Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2025

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

Coordinador: Álvaro Garmendia Antolín

www.apuntesmareaverde.org.es

Propiedad Intelectual

El presente documento se encuentra depositado en el registro de Propiedad Intelectual de Digital Media Rights con ID de obra AAA-0181-02-AAA-055911

Fecha y hora de registro: 2014-10-30 16:19:59.0

Licencia de distribución: CC by-nc-sa

Queda prohibido el uso del presente documento y sus contenidos para fines que excedan los límites establecidos por la licencia de distribución.

Mas información en http://www.dmrights.com

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia),

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

Reconeixement – NoComercial – CompartirIgual (by-nc-sa).

No se permite un uso comercial de la obra original ni de las posibles obras derivadas, la distribución de las cuales se debe hacer con una licencia igual a la que regula la obra original.

Reconocimiento (Attribution): En cualquier explotación de la obra autorizada por la licencia hará falta reconocer la autoría.

No Comercial (Non commercial): La explotación de la obra queda limitada a usos no comerciales.

Compartir Igual (Share alike): La explotación autorizada incluye la creación de obras derivadas siempre que mantengan la misma licencia al ser divulgadas

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS: SELECTIVIDAD 2025

ANDALUCÍA

https://www.youtube.com/watch?v=b1jU1zk9ADM

https://www.youtube.com/watch?v=DV6V2jQz6t8

https://www.youtube.com/watch?v=E3R4g8zmXxg

ARAGÓN:

https://www.youtube.com/watch?v=4asWnyz50C8

https://www.youtube.com/watch?v=n0Dn_zfkh_A

CANARIAS

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DHC2sO6KoGbE

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D2HLcE3gLNpI

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DNaf_Kyau16g

CANTABRIA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBbDwCPh__JI

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

https://www.youtube.com/live/wxG5Uv97g_0

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D_oxotfMqu2g

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DsXN1cOoANvY

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DpI-td_-GHWc

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D1Z--h4UYt00

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DE2-fz-t-LdA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DqIW260_jH9U

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DID3rtVTJHLU

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DZImz7ayANb4

MADRID

Examen Matemáticas II del 2025:

https://www.youtube.com/watch?v=hI-kThLEppI

https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

https://www.youtube.com/watch?v=hI-kThLEppI

https://www.youtube.com/watch?v=YGqMeJr3D0Q

https://luis-vives.es/examanes-resueltos-pau-junio-2025/

https://www.tiktok.com/@a.malaver/video/7512451206275501334

https://www.youtube.com/watch?v=G3dNOV5RraU

https://www.youtube.com/watch?v=TOFiLahHweE

MURCIA

https://www.tiktok.com/@laurimathteacher/video/7512068879137377558

NAVARRA

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBFccP66b44M

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DG8LIfgQwYew

https://www.youtube.com/watch?v=9wRPb9ZRaEk

PAÍS VASCO

https://www.youtube.com/watch?v=NtkcCwJWlkQ

https://www.tiktok.com/discover/examen-selectividad-pais-vasco-resuelto

https://www.youtube.com/watch?v=PP-AUT2cMRg

BY NC SA

Textos Marea Verde

https://www.youtube.com/watch?v=SnmMuVeqqZM

https://www.youtube.com/watch?v=lEwPj3OIfD8

VALENCIA

https://www.youtube.com/watch?v=ilhE_YAc-Cg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D1njolqFakAg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3Dd6S1L1-VGKk

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DilhE_YAc-Cg

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DGkXhMrUvnY4

OTROS

https://www.tiktok.com/@profesor10demates/video/7510521377930235158

https://www.youtube.com/watch?v=3NeIevt3xW8

https://www.youtube.com/watch?v=3NeIevt3xW8

Noticias:

Un ingeniero, tras resolver el examen de Matemáticas II de la PAU de Madrid: "Lo siento mucho por los chavales"

¿Por qué ha sido tan difícil el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la PAU andaluza? | Sociedad | Cadena SER

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2025
Comunidad autónoma de ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Merchán

CC BY NC SA

Vídeos

Una profesora de matemáticas sevillana sobre el polémico examen de Selectividad: "Por primera vez, los chicos han tenido que pensar de verdad"

¿Por qué ha sido tan difícil el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la PAU andaluza? | Sociedad | Cadena SER

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

CURSO: **2024 – 2025**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:
El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) **(0.75 puntos)** Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

BLOQUE B

BLOQUE B

EJERCICIO 2

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t) = 500\,000 \cdot (1 - e^{-0.2t});\ t > 0$$

a) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía y curvatura de la función N.
b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.
c) **(0.5 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450 000 personas?
d) **(0.5 puntos)** La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

EJERCICIO 3

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3} - 12t^2 + 108t + 108\right) & 0 \le t \le 12 \\ t^2 - 40t + 546 & 12 < t \le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.
b) **(1 punto)** ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?
c) **(0.75 puntos)** ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

BY NC SA

BLOQUE C

BLOQUE C

EJERCICIO 4

En una casa con trastero viven tres personas y cada una tiene un llavero con las llaves de la casa. El primer llavero contiene 7 llaves, el segundo 8 y el tercero 5. En cada uno de los llaveros hay una única llave que abre el trastero. Otra persona necesita abrir el trastero y, para ello, selecciona un llavero al azar y, de este, elige una llave aleatoriamente e intenta abrirlo. Calcule la probabilidad de que:

a) (**1 punto**) No haya acertado con la llave seleccionada.

b) (**0.5 puntos**) El llavero sea el tercero y la llave abra el trastero.

c) (**0.5 puntos**) Sabiendo que la llave elegida abre el trastero, esta pertenezca al primer o al tercer llavero.

d) (**0.5 puntos**) Si la llave no abre el trastero, esta no pertenezca al primer llavero.

EJERCICIO 5

Una empresa de marketing ha lanzado una campaña publicitaria para promocionar un nuevo servicio de energía solar para hogares. Según estudios previos, se estima que el 20% de las personas que ven el anuncio terminan contratando el servicio. Para analizar más en profundidad la efectividad de la campaña, se seleccionan aleatoriamente a 20 personas que han visto el anuncio.

a) (**0.75 puntos**) Calcule la probabilidad de que exactamente 10 personas contraten el servicio.

b) (**0.75 puntos**) Determine la probabilidad de que al menos 2 personas contraten el servicio.

c) (**0.5 puntos**) Determine el valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas.

d) (**0.5 puntos**) ¿Cuántas personas, de entre las que han visto el anuncio, se deberían seleccionar para que el número esperado de personas que contraten el servicio sea mayor o igual a 13?

BLOQUE D

BLOQUE D

EJERCICIO 6

El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas, se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 5 horas. A partir de una muestra de 81 estudiantes se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media poblacional es $(10.794, 13.206)$, con un nivel de confianza del 97%.

a) (**0.5 puntos**) Obtenga el tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes.

b) (**0.5 puntos**) Si se amplía el tamaño de la muestra, razone si manteniendo el nivel de confianza, la amplitud del intervalo de confianza aumenta o disminuye.

c) (**0.75 puntos**) Si se desea reducir la amplitud del intervalo de confianza, razone si manteniendo el tamaño muestral, ha de reducirse o aumentarse el nivel de confianza.

d) (**0.75 puntos**) Si la media de la población es de 10.2 horas y sabiendo que la media muestral es de 12 horas, calcule el tamaño máximo de la muestra para obtener un intervalo de confianza que contenga la media poblacional, manteniendo el 97% de confianza.

EJERCICIO 7

Los desajustes sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos, sigue una ley Normal con media 0 y desviación típica 2.2.

a) (**0.5 puntos**) Calcule el porcentaje de trenes que tienen un desajuste máximo de un minuto.

b) Elegidos al azar 15 trenes de alta velocidad, los desajustes han sido:

$$0,\quad 1.3,\quad -2.1,\quad -1.5,\quad 2,\quad 0.8,\quad 5,\quad 2.1,$$
$$-3,\quad 1.8,\quad 3.1,\quad 4,\quad -0.7,\quad 1.6,\quad -5.4$$

b1) (**1.25 puntos**) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96%, para la media poblacional. ¿Cuál es el error máximo que se comete en la estimación de esta media? Con este nivel de confianza y a partir de los datos obtenidos, ¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?

b2) (**0.75 puntos**) Con un nivel de confianza del 98%, ¿cuántos trenes de alta velocidad deberían elegirse, como mínimo, para que la diferencia entre la media poblacional y su estimación muestral sea como máximo de 1.1 minutos?

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1

a) (**1.75 puntos**) Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:
El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona *B* ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) (**0.75 puntos**) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

Solución:

a) Colocamos toda la información del trabajo de cada vendedor en una matriz.

$$\begin{matrix} & \textit{horas} & \textit{demos} & \textit{viajes} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{Zona A} \rightarrow & 40 & 10 & 5 \\ \textit{Zona B} \rightarrow & 80 & 15 & 8 \\ \textit{Zona C} \rightarrow & 100 & 25 & 10 \end{matrix}$$

Expresamos el coste de cada concepto en forma matricial.

$$\begin{matrix} \text{€ / } \textit{hora} \rightarrow \\ \text{€ / } \textit{demostración} \rightarrow \\ \text{€ / } \textit{viaje} \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la matriz de trabajos por la matriz de costes obteniendo lo que cobra cada uno antes de retener el IRPF.

$$\begin{matrix} & \textit{horas} & \textit{demos} & \textit{viajes} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{Zona A} \rightarrow & 40 & 10 & 5 \\ \textit{Zona B} \rightarrow & 80 & 15 & 8 \\ \textit{Zona C} \rightarrow & 100 & 25 & 10 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{€ / } \textit{hora} \\ \rightarrow \text{€ / } \textit{demos} \\ \rightarrow \text{€ / } \textit{viaje} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 40 \cdot 75 + 10 \cdot 300 + 5 \cdot 250 \\ 80 \cdot 75 + 15 \cdot 300 + 8 \cdot 250 \\ 100 \cdot 75 + 25 \cdot 300 + 10 \cdot 250 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} \begin{pmatrix} 7250 \\ 12500 \\ 17500 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \textit{Zona A} \\ \leftarrow \textit{Zona B} \\ \leftarrow \textit{Zona C} \end{matrix}$$

Solo el vendedor de la zona A cobra menos de 10000 €, por lo que se le descuenta un 15% de IRPF y se le debe pagar el 85% → $0.85 \cdot 7250 = 6162.5$ €.

Textos Marea Verde

Los vendedores de las zonas B y C superan los 10000 euros y deben pagar un 18% de IRPF, por lo que cobran el 82%. El vendedor de la zona B cobra $0.82 \cdot 12500 = 10250$ € y el vendedor de la zona C cobra $0.82 \cdot 17500 = 14350$ €.

El vendedor A cobra 6162.5 €, el B cobra 10250 € y el C cobra 14350 €.

b) Para que la matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6(a-1)+16+0-4(a-1)-18-0 =$$

$$= -6a+6+16-4a+4-18 = -10a+8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -10a+8 = 0 \Rightarrow 10a = 8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{10} = 0.8}$$

El determinante de la matriz A se anula para $a = 0.8$.
La matriz A es invertible para cualquier valor de a distinto de 0.8.

Textos Marea Verde

BLOQUE B

EJERCICIO 2

BLOQUE B

EJERCICIO 2

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t) = 500\,000 \cdot (1 - e^{-0.2t}); \ t > 0$$

a) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía y curvatura de la función N.
b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.
c) **(0.5 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450 000 personas?
d) **(0.5 puntos)** La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

Solución:

a) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$N(t) = 500000 \cdot \left(1 - e^{-0.2t}\right) \Rightarrow N'(t) = 500000 \cdot \left(-(-0.2)e^{-0.2t}\right) = 100000 \cdot e^{-0.2t} = \frac{10000}{e^{0.2t}}$$

Esta expresión de la derivada $N'(t) = \frac{10000}{e^{0.2t}}$ nunca se anula y siempre es positiva, por lo que la función es creciente en su dominio de definición $(0, +\infty)$ y no presenta máximos ni mínimos.

Obtenemos la derivada segunda para analizar la curvatura de la función.

$$N'(t) = 100000 \cdot e^{-0.2t} \Rightarrow N'(t) = 100000 \cdot (-0.2)e^{-0.2t} = -20000e^{-0.2t} = \frac{-20000}{e^{-0.2t}}$$

La segunda derivada es siempre negativa por lo que la función es cóncava ($\cap$) en todo su dominio.

b) Hallamos el límite de la función cuando el valor de t se hace muy grande.

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty} 500000 \cdot \left(1 - e^{-0.2t}\right) = \lim_{t \to +\infty} 500000 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{0.2t}}\right) =$$

$$= 500000 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{+\infty}}\right) = 500000 \cdot \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = 500000 \cdot (1 - 0) = \boxed{500000}$$

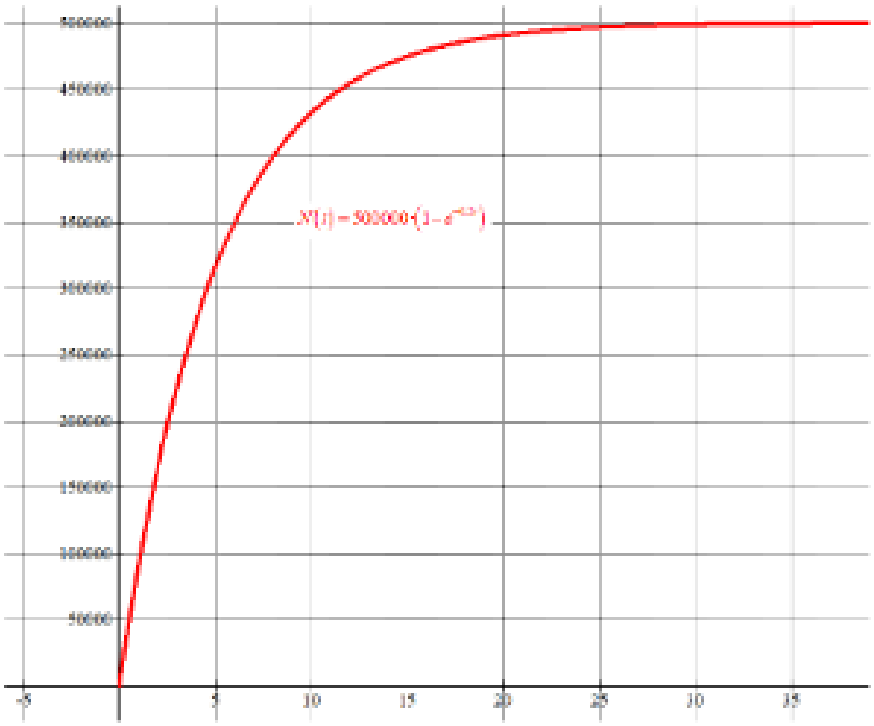
Hallamos el límite de la función cuando el valor de t se hace muy pequeño.

$$\lim_{t \to 0} N(t) = \lim_{t \to 0} 500000 \cdot \left(1 - e^{-0.2t}\right) = 500000 \cdot \left(1 - e^{0}\right) = 500000 \cdot (1 - 1) = \boxed{0}$$

Cuando la noticia se hace pública el número de personas que ha visto la noticia es 0 y cuando pasa mucho tiempo la tendencia es que vean la noticia 500000 personas.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

Textos Marea Verde

t	$N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right)$
0.01	999
0.1	9900
1	90634
10	432332
100	499999



c) Buscamos el valor de t para el que $N(t)=450000$.

$$\left.\begin{array}{l} N(t)=450000 \\ N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 450000=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-e^{-0.2t}=\frac{450000}{500000}=0.9 \Rightarrow 0.1=e^{-0.2t} \Rightarrow \ln 0.1=-0.2t \Rightarrow \boxed{t=\frac{-\ln 0.1}{0.2}\approx 11.51}$$

Al cabo de 11 horas y media se alcanzan las 450 000 personas.

d) Calculamos el valor de la derivada de la función en $t=1$ y $t=10$.

$$\left.\begin{array}{l} N'(1)=\dfrac{10000}{e^{0.2}}=8187.3 \\ N'(10)=\dfrac{10000}{e^{2}}\approx 1353.35 \end{array}\right\} \Rightarrow N'(1)=8187.3<1353.35=N'(10)$$

El número de personas que ven la noticia crece con más rapidez en la primera hora que en la décima.

