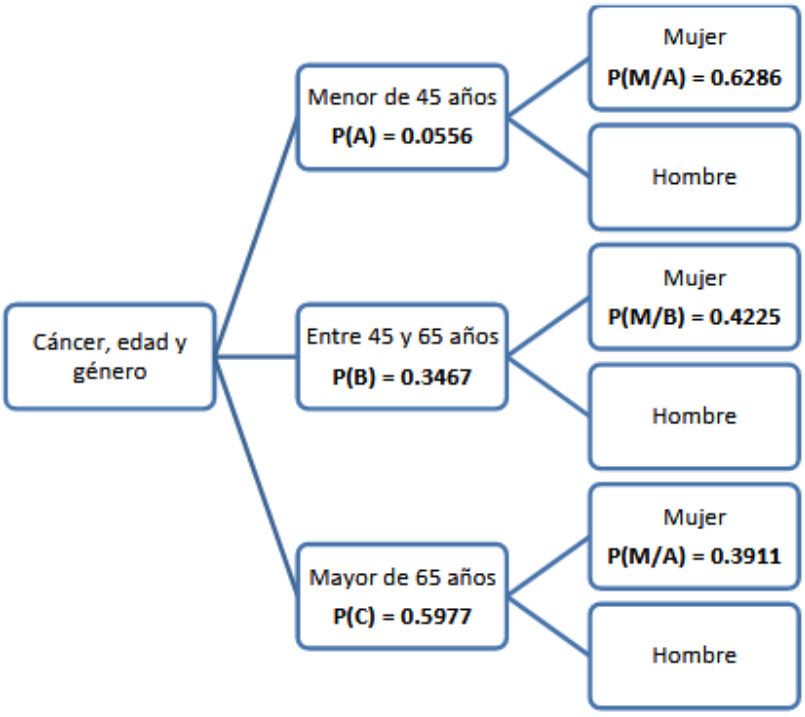
(b) **(0,75 puntos)** Calcula el número probable de mujeres que han tenido cáncer en 2024 que son mayores de 65 años.

(c) **(0,75 puntos)** Seleccionada al azar una mujer que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que tenga 65 años o menos.

(d) **(0,25 puntos)** Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, ¿qué es más probable, que sea mujer o que no lo sea? Razona tu respuesta teniendo en cuenta únicamente los resultados anteriores.

Solución:

Llamamos A = "Ser menor de 45 años", B = "Edad entre 45 y 65 años", C = "Mayor de 65 años" y M = "Ser mujer".
Realizamos un diagrama de árbol.
Nos dicen que $P(A)=0.056$, $P(C)=0.5977$, $P(B)=1-0.0556-0.5977=0.3467$, $P(M/A)=0.6286$, $P(M/B)=0.4225$ y $P(M/C)=0.3911$.



Textos Marea Verde

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=0.0556\cdot 0.6286+0.3467\cdot 0.4225+0.5977\cdot 0.3911\simeq \boxed{0.4152}$$

(b) Calculamos $P(M\cap C)$.

$$P(M\cap C)=P(C)P(M/C)=0.5977\cdot 0.3911=0.23376047$$

El número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos. El Número esperado de mujeres mayores de 65 años será $0.23376047\cdot 286.664 = 67010.71$ mujeres.
Aproximadamente serán 67011 las mujeres mayores de 65 años con cáncer en el año 2024.

(c) Calculamos la probabilidad de que elegida al azar una mujer que padece cáncer esta sea mayor de 65 años: $P(C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{0.2338}{0.4152}\simeq \boxed{0.5631}$$

La probabilidad de que al elegir una mujer con cáncer esta tenga 65 años o menos vale $1-0.5631=0.4369$.

(d) En el apartado (a) hemos visto que la probabilidad de que una persona enferma de cáncer sea mujer tiene un valor de 0.4152, menor que 0.5, por lo que la probabilidad de que un hombre padezca cáncer es $1 - 0.4152 = 0.5848$.
Como $0.4152 < 0.5848$ podemos afirmar que es más probable que un hombre padezca cáncer.

BY NC SA

Problema 2:

(2A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+3z=3+\alpha y \\ z+\alpha x+y-2=0 \\ x+2z-y=1 \end{cases}$$

(a) **(1,5 puntos)** Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α.
(b) **(1 punto)** Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha=0$.

(2B) Sea α un número real y

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) **(0,5 puntos)** Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.
(b) **(2 puntos)** En el caso particular en que $\alpha=0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025}.

Solución 2A:

SEGUNDO EJERCICIO

(2A) El sistema se escribe de forma equivalente como

$$\begin{cases} x-\alpha y+3z=3 \\ \alpha x+y+z=2 \\ x-y+2z=1. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes de ese sistema es

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) El determinante de esa matriz es $|A|=2\alpha(\alpha-2)$. Por tanto, si $\alpha\neq 0$ y $\alpha\neq 2$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO, y tiene una única solución.

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Si $\alpha = 2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por tanto, el sistema es INCOMPATIBLE, y no tiene solución.

Si $\alpha = 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada también, por lo que el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO, y tiene más de una solución.

(b) Cuando $\alpha = 0$ el sistema formado por las dos primeras ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 3z = 3, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Las soluciones son $x = 3 - 3t$, $y = 2 - t$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

[2B]

(a) El determinante de la matriz dada es $|A| = 1 - \alpha$, por lo tanto, la matriz tiene inversa si $\alpha \neq 1$.

(b) Si $\alpha = 0$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando las primeras potencias de A, es decir, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$,..., se llega a la fórmula general para A^n. En particular,

$$A^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2025 \\ 0 & 1 & 2025 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

BY NC SA

Problema 3:

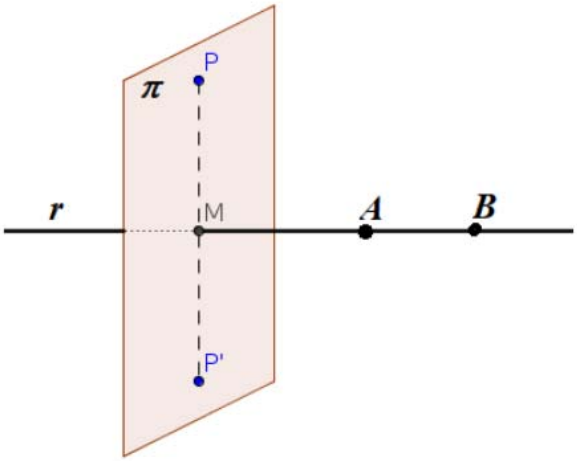
(3A) (2,5 puntos) Halla el punto P' simétrico de $P(4,-3,0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2,0,1)$ y $B(-2,-1,0)$.

(3B) Sean π el plano que pasa por los puntos $A(2,3,4)$, $B(3,-1,-2)$, $C(5,-1,2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D(6,-5,-4)$, $E(7,1,4)$.

(a) (1,5 puntos) Calcula el ángulo entre el plano π y la recta r, expresando el resultado en grados, minutos y segundos.

(b) (1 punto) En caso de que r y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta r y el plano π.

Solución 3A:



Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B.

$$\left.\begin{matrix} A(-2,0,1) \\ B(-2,-1,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2,-1,0)-(-2,0,1) = (0,-1,-1)$$

$$\left.\begin{matrix} \vec{v}_r = \overrightarrow{BA} = (0,1,1) \\ A(-2,0,1) \in r \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = -2 \\ y = \lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Al ser el plano perpendicular a la recta el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\left.\begin{matrix} \vec{n} = \vec{v}_r = (0,1,1) \\ P(4,-3,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \pi: y+z+D=0 \\ P(4,-3,0) \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3+0+D=0 \Rightarrow D=3 \Rightarrow \boxed{\pi: y+z+3=0}$$

BY NC SA

Hallamos el punto M de intersección del plano $\pi : y+z+3=0$ y la recta r.

$$r \equiv \left.\begin{cases} x=-2 \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda+1+\lambda+3=0 \Rightarrow 2\lambda+4=0 \Rightarrow$$
$$\pi : y+z+3=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(-2,-2,-1)}$$

Obtenemos el punto P´ sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\left.\begin{matrix} M(-2,-2,-1) \\ P(4,-3,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM}=(-2,-2,-1)-(4,-3,0)=(-6,1,-1)$$

$$P'=M+\overrightarrow{PM}=(-2,-2,-1)+(-6,1,-1)=(-8,-1,-2)$$

El punto P' simétrico de $P(4,-3,0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2,0,1)$ y $B(-2,-1,0)$ tiene coordenadas $P'(-8,-1,-2)$.