Textos Marea Verde

EJERCICIO 3:

EJERCICIO 3

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right) & 0\le t\le 12\\ t^2-40t+546 & 12<t\le 24\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.

b) **(1 punto)** ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?

c) **(0.75 puntos)** ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene $155\ mg/dl$?

Solución:

a) Analizamos lo que ocurre antes del mediodía.

$$f(t)=\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right)\ 0\le t\le 12\Rightarrow f'(t)=\frac{5}{6}(t^2-24t+108)$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{5}{6}(t^2-24t+108)=0\Rightarrow t^2-24t+108=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 108}}{2}=\frac{24\pm 12}{2}=\begin{cases}\frac{24+12}{2}=18\notin[0,12]\\ \frac{24-12}{2}=6\in[0,12]\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en $[0,6)$ y en $(6,12]$.

- En el intervalo $[0,6)$ tomamos $t=1$ y la derivada vale
  $f'(1)=\frac{5}{6}(1^2-24+108)=\frac{425}{6}>0$. La glucosa aumenta hasta las 6 horas.
- En el intervalo $(6,12]$ tomamos $t=10$ y la derivada vale
  $f'(10)=\frac{5}{6}(10^2-240+108)=\frac{-80}{3}<0$. La glucosa disminuye desde las 6 hasta las 12 horas.

Analizamos lo que ocurre después del mediodía.

$$f(t)=t^2-40t+546\quad 12<t\le 24\Rightarrow f'(t)=2t-40$$

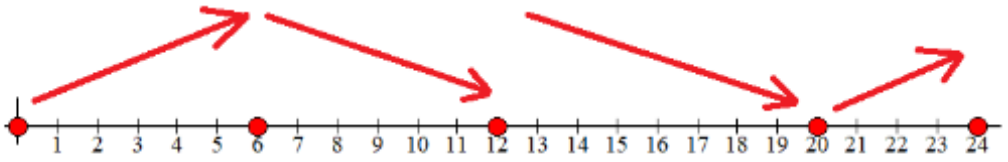
$$f'(t)=0\Rightarrow 2t-40=0\Rightarrow 2t=40\Rightarrow \boxed{t=20}\in(12,24]$$

Estudiamos el signo de la derivada en $(12,20)$ y en $(20,24]$.

- En el intervalo $(12,20)$ tomamos $t=13$ y la derivada vale
  $f'(13)=2\cdot 13-40=-14<0$. La glucosa disminuye desde las 12 hasta las 20 horas.
- En el intervalo $(20,24]$ tomamos $t=21$ y la derivada vale
  $f'(21)=2\cdot 21-40=2>0$. La glucosa aumenta desde las 20 hasta las 24 horas.

La glucosa aumenta de las 0 hasta las 6 horas y desde las 20 a las 24 horas.

b) Hemos visto que la glucosa sigue el esquema siguiente.



Valoramos la función en los puntos extremos y en los puntos de cambio.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\frac{5}{6}\left(\frac{0^3}{3}-12\cdot 0^2+108\cdot 0+108\right)=90 \text{ Nivel bajo} \\ f(6)=\frac{5}{6}\left(\frac{6^3}{3}-12\cdot 6^2+108\cdot 6+108\right)=330 \text{ Nivel alto} \\ f(12)=\frac{5}{6}\left(\frac{12^3}{3}-12\cdot 12^2+108\cdot 12+108\right)=210 \\ f(20)=20^2-40\cdot 20+546=146 \\ f(24)=24^2-40\cdot 24+546=162 \end{array}\right\}$$

El nivel más alto es de 330 mg/dl y se produce a las 6 horas.
El nivel más bajo es de 90 mg/dl y se produce a las 0 horas.

c) Después del mediodía la función es $f(t)=t^2-40t+546 \quad 12<t\leq 24$.

Buscamos el valor de t para el que $f(t)=155$.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=155 \\ f(t)=t^2-40t+546 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2-40t+546=155 \Rightarrow t^2-40t+391=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{40\pm\sqrt{(-40)^2-4\cdot 391}}{2}=\frac{40\pm 6}{2}=\left\{\begin{array}{l} \frac{40+6}{2}=23\in(12,24] \\ \frac{40-6}{2}=17\in(12,24] \end{array}\right.$$

Después del mediodía, el paciente tiene un nivel de glucosa de 155 *mg/dl* a las 17 y a las 23 horas.

BLOQUE C

BLOQUE C

EJERCICIO 4

En una casa con trastero viven tres personas y cada una tiene un llavero con las llaves de la casa. El primer llavero contiene 7 llaves, el segundo 8 y el tercero 5. En cada uno de los llaveros hay una única llave que abre el trastero. Otra persona necesita abrir el trastero y, para ello, selecciona un llavero al azar y, de este, elige una llave aleatoriamente e intenta abrirlo. Calcule la probabilidad de que:

a) (**1 punto**) No haya acertado con la llave seleccionada.

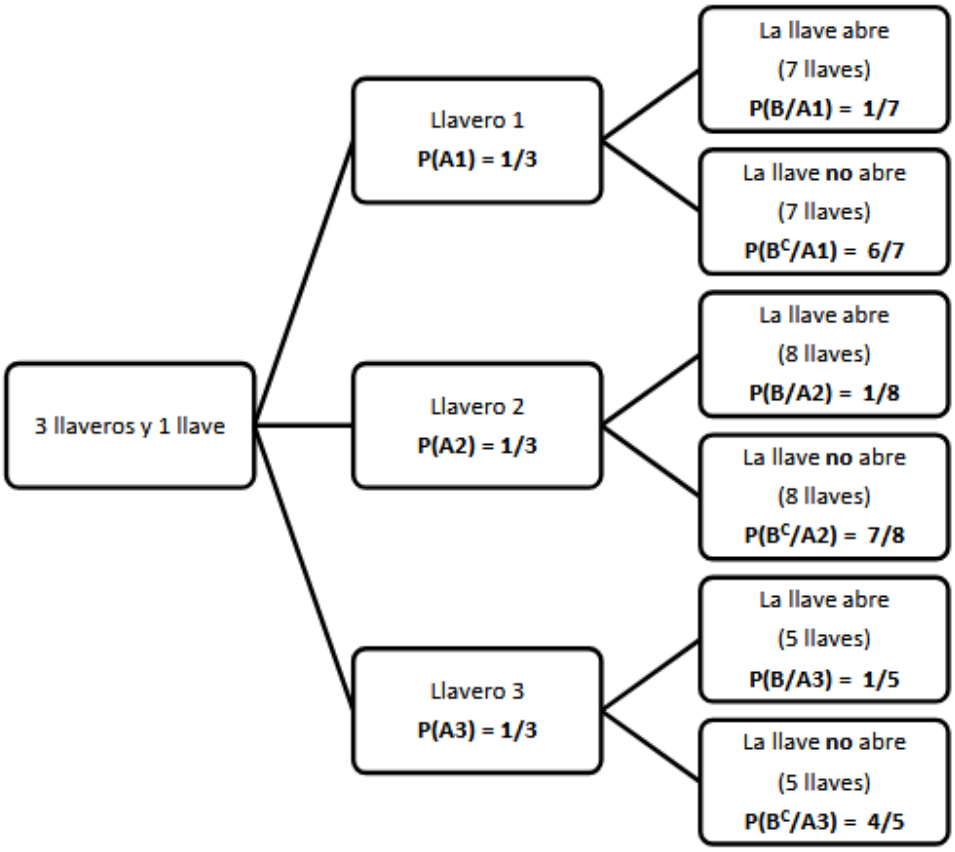
b) (**0.5 puntos**) El llavero sea el tercero y la llave abra el trastero.

c) (**0.5 puntos**) Sabiendo que la llave elegida abre el trastero, esta pertenezca al primer o al tercer llavero.

d) (**0.5 puntos**) Si la llave no abre el trastero, esta no pertenezca al primer llavero.

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden hallar $P(B^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B^C)=P(A1)P(B^C/A1)+P(A2)P(B^C/A2)+P(A3)P(B^C/A3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\boxed{\frac{709}{840}=0.844}$$

b) Nos piden hallar $P(A3\cap B)$.

Textos Marea Verde

$$P(A3\cap B)=P(A3)P(B/A3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\frac{1}{15}=0.0667}$$

c) Hallamos la probabilidad de $P(A2/B)$ que es el suceso contrario del que nos hablan en el enunciado. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A2/B)=\frac{P(A2\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A2)P(B/A2)}{1-P(B^c)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{709}{840}}=\frac{35}{131}\simeq 0.2672$$

Sabiendo que si la llave elegida abre el trastero, la probabilidad de que esta pertenezca al primer o al tercer llavero vale $1-\frac{35}{131}=\frac{96}{131}=0.7328$.

d) Hallamos la probabilidad del suceso contrario al que nos piden: $P(A1/B^c)$.

$$P(A1/B^c)=\frac{P(A1\cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{P(A1)P(B^c/A1)}{P(B^c)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}}{\frac{709}{840}}=\frac{240}{709}=0.3385$$

Sabiendo que la llave elegida no abre el trastero, la probabilidad de que esta **no** pertenezca al primer llavero vale $1-\frac{240}{709}=\frac{469}{709}=0.6615$.

EJERCICIO 5

EJERCICIO 5

Una empresa de marketing ha lanzado una campaña publicitaria para promocionar un nuevo servicio de energía solar para hogares. Según estudios previos, se estima que el 20% de las personas que ven el anuncio terminan contratando el servicio. Para analizar más en profundidad la efectividad de la campaña, se seleccionan aleatoriamente a 20 personas que han visto el anuncio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que exactamente 10 personas contraten el servicio.

b) **(0.75 puntos)** Determine la probabilidad de que al menos 2 personas contraten el servicio.

c) **(0.5 puntos)** Determine el valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas.

d) **(0.5 puntos)** ¿Cuántas personas, de entre las que han visto el anuncio, se deberían seleccionar para que el número esperado de personas que contraten el servicio sea mayor o igual a 13?

Solución:

Sea X = Número de personas que contratan el servicio de una muestra de 20 personas.
Esta variable aleatoria sigue una ley binomial siendo el tamaño de la muestra $n = 20$ y la probabilidad de que una persona contrate el servicio vale $p = 0.20$. X = B(20, 0.2).

a) Nos piden calcular $P(X=10)$.

$$P(X=10)=\binom{20}{10}0.2^{10}\cdot 0.8^{10}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}0.2^{10}\cdot 0.8^{10}=$$

$$=184756\cdot 0.2^{10}\cdot 0.8^{10}\simeq \boxed{0.002}$$

b) Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso del suceso contrario.

$$P(X\geq 2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{20}{0}0.2^{0}\cdot 0.8^{20}+\binom{20}{1}0.2^{1}\cdot 0.8^{19}\right]=$$

$$=1-\left[0.8^{20}+20\cdot 0.2\cdot 0.8^{19}\right]\simeq \boxed{0.9308}$$

c) El valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas es el valor de la media de la distribución binomial.

$$Media = np = 20\cdot 0.2 = 4$$

Del grupo de 20 personas se espera que hayan 4 que contraten el servicio.

d) Hallamos el valor de n necesario para que la media sea mayor o igual a 13.

$$Media = np \Rightarrow 13 = n\cdot 0.2 \Rightarrow n = \frac{13}{0.2} = 65$$

Con una muestra de 65 personas el número de personas que se espera contraten el servicio es de 13. Si tomamos una muestra mayor de 65 personas el número de personas que se espera contraten el servicio será mayor de 13.

BLOQUE D

EJERCICIO 6:

EJERCICIO 6

El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas, se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 5 horas. A partir de una muestra de 81 estudiantes se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media poblacional es (10.794, 13.206), con un nivel de confianza del 97%.

a) **(0.5 puntos)** Obtenga el tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes.

b) **(0.5 puntos)** Si se amplía el tamaño de la muestra, razone si manteniendo el nivel de confianza, la amplitud del intervalo de confianza aumenta o disminuye.

c) **(0.75 puntos)** Si se desea reducir la amplitud del intervalo de confianza, razone si manteniendo el tamaño muestral, ha de reducirse o aumentarse el nivel de confianza.

d) **(0.75 puntos)** Si la media de la población es de 10.2 horas y sabiendo que la media muestral es de 12 horas, calcule el tamaño máximo de la muestra para obtener un intervalo de confianza que contenga la media poblacional, manteniendo el 97% de confianza.

Solución:

Sea X = El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas.
X = N(μ,5).

a) El tiempo medio de la muestra es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{10.794 + 13.206}{2} = 12$$

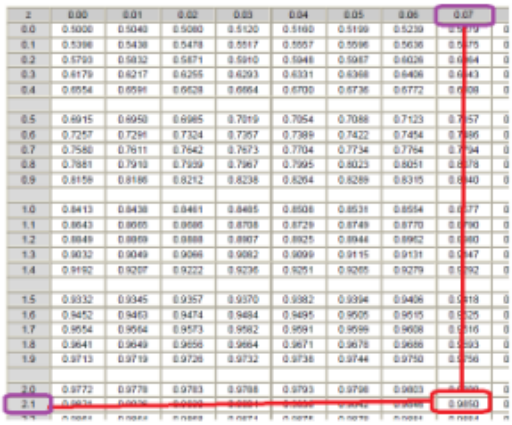
El tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes es de 12 horas de estudio semanal.

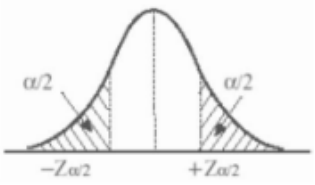
b) El error es la medida de la amplitud del intervalo de confianza. Este valor del error se obtiene con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si no cambiamos el nivel de confianza no cambia el valor de $z_{\alpha/2}$ y si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) disminuye el error = amplitud del intervalo de confianza.

c) En la fórmula del error si mantenemos el tamaño muestral (n) y deseamos reducir dicho error se debe disminuir el nivel de confianza, pues esto acarrea una disminución del valor de $z_{\alpha/2}$

c) La diferencia entre la media muestral y la media de la población es 12 – 10.2 = 1.8 horas.
El error del intervalo de confianza debe ser mayor de 1.8 para que dicho intervalo contenga la media poblacional.
Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$





Textos Marea Verde

Hallamos el tamaño de la muestra máximo para que el error sea superior a 1.8 horas.

$$Error > 1.8 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 1.8 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} > 1.8 \Rightarrow 2.17 \cdot 5 > 1.8\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.17 \cdot 5}{1.8} > \sqrt{n} \Rightarrow n < \left(\frac{2.17 \cdot 5}{1.8}\right)^2 = 36.33$$

El tamaño de la muestra debe ser inferior o igual a 36 estudiantes.

EJERCICIO 7:

EJERCICIO 7

Los desajustes sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos, sigue una ley Normal con media 0 y desviación típica 2.2.

a) **(0.5 puntos)** Calcule el porcentaje de trenes que tienen un desajuste máximo de un minuto.

b) Elegidos al azar 15 trenes de alta velocidad, los desajustes han sido:

$$0,\quad 1.3,\quad -2.1,\quad -1.5,\quad 2,\quad 0.8,\quad 5,\quad 2.1,$$
$$-3,\quad 1.8,\quad 3.1,\quad 4,\quad -0.7,\quad 1.6,\quad -5.4$$

b1) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96%, para la media poblacional. ¿Cuál es el error máximo que se comete en la estimación de esta media? Con este nivel de confianza y a partir de los datos obtenidos, ¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?

b2) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98%, ¿cuántos trenes de alta velocidad deberían elegirse, como mínimo, para que la diferencia entre la media poblacional y su estimación muestral sea como máximo de 1.1 minutos?

Solución:

Sea X = El desajuste sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos. X = N(0. 2.2)

a) Nos piden calcular $P(X<1)$.

$$P(X<1)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{1-0}{2.2}\right)=P(Z<0.45)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.6736}$$

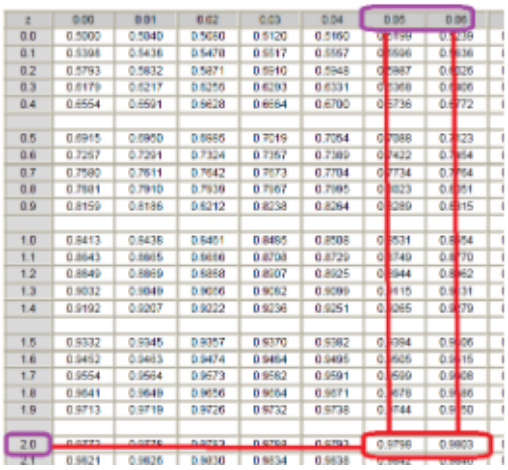
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	0.64
0.4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.6736	0.67

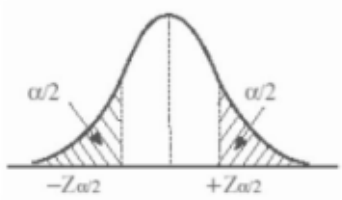
b1) Hallamos la media muestral.

$$\bar{x}=\frac{0+1.3-2.1-1.5+2+0.8+5+2.1-3+1.8+3.1+4-0.7+1.6-5.4}{15}=0.6\,\text{minutos}$$

Con un nivel de confianza del 96 % tenemos

$$1-\alpha=0,96\rightarrow\alpha=0,04\rightarrow\alpha/2=0,02\rightarrow1-\alpha/2=0,98\rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$$





Textos Marea Verde

Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{2.2}{\sqrt{15}} = 1.17$$

Determinamos el intervalo de confianza.

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (0.6 - 1.17,\ 0.6 + 1.17) = (-0.57,\ 1.77)$$

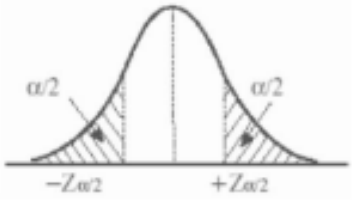
El error máximo que se comete es de 1.17 minutos.

¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?
2 minutos de desajuste horario es mayor de 1.77 minutos y por lo tanto no entra dentro del intervalo de confianza por lo que no se puede afirmar dicho retraso.

b2) Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	
0.2				
0.3				
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	
0.9				
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	
1.1				
1.2				
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	
1.9				
2.0				
2.1				
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	
2.3				0.9901



El error debe ser menor de 1.1 minutos.

$$Error < 1.1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1.1 \Rightarrow 2.33 \cdot \frac{2.2}{\sqrt{n}} < 1.1 \Rightarrow 2.33 \cdot 2.2 < 1.1\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.33 \cdot 2.2}{1.1} < \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{2.33 \cdot 2.2}{1.1}\right)^2 < n \Rightarrow n > 21.71$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 22 trenes de alta velocidad.

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS CURSO 2024-2025 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II CURSO: **2024 – 2025** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

EJERCICIO 2

BLOQUE B

EJERCICIO 3

EJERCICIO 4

BLOQUE C

EJERCICIO 5

EJERCICIO 6

BLOQUE D

EJERCICIO 7

EJERCICIO 8

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JULIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Solución:

EJERCICIO 2

Solución:

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Solución:

Textos Marea Verde

EJERCICIO 4

Solución:

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Solución:

Textos Marea Verde

EJERCICIO 6

Solución:

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Solución:

Textos Marea Verde

EJERCICIO 8

Solución:

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2025
Comunidad autónoma de ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Fernando Merchán

CC BY NC SA

Vídeos

Una profesora de matemáticas sevillana sobre el polémico examen de Selectividad: "Por primera vez, los chicos han tenido que pensar de verdad"

¿Por qué ha sido tan difícil el examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en la PAU andaluza? | Sociedad | Cadena SER

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2024-2025

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

CURSO: **2024 – 2025**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

BLOQUE A

EJERCICIO 1

a) **(1.75 puntos)** Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:
El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona B ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) **(0.75 puntos)** Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

BLOQUE B

BLOQUE B

EJERCICIO 2

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t) = 500\,000 \cdot (1 - e^{-0.2t});\ t > 0$$

a) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía y curvatura de la función N.
b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.
c) **(0.5 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450 000 personas?
d) **(0.5 puntos)** La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

EJERCICIO 3

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3} - 12t^2 + 108t + 108\right) & 0 \le t \le 12 \\ t^2 - 40t + 546 & 12 < t \le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.
b) **(1 punto)** ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?
c) **(0.75 puntos)** ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene 155 mg/dl?

BY NC SA

BLOQUE C

BLOQUE C

EJERCICIO 4

En una casa con trastero viven tres personas y cada una tiene un llavero con las llaves de la casa. El primer llavero contiene 7 llaves, el segundo 8 y el tercero 5. En cada uno de los llaveros hay una única llave que abre el trastero. Otra persona necesita abrir el trastero y, para ello, selecciona un llavero al azar y, de este, elige una llave aleatoriamente e intenta abrirlo. Calcule la probabilidad de que:

a) (**1 punto**) No haya acertado con la llave seleccionada.

b) (**0.5 puntos**) El llavero sea el tercero y la llave abra el trastero.

c) (**0.5 puntos**) Sabiendo que la llave elegida abre el trastero, esta pertenezca al primer o al tercer llavero.

d) (**0.5 puntos**) Si la llave no abre el trastero, esta no pertenezca al primer llavero.

EJERCICIO 5

Una empresa de marketing ha lanzado una campaña publicitaria para promocionar un nuevo servicio de energía solar para hogares. Según estudios previos, se estima que el 20% de las personas que ven el anuncio terminan contratando el servicio. Para analizar más en profundidad la efectividad de la campaña, se seleccionan aleatoriamente a 20 personas que han visto el anuncio.

a) (**0.75 puntos**) Calcule la probabilidad de que exactamente 10 personas contraten el servicio.

b) (**0.75 puntos**) Determine la probabilidad de que al menos 2 personas contraten el servicio.

c) (**0.5 puntos**) Determine el valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas.

d) (**0.5 puntos**) ¿Cuántas personas, de entre las que han visto el anuncio, se deberían seleccionar para que el número esperado de personas que contraten el servicio sea mayor o igual a 13?

BLOQUE D

BLOQUE D

EJERCICIO 6

El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas, se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 5 horas. A partir de una muestra de 81 estudiantes se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media poblacional es $(10.794, 13.206)$, con un nivel de confianza del 97%.

a) (**0.5 puntos**) Obtenga el tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes.

b) (**0.5 puntos**) Si se amplía el tamaño de la muestra, razone si manteniendo el nivel de confianza, la amplitud del intervalo de confianza aumenta o disminuye.

c) (**0.75 puntos**) Si se desea reducir la amplitud del intervalo de confianza, razone si manteniendo el tamaño muestral, ha de reducirse o aumentarse el nivel de confianza.

d) (**0.75 puntos**) Si la media de la población es de 10.2 horas y sabiendo que la media muestral es de 12 horas, calcule el tamaño máximo de la muestra para obtener un intervalo de confianza que contenga la media poblacional, manteniendo el 97% de confianza.

EJERCICIO 7

Los desajustes sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos, sigue una ley Normal con media 0 y desviación típica 2.2.

a) (**0.5 puntos**) Calcule el porcentaje de trenes que tienen un desajuste máximo de un minuto.

b) Elegidos al azar 15 trenes de alta velocidad, los desajustes han sido:

$$0,\quad 1.3,\quad -2.1,\quad -1.5,\quad 2,\quad 0.8,\quad 5,\quad 2.1,$$
$$-3,\quad 1.8,\quad 3.1,\quad 4,\quad -0.7,\quad 1.6,\quad -5.4$$

b1) (**1.25 puntos**) Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96%, para la media poblacional. ¿Cuál es el error máximo que se comete en la estimación de esta media? Con este nivel de confianza y a partir de los datos obtenidos, ¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?

b2) (**0.75 puntos**) Con un nivel de confianza del 98%, ¿cuántos trenes de alta velocidad deberían elegirse, como mínimo, para que la diferencia entre la media poblacional y su estimación muestral sea como máximo de 1.1 minutos?

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

EJERCICIO 1

a) (**1.75 puntos**) Plantee y resuelva el siguiente problema de forma matricial:
El gerente de una empresa de productos hospitalarios desea introducir un nuevo producto en el mercado nacional. Para ello contrata a 3 vendedores que se han encargado de las zonas A, B y C del país, respectivamente. El vendedor de la zona A ha trabajado 40 horas, ha realizado 10 demostraciones y 5 viajes para dicha promoción. El vendedor de la zona *B* ha trabajado el doble de horas que el de la zona A, realizando 15 demostraciones y 8 viajes. En cuanto al vendedor de la zona C, ha trabajado 100 horas, ha realizado 25 demostraciones y 10 viajes. El gerente debe abonarles 75€ por hora trabajada, 300€ por demostración y 250€ por viaje realizado. Teniendo en cuenta que, además, debe aplicárseles una retención en concepto del impuesto del IRPF del 15% si la cantidad a abonar al vendedor es menor de diez mil euros y del 18% en caso contrario, determine la cantidad final que cobrará cada vendedor.

b) (**0.75 puntos**) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ¿Para qué valores de a es la matriz A invertible?

Solución:

a) Colocamos toda la información del trabajo de cada vendedor en una matriz.

$$\begin{matrix} & \textit{horas} & \textit{demos} & \textit{viajes} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{Zona A} \rightarrow & 40 & 10 & 5 \\ \textit{Zona B} \rightarrow & 80 & 15 & 8 \\ \textit{Zona C} \rightarrow & 100 & 25 & 10 \end{matrix}$$

Expresamos el coste de cada concepto en forma matricial.

$$\begin{matrix} \text{€ / } \textit{hora} \rightarrow \\ \text{€ / } \textit{demostración} \rightarrow \\ \text{€ / } \textit{viaje} \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos la matriz de trabajos por la matriz de costes obteniendo lo que cobra cada uno antes de retener el IRPF.

$$\begin{matrix} & \textit{horas} & \textit{demos} & \textit{viajes} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \textit{Zona A} \rightarrow & 40 & 10 & 5 \\ \textit{Zona B} \rightarrow & 80 & 15 & 8 \\ \textit{Zona C} \rightarrow & 100 & 25 & 10 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \begin{pmatrix} 75 \\ 300 \\ 250 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{€ / } \textit{hora} \\ \rightarrow \text{€ / } \textit{demos} \\ \rightarrow \text{€ / } \textit{viaje} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 40 \cdot 75 + 10 \cdot 300 + 5 \cdot 250 \\ 80 \cdot 75 + 15 \cdot 300 + 8 \cdot 250 \\ 100 \cdot 75 + 25 \cdot 300 + 10 \cdot 250 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} \begin{pmatrix} 7250 \\ 12500 \\ 17500 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \textit{Zona A} \\ \leftarrow \textit{Zona B} \\ \leftarrow \textit{Zona C} \end{matrix}$$

Solo el vendedor de la zona A cobra menos de 10000 €, por lo que se le descuenta un 15% de IRPF y se le debe pagar el 85% → $0.85 \cdot 7250 = 6162.5$ €.

Textos Marea Verde

Los vendedores de las zonas B y C superan los 10000 euros y deben pagar un 18% de IRPF, por lo que cobran el 82%. El vendedor de la zona B cobra $0.82 \cdot 12500 = 10250$ € y el vendedor de la zona C cobra $0.82 \cdot 17500 = 14350$ €.

El vendedor A cobra 6162.5 €, el B cobra 10250 € y el C cobra 14350 €.

b) Para que la matriz sea invertible su determinante debe ser distinto de cero. Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & a-1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6(a-1)+16+0-4(a-1)-18-0 =$$

$$= -6a+6+16-4a+4-18 = -10a+8$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -10a+8 = 0 \Rightarrow 10a = 8 \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{10} = 0.8}$$

El determinante de la matriz A se anula para $a = 0.8$.
La matriz A es invertible para cualquier valor de a distinto de 0.8.

Textos Marea Verde

BLOQUE B

EJERCICIO 2

BLOQUE B

EJERCICIO 2

Un periódico digital ha publicado una noticia de última hora. El número de personas que han visto la noticia t horas después de su lanzamiento viene modelado por la función:

$$N(t) = 500\,000 \cdot (1 - e^{-0.2t}); \ t > 0$$

a) **(0.8 puntos)** Estudie la monotonía y curvatura de la función N.
b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función N y describa su tendencia a lo largo del tiempo.
c) **(0.5 puntos)** ¿Cuánto tiempo ha debido de pasar para que la noticia haya sido vista por 450 000 personas?
d) **(0.5 puntos)** La velocidad de difusión de la noticia (número de personas por hora que han visto la publicación) es $N'(t)$. ¿Qué conclusión se obtiene al comparar $N'(t)$ en los instantes $t = 1$ y $t = 10$?

Solución:

a) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$N(t) = 500000 \cdot \left(1 - e^{-0.2t}\right) \Rightarrow N'(t) = 500000 \cdot \left(-(-0.2)e^{-0.2t}\right) = 100000 \cdot e^{-0.2t} = \frac{10000}{e^{0.2t}}$$

Esta expresión de la derivada $N'(t) = \frac{10000}{e^{0.2t}}$ nunca se anula y siempre es positiva, por lo que la función es creciente en su dominio de definición $(0, +\infty)$ y no presenta máximos ni mínimos.