BY NC SA

Solución 3B:

(3B)

(a) El vector director de la recta r es $\vec{u}_r = (1,6,6)$ y el vector normal al plano π es paralelo a $\vec{AB} \times \vec{AC}$, luego podemos tomar $\vec{n}_\pi = (2,2,-1)$.

El ángulo α buscado es el complementario al formado por $\vec{n}_\pi$ y $\vec{u}_r$,

$$\alpha = 90^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{u}_r}{|\vec{n}_\pi||\vec{u}_r|}\right) = 11,48^\circ.$$

El ángulo en grados, minutos y segundos es $\alpha = 11^\circ 28' 48''$.

(b) Como el ángulo formado por $\vec{n}_\pi$ y $\vec{u}_r$ no es 90°, r y π se cortan.

La ecuación del plano es $\pi \equiv 2x+2y-z-6=0$ y la ecuación paramétrica de la recta es $r \equiv (6,-5,-4) + \mu(1,6,6)$. Sustituyendo un punto de la recta $(6+\mu, -5+6\mu, -4+6\mu)$ en la ecuación del plano, se obtiene $\mu = 0$ y el punto de corte de π y r es $M(6,-5,-4)$.

Textos Marea Verde

Problema 4:

(4A) Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$.

(a) **(1 punto)** Encuentra las asíntotas de la función f.

(b) **(1 punto)** Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

(c) **(0.5 puntos)** Calcula la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=0$.

(4B) Nos han pedido que hagamos un estudio para la fabricación de tazas cilíndricas. Como condición han impuesto que deben tener una capacidad de 216π cm^3. La empresa quiere que la fabricación sea lo más económica posible.

(a) **(1,5 puntos)** Calcula las especificaciones de medidas que deben enviar a fabricación para lograr el objetivo.

(b) **(1 punto)** Las tazas irán coloreadas por el exterior con un material cuyo coste es de 3 €/m^2. Calcula el coste de imprimación de una taza.

Solución 4A:

CUARTO EJERCICIO

(4A)

(a) El denominador de la función f, x^2-3x-4, se anula cuando $x=-1$ y cuando $x=4$. La función tiene dos asíntotas verticales, $x=-1$ y $x=4$, puesto que

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=+\infty.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=0,\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=0,$$

por tanto, f tiene asíntota horizontal, $y=0$, tanto en $-\infty$ como en $+\infty$.

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-3x-4}=\frac{-1}{(-1)^2-3(-1)-4}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

¿$x=4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x^2-3x-4}=\frac{4}{4^2-3\cdot 4-4}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=4$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}==\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Como la función tiene asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.

(b) Buscamos los valores que anulan la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x)=\frac{x}{x^2-3x-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-3x-4)-(2x-3)x}{(x^2-3x-4)^2}=\frac{x^2-3x-4-2x^2+3x}{(x^2-3x-4)^2}=$$

$$=\frac{-x^2-4}{(x^2-3x-4)^2}=\frac{-(x^2+4)}{(x^2-3x-4)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-(x^2+4)}{(x^2-3x-4)^2}=0\Rightarrow x^2+4=0\Rightarrow x=\sqrt{-4}=\text{No existe}$$

La derivada nunca se anula. Como $f'(x)=\dfrac{-(x^2+4)}{(x^2-3x-4)^2}$ vemos que el denominador siempre es positivo y el numerador siempre negativo, por lo que la derivada siempre es negativa y la función decrece en todo su dominio $\mathbb{R}-\{-1,4\}$.

c) La recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x=0$ tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0}{0^2-3\cdot 0-4}=0 \\ f'(0)=\dfrac{-(0^2+4)}{(0^2-3\cdot 0-4)^2}=-\dfrac{1}{4} \\ y-f(0)=f'(0)(x-0)\end{array}\right\}\Rightarrow y-0=\frac{-1}{4}x\Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{4}x}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=\dfrac{-1}{4}x$.

BY NC SA

(b) La derivada de f es

$$f'(x) = -\frac{x^2+4}{(x^2-3x-4)^2}$$

que es negativa en todos los puntos donde está definida, por lo tanto, f es decreciente en todo su dominio de definición, es decir, en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,4)$ y $(4,+\infty)$.

(c) Como $f(0)=0$ y $f'(0)=-1/4$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=-\frac{x}{4}$.

Textos Marea Verde

Solución 4B:

(4B) Llamamos R al radio de la base de la taza y H a la altura. El volumen de la taza es $\pi R^2 H$ y la superficie es $\pi R^2 + 2\pi RH$.

(a) De la condición dada para el volumen sabemos que $H = \frac{216}{R^2}$. Sustituyendo en la expresión que da la superficie, obtenemos la función a optimizar: $f(R) = \pi R^2 + 2\pi \frac{216}{R}$.

Para que la superficie sea mínima, la derivada de f debe ser nula.

$$f'(R) = 2\pi R - 2\pi \frac{216}{R^2} = 0 \iff R = 6.$$

Para que f tenga un mínimo relativo en $R_0 = 6$, la segunda derivada de f en ese punto debe ser positiva.

$$f''(R) = 2\pi + \frac{864\pi}{R^3} \implies f''(6) > 0$$

y por tanto, f tiene un mínimo en $R_0 = 6$. Como f es continua en $(0, \infty)$ y no tiene más puntos críticos en ese intervalo, el mínimo absoluto de f se alcanza en $R_0 = 6$. El valor correspondiente de la altura es $H_0 = \frac{216}{R_0^2} = 6$. Es decir, el radio y la altura de la taza deben ser ambos de 6 cm.

(b) La superficie exterior de la taza, con las medidas obtenidas en el apartado anterior, es $S = \pi R_0^2 + 2\pi R_0 H_0 = 108\pi \text{ cm}^2 = 0{,}0108\pi \text{ m}^2$. El coste de la imprimación de cada taza se obtiene multiplicando la superficie en m^2 por el coste y obtenemos $0{,}0108\pi \text{ m}^2 \times 3 \frac{€}{\text{m}^2} = 0{,}102 €$. El coste de la imprimación de cada taza será de 10,2 céntimos.

Textos Marea Verde

Problema 5:

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 puntos)** $\int (2x+5)e^{2x}dx$.

(b) **(1,25 puntos)** $\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}dx$.

(5B) Se consideran la parábola de ecuación $y=x^2-3x$ y la recta $x+y=8$.
(a) **(1,25 puntos)** Dibuja el recinto limitado por esas dos curvas.
(b) **(1,25 puntos)** Calcula el área del trozo de ese recinto que queda en el primer cuadrante.

Solución 5A:

QUINTO EJERCICIO

(5A)

(a) La primera integral se resuelve por partes, tomando

$$u = 2x+5, \quad dv = e^{2x}dx,$$
$$du = 2dx, \quad v = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Entonces,

$$\int (2x+5)e^{2x}dx = (2x+5)\frac{e^{2x}}{2} - \int 2\frac{e^{2x}}{2}dx = \frac{2x+5}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + k = (x+2)e^{2x} + k.$$

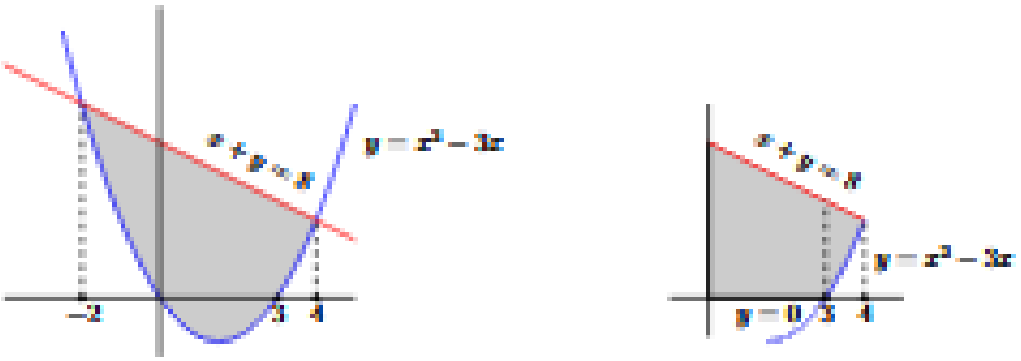
(b) Hay que integrar una función racional cuyo denominador se reescribe como $x^2+10x+25 = (x+5)^2$, por tanto

$$\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}dx = \int \frac{dx}{x+5} + \int \frac{2}{(x+5)^2}dx = \ln|x+5| - \frac{2}{x+5} + k.$$