Obtenemos la derivada segunda para analizar la curvatura de la función.

$$N'(t) = 100000 \cdot e^{-0.2t} \Rightarrow N'(t) = 100000 \cdot (-0.2)e^{-0.2t} = -20000e^{-0.2t} = \frac{-20000}{e^{-0.2t}}$$

La segunda derivada es siempre negativa por lo que la función es cóncava ($\cap$) en todo su dominio.

b) Hallamos el límite de la función cuando el valor de t se hace muy grande.

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty} 500000 \cdot \left(1 - e^{-0.2t}\right) = \lim_{t \to +\infty} 500000 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{0.2t}}\right) =$$

$$= 500000 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{+\infty}}\right) = 500000 \cdot \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = 500000 \cdot (1 - 0) = \boxed{500000}$$

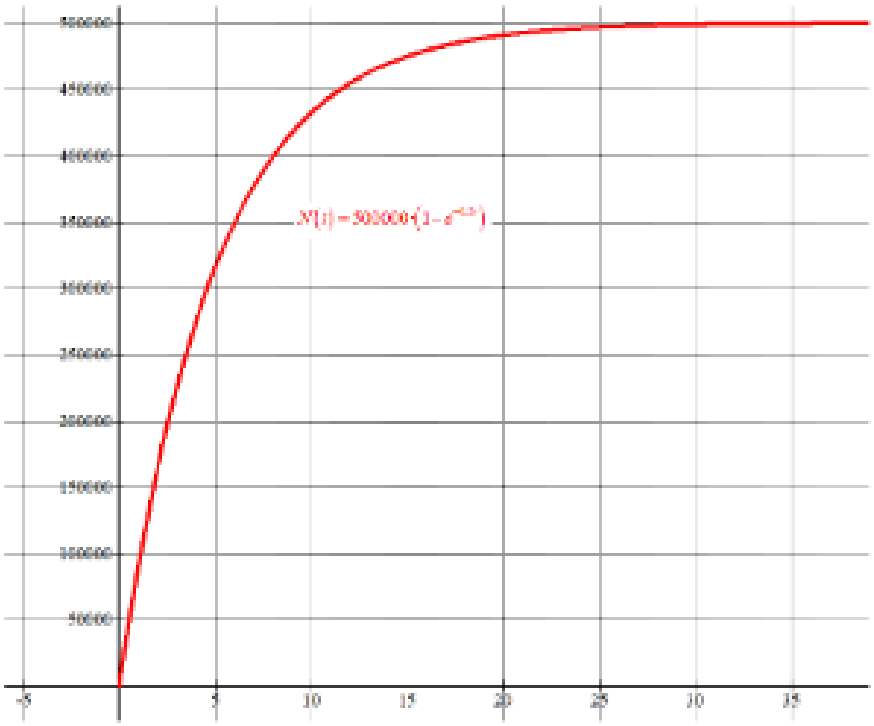
Hallamos el límite de la función cuando el valor de t se hace muy pequeño.

$$\lim_{t \to 0} N(t) = \lim_{t \to 0} 500000 \cdot \left(1 - e^{-0.2t}\right) = 500000 \cdot \left(1 - e^{0}\right) = 500000 \cdot (1 - 1) = \boxed{0}$$

Cuando la noticia se hace pública el número de personas que ha visto la noticia es 0 y cuando pasa mucho tiempo la tendencia es que vean la noticia 500000 personas.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

Textos Marea Verde

t	$N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right)$
0.01	999
0.1	9900
1	90634
10	432332
100	499999



c) Buscamos el valor de t para el que $N(t)=450000$.

$$\left.\begin{array}{l} N(t)=450000 \\ N(t)=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 450000=500000\cdot\left(1-e^{-0.2t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-e^{-0.2t}=\frac{450000}{500000}=0.9 \Rightarrow 0.1=e^{-0.2t} \Rightarrow \ln 0.1=-0.2t \Rightarrow \boxed{t=\frac{-\ln 0.1}{0.2}\approx 11.51}$$

Al cabo de 11 horas y media se alcanzan las 450 000 personas.

d) Calculamos el valor de la derivada de la función en $t=1$ y $t=10$.

$$\left.\begin{array}{l} N'(1)=\dfrac{10000}{e^{0.2}}=8187.3 \\ N'(10)=\dfrac{10000}{e^{2}}\approx 1353.35 \end{array}\right\} \Rightarrow N'(1)=8187.3<1353.35=N'(10)$$

El número de personas que ven la noticia crece con más rapidez en la primera hora que en la décima.

Textos Marea Verde

EJERCICIO 3:

EJERCICIO 3

A un paciente con diabetes se le monitoriza durante un día completo, suministrándole un medicamento a mediodía para observar su reacción. La función que aproxima la cantidad de glucosa en sangre (mg/dl) del paciente, en cada instante t (horas), es:

$$f(t)=\begin{cases}\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right) & 0\le t\le 12\\ t^2-40t+546 & 12<t\le 24\end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Halle en qué periodos de tiempo el nivel de glucosa va aumentando.

b) **(1 punto)** ¿En qué momentos del día el paciente tiene los niveles más alto y más bajo de glucosa en sangre y a cuánto ascienden?

c) **(0.75 puntos)** ¿En qué momentos, después del mediodía, el paciente tiene $155\ mg/dl$?

Solución:

a) Analizamos lo que ocurre antes del mediodía.

$$f(t)=\frac{5}{6}\left(\frac{t^3}{3}-12t^2+108t+108\right)\ 0\le t\le 12\Rightarrow f'(t)=\frac{5}{6}(t^2-24t+108)$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{5}{6}(t^2-24t+108)=0\Rightarrow t^2-24t+108=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 108}}{2}=\frac{24\pm 12}{2}=\begin{cases}\frac{24+12}{2}=18\notin[0,12]\\ \frac{24-12}{2}=6\in[0,12]\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en $[0,6)$ y en $(6,12]$.

- En el intervalo $[0,6)$ tomamos $t=1$ y la derivada vale
  $f'(1)=\frac{5}{6}(1^2-24+108)=\frac{425}{6}>0$. La glucosa aumenta hasta las 6 horas.
- En el intervalo $(6,12]$ tomamos $t=10$ y la derivada vale
  $f'(10)=\frac{5}{6}(10^2-240+108)=\frac{-80}{3}<0$. La glucosa disminuye desde las 6 hasta las 12 horas.

Analizamos lo que ocurre después del mediodía.

$$f(t)=t^2-40t+546\quad 12<t\le 24\Rightarrow f'(t)=2t-40$$

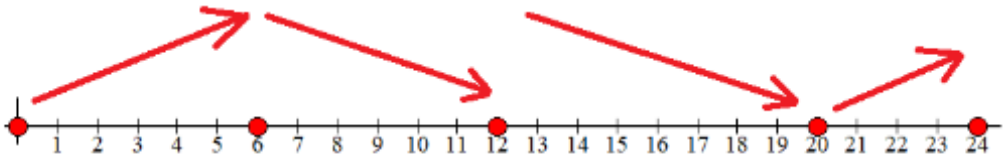
$$f'(t)=0\Rightarrow 2t-40=0\Rightarrow 2t=40\Rightarrow \boxed{t=20}\in(12,24]$$

Estudiamos el signo de la derivada en $(12,20)$ y en $(20,24]$.

- En el intervalo $(12,20)$ tomamos $t=13$ y la derivada vale
  $f'(13)=2\cdot 13-40=-14<0$. La glucosa disminuye desde las 12 hasta las 20 horas.
- En el intervalo $(20,24]$ tomamos $t=21$ y la derivada vale
  $f'(21)=2\cdot 21-40=2>0$. La glucosa aumenta desde las 20 hasta las 24 horas.

La glucosa aumenta de las 0 hasta las 6 horas y desde las 20 a las 24 horas.

b) Hemos visto que la glucosa sigue el esquema siguiente.



Valoramos la función en los puntos extremos y en los puntos de cambio.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\frac{5}{6}\left(\frac{0^3}{3}-12\cdot 0^2+108\cdot 0+108\right)=90 \text{ Nivel bajo} \\ f(6)=\frac{5}{6}\left(\frac{6^3}{3}-12\cdot 6^2+108\cdot 6+108\right)=330 \text{ Nivel alto} \\ f(12)=\frac{5}{6}\left(\frac{12^3}{3}-12\cdot 12^2+108\cdot 12+108\right)=210 \\ f(20)=20^2-40\cdot 20+546=146 \\ f(24)=24^2-40\cdot 24+546=162 \end{array}\right\}$$

El nivel más alto es de 330 mg/dl y se produce a las 6 horas.
El nivel más bajo es de 90 mg/dl y se produce a las 0 horas.

c) Después del mediodía la función es $f(t)=t^2-40t+546 \quad 12<t\leq 24$.

Buscamos el valor de t para el que $f(t)=155$.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=155 \\ f(t)=t^2-40t+546 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2-40t+546=155 \Rightarrow t^2-40t+391=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{40\pm\sqrt{(-40)^2-4\cdot 391}}{2}=\frac{40\pm 6}{2}=\left\{\begin{array}{l} \frac{40+6}{2}=23\in(12,24] \\ \frac{40-6}{2}=17\in(12,24] \end{array}\right.$$

Después del mediodía, el paciente tiene un nivel de glucosa de 155 *mg/dl* a las 17 y a las 23 horas.

BLOQUE C

BLOQUE C

EJERCICIO 4

En una casa con trastero viven tres personas y cada una tiene un llavero con las llaves de la casa. El primer llavero contiene 7 llaves, el segundo 8 y el tercero 5. En cada uno de los llaveros hay una única llave que abre el trastero. Otra persona necesita abrir el trastero y, para ello, selecciona un llavero al azar y, de este, elige una llave aleatoriamente e intenta abrirlo. Calcule la probabilidad de que:

a) (**1 punto**) No haya acertado con la llave seleccionada.

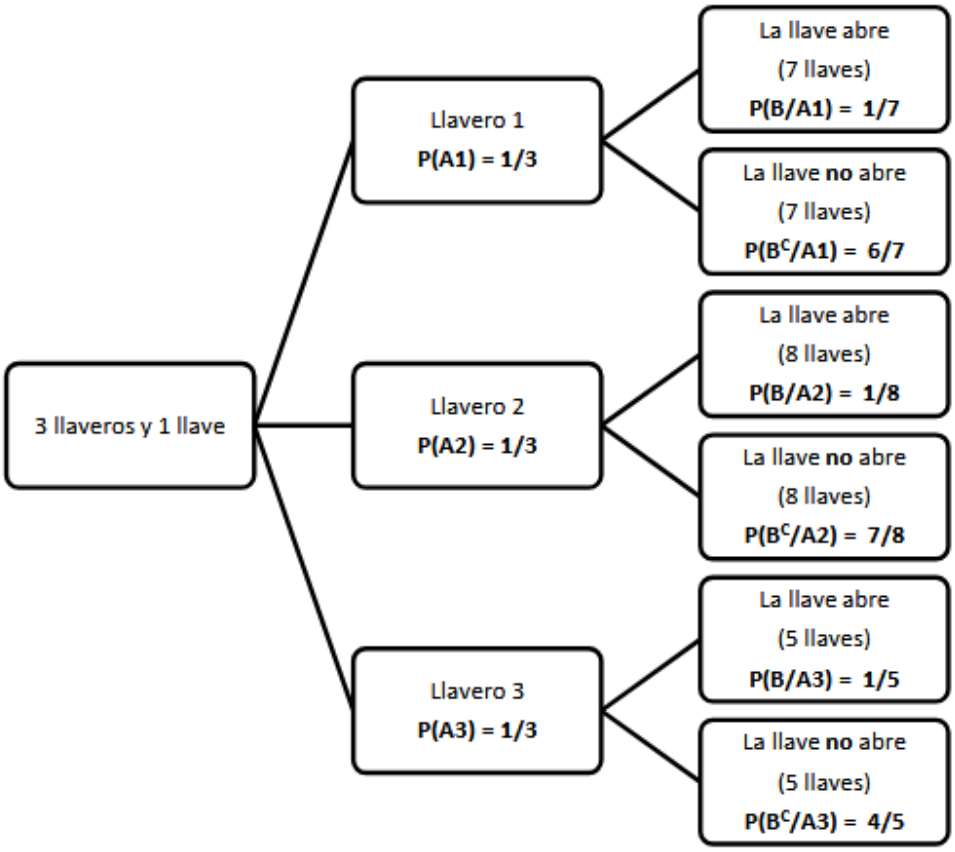
b) (**0.5 puntos**) El llavero sea el tercero y la llave abra el trastero.

c) (**0.5 puntos**) Sabiendo que la llave elegida abre el trastero, esta pertenezca al primer o al tercer llavero.

d) (**0.5 puntos**) Si la llave no abre el trastero, esta no pertenezca al primer llavero.

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden hallar $P(B^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B^C)=P(A1)P(B^C/A1)+P(A2)P(B^C/A2)+P(A3)P(B^C/A3)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\boxed{\frac{709}{840}=0.844}$$

b) Nos piden hallar $P(A3\cap B)$.

Textos Marea Verde

$$P(A3\cap B)=P(A3)P(B/A3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\frac{1}{15}=0.0667}$$

c) Hallamos la probabilidad de $P(A2/B)$ que es el suceso contrario del que nos hablan en el enunciado. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A2/B)=\frac{P(A2\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A2)P(B/A2)}{1-P(B^c)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}}{1-\frac{709}{840}}=\frac{35}{131}\simeq 0.2672$$

Sabiendo que si la llave elegida abre el trastero, la probabilidad de que esta pertenezca al primer o al tercer llavero vale $1-\frac{35}{131}=\frac{96}{131}=0.7328$.

d) Hallamos la probabilidad del suceso contrario al que nos piden: $P(A1/B^c)$.

$$P(A1/B^c)=\frac{P(A1\cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{P(A1)P(B^c/A1)}{P(B^c)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}}{\frac{709}{840}}=\frac{240}{709}=0.3385$$

Sabiendo que la llave elegida no abre el trastero, la probabilidad de que esta **no** pertenezca al primer llavero vale $1-\frac{240}{709}=\frac{469}{709}=0.6615$.

EJERCICIO 5

EJERCICIO 5

Una empresa de marketing ha lanzado una campaña publicitaria para promocionar un nuevo servicio de energía solar para hogares. Según estudios previos, se estima que el 20% de las personas que ven el anuncio terminan contratando el servicio. Para analizar más en profundidad la efectividad de la campaña, se seleccionan aleatoriamente a 20 personas que han visto el anuncio.

a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que exactamente 10 personas contraten el servicio.

b) **(0.75 puntos)** Determine la probabilidad de que al menos 2 personas contraten el servicio.

c) **(0.5 puntos)** Determine el valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas.

d) **(0.5 puntos)** ¿Cuántas personas, de entre las que han visto el anuncio, se deberían seleccionar para que el número esperado de personas que contraten el servicio sea mayor o igual a 13?

Solución:

Sea X = Número de personas que contratan el servicio de una muestra de 20 personas.
Esta variable aleatoria sigue una ley binomial siendo el tamaño de la muestra $n = 20$ y la probabilidad de que una persona contrate el servicio vale $p = 0.20$. X = B(20, 0.2).

a) Nos piden calcular $P(X=10)$.

$$P(X=10)=\binom{20}{10}0.2^{10}\cdot 0.8^{10}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}0.2^{10}\cdot 0.8^{10}=$$

$$=184756\cdot 0.2^{10}\cdot 0.8^{10}\simeq \boxed{0.002}$$

b) Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso del suceso contrario.

$$P(X\geq 2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]=1-\left[\binom{20}{0}0.2^{0}\cdot 0.8^{20}+\binom{20}{1}0.2^{1}\cdot 0.8^{19}\right]=$$

$$=1-\left[0.8^{20}+20\cdot 0.2\cdot 0.8^{19}\right]\simeq \boxed{0.9308}$$

c) El valor esperado del número de personas que contratarán el servicio de entre las seleccionadas es el valor de la media de la distribución binomial.

$$Media = np = 20\cdot 0.2 = 4$$

Del grupo de 20 personas se espera que hayan 4 que contraten el servicio.

d) Hallamos el valor de n necesario para que la media sea mayor o igual a 13.

$$Media = np \Rightarrow 13 = n\cdot 0.2 \Rightarrow n = \frac{13}{0.2} = 65$$

Con una muestra de 65 personas el número de personas que se espera contraten el servicio es de 13. Si tomamos una muestra mayor de 65 personas el número de personas que se espera contraten el servicio será mayor de 13.

BLOQUE D

EJERCICIO 6:

EJERCICIO 6

El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas, se distribuye según una ley Normal de media desconocida y desviación típica 5 horas. A partir de una muestra de 81 estudiantes se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media poblacional es (10.794, 13.206), con un nivel de confianza del 97%.

a) **(0.5 puntos)** Obtenga el tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes.

b) **(0.5 puntos)** Si se amplía el tamaño de la muestra, razone si manteniendo el nivel de confianza, la amplitud del intervalo de confianza aumenta o disminuye.

c) **(0.75 puntos)** Si se desea reducir la amplitud del intervalo de confianza, razone si manteniendo el tamaño muestral, ha de reducirse o aumentarse el nivel de confianza.

d) **(0.75 puntos)** Si la media de la población es de 10.2 horas y sabiendo que la media muestral es de 12 horas, calcule el tamaño máximo de la muestra para obtener un intervalo de confianza que contenga la media poblacional, manteniendo el 97% de confianza.

Solución:

Sea X = El tiempo de estudio semanal de los estudiantes andaluces, medido en horas.
X = N(μ,5).

a) El tiempo medio de la muestra es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{10.794 + 13.206}{2} = 12$$

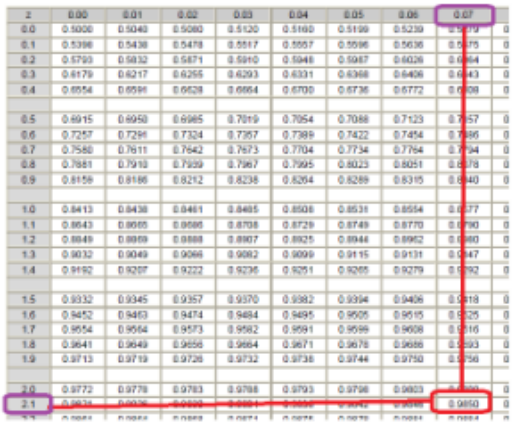
El tiempo medio de estudio de esa muestra de estudiantes es de 12 horas de estudio semanal.

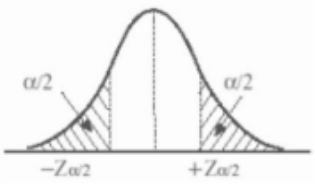
b) El error es la medida de la amplitud del intervalo de confianza. Este valor del error se obtiene con la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si no cambiamos el nivel de confianza no cambia el valor de $z_{\alpha/2}$ y si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) disminuye el error = amplitud del intervalo de confianza.

c) En la fórmula del error si mantenemos el tamaño muestral (n) y deseamos reducir dicho error se debe disminuir el nivel de confianza, pues esto acarrea una disminución del valor de $z_{\alpha/2}$

c) La diferencia entre la media muestral y la media de la población es 12 – 10.2 = 1.8 horas.
El error del intervalo de confianza debe ser mayor de 1.8 para que dicho intervalo contenga la media poblacional.
Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$





Textos Marea Verde

Hallamos el tamaño de la muestra máximo para que el error sea superior a 1.8 horas.

$$Error > 1.8 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 1.8 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} > 1.8 \Rightarrow 2.17 \cdot 5 > 1.8\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.17 \cdot 5}{1.8} > \sqrt{n} \Rightarrow n < \left(\frac{2.17 \cdot 5}{1.8}\right)^2 = 36.33$$

El tamaño de la muestra debe ser inferior o igual a 36 estudiantes.

EJERCICIO 7:

EJERCICIO 7

Los desajustes sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos, sigue una ley Normal con media 0 y desviación típica 2.2.

a) **(0.5 puntos)** Calcule el porcentaje de trenes que tienen un desajuste máximo de un minuto.

b) Elegidos al azar 15 trenes de alta velocidad, los desajustes han sido:

$$0,\quad 1.3,\quad -2.1,\quad -1.5,\quad 2,\quad 0.8,\quad 5,\quad 2.1,$$
$$-3,\quad 1.8,\quad 3.1,\quad 4,\quad -0.7,\quad 1.6,\quad -5.4$$

b1) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 96%, para la media poblacional. ¿Cuál es el error máximo que se comete en la estimación de esta media? Con este nivel de confianza y a partir de los datos obtenidos, ¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?

b2) **(0.75 puntos)** Con un nivel de confianza del 98%, ¿cuántos trenes de alta velocidad deberían elegirse, como mínimo, para que la diferencia entre la media poblacional y su estimación muestral sea como máximo de 1.1 minutos?

Solución:

Sea X = El desajuste sobre el horario previsto de llegada de los trenes de alta velocidad, medidos en minutos. X = N(0. 2.2)

a) Nos piden calcular $P(X<1)$.

$$P(X<1)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{1-0}{2.2}\right)=P(Z<0.45)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.6736}$$

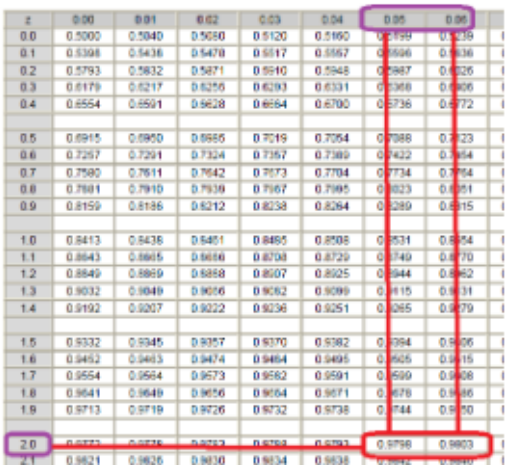
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	0.52
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	0.56
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	0.60
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	0.64
0.4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.6736	0.67

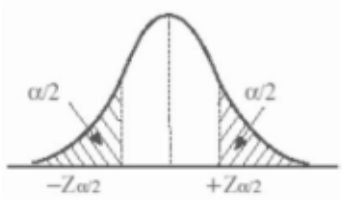
b1) Hallamos la media muestral.

$$\bar{x}=\frac{0+1.3-2.1-1.5+2+0.8+5+2.1-3+1.8+3.1+4-0.7+1.6-5.4}{15}=0.6\,\text{minutos}$$

Con un nivel de confianza del 96 % tenemos

$$1-\alpha=0,96\rightarrow\alpha=0,04\rightarrow\alpha/2=0,02\rightarrow1-\alpha/2=0,98\rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$$





Textos Marea Verde

Determinamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{2.2}{\sqrt{15}} = 1.17$$

Determinamos el intervalo de confianza.

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (0.6 - 1.17,\ 0.6 + 1.17) = (-0.57,\ 1.77)$$

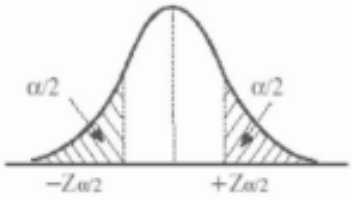
El error máximo que se comete es de 1.17 minutos.

¿puede afirmarse que un tren tenga un retraso de 2 minutos?
2 minutos de desajuste horario es mayor de 1.77 minutos y por lo tanto no entra dentro del intervalo de confianza por lo que no se puede afirmar dicho retraso.

b2) Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	
0.2				
0.3				
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	
0.9				
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	
1.1				
1.2				
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	
1.9				
2.0				
2.1				
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	
2.3				0.9901



El error debe ser menor de 1.1 minutos.

$$Error < 1.1 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 1.1 \Rightarrow 2.33 \cdot \frac{2.2}{\sqrt{n}} < 1.1 \Rightarrow 2.33 \cdot 2.2 < 1.1\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2.33 \cdot 2.2}{1.1} < \sqrt{n} \Rightarrow \left(\frac{2.33 \cdot 2.2}{1.1}\right)^2 < n \Rightarrow n > 21.71$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 22 trenes de alta velocidad.

	PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Y PRUEBA DE ADMISIÓN ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS CURSO 2024-2025 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II CURSO: **2024 – 2025** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Debe resolver 4 ejercicios, uno de cada bloque. Elija solo un ejercicio en los tres bloques donde tiene posibilidad de elección. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.

d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

EJERCICIO 2

BLOQUE B

EJERCICIO 3

EJERCICIO 4

BLOQUE C

EJERCICIO 5

EJERCICIO 6

BLOQUE D

EJERCICIO 7

EJERCICIO 8

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JULIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Solución:

EJERCICIO 2

Solución:

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Solución:

Textos Marea Verde

EJERCICIO 4

Solución:

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Solución:

Textos Marea Verde

EJERCICIO 6

Solución:

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Solución:

Textos Marea Verde

EJERCICIO 8

Solución:

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Milagros Latasa y Juan Antonio Martínez García

Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)

CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

CURSO: **2024 – 2025**

EJERCICIO DE **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 horas y 30 minutos.**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO (veánse las distintas partes del examen)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta..

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1

(*10 puntos*) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barritas de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barritas: A y B. Cada barrita A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barrita B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barritas en total.

a.- *(3 puntos)* Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barritas de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b.- *(7 puntos)* Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo

Ejercicio 2

(*10 puntos*) Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento. $N(t) = 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right)$

a.- *(3 puntos)* Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento *(t=0)* es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.

b.- *(7 puntos)* Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?

BY NC SA

Textos Marea Verde

Ejercicio 3

(*10 puntos*) Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de *Ciencia Ficción* y de *Comedia*, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.

a.- *(5 puntos)* Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de Ciencia Ficción, mientras que el resto prefieren Comedia. Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción.

b.- *(5 puntos)* La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de Ciencia Ficción. Han descubierto que el 60% de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80% prefiere el género de Ciencia Ficción. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50% tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de Ciencia Ficción. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD

Ejercicio 4

(*10 puntos*) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (*5 puntos*) Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3,5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1,8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?

Q2.- (*5 puntos*) Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

Opción II

Q1.- (*5 puntos*) Clasifique el sistema de ecuaciones *(S)* utilizando el teorema de Rouché-Frobenius y, si es posible, calcule la solución

$$\left.\begin{matrix} x - y + 2z = -4 \\ 3x - 5y + 8z = -14 \\ x + 3y - 4z = 2 \end{matrix}\right\} \equiv S$$

Q2.- (*5 puntos*) Dada $f(x) = \frac{x-\sqrt{6-x}}{x-2}$. Calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$. ¿La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

Textos Marea Verde

Tabla de la distribución normal (puede no ser necesaria para el examen):

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	**0,0**
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	**0,1**
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	**0,2**
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	**0,3**
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	**0,4**
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	**0,5**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	**0,6**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	**0,7**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	**0,8**
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	**0,9**
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	**1,0**
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	**1,1**
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	**1,2**
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	**1,3**
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	**1,4**
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	**1,5**
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	**1,6**
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	**1,7**
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	**1,8**
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	**1,9**
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	**2,0**
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	**2,1**
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	**2,2**
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	**2,3**
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	**2,4**
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	**2,5**
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	**2,6**
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	**2,7**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	**2,8**
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	**2,9**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990	**3,0**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993	**3,1**
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995	**3,2**
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997	**3,3**
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	**3,4**
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	**3,5**
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	**3,6**

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

(*10 puntos*) Miguel quiere mejorar su rendimiento deportivo y ha decidido complementar su dieta con barritas de proteínas y carbohidratos. Puede elegir entre dos tipos de barritas: A y B. Cada barrita A cuesta 1 euro y 50 céntimos y aporta 20 gramos de proteínas y 10 gramos de carbohidratos. Cada barrita B cuesta 1 euro y 20 céntimos y aporta 10 gramos de proteínas y 15 gramos de carbohidratos. Para cumplir con su plan de entrenamiento, Miguel necesita consumir, al menos, 600 gramos de proteínas y, al menos, 620 gramos de carbohidratos. Además, no puede consumir más de 100 barritas en total.

a.- *(3 puntos)* Plantee un problema de programación lineal que permita determinar cuántas barritas de cada tipo debe comprar Miguel para que, cumpliendo las restricciones, el coste sea mínimo.

b.- *(7 puntos)* Resuelva el problema anterior y determine a cuánto asciende dicho coste mínimo

Solución:

a) Definimos variables y función objetivo:

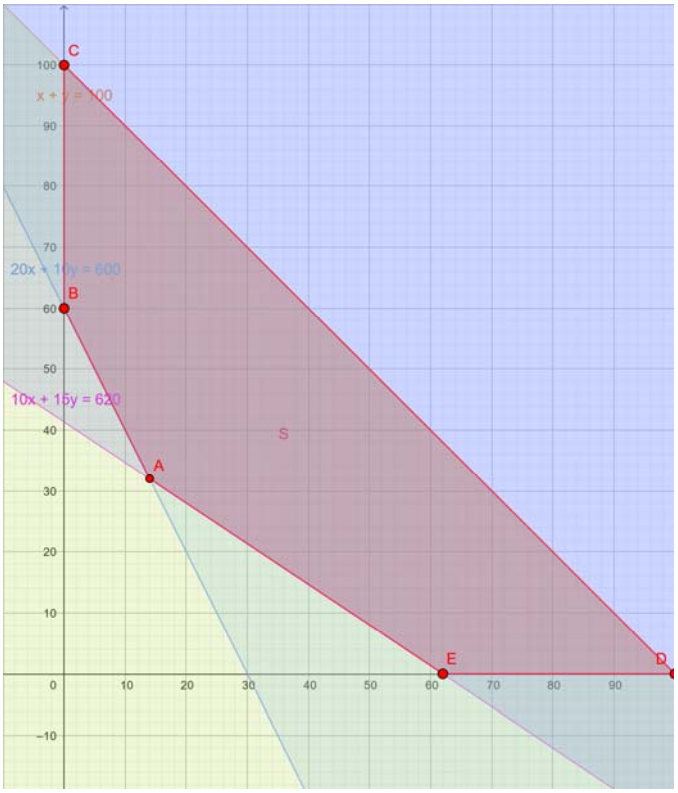
Sean $x =$ nº de barritas tipo A necesarias
$y =$ nº de barritas tipo B necesarias

La función objetivo es

$$z = F(x, y) = 1{,}50x + 1{,}20y$$

Pretendemos minimizar z que está sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} I_1: & 20x + 10y \geq 600 \\ I_2: & 10x + 15y \geq 620 \\ I_3: & x + y \leq 100 \\ I_4: & x \geq 0 \\ I_5: & y \geq 0 \end{cases}$$



b) La región factible S es el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones. Lo obtenemos gráficamente.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $20x + 10y = 600$ que pasa por los puntos (30, 0) y (0, 60).