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Solución 5B

(5B) La parábola de ecuación $y = x^2 - 3x$ corta al eje horizontal en $x = 0$ y $x = 3$. La recta tiene pendiente negativa y corta a la parábola cuando $x = -2$ y $x = 4$. El recinto limitado por las dos curvas es el que aparece a la izquierda en la imagen:



El área del trozo de recinto que queda en el primer cuadrante, que aparece a la derecha en la imagen, es

$$A = \int_0^3 (6 - x)\,dx + \int_3^4 \left(6 - x - (x^2 - 3x)\right) dx = \frac{133}{6}u^2.$$

Autor: UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

Vídeos

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3Dd6S1L1-VGKk

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DilhE_YAc-Cg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DGkXhMrUvnY4

BY NC SA

GENERALITAT VALENCIANA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

BAREMO DEL EXAMEN: *Cada pregunta se puntuará hasta 2,5 puntos.*
La calificación del examen será la suma de las calificaciones de cada pregunta.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Por cada falta de ortografía a partir de la tercera se deducirán 0,10 puntos, hasta un máximo de un punto.
Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto. La deducción máxima total es de un punto.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2.1:

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 **(1.25 puntos)** En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 **(1.25 puntos)** En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A. Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α.

BY NC SA

Ejercicio 2.2:

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 **(1 punto)** Discutir el sistema en función del parámetro a.

2.2.2 **(0.75 puntos)** Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 **(0.75 puntos)** Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3.1 Y 3.2:

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 **(1 punto)** Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 **(1 punto)** La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 **(0.5 puntos)** La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano.

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1,0,1)$. Se pide:

3.2.1 **(1 punto)** La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2,1,2)$.

3.2.2 **(0.5 puntos)** La distancia del punto Q al plano π.

3.2.3 **(1 punto)** El punto simétrico de P respecto al plano π.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4.1 y 4.2:

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2. La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

4.1.1 **(0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x.

4.1.2 **(1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 **(0.5 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

Se pide:

4.2.1 **(1 punto)** Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 **(1.5 puntos)** Calcular el área de la región anterior.

BY NC SA

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

BAREM DE L'EXAMEN: *Cada pregunta puntua fins a 2,5 punts.*
La qualificació de l'examen serà la suma de les qualificacions de cada pregunta.

Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlculs simbòlics ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

Per cada falta d'ortografia a partir de la tercera s'han de deduir 0,10 punts, fins a un màxim d'un punt.
Per errors en la redacció, en la presentació, falta de coherència, falta de cohesió, incorrecció lèxica i incorrecció gramatical es podrà deduir un màxim de mig punt. La deducció màxima total és d'un punt.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

PREGUNTA 1: PROBABILITAT I ESTADÍSTICA (2,5 punts)

Una pizzeria ofereix tres tipus de pizza: margarida, vegetariana i pepperoni. Al llarg dels anys, utilitzant la seua aplicació per a telèfons intel·ligents, el restaurant ha recollit dades sobre les preferències dels clients i ha trobat que el 40% de la clientela demana pizza margarida, el 25% tria la pizza vegetariana i la resta prefereix la pizza pepperoni.

1.1 **(0,25 punts)** Si es tria un client a l'atzar, quina és la probabilitat que haja demanat una pizza pepperoni?

1.2 **(0,75 punts)** Quina és la probabilitat que dos clients triats a l'atzar hagen demanat diferents tipus de pizza?

Per tal de millorar el seu servei i agilitzar els temps de preparació, la pizzeria decideix considerar un grup típic de 10 clients amb l'objectiu de decidir quantes pizzes margarida ha de preparar amb antelació i evitar retards durant les hores amb més demanda, minimitzant el malbaratament.

1.3 **(0,75 punts)** Quina és la probabilitat que exactament 4 dels 10 clients demanen pizzes margarida?

1.4 **(0,75 punts)** Quina és la probabilitat que almenys un dels 10 clients del grup demane una pizza margarida?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2

PREGUNTA 2: ÀLGEBRA (2,5 punts)

Respon a l'apartat 2.1 o a l'apartat 2.2

2.1 En un sistema de processament d'imatges es fa servir una matriu per transformar certes dades. La matriu depèn del paràmetre real α i és:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 **(1,25 punts)** En un dels processos, perquè el sistema funcione, cal que la matriu siga idempotent, és a dir, que el seu quadrat coincidisca amb ella, $A^2 = A$. Obtín els valors de α que permeten que el sistema funcione.

2.1.2 **(1,25 punts)** En un altre procés diferent, cal utilitzar la matriu inversa d'A. Obtín els valors de α per als quals hi ha la inversa i calcula aquesta inversa en funció de α.

2.2 Siga el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

on a és un paràmetre real.

2.2.1 **(1 punt)** Discuteix el sistema en funció del paràmetre a.

2.2.2 **(0,75 punts)** Calcula les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat.

2.2.3 **(0,75 punts)** Calcula la solució del sistema per a $a = 0$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3

PREGUNTA 3: GEOMETRIA (2,5 punts)

Respon a l'apartat 3.1 o a l'apartat 3.2

3.1 Donada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ i la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcula:

3.1.1 **(1 punt)** Si existeixen, les coordenades del punt de tall de totes dues rectes.

3.1.2 **(1 punt)** L'equació del pla que conté totes dues rectes.

3.1.3 **(0,5 punts)** La distància del punt $P = (1,0,2)$ a aquest pla.

3.2 Donats el pla $\pi: 3x - y + 2z = 4$ i el punt $P = (-1,0,1)$, obtín:

3.2.1 **(1 punt)** L'equació del pla perpendicular a π que passa per P i per $Q = (2,1,2)$.

3.2.2 **(0,5 punts)** La distància del punt Q al pla π.

3.2.3 **(1 punt)** El punt simètric de P respecte al pla π.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4

PREGUNTA 4: ANÀLISI (2,5 punts)

Respon a l'apartat 4.1 o a l'apartat 4.2

4.1 Una empresa de paqueteria vol dissenyar diferents models de caixes. Un d'aquests models consisteix en una caixa de 80 cm^3 de volum, amb base i tapa quadrades. El preu del material de les parets laterals és d'1 cèntim per cm^2. La base i la tapa es construiran amb un material de qualitat superior a les cares laterals de la caixa i que és un 25% més car.

Obtín:

4.1.1 **(0,75 punts)** La funció $P(x)$ que proporciona el preu del material de la caixa en funció del costat de la base x.

4.1.2 **(1,25 punts)** Les dimensions de la caixa perquè la funció $P(x)$ tinga el menor valor possible.

4.1.3 **(0,5 punts)** El preu del material en el cas anterior.

4.2 Donada la funció real de variable real

$$f(x) = x|x - 2|.$$

4.2.1 **(1 punt)** Representa la regió compresa entre la gràfica de la funció f, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = -1$ i $x = 5$.

4.2.2 **(1,5 punts)** Calcula l'àrea de la regió anterior.

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 (0.25 puntos) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

Solución:

1.1) 0.35.

1.2) 0.655.

1.3) 0.2508.

1.4) 0.994.L

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2:

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 **(1.25 puntos)** En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 **(1.25 puntos)** En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A. Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α.

PREGUNTA 2: ÀLGEBRA (2,5 punts)

Respon a l'apartat 2.1 o a l'apartat 2.2

2.1 En un sistema de processament d'imatges es fa servir una matriu per transformar certes dades. La matriu depèn del paràmetre real α i és:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

2.1.1 **(1,25 punts)** En un dels processos, perquè el sistema funcione, cal que la matriu siga idempotent, és a dir, que el seu quadrat coincidisca amb ella, $A^2 = A$. Obtín els valors de α que permeten que el sistema funcione.

2.1.2 **(1,25 punts)** En un altre procés diferent, cal utilitzar la matriu inversa d'A. Obtín els valors de α per als quals hi ha la inversa i calcula aquesta inversa en funció de α.

Solución:

2.1.1 α = 0.

$$2.1.2\ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

2.2.1 Si $a \neq -3$ SCD y si $a = -3$ SCI.

BY NC SA

Ejercicio 2.2:

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 **(1 punto)** Discutir el sistema en función del parámetro a.

2.2.2 **(0.75 puntos)** Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 **(0.75 puntos)** Calcular la solución del sistema para $a = 0$.

2.2 Siga el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3, \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

on a és un paràmetre real.

2.2.1 **(1 punt)** Discuteix el sistema en funció del paràmetre a.

2.2.2 **(0,75 punts)** Calcula les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat.

2.2.3 **(0,75 punts)** Calcula la solució del sistema per a $a = 0$.

Solución:

2.2.3 $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3:

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 **(1 punto)** Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 **(1 punto)** La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 **(0.5 puntos)** La distancia del punto $P = (1,0,2)$ a dicho plano.

PREGUNTA 3: GEOMETRIA (2,5 punts)

Respon a l'apartat 3.1 o a l'apartat 3.2

3.1 Donada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ i la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcula:

3.1.1 **(1 punt)** Si existeixen, les coordenades del punt de tall de totes dues rectes.

3.1.2 **(1 punt)** L'equació del pla que conté totes dues rectes.

3.1.3 **(0,5 punts)** La distància del punt $P = (1,0,2)$ a aquest pla.

3.2.2 **(0,5 punts)** La distància del punt Q al pla π.

3.2.3 **(1 punt)** El punt simètric de P respecte al pla π.

Solución:

3.1.1 Punto de corte (−1, −1,3).

3.1.2 Plano $-x + 4y + 2z - 3 = 0$.

3.1.3 Distancia 0.

BY NC SA

Ejercicio 3.2:

3.2 Se consideran el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1,0,1)$. Se pide:

3.2.1 **(1 punto)** La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y por $Q = (2,1,2)$.

3.2.2 **(0.5 puntos)** La distancia del punto Q al plano π.

3.2.3 **(1 punto)** El punto simétrico de P respecto al plano π.

3.2 Donats el pla $\pi: 3x - y + 2z = 4$ i el punt $P = (-1,0,1)$, obtín:

3.2.1 **(1 punt)** L'equació del pla perpendicular a π que passa per P i per $Q = (2,1,2)$.

Solución:

3.2.1 Plano $x - y - 2z + 3 = 0$.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4.1:

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2. La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro.

Obtener:

4.1.1 **(0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x.

4.1.2 **(1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 **(0.5 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

PREGUNTA 4: ANÀLISI (2,5 punts)

Respon a l'apartat 4.1 o a l'apartat 4.2

4.1 Una empresa de paqueteria vol dissenyar diferents models de caixes. Un d'aquests models consisteix en una caixa de 80 cm^3 de volum, amb base i tapa quadrades. El preu del material de les parets laterals és d'1 cèntim per cm^2. La base i la tapa es construiran amb un material de qualitat superior a les cares laterals de la caixa i que és un 25% més car.

Obtín:

4.1.1 **(0,75 punts)** La funció $P(x)$ que proporciona el preu del material de la caixa en funció del costat de la base x.

4.1.2 **(1,25 punts)** Les dimensions de la caixa perquè la funció $P(x)$ tinga el menor valor possible.

4.1.3 **(0,5 punts)** El preu del material en el cas anterior.

Solución:

4.1.1 $P(x) = \frac{5}{2}x^2 + \frac{320}{x}$.

4.1.2 $x = 4$ centímetros e $y = 5$ centímetros.

4.1.3 120 céntimos.

BY NC SA

Ejercicio 4.2:

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x-2|.$$

Se pide:

4.2.1 **(1 punto)** Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 **(1.5 puntos)** Calcular el área de la región anterior.

4.2 Donada la funció real de variable real

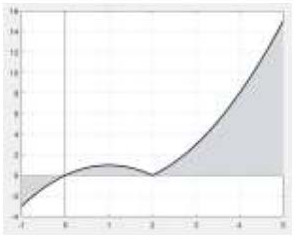
$$f(x) = x|x-2|.$$

4.2.1 **(1 punt)** Representa la regió compresa entre la gràfica de la funció f, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = -1$ i $x = 5$.

4.2.2 **(1,5 punts)** Calcula l'àrea de la regió anterior.

Solución:

4.2.1



4.2.2 Área $= \frac{62}{3} = 20.6667.$

BY NC SA

GENERALITAT VALENCIANA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las $3/5$ partes de sus publicaciones reciben un "Like". Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún "Like" si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos "Likes" en sus cuatro publicaciones?

1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un "Like" sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2.1:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b, si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$

Ejercicio 2.2:

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro a.

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3.1:

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$ donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m, si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45^o.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2.

Ejercicio 3.2:

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0,1,-1)$ y $Q = (1,a,1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a, si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π.

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4.1:

4.1 Dada la función real de variable real: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f.

Ejercicio 4.2

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = 8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas , la recta $x = 1$ y las gráficas de ambas funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

La empresa TikiTak ha realizado un estudio del comportamiento de sus usuarios y ha observado que las $3/5$ partes de sus publicaciones reciben un "Like". Juana es una usuaria de TikiTak. Se pide:

1.1 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún "Like" si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

1.2 (0.75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos "Likes" en sus cuatro publicaciones?

1.3 (1 punto) Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un "Like" sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

Solución:

1.1 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba ningún "Like" si ha subido a la plataforma TikiTak cuatro publicaciones?

Definimos los sucesos:

L – Nos dan un "Like"

L – No nos dan el "Like"

Según el enunciado tenemos que: $P(L) = \frac{3}{5} = 0{,}6$ y $P(\overline{L}) = \frac{2}{5} = 0{,}4$

Se trata de una distribución binomial (solo dos probabilidades y complementarias) de 4 elementos (las cuatro publicaciones) y queremos hallar la probabilidad de no recibir ningún "like" por lo que podemos aplicar la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0.0256 = 2.56\%$$

1.2 ¿Cuál es la probabilidad de que Juana no reciba más de dos "Likes" en sus cuatro publicaciones?

No recibir más de dos "likes" significa que recibe 0, 1 o 2. Tenemos que sumar las probabilidades de los tres casos:

$$P(X = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0.0256 = 2.56\%$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.1536 = 15.36\%$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.3456 = 34.56\%$$

Sumando los tres casos tenemos:

$$P(X \leq 2) = 0.0256 + 0.1536 + 0.3456 = 0.5248 = 52.48\,\%$$

BY NC SA

1.3 Juana desea que la probabilidad de recibir al menos un "Like" sea mayor que 0.999. ¿Cuál es el menor número de publicaciones que ha de subir para conseguirlo?

La probabilidad de recibir al menos un "Like" es complementaria a no recibir ninguno. Como queremos que sea mayor que 0.999 tenemos que la probabilidad ha de ser menor que$1 - 0.999 = 0.001$. Esta probabilidad la podemos escribir como:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \rightarrow P(X = 0) = \binom{n}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^n$$

Tenemos que hallar el valor de n en la inecuación:

$$\binom{n}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^n < 0.001$$

Sabemos que $\binom{n}{0} = 1$ y que $0.6^0 = 1$

Por lo que hay que resolver que: $0.4^n < 0.001$

Resolvemos la ecuación exponencial: $0.4^n = 0.001$

Despejando con un logaritmo: $log_{0.4} 0.001 = n \rightarrow n = \frac{log 0.001}{log 0.4} \simeq 7.5388$

Como n es un valor natural tenemos que si ha de hacer más de 7.5 publicaciones el número mínimo serán 8.