El punto O (0, 0) **no cumple la inecuación I_1** $(20.0 + 10.0 \leq 600) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 **no contiene a O.**

Textos Marea Verde

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $10x + 15y = 620$ que pasa por (10, 47) y (62, 0). El punto O (0, 0) **no cumple la inecuación** I_2 $(10.0 + 15.0 \leq 620) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 **no contiene a O**.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x + y = 100$ que pasa por los puntos (0, 100) y (100, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(0+0 \leq 100) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La intersección de los semiplanos I_4 , I_5 es el primer cuadrante. Buscamos la intersección con los otros tres. Es el polígono ABCDE. Busquemos las coordenadas de sus vértices:

$$A \equiv \begin{cases} 20x + 10y = 600 \\ 10x + 15y = 620 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + y = 60 \\ -2x - 3y = -124 \end{cases} \sim \begin{cases} -2y = -64 \\ x = \dfrac{60 - y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 32 \\ x = \dfrac{60 - 32}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = (14, 32)$$

$$B \equiv \begin{cases} 20x + 10y = 600 \\ x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 10y = 600 \\ x = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 60 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (0, 60)$$

$$C \equiv \begin{cases} x + y = 100 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 100 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (0, 100)$$

$$D \equiv \begin{cases} x + y = 100 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad D = (100, 0)$$

$$E \equiv \begin{cases} 20x + 10y = 620 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 310 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad E = (310, 0)$$

Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Evaluamos la función objetivo en ellos

$$z(A) = 1{,}50.\ 14 + 1{,}20\ .32 = \quad 59{,}40\ €$$

$$z(B) = 1{,}50.0 + 1{,}20\ .60 = 72\ €$$

$$z(C) = 1{,}50.0 + 1{,}20\ .100 \ = 120\ €$$

$$z(D) = 1{,}50.100 + 1{,}20\ .0 = 150\ €$$

$$z(E) = 1{,}50.310 + 1{,}20\ .0 = 365\ €$$

La solución óptima se obtiene si Miguel compra 14 barritas del tipo A y 32 barritas del tipo B. En este caso el coste total sería de 59,40 €.

Textos Marea Verde

Ejercicio 2

(*10 puntos*) Se ha lanzado al mercado la aplicación social *ViviChat* y el número de usuarios en la aplicación en el momento t está dado por la función . $N(t) = 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right)$ donde t se mide en cientos de días desde el lanzamiento.

a.- *(3 puntos)* Gracias a la campaña previa al lanzamiento, la aplicación ha logrado captar usuarios desde el inicio. Se considera que la campaña ha tenido éxito si el número de usuarios en el momento del lanzamiento *(t=0)* es de, al menos, 100.000. Determine si la campaña ha sido exitosa. Además, calcule cuántos usuarios tendrá la aplicación en un horizonte infinito de tiempo.

b.- *(7 puntos)* Suponiendo que $t \in [1, 14]$, calcule el valor de t en el que la aplicación alcanzará el máximo número de usuarios. ¿Cuántos usuarios tendrá la aplicación en ese momento?, y ¿cuántos días habrán transcurrido desde su lanzamiento?

Solución

a) $N(0) = 1400\left(\frac{0}{49+0^2} + 100\right) = 140000 > 100000 \Rightarrow$ la campaña ha sido exitosa

Predecimos el número de usuarios en un horizonte infinito de tiempo calculando $\lim_{t\to\infty} N(t)$

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right) = 1400 \cdot \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right) = 1400\left(\frac{\infty}{\infty} + 100\right) =$$

$$= 1400 \lim_{t\to\infty}\left(\frac{{}^{t}/_{t^2}}{{}^{49}/_{t^2} + {}^{t^2}/_{t^2}} + 100\right) = 1400 \lim_{t\to\infty}\left(\frac{{}^{1}/_{t}}{{}^{49}/_{t^2} + 1} + 100\right) = 1400\,(0 + 100) = 140000$$

La campaña ha sido exitosa ya que en el momento del lanzamiento el nº de usuarios es mayor que 100000.

En un horizonte infinito de tiempola aplicación tendrá 140000 usuarios

b) Estudiamos la variación de $N(t) = 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right)$ en el intervalo $[1, 14]$

$N(t)$ es la restricción de $f(t) = 1400\left(\frac{t}{49+t^2} + 100\right)$ al intervalo $[0, \infty)$

$f(t)$es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ luego podemos estudiar su monotonía a partir del signo de su primera derivada

$$f'(t) = 1400\left(\frac{1.(49+t^2) - t.2t}{(49+t^2)^2}\right) = 1400\left(\frac{49-t^2}{(49+t^2)^2}\right)$$

$$f'(t) = 0 \Longrightarrow 49 - t^2 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{49} = \pm 7$$

	$(-\infty, -7)$	$x = -7$	$(-7,7)$	$x = 7$	$(7, \infty)$
Signo f'	Negativo	0	Positivo	0	Negativo
Monotonía f	Decreciente	Mínimo relativo	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

N se comporta igual que f en $[1,14] \subset [0,\infty)$ luego N es creciente en $[1,7)$ y decreciente en $(7,14]$, . Entonces

N es creciente en $[1,7) \Rightarrow \forall x \in [1,7),\ N(1) < N(x) < N(7)$

N es decreciente en$(7,14] \Rightarrow \forall x \in\ (7,14]\qquad N(14) < N(x) < N(7)$

Luego $\forall x \in [1,14]\ N(x) < N(7) \Rightarrow$ El máximo de N se alcanza en $x = 7$

De otra forma:

N tiene un máximo relativo en $x = 7$. El máximo que nos piden es máximo absoluto, luego puede alcanzarse en el máximo relativo o bien en los extremos del intervalo$[1,14]$.

Evaluamos la función en $x = 1 \quad x = 7 \quad x = 14$

$$N(1) = 1400\left(\frac{1}{49+1} + 100\right) = 140028 \qquad N(7) = 1400\left(\frac{7}{49+7^2} + 100\right) = 140100$$

$$N(14) = 1400\left(\frac{14}{49+14^2} + 100\right) = 140080$$

Luego el máximo absoluto coincide con el relativo, se alcanza en $x = 7$.

Como la variable t representa cientos de días:

El máximo se alcanza una vez han pasado 700 días y es de 140100 usuarios

Ejercicio 3

(*10 puntos*) Una plataforma de streaming desea mejorar su catálogo de películas, para lo cual quiere conocer las preferencias de sus usuarios sobre las películas de *Ciencia Ficción* y de *Comedia*, dos de los géneros más populares entre sus suscriptores.

a.- *(5 puntos)* Con el fin de conocer las preferencias de sus usuarios, la plataforma ha realizado una encuesta entre una muestra aleatoria simple de 300 suscriptores. De estos, 210 han indicado que prefieren ver películas de Ciencia Ficción, mientras que el resto prefieren Comedia. Calcule un intervalo de confianza al 96% para la proporción de suscriptores que prefieren ver Ciencia Ficción.

b.- *(5 puntos)* La plataforma de streaming investiga si la edad de sus usuarios influye en sus preferencias por el género de Ciencia Ficción. Han descubierto que el 60% de sus usuarios son menores de 30 años y, dentro de este grupo, el 80% prefiere el género de Ciencia Ficción. En cambio, entre los usuarios de 30 años o más, solo el 50% tiene esta preferencia. La plataforma ha decidido premiar a uno de sus usuarios al azar con una suscripción gratuita por un año. Sabemos que el ganador prefiere ver películas de Ciencia Ficción. ¿Cuál es la probabilidad de que este usuario tenga menos de 30 años?

Solución

a. Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 96%:

$$1-\alpha = 0{,}96 \Rightarrow \alpha = 0{,}04 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}98$$

Los valores más cercanos en la tabla son 0,9803 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 2{,}06$ y 0,9798 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 2{,}05$. La media de estos valores es $\frac{0{,}9803+0{,}9798}{2} = 0{,}98005$, más próximo a 0,98.

Tomamos entonces $z_{\alpha/2} = \frac{2{,}05+2{,}06}{2} = 2{,}055$

Consideremos "*éxito*" = "*un suscriptor prefiere ver Ciencia Ficción*"

Teniendo en cuenta la muestra conocida $p_r = \frac{210}{300} = 0{,}7$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por $\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right)$

En este caso

$$\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0{,}7 - 2{,}055\sqrt{\frac{0{,}7\cdot 0.3}{300}},\ 0{,}7 + 2{,}055\sqrt{\frac{0{,}7\cdot 0.3}{300}}\right) =$$

$$= \left(0.7 - 2{,}055\sqrt{0{,}0007}\ ,\ 0.7 + 2{,}055\sqrt{0{,}0007}\right) = (0{,}6456\ ,\ 0{,}7544)$$

El radio de este intervalo de confianza es $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} = 2{,}055\sqrt{0{,}0007} = 0{,}0544$

El intervalo de confianza pedido es $(0{,}6456\ ,\ 0{,}7544)$

Se puede afirmar con una confianza del 96% que la proporción de usuarios que prefieren ver películas de Ciencia Ficción está en este intervalo. El error cometido es menor que 0,0544

Textos Marea Verde

c) Los sucesos

A_1=" *el individuo elegido tiene menos de 30 años*" y A_2=" *el individuo elegido tiene 30 años o más* " constituyen un sistema completo de sucesos

$$P(A_1) = \frac{60}{100} = 0{,}6 \qquad P(A_2) = \frac{40}{100} = 0{,}4$$

Sea B =*"el individuo elegido prefiere ver Ciencia Ficción"*

Con esta notación , las hipótesis se traducen en:

$$P(B/A_1) = \frac{80}{100} = 0{,}8 \qquad P(B/A_2) = \frac{50}{100} = 0{,}5$$

La probabilidad de que un usuario, elegido al azar, tenga menos de 30 años sabiendo que prefiere ver Ciencia ficción es $P(A_1/B)$ que podemos obtener aplicando el teorema de Bayes:

$$P(A_1/B) = \frac{P(B/A_1).P(A_1)}{P(B/A_1).P(A_1) + P(B/A_2).P(A_2)} = \frac{0{,}8\,.\,0{,}6}{0{,}8\,.\,0{,}6 + 0{,}4\,.\,0{,}5} \cong 0{,}7059$$

La probabilidad de que un usuario, elegido al azar, tenga menos de 30 años sabiendo que prefiere ver Ciencia ficción es 0,7059

BY NC SA
Textos Marea Verde

BLOQUE CON OPTATIVIDAD

Ejercicio 4

(*10 puntos*) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (*5 puntos*) Un estudio revela que los estudiantes de bachillerato pasan, en promedio, 3,5 horas haciendo fila para entrar a conciertos, con una desviación típica de 1,8 horas. Se selecciona una muestra aleatoria de 64 estudiantes de bachillerato que asisten esta tarde a un concierto, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo promedio de espera para esa muestra sea inferior a 4 horas?

Q2.- (*5 puntos*) Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ resuelva la ecuación matricial $AX + 2A = A^2$ despejando previamente X.

Solución

Q1. Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que un estudiante de bachillerato pasa haciendo fila para entrar en un concierto. Sabemos que $\bar{x} = 3{,}5 \quad \sigma = 1{,}8$

$$\text{Suponemos } X = N(3{,}5\ ,\ 1{,}8)$$

$\overline{X_{64}}$ es la variable aleatoria cuyos valores son las medias de todas las muestras posibles de 64 estudiantes.

Esta variable tiene la misma media que X y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}8}{\sqrt{64}} = \frac{1{,}8}{8} = 0{,}225$

$$\overline{X_{64}} = N(3{,}5\ ,\ 0{,}225)$$

Probabilidad de que el tiempo promedio de espera para la muestra sea inferior a 4 horas $= P(\overline{X_{64}} < 4)$

Normalizamos para calcularla:

$$P(\overline{X_{64}} < 4) = P\left(\frac{\overline{X_{64}} - 3{,}5}{0{,}225} < \frac{4 - 3{,}5}{0{,}225}\right) = P(Z < 2{,}22) = 0{,}9868$$

Probabilidad de que el tiempo promedio de espera para la muestra sea inferior a 4 horas es 0,9868

Q2. Veamos si existe solución

$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ es regular$\Rightarrow \exists A^{-1}$. Podemos entonces despejar X:

$$AX + 2A = A^2 \Rightarrow \ A.X = A^2 - 2A \underbrace{\Rightarrow}_{multiplicando\ por\ A^{-1} por\ la\ izda} A^{-1}(A.X) = A^{-1}(A^2 - 2A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}(A^2 - 2A) \Rightarrow X = A^{-1}(A^2 - 2A)$$

Textos Marea Verde

Es posible "sacar factor común" en $A^2 - 2A = A(A - 2I)$:

$$X = A^{-1}(A^2 - 2A) = A^{-1}A(A - 2I) = (A^{-1}A)(A - 2I) = I(A - 2I) \Leftrightarrow$$

$$X = A - 2I$$

Con lo que no necesitamos calcular la inversa. Obtenemos X:

$$X = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sin tener en cuenta esta posibilidad, también obtenemos X a partir de la primera expresión obtenida

$$X = A^{-1}(A^2 - 2A)$$

- Calculamos $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\,AdjA)^t$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (\,AdjA)^t \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calculamos A^2:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Calculamos ahora $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
- Por último, sustituimos

$$X = A^{-1}(A^2 - 2A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = A^{-1}(A^2 - 2A) = A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Textos Marea Verde

Opción II

Q1.- (*5 puntos*) Clasifique el sistema de ecuaciones *(S)* utilizando el teorema de Rouché-Frobenius y, si es posible, calcule la solución

$$\left.\begin{matrix} x-y+2z=-4 \\ 3x-5y+8z=-14 \\ x+3y-4z=2 \end{matrix}\right\} \equiv S$$

Q2.- (*5 puntos*) Dada $f(x)=\frac{x-\sqrt{6-x}}{x-2}$. Calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$. ¿La función$f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=2$? Justifique la respuesta basándose en el cálculo del límite.