Comprobamos que se cumple (no es imprescindible):

$$P(X = 0) = \binom{8}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^8 \simeq 0.000655 < 0.001$$

Podemos calcularlo para 7 publicaciones:

$$P(X = 0) = \binom{7}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^7 \simeq 0.00163 > 0.001$$

Con lo que el número mínimo de publicaciones será de 8.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 2.1:

2.1 Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

Obtener:

2.1.1 (1.25 puntos) La matriz *X* solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

2.1.2 (0.5 puntos) El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

2.1.3 (0.75 puntos) Los valores de a y b, si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$

Solución:

2.1.1 La matriz X solución de la ecuación $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$.

Como se trata de una ecuación matricial vamos a resolver primero con las letras:

$(A^{-1}X)^{-1} = A(B^2A)^{-1}$	aplicamos que $(MN)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$
$X^{-1} \cdot ((A)^{-1})^{-1} = AA^{-1}(B^2)^{-1}$	aplicamos que $(M^{-1})^{-1} = M$ y que $M \cdot M^{-1} = I$
$X^{-1} \cdot A = I(B^2)^{-1}$	aplicamos que $I \cdot M = M$
$X^{-1} \cdot A = (B^2)^{-1}$	despejamos X^{-1} multiplicando por la derecha por A^{-1}
$X^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1}$	aplicamos que $M \cdot M^{-1} = I$
$X^{-1} \cdot I = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1}$	aplicamos que $I \cdot M = M$
$X^{-1} = (B^2)^{-1} \cdot A^{-1}$	en la derecha tenemos que $(MN)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$
$X^{-1} = (A \cdot B^2)^{-1}$	calculando la inversa a ambos miembros
$X = A \cdot B^2$	

Realizamos las operaciones:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2-2 \\ 0-0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como sale la identidad de orden 2 tenemos que:

$X = A \cdot B^2 \rightarrow X = A \rightarrow$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

2.1.2 El determinante de la matriz $(3A^5B)^2$

Vamos a aplicar las propiedades de los determinantes.

$\lvert(3A^5B)^2\rvert$	aplicamos que $\lvert(kM)\rvert = k^{(dimM)} \cdot \lvert M\rvert$
$\lvert(9)^2(A^5B)^2\rvert$	aplicamos que $\lvert M^n\rvert = \lvert M\rvert^n$
$81\lvert A^5B\rvert^2 \rightarrow 81\lvert A^5B\rvert \cdot \lvert A^5B\rvert$	aplicamos que $\lvert M \cdot N\rvert = \lvert M\rvert \cdot \lvert N\rvert$
$81\lvert A^5\rvert\lvert B\rvert \cdot \lvert A^5\rvert\lvert B\rvert$	aplicamos que $\lvert M^n\rvert = \lvert M\rvert^n$
$81\lvert A\rvert^5\lvert B\rvert \cdot \lvert A\rvert^5\lvert B\rvert$	al ser los determinantes números aplicamos la conmutativa

$81|A|^{10}|B|^2$

Entonces tenemos que $|(3A^5B)^2| = 81|A|^{10} \cdot |B|^2$

Hallamos los dos determinantes implicados:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2) - 3\cdot 1 = 1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 0\cdot 2 = -1$$

Aplicando esos valores tenemos que:

$$|(3A^5B)^2| = 81|A|^{10} \cdot |B|^2 = 81 \cdot 1^{10} \cdot (-1)^2 = 81$$

$$\boldsymbol{\left|\left(3A^5B\right)^2\right| = 81}$$

2.1.3 Los valores de a y b, si existen, tales que $aB^{100} + bB^{99} = A + C$

Vamos a intentar hallar una recurrencia para la potencia de la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la matriz B al cuadrado da la identidad podemos agrupar las potencias de manera que cualquier exponente par dará la identidad y cualquier impar la misma matriz B.

Por lo anterior tenemos que:

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B^{99} = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Escribimos la expresión y sustituimos el resultado de las potencias:

$$aI + bB = A + C \rightarrow a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Realizando las operaciones tenemos:

$$\begin{pmatrix} a+b & 2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y son iguales los elementos que ocupan la misma posición tenemos cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2b=0 \\ 0=0 \\ a-b=1 \end{cases} \rightarrow$$

Resolviendo tenemos que:

$$\boldsymbol{a = 1 \text{ y } b = 0}$$

BY NC SA

Ejercicio 2.2:

2.2 Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que dependen del parámetro real □:

$$\begin{cases} x - ay - z = -a \\ ax - y + z = a \\ ax + y = a \end{cases}$$

Se pide:

2.2.1 (1.25 puntos) Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro □.

2.2.2 (1.25 puntos) Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Solución:

2.2.1 Discutir el sistema de ecuaciones en función de los valores del parámetro □.

Para discutir el sistema vamos a utilizar el Teorema de Rouché-Fröbenius.

Matriz de los coeficientes y matriz ampliada de los coeficientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -1 & -a \\ a & -1 & 1 & a \\ a & 1 & 0 & a \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes. Para ellos calculamos el menor de orden 3 (toda la matriz) e igualamos a cero:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a^2 - a - a - 0 - 1 = -a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$a^2 + 2a + 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -1$$

Para ese valor la matriz NO tiene rango 3. Estudiamos un menor de orden 2:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

Por lo que podemos concluir que si $a = -1$ $RgM = 2$ y si $a \neq -1$ $RgM = 3$

Estudiamos ahora el rango de la matriz ampliada de los coeficientes.

En el caso de $a \neq -1$ al tratarse de una matriz de dimensión 3x4 su rango coincidirá con el de la matriz M por lo que tenemos que si $a \neq -1 \rightarrow RgM^* = RgM = 3$

Estudiamos el caso $a = -1$ la matriz queda:

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Debemos comprobar si existe algún menor de orden 3 diferente de cero. Esto lo podemos hacer calculando los menores posibles (hay 4 de los cuales uno ya está calculado) o bien buscando una relación (combinación lineal entre las filas o columnas) que nos asegure que todos valen cero.

Es fácil comprobar que la primera y la segunda fila son proporcionales. Al ser las filas linealmente dependientes no puede tener rango 3 por lo que tendrá el mismo rango que la matriz M.

En conclusión tenemos que, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, la discusión del sistema será:

Si $a \neq -1 \rightarrow RgM = RgM^* = 3 = nºincóg. \rightarrow SCD$(sistema compatible determinado)

Si $a = -1 \rightarrow RgM = RgM^* = 2 < nºincóg. \rightarrow SCI$(sistema compatible indeterminado)

2.2.2 Calcular el conjunto de soluciones del sistema para aquellos valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

Para que el sistema sea compatible determinado, según lo visto en el apartado anterior,$a \neq -1$

Como tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y además el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar la regla de Cramer.

Valor del determinante de los coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2 - 2a - 1 = -(a+1)^2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a & -a & -1 \\ a & -1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{0 - a^2 - a - a - 0 + a}{-(a+1)^2} = \frac{-a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ a & a & 1 \\ a & a & 0 \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{0 - a^2 - a^2 + a^2 - 0 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{a}{a+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ a & -1 & a \\ a & 1 & a \end{vmatrix}}{-(a+1)^2} = \frac{-a - a^3 - a^2 - a^2 + a^3 - a}{-(a+1)^2} = \frac{-2a(a+1)}{-(a+1)^2} = \frac{2a}{a+1}$$

Luego la solución es:

$$\boldsymbol{(x, y, z) = \left(\frac{a}{a+1}, \frac{a}{a+1}, \frac{2a}{a+1}\right)}$$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3.1:

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$ donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m, si existe, para el que π_1 y π_2 son perpendiculares.

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45º.

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2.

Solución:

3.1 Dados los planos $\pi_1: x + 2y + mz = -1$ donde m es un parámetro real, y $\pi_2: x + z = 6$.

3.1.1 (0.5 puntos) Encontrar el valor de m, si existe, para el queπ_1y$\pi_2$son perpendiculares.

Para que dos planos sean perpendiculares han de serlo sus dos vectores normales. Para que dos vectores sean perpendiculares el producto escalar de ambos ha de ser cero:

$\pi_1: x + 2y + mz = -1 \rightarrow \overrightarrow{n_1} = (1,2,m)$

$\pi_2: x + z = 6 \rightarrow \overrightarrow{n_2} = (1,0,1)$

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = (1,2,m) \cdot (1,0,1) = 1 + 0 + m = m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$

Por lo cual para que ambos planos sean perpendiculares $m = -1$

3.1.2 (1.25 puntos) Encontrar el valor de m para el que π_1 y π_2 forman un ángulo de 45º.

El ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales. Vamos a utilizar la fórmula que nos da el ángulo formado por dos vectores:

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

Tomando los valores correspondientes tenemos:

$$cos45 = \frac{(1,2,m)\cdot(1,0,1)}{\sqrt{1^2+2^2+m^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+m}{\sqrt{m^2+5}\cdot\sqrt{2}} \rightarrow 1 = \frac{1+m}{\sqrt{m^2+5}} \rightarrow \sqrt{m^2+5} = m+1 \rightarrow$$

$$\rightarrow m^2 + 5 = (m+1)^2 \rightarrow m^2 + 5 = m^2 + 2m + 1 \rightarrow 4 = 2m \rightarrow m = 2$$

Por lo cual para que ambos planos formen un ángulo de 45º el valor ha de ser $m = 2$

3.1.3 (0.75 puntos) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de π_1 y π_2.

La recta que forma la intersección de ambos planos se halla resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones (puntos que tienen en común). Será un sistema compatible indeterminado con un parámetro.

$$\begin{cases} x + 2y + mz = -1 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

Haciendo$z = \lambda$tenemos:

$$\begin{cases} x + 2y + m \cdot \lambda = -1 \\ x + \lambda = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = -1 - m \cdot \lambda \\ x = 6 - \lambda \end{cases}$$

BY NC SA

Sustituyendo el valor hallado:

$$6-\lambda+2y=-1-m\cdot\lambda \rightarrow\ 2y=-7-m\cdot\lambda+\lambda \rightarrow y=\frac{-7+(1-m)\lambda}{2}$$

Las ecuaciones paramétricas buscadas son:

$$\begin{cases} x=6-\lambda \\ y=\dfrac{-7}{2}+\dfrac{1-m}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

BY NC SA

Ejercicio 3.2:

3.2 Dado el plano $\pi: 3x + y - z = 2$ y los puntos $P = (0,1,-1)$ y $Q = (1,a,1)$, calcular:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a, si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π.

3.2.2 (1.25 puntos) Para $a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del plano π.

Solución:

3.2.1 (1.25 puntos) Los valores del parámetro a, si existen, para los que la recta que pasa por P y Q está contenida en el planoπ.

Para demostrar que una recta está contenida en un plano podemos recurrir a diferentes argumentos. Lo más fácil suele ser demostrar que dos de sus puntos están contenidos (con lo que toda la recta lo estaría).

Como la recta pasa por $P = (0,1,-1)$y$Q = (1,a,1)$lo más fácil es demostrar que esos dos puntos pertenecen al planoπ. Recordemos que un punto pertenece a un plano si verifica su ecuación.

Sustituyendo las coordenadas de los puntos en el plano tenemos:

$\begin{cases} P = (0,1,-1) \\ \pi: 3x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow 3 \cdot 0 + 1 - (-1) = 2 \rightarrow$ Como verifica la ecuación tenemos que$P \in \pi$

$\begin{cases} Q = (1,a,1) \\ \pi: 3x + y - z = 2 \end{cases} \rightarrow 3 \cdot 1 + a - 1 = 2 \rightarrow$ Para que se verifique tenemos que$a = 0$

Para el valor del parámetro $a = 0$ la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano π

3.2.2 (1.25 puntos) Para$a = 1$, el punto simétrico de Q respecto del planoπ.

Como hemos visto en el apartado anterior para el valor$a = 1$el punto no estará contenido en el plano y tendrá sentido buscar el simétrico respecto del mismo.

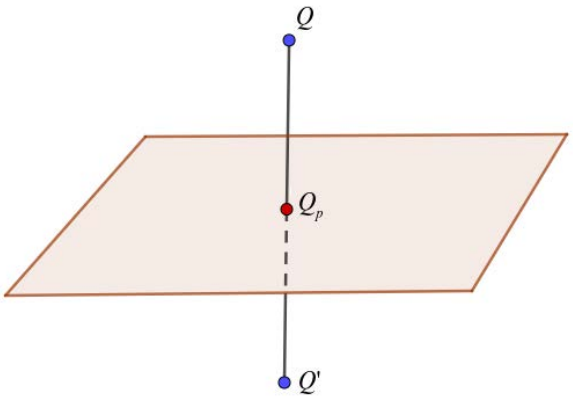
Vamos a seguir el siguiente procedimiento:

- Con el vector normal del plano y el punto Q trazamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.

- Hallamos el punto de corte entre el plano y la recta hallada Q_p (punto proyección ortogonal).

- Hallamos el vector que une el punto Q con su proyección.

- Aplicamos (sumamos) el vector hallado al punto proyección.



- Con el vector normal del plano y el punto Q trazamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto.

$\vec{n} = (3,1,-1)$ y $Q = (1,1,1)$

Recta (en paramétricas): $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

- Hallamos el punto de corte entre el plano y la recta hallada Q_p (punto proyección ortogonal). Para ello basta con hallar el valor del parámetro que hace cierta la ecuación del plano:

$$\pi: 3x + y - z = 2 \rightarrow 3 \cdot (1 + 3\lambda) + (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2 \rightarrow 11\lambda = -1 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{11}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11} \\ y = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \\ z = 1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11} \end{cases}$$

Por lo que tenemos que el punto proyección es: $Q_p = \left(\frac{8}{11}, \frac{10}{11}, \frac{12}{11}\right)$

- Hallamos el vector que une el punto Q con su proyección. Esto lo hacemos restando las coordenadas del extremo menos las del origen.

$$\overrightarrow{QQ_p} = \left(\frac{8}{11} - 1, \frac{10}{11} - 1, \frac{12}{11} - 1\right) = \left(\frac{-3}{11}, \frac{-1}{11}, \frac{1}{11}\right)$$

- Aplicamos (sumamos) el vector hallado al punto proyección.

$$\left(\frac{8}{11} - \frac{3}{11}, \frac{10}{11} - \frac{1}{11}, \frac{12}{11} + \frac{1}{11}\right) = \left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$$

El punto simétrico buscado es: $\left(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}\right)$

BY NC SA

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4.1:

4.1 Dada la función real de variable real: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

Se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

4.1.2 (1.5 puntos) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Solución:

4.1.1 Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* .

La función es una racional polinómica. Tendrá problemas de dominio en aquellos puntos que anulen el polinomio denominador. Como tenemos que:

$x^2+1\neq 0$

El dominio son todos los reales: $Domf(x)=\mathbb{R}$

Las **asíntotas** pueden ser verticales, horizontales u oblicuas:

- Verticales. Se encuentran en los puntos de discontinuidad del dominio. Como la función no tiene puntos de discontinuidad **no tiene asíntotas verticales.**

- Horizontales. Se encuentran en los valores, si existen y son finitos, de los límites:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$ya que el grado del polinomio denominador es mayor que el del numerador.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$

Por lo que la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función.

Para representarla luego es conveniente hallar las tendencias, es decir, si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello, hallamos un valor grande y pequeño y comparamos el valor de la función con el de la asíntota.

$f(10)=\frac{10}{10^2+1}\simeq 0.099>0$Por lo que en +∞ va por encima de la asíntota.

$f(-10)=\frac{-10}{(-10)^2+1}\simeq -0.099<0$Por lo que en -∞ va por debajo de la asíntota.

Como tiene asíntota horizontal **no tiene asíntotas oblicuas**.

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* necesitamos derivar la función e igualar la derivada a cero.

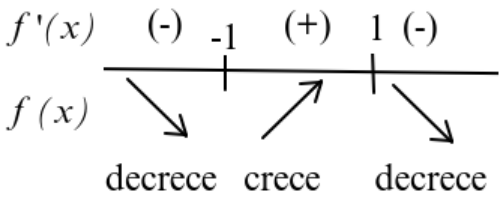
$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0$

Para que un cociente valga cero lo ha de ser el denominador:

$\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0\rightarrow -x^2+1=0\rightarrow x=\pm 1$

Por lo que hay dos posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Dividimos el dominio ($\mathbb{R}$) en tres intervalos y estudiamos el signo de la derivada en ellos calculando un valor de la misma en cada uno de ellos.



$]-\infty,-1[\rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(-2) = \frac{-4+1}{(4+1)^2} < 0$ luego decrece.

$]-1, 1[\rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(0) = \frac{0+1}{(0+1)^2} > 0$ luego crece.

$]1,+\infty[\rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \rightarrow f'(2) = \frac{-4+1}{(4+1)^2} < 0$ luego decrece.

Por lo que la función decrece en $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ y crece en $]-1,1[$

4.1.2 Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función □.

Como la función es continua podemos buscar extremos absolutos.

Para calcularlos deben estar en los extremos relativos o en los extremos del intervalo de definición.

Los extremos relativos son:

$x = -1$ como hemos visto en el apartado anterior en ese punto la función pasa de decrecer a crecer por lo que tendrá un **mínimo**.

Obtenemos la segunda coordenada: $f(-1) = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$

Por lo que el **mínimo** será en el punto $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

$x = 1$ como hemos visto en el apartado anterior en ese punto la función pasa de crecer a decrecer por lo que tendrá un **máximo**.

Obtenemos la segunda coordenada: $f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Por lo que el máximo será en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

Hallamos los valores en los extremos relativos y en los extremos del intervalo:

$f(-\infty) = 0$

$f(-1) = \frac{-1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{2}$

$f(+\infty) = 0$

Por lo tanto:

BY NC SA

El mayor valor es $x = 1$ por lo que será máximo absoluto en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

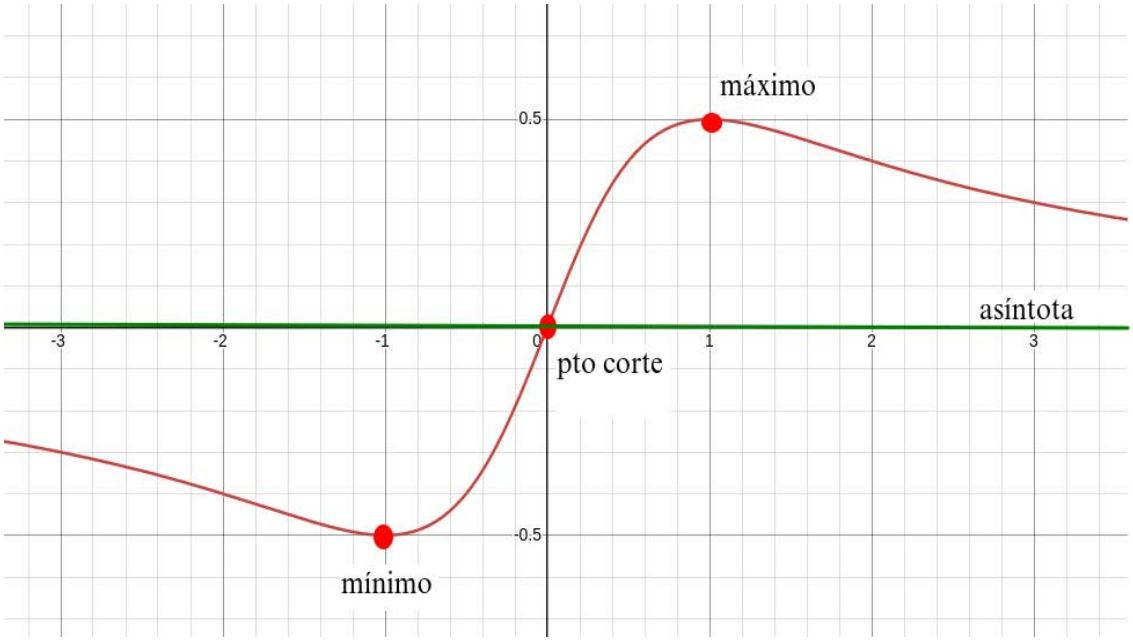
El menor valor es $x = -1$ por lo que será mínimo absoluto en $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

4.1.3 Representar la función f.

Con lo visto en los apartados anteriores representamos el máximo y mínimo absoluto, la asíntota y sus tendencias. Además podemos hacer una pequeña tabla de valores de la función para saber por dónde va la función.

Hallamos el punto de corte con el eje OY: $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{0}{0^2+1} = 0 \rightarrow (0,0)$

Al salir el origen también es el punto de corte con OX. La representación queda:



BY NC SA

Ejercicio 4.2:

4.2 Dadas las funciones reales de variable real $f(x)=\frac{1}{x^2}$ y $g(x)=8x$, se pide:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas , la recta $x=1$ y las gráficas de ambas funciones $y=f(x)$ e $y=g(x)$

Solución:

4.2.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

Es una función racional polinómica por lo que presentará problemas de dominio en aquellos valores que anulen el denominador:

$f(x)=\frac{1}{x^2}\rightarrow x^2=0\rightarrow x=0$

Por lo que el dominio es: $Domf(x)=\mathbb{R}-\{0\}$o bien]-∞,0[U]0,+∞[

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Las horizontales se encuentran en el valor de los límites si existen y son finitos:

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$ por lo que la recta $y=0$ es **asíntota horizontal**.

Como después tendremos que representar podemos hallar las tendencias, es decir, si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Hallamos un valor relativamente grande y pequeño y lo comparamos con el valor de la asíntota:

$f(10)=\frac{1}{100}=0.01>0$ luego irá por encima de la asíntota en +∞.

$f(-10)=\frac{1}{100}=0.01>0$ luego irá por encima de la asíntota en -∞.

Como tiene horizontal **no tendrá oblicua**.

Las verticales estarán en los puntos de discontinuidad. Hallamos el valor del límite cuando tiene al valor de discontinuidad hallado.

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\left(\frac{1}{0}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to0-}\frac{1}{x^2}=+\infty\end{cases}$ al ser infinito tendrá asíntota en $x=0$

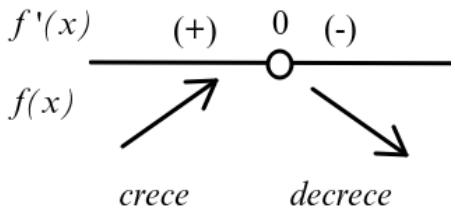
Hallamos ahora los intervalos de crecimiento y decrecimiento para lo cual hallamos la derivada e igualamos a cero:

$f(x)=\frac{1}{x^2}\rightarrow f'(x)=\frac{-2}{x^3}\neq0$

Como la derivada no puede ser cero tenemos que no existen máximos ni mínimos relativos. Necesitamos ahora saber el signo de la derivada en el dominio. Hallamos el valor de la derivada en los dos intervalos en los que la discontinuidad divide al dominio:

$f'(1) = \frac{-2}{1^3} < 0$ luego es decreciente

$f'(-1) = \frac{-2}{(-1)^3} > 0$ luego es creciente

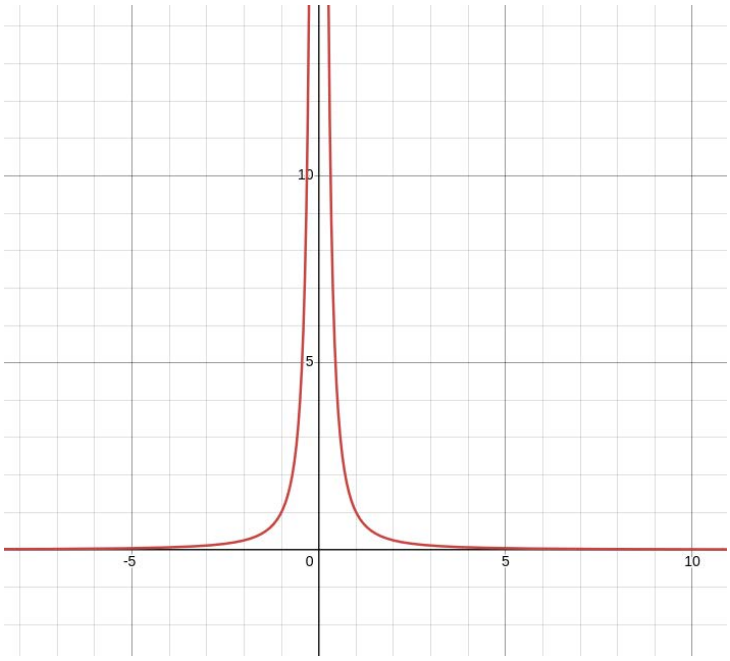


Por lo que los intervalos quedan:

crece en]-∞, 0[y decrece en]0, +∞[

4.2.2 (0.25 puntos) Dibujar las gráficas de ambas funciones.