Solución

Q1.- Escribamos la matrices de coeficientes A y ampliada $\bar{A}$ y estudiemos sus rangos

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=20-8+18+10-24-12=4\neq 0$$

$|A|$ es un menor de orden 3 (máximo) no nulo, tanto de la matriz A como de la matriz ampliada ⇒

$$\Rightarrow Rango\ A=Rango\ \bar{A}=3=nº\ de\ incógnitas \Rightarrow$$

⇒ Por el teorema de Rouché-Frobenius S es compatible determinado

Buscamos un sistema triangular equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 8 & -14 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F2'=F2-3F1 \\ F3'=F3-F1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F2''=-\frac{1}{2}F2'} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F3''=F3'-4-F2''}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

S es equivalente a $S' \equiv \left.\begin{matrix} x-y+2z=-4 \\ y-z=1 \\ -2z=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y+2z=-4 \\ y-z=1 \\ z=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y+2z=-4 \\ y=1+z=0 \\ z=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=y-2z-4=-2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{la solución única del sistema es } x=-2 \quad y=0 \quad z=-1$$

El sistema S es compatible determinado y la solución única del mismo es

$$\boldsymbol{x=-2 \quad y=0 \quad z=-1}$$

Textos Marea Verde

Q2 . Calculamos el límite pedido

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{6-x}}{x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-\sqrt{6-x})(x+\sqrt{6-x})}{(x-2)\left((x+\sqrt{6-x})\right)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-\left(\sqrt{6-x}\right)^2}{(x-2)\left((x+\sqrt{6-x})\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{(x-2)\left((x+\sqrt{6-x})\right)} = \underbrace{\frac{0}{0} =}_{(*)} \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)\left((x+\sqrt{6-x})\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+\sqrt{6-x}} = \frac{5}{2+\sqrt{4}} = \frac{5}{4} \neq \pm\infty$$

$x = 2$ **<u>no es</u>** entonces una asíntota vertical de *f*. Las asíntotas verticales están asociadas a discontinuidades de salto infinito (*alguno de los límites laterales en 2 debería ser* ∞ *o* $-\infty$*).* En este caso $x = 2$ es una discontinuidad evitable

$$(*) x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 1(x-2)(x+3) = (x-2)(x+3)$$

$x = 2$ no es una asíntota vertical de f

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CURSO: **2024 – 2025**

EJERCICIO DE **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

TIEMPO DISPONIBLE: **1 horas y 30 minutos.**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO (veánse las distintas partes del examen)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Las tres primeras preguntas son obligatorias. En la cuarta pregunta, se deberá elegir entre OPCIÓN I y OPCIÓN II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirán los apartados de la opción que aparezca respondida en primer lugar.

Cada ejercicio del examen se califica sobre 10 puntos y las cuatro preguntas tienen el mismo peso en la nota final (2,5 puntos). La nota final se obtendrá sumando las puntuaciones de los ejercicios y dividiendo el total entre 4.

Se valorará la capacidad de argumentar y verificar las soluciones propuestas, así como el uso adecuado del lenguaje matemático y de explicaciones fundamentadas en los resultados teóricos aprendidos durante el curso.

La tabla de la distribución normal está disponible al final del examen, aunque es posible que no sea necesaria en ninguna pregunta..

1.- (***10 puntos***) Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- *(8 puntos)* Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- *(2 puntos)* Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

2.- (***10 puntos***) La función $B(x)=\begin{cases} 2x\ (32-4x) & \text{si} \quad 0\le x\le 3 \\ -20x+180 & \text{si} \quad 3<x\le 9 \end{cases}$ representa el beneficio mensual de una empresa, en miles de euros, en función del precio unitario (€), x, al que vende su producto.

a.- *(4 puntos)* Justifique si la función $B(x)$ es continua.

b.- *(6 puntos)* Calcule el precio unitario al que la empresa debe vender el producto para obtener el máximo beneficio e indique a cuánto asciende dicho valor.

3.- (***10 puntos***) En la cafetería de un museo de arte contemporáneo, famosa por sus bebidas personalizadas y su ambiente artístico, los visitantes pueden elegir entre tres tipos de consumiciones preparadas de manera especial: café, té o bebida fría. Entre los jóvenes que frecuentan la cafetería, el 40% prefieren el café, el 35% eligen el té y el 25% optan por una bebida fría. Además, se sabe que, entre quienes prefieren el café, el 50% lo toman sin azúcar; entre quienes eligen el té, el 80% lo toman sin azúcar; y entre quienes prefieren una bebida fría, el 40% la toman sin azúcar.

a.- *(4 puntos)* Calcule la probabilidad de que un joven elegido al azar haya pedido una bebida fría sin azúcar.

b.- *(6 puntos)* Se selecciona un joven al azar y sabemos que ha pedido una consumición sin azúcar, calcule la probabilidad de que haya pedido una bebida fría.

BY NC SA

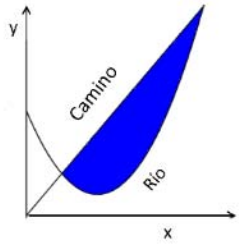
Textos Marea Verde

4.- (*10 puntos*) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (*5 puntos*) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X.

Q2.- (*5 puntos*) Una finca está delimitada por un río cuyo curso puede describirse mediante la ecuación $y = (x-2)^2 + 1$ y por un camino que tiene como dirección la ecuación $y = 2x$ (véase la figura para mayor claridad). Suponiendo que tanto el eje *x* como el eje *y* se miden en kilómetros, calcule el área de la finca. Sabiendo que en la zona, la hectárea se paga a 3.000 €, calcule el precio de la finca.
Nota: 1 km² = 100 hectáreas.



Opción II

Q1.- *(5 puntos)* Justifique la existencia (o ausencia) de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para la función $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$. En caso de que existan, indique sus respectivas ecuaciones.

Q2.- *(5 puntos)* Una ONG de Aragón pretende organizar turnos de voluntarios para colaborar con los afectados de una catástrofe. Basándose en experiencias previas, estiman que el 25% de los aragoneses estarían interesados en participar. No obstante, para tener una estimación más precisa han decidido realizar una encuesta entre la población aragonesa. ¿Cuántas personas deben encuestar como mínimo para estimar la proporción de quienes estarían dispuestos a colaborar con la ONG, con un error máximo del 5% y con un nivel de confianza del 94%?

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2025

Ejercicio 1:

1.- **(*10 puntos*)** Un agricultor siembra dos tipos de cultivos, maíz y trigo, con beneficios económicos de 800 € y 500 € por hectárea, respectivamente. Por cada hectárea, el maíz requiere 200 kg de fertilizante y el trigo requiere 300 kg de fertilizante. La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg. Además, el agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo, y la superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo.

a.- *(8 puntos)* Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita maximizar el beneficio.

b.- *(2 puntos)* Considerando la región factible definida en el apartado anterior y suponiendo que el beneficio por hectárea de maíz es de 800 € y el de trigo es de 1.200 €, justifique si (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.

Solución:

a.- Llamamos x = número de hectáreas sembradas de maíz, y = número de hectáreas sembradas de trigo.
Completamos una tabla con los datos del problema.

	Fertilizante	Beneficio
Hectáreas maíz (x)	$200x$	$800x$
Hectáreas trigo (y)	$300y$	$500y$
TOTALES	$200x+300y$	$800x+500y$

Queremos maximizar el beneficio: $B(x,y)=800x+500y$

Las restricciones son:

"La disponibilidad total de fertilizante es de 6.000 kg" → $200x+300y\le 6000$.
"El agricultor debe plantar al menos 10 hectáreas entre maíz y trigo" → $x+y\ge 10$
"La superficie de maíz no debe exceder a la superficie de trigo" → $x\le y$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 200x+300y\le 6000 \\ x+y\ge 10 \\ x\le y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 60 \\ x+y\ge 10 \\ x\le y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$2x+3y=60$

x	$y=\frac{60-2x}{3}$
0	20
12	12
30	0

$x+y=10$

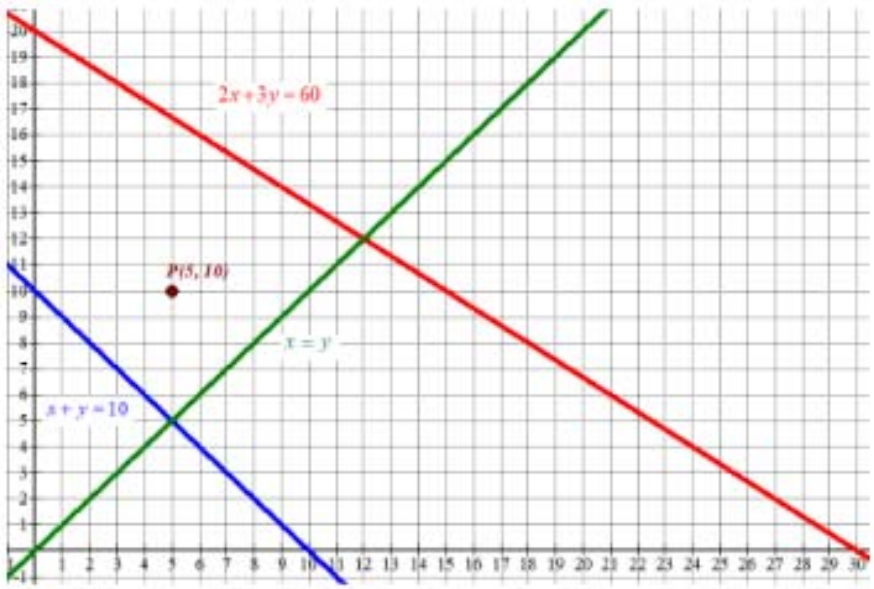
x	$y=10-x$
0	10
5	5
10	0

$x=y$

x	$y=x$
5	5
12	12

$x\ge 0;\ y\ge 0$ Primer cuadrante

Textos Marea Verde

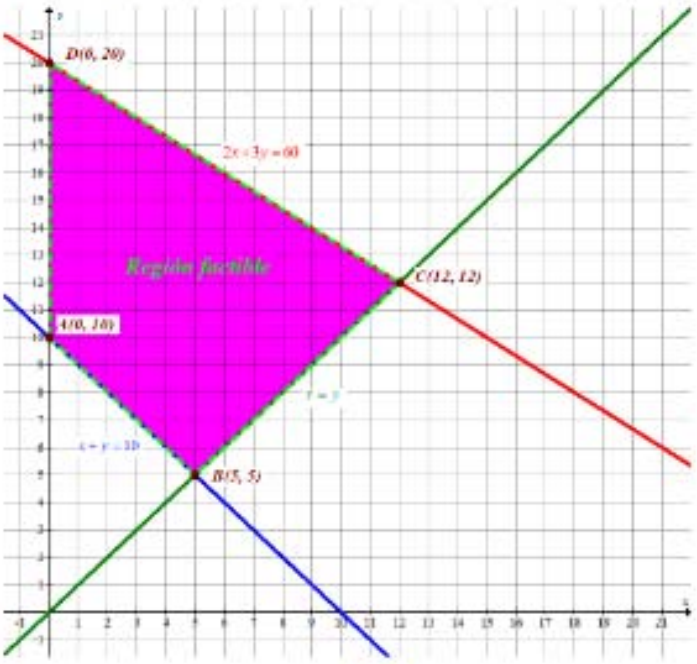


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y \le 60 \\ x+y \ge 10 \\ x \le y \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de las rectas verde y azul, y por debajo de la recta roja.

Comprobamos que el punto P(5, 10) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 5+3\cdot 10 \le 60 \\ 5+10 \ge 10 \\ 5 \le 10 \\ 5 \ge 0;\ 10 \ge 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



BY NC SA
Textos Marea Verde

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=800x+500y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

A(0, 10) → $B(0,10)=800\cdot 0+500\cdot 10=5000$

B(5, 5) → $B(5,5)=800\cdot 5+500\cdot 5=6500$

C(12, 12) → $B(12,12)=800\cdot 12+500\cdot 12=15600$ *Máximo*

D(0, 20) → $B(0,20)=800\cdot 0+500\cdot 20=10000$

El valor máximo es 15600 y se obtiene en el vértice C(12, 12).
Plantando 12 hectáreas de trigo y otras 12 de maíz se cumplen las restricciones y se obtienen unos beneficios máximos de 15600 €.

b.- La nueva función que nos da los beneficios es $B(x,y)=800x+1200y$. Valoramos el beneficio en cada vértice de la región factible.

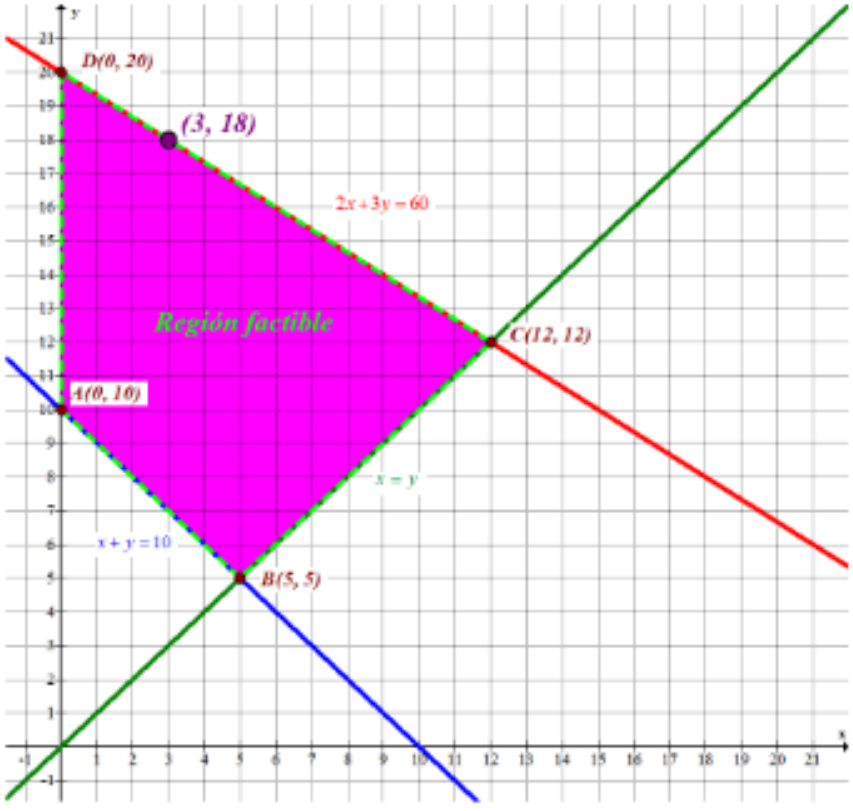
A(0, 10) → $B(0,10)=800\cdot 0+1200\cdot 10=12000$

B(5, 5) → $B(5,5)=800\cdot 5+1200\cdot 5=10000$

C(12, 12) → $B(12,12)=800\cdot 12+1200\cdot 12=24000$ *Máximo*

D(0, 20) → $B(0,20)=800\cdot 0+1200\cdot 20=24000$ *Máximo*

El valor máximo es 24000 y se obtiene en los vértices C(12, 12) y D(0, 20).
El valor máximo del beneficio se consigue en todos los puntos del segmento CD.
El punto (3, 18) pertenece al segmento CD por lo que (3,18) podría ser una solución óptima del nuevo problema de optimización.



Textos Marea Verde

Ejercicio 2:

2.- (*10 puntos*) La función $B(x)=\begin{cases}2x\ (32-4x) & \text{si} \quad 0\le x\le 3\\ -20x+180 & \text{si} \quad 3<x\le 9\end{cases}$ representa el beneficio mensual de una empresa, en miles de euros, en función del precio unitario (€), x, al que vende su producto.

a.- *(4 puntos)* Justifique si la función $B(x)$ es continua.

b.- *(6 puntos)* Calcule el precio unitario al que la empresa debe vender el producto para obtener el máximo beneficio e indique a cuánto asciende dicho valor.