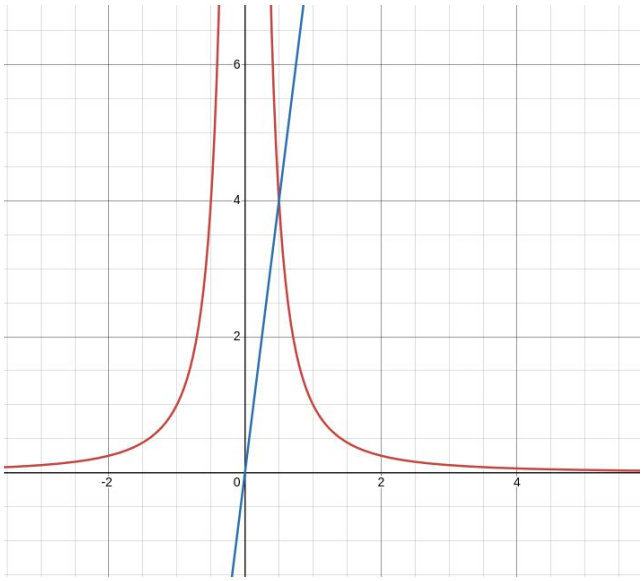
Para realizar el dibujo de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ aprovecharemos los datos hallados en el apartado anterior. Dibujamos las asíntotas y sus tendencias, tenemos en cuenta el crecimiento y decrecimiento y hallamos algunos puntos:



Para dibujar la gráfica de $g(x) = 8x$ basta con hacer una pequeña tabla de valores puesto que es una recta:

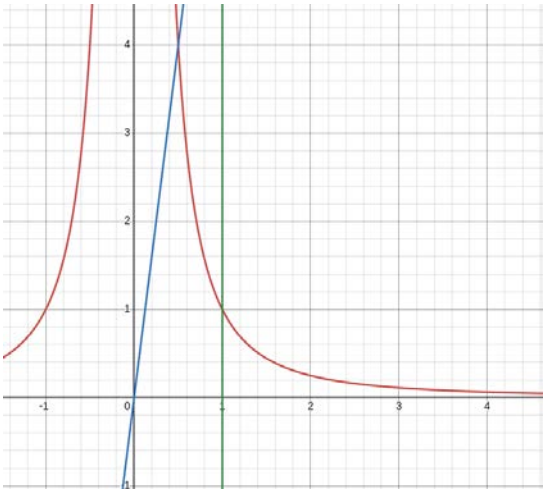
x	y
-1	-8
0	0
1	8

Unimos ambas representaciones:



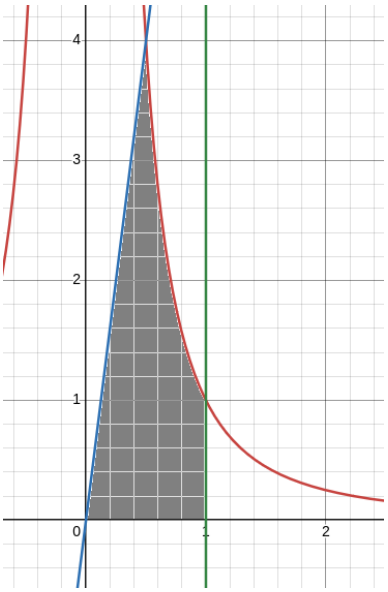
4.2.3 (1.75 puntos) Calcular el área del recinto delimitado por el eje de abscisas, la recta $x = 1$ y las gráficas de ambas funciones $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Utilizando el dibujo de las gráficas anteriores y representando la recta $x = 1$ hallamos el área a calcular.



BY NC SA

El área a calcular es:



Podemos apreciar que tendremos que calcular la integral de $g(x) = 8x$ desde $x = 0$ hasta $x = 0.5$ y la de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ desde $x = 0.5$ hasta $x = 1$ y sumarlas.

$$\int 8\,x dx = [4x^2]_0^{0.5} = 1 - 0 = 1$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2}\, dx = \int \frac{x^{-1}}{-1} dx = \int \frac{-1}{x} dx = -1 - (-2) = 1$$

Si sumamos ambos resultados tenemos que el área pedida es de 2 u²

BY NC SA

n	k	p	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0		0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	0		0,9801	0,9025	0,8100	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1		0,9999	0,9975	0,9900	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0		0,9703	0,8574	0,7290	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1		0,9997	0,9928	0,9720	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7183	0,6480	0,5748	0,5000
	2		1,0000	0,9999	0,9990	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
	3		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0		0,9606	0,8145	0,6561	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1		0,9994	0,9860	0,9477	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2		1,0000	0,9995	0,9963	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9961	0,9919	0,9877	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0		0,9510	0,7738	0,5905	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1		0,9990	0,9774	0,9185	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2		1,0000	0,9988	0,9914	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	1,0000	0,9995	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4		1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0		0,9415	0,7351	0,5314	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1		0,9985	0,9672	0,8857	0,6554	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2		1,0000	0,9978	0,9842	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		1,0000	0,9999	0,9987	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6563
	4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
7	0		0,9321	0,6983	0,4783	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1		0,9980	0,9556	0,8503	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2		1,0000	0,9962	0,9743	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		1,0000	0,9998	0,9973	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	1,0000	0,9998	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0		0,9227	0,6634	0,4305	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1		0,9973	0,9428	0,8131	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2		0,9999	0,9942	0,9619	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3		1,0000	0,9996	0,9950	0,9437	0,8862	0,8059	0,7414	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	1,0000	0,9996	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5		1,0000	1,0000	1,0000	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6		1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7		1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961

BY NC SA

webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar los enunciados y muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

De distintos autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Con problemas resueltos y enunciados de muchos años.

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Selectividad.zip

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana

http://www.segundoperez.es/

Francisco Barrientos Fernández también tiene problemas resueltos de Selectividad.

En http://matesdebarrientos.blogspot.com/p/tercero.html

Varias comunidades, varios exámenes resueltos

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes

https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

https://www.examenesdepau.com/examenes/navarra/

Textos Marea Verde

Vídeos con problemas de Selectividad resueltos
Matemáticas II

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=1

Castilla La Mancha 2023

https://www.youtube.com/watch?v=rUaT_H1MiZM&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=2

Canarias 2023

https://www.youtube.com/watch?v=u8-g1UWQ_tQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=3

Cataluña 2023

https://www.youtube.com/watch?v=TusD3xYL7EQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=4

UNED 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Gr-Q6_CPbIw

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hsnPKI6KVTc

Sociales II

UNED 2022

https://www.youtube.com/watch?v=-7VQYaO_Awg

2023

https://www.youtube.com/watch?v=2tAZfLLFsxI

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Cg3t1PjXZm8

Comunidad Valenciana 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hLSBvJNoc5A&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq

https://www.youtube.com/watch?v=eJuxeLZai2w&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=d2QgtZkAep8&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=4

BY NC SA
Textos Marea Verde

SELECTIVIDAD 2025

MATEMÁTICAS II

ÍNDICE

1. Vídeos con exámenes resueltos: Selectividad 2025 3
2. Andalucía 7
3. Aragón 30
4. Asturias 60
5. Baleares 88
6. Canarias 112
7. Cantabria 137
8. Castilla – La Mancha 170
9. Castilla y León 190
10. Cataluña 217
11. Extremadura 248
12. Galicia 281
13. La Rioja 324
14. Madrid 357
15. Murcia 386
16. Navarra 422
17. País Vasco 458
18. Valencia 486
19. Otras páginas web con problemas resueltos 519

ÍNDICE **521**