Solución:

a.- La función es continua en $[0,3)\cup(3,9]$ pues tiene una expresión polinómica.

Estudiamos la continuidad de la función en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l}B(3)=2x(32-4x)=6\cdot 20=120\\ \lim\limits_{x\to 3^-}B(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}3x(32-4x)=120\\ \lim\limits_{x\to 3^-}B(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}-20x+180=-60+180=120\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}B(x)=\lim_{x\to 3^-}B(x)=B(3)=120$$

La función es continua en $x=3$. La función es continua en $[0,9]$.

b.- Calculamos la derivada y averiguamos cuando se anula.

$$B(x)=\begin{cases}64x-8x^2 & si\ 0\le x\le 3\\ -20x+180 & si\ 3<x\le 9\end{cases}\Rightarrow B'(x)=\begin{cases}64-16x & si\ 0\le x<3\\ -20 & si\ 3<x\le 9\end{cases}$$

$$B'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}64-16x=0\to 16x=64\to x=4\notin[0,3)\\ -20=0\to \text{Imposible}\end{cases}$$

La función no tiene ningún punto crítico.

La derivada es positiva en el intervalo $[0,3)$ y negativa en $(3,9]$. La función crece en $[0,3)$ y decrece en $(3,9]$.

Valoramos la función en el cambio de definición y en los extremos del intervalo de definición.

$$\left.\begin{array}{l}x=0\to B(0)=2\cdot 0(32-0)=0\\ x=3\to B(3)=120\\ x=9\to B(9)=-20\cdot 9+180=0\end{array}\right\}$$

El mayor beneficio es de 120 000 € que se obtienen para $x=3$. El precio unitario necesario para conseguir un beneficio máximo es de 3 €.

Textos Marea Verde

Ejercicio 3:

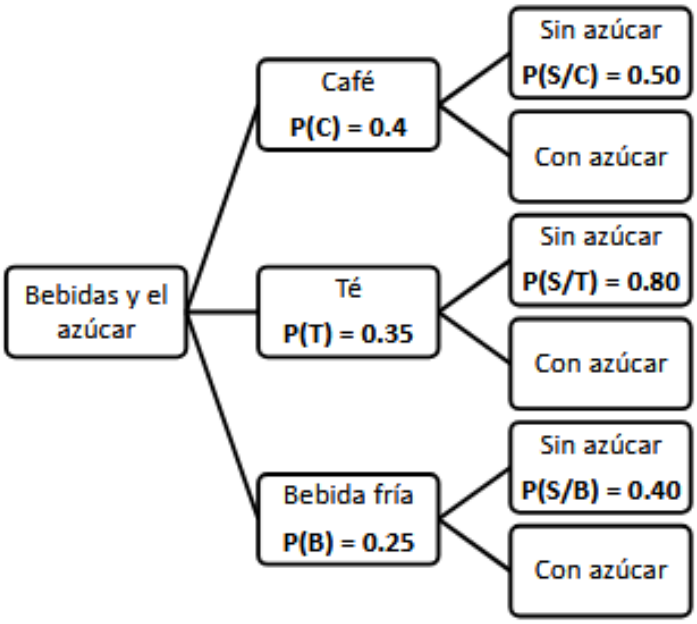
3.- **(*10 puntos*)** En la cafetería de un museo de arte contemporáneo, famosa por sus bebidas personalizadas y su ambiente artístico, los visitantes pueden elegir entre tres tipos de consumiciones preparadas de manera especial: café, té o bebida fría. Entre los jóvenes que frecuentan la cafetería, el 40% prefieren el café, el 35% eligen el té y el 25% optan por una bebida fría. Además, se sabe que, entre quienes prefieren el café, el 50% lo toman sin azúcar; entre quienes eligen el té, el 80% lo toman sin azúcar; y entre quienes prefieren una bebida fría, el 40% la toman sin azúcar.

a.- *(4 puntos)* Calcule la probabilidad de que un joven elegido al azar haya pedido una bebida fría sin azúcar.

b.- *(6 puntos)* Se selecciona un joven al azar y sabemos que ha pedido una consumición sin azúcar, calcule la probabilidad de que haya pedido una bebida fría.

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a.- Debemos calcular $P(B \cap S)$.

$$P(B \cap S) = P(B)P(S/B) = 0.25 \cdot 0.4 = \boxed{0.1}$$

b.- Nos piden calcular $P(B/S)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{P(B)P(S/B)}{P(C)P(C/S) + P(T)P(S/T) + P(B)P(S/B)} =$$

$$= \frac{0.1}{0.4 \cdot 0.5 + 0.35 \cdot 0.8 + 0.1} = \boxed{\frac{5}{29} = 0.1724}$$

Textos Marea Verde

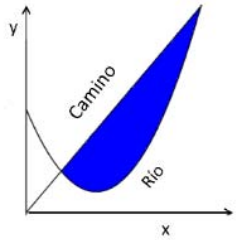
Ejercicio 4:

4.- (*10 puntos*) Elija entre **Opción I** y **Opción II**, respondiendo **únicamente** a una de las dos.

Opción I

Q1.- (*5 puntos*) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $3AX - B = C$ esté bien planteada, siendo $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & -3\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 3 & 6\\ 6 & 9 & -6\end{pmatrix}$. Resuelva la ecuación matricial despejando previamente X.

Q2.- (*5 puntos*) Una finca está delimitada por un río cuyo curso puede describirse mediante la ecuación $y=(x-2)^2+1$ y por un camino que tiene como dirección la ecuación $y=2x$ (véase la figura para mayor claridad). Suponiendo que tanto el eje *x* como el eje *y* se miden en kilómetros, calcule el área de la finca. Sabiendo que en la zona, la hectárea se paga a 3.000 €, calcule el precio de la finca.
Nota: 1 km² = 100 hectáreas.



Opción II

Q1.- *(5 puntos)* Justifique la existencia (o ausencia) de asíntotas horizontales, verticales y oblicuas para la función $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$. En caso de que existan, indique sus respectivas ecuaciones.

Q2.- *(5 puntos)* Una ONG de Aragón pretende organizar turnos de voluntarios para colaborar con los afectados de una catástrofe. Basándose en experiencias previas, estiman que el 25% de los aragoneses estarían interesados en participar. No obstante, para tener una estimación más precisa han decidido realizar una encuesta entre la población aragonesa. ¿Cuántas personas deben encuestar como mínimo para estimar la proporción de quienes estarían dispuestos a colaborar con la ONG, con un error máximo del 5% y con un nivel de confianza del 94%?

Solución Opción I. Q1:

Q1.- Nos planteamos cuando es posible el producto AX, siendo X una matriz de dimensiones $m\times n$ y A una matriz de orden 2×2.

$$A\cdot X$$

$$2\times \boxed{2\cdot m}\times n \rightarrow 2\times n$$

Para que sea posible el producto debe ser $m=2$, obteniéndose como resultado una matriz de dimensiones $2\times n$.
Para que sea posible la resta $3AX-B$ las matrices 3AX y B tienen que ser de las mismas dimensiones. Como B es de dimensiones 2×3 debe ser $n=3$.
La matriz X debe ser de dimensiones 2×3.
Resolvemos la ecuación matricial planteada.
Despejamos X de la ecuación matricial.

$$3AX-B=C \Rightarrow 3AX=B+C \Rightarrow AX=\frac{1}{3}(B+C) \Rightarrow X=\frac{1}{3}A^{-1}(B+C)$$

Hallamos la inversa de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$$

Textos Marea Verde

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la matriz X.

$$B+C=\begin{pmatrix}3&6&-3\\3&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3&6\\6&9&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&3\\9&9&-3\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{3}A^{-1}(B+C)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&9&3\\9&9&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3-9&9-9&3+3\\-3+18&-9+18&-3-6\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6&0&6\\15&9&-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&2\\5&3&-3\end{pmatrix}}$$

Textos Marea Verde

Solución Opción I. Q2:

Q2.- Hallamos los puntos de corte de las gráficas del río y el camino.

$$\left.\begin{array}{l} y=(x-2)^2+1=x^2+4-4x+1=x^2-4x+5 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=x^2-4x+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 5}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{6+4}{2}=\boxed{5=x} \\ \frac{6-4}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

Calculamos la superficie de la finca.

$$\int_1^5 2x-\left(x^2-4x+5\right)dx=\int_1^5 -x^2+6x-5dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^5=$$

$$=\left[-\frac{5^3}{3}+3\cdot 5^2-5\cdot 5\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+3\cdot 1^2-5\cdot 1\right]=-\frac{125}{3}+75-25+\frac{1}{3}-3+5=\boxed{\frac{32}{3}=10.6667}$$

La superficie de la finca es de $\frac{32}{3}=10.6667$ km^2. La finca tiene $\frac{3200}{3}=1066.67$ hectáreas.

El coste de la finca es de $\frac{3200}{3}\cdot 3000=3\,200\,000$ euros.

Textos Marea Verde

Solución Opción II. Q1:

Q1.- Es una función racional y su dominio son todos los números reales menos los que anulan su denominador.

$$f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}\Rightarrow x-2=0\Rightarrow \boxed{x=2}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x-2}=\frac{6}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x-2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{x-2}==\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=2$$

La recta $y=x+2$ es asíntota oblicua de la función.

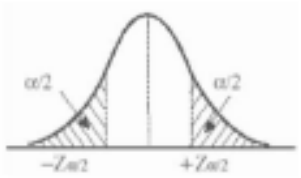
BY NC SA
Textos Marea Verde

Solución Opción II. Q2:

Q2.- La proporción de aragoneses interesados en participar como voluntarios es $p = 0.25$ y de aquí obtenemos $q = 1 - 0.25 = 0.75$.

Para un nivel de confianza del 94% obtenemos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}94 \rightarrow \alpha = 0{,}06 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}97 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.88$$



PAU 2025 Extraordinaria Matemáticas aplicadas a las CC. SS. II en Aragón *Juan Antonio Martínez García*

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699

Utilizamos la fórmula del error y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.88} = \sqrt{\frac{0.1875}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.88}\right)^2 = \frac{0.1875}{n} \Rightarrow n = \frac{0.1875}{\left(\frac{0.05}{1.88}\right)^2} = 265.08$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 266 aragoneses.

Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de Oviedo, Andrés García Mirantes y Sergio Manso Bravo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

- Responda en el pliego en blanco a **una opción** (A o B) de **cuatro** de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Problema 1A:

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 \le x \le 12 \\ \frac{-1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \le 20 \end{cases}$$

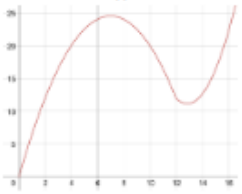
donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**

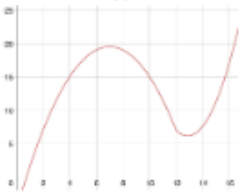
b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**

c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f. **(0.5 puntos)**

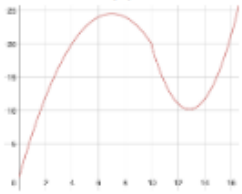
(i)



(ii)



(iii)

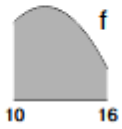


Problema 1B:

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$:

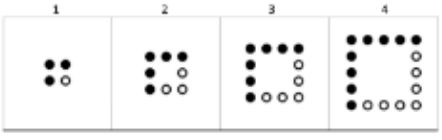
a) Encuentra la primitiva F de f para la que se verifica que $F(2) = 2$. **(1 punto)**

b) La función f determina, entre $x = 10$ m y $x = 16$ m, el recorrido de una montaña rusa. Se quiere pintar de color gris la superficie bajo el recorrido en ese intervalo. Cada bote contiene pintura para 15 m^2 de superficie. ¿Cuántos botes serán necesarios para pintar toda esa superficie? **(1.5 puntos)**



Problema 2A:

Pregunta 2. Opción A. En una caseta de feria proponen un reto, a partir de las siguientes figuras.



a) El reto consiste en adivinar cuántos puntos en total (negros y blancos) habrá en la figura número 17 y, además, decir cuántos de ellos serán puntos negros y cuántos blancos. Para quienes han superado este reto, se plantea uno más complicado: ¿eres capaz de encontrar una fórmula que relacione el número de figura con el número de puntos negros para una figura cualquiera? Explica cómo has llegado a ella, indicando qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: «n es el número de figura»). **(2 puntos)**

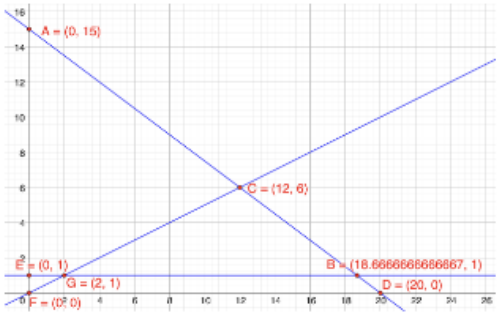
b) Dos clientes de la caseta, tras observar detenidamente el reto, tienen opiniones encontradas: una dice que no es posible que haya una figura que tenga un número par de puntos negros y otro dice que sí lo es. ¿A quién le das la razón? ¿Qué argumentos puedes utilizar para convencerlos? **(0.5 puntos)**

Problema 2B:

Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**

b) Siendo «x» el número de viajes en el dragón rojo e «y» el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver *cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción*. Señala los vértices (p. ej.: «B, D, F y G») y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

Problema 3A:

Pregunta 3. Opción A En una de las atracciones hay dos tipos de pases, el pase VIP y el normal, sus precios son, respectivamente, «x» e «y». Un grupo de personas pagó, en total, 90 € cuando compró un pase VIP y tres pases normales, mientras que otro grupo de personas pagó 15m € por comprar dos pases VIP y m pases normales. Para determinar el precio de cada pase, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases}$$

a) Si m = 15, ¿cuál fue el precio de cada tipo de pase? **(1 punto)**

b) Proporciona un valor de m para el cual el sistema tenga solución, pero esa solución carezca de sentido en el contexto del problema. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

c) ¿Para qué valor de m el sistema no tiene solución? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Problema 3B:

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -m \\ 3 & -8-m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} m & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 \\ 6m-8 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 0 \\ -2m \end{pmatrix}.$$

a) Si $A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2}D + E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

Problema 4A:

Pregunta 4. Opción A. En la tómbola de un parque de atracciones se puede elegir entre 70 sobres, 40 son rojos y 30 son verdes. De los sobres rojos solo dos tienen el premio del peluche gigante, el 75 % tienen «siga jugando» y el resto tienen otro tipo de premios. Entre los sobres verdes, tres contienen peluches gigantes, 23 tienen «siga jugando» y el resto, otros premios.

a) ¿Es más probable conseguir un peluche gigante si se elige un sobre verde o uno rojo? Si se elige un sobre al azar, ¿cuál es la probabilidad de ganar un peluche gigante? **(1.5 puntos)**

b) Si al elegir un sobre, sin poder ver el color, el premio no fue el peluche gigante y tampoco tenía «siga jugando», ¿cuál es la probabilidad de que el sobre haya sido verde? **(1 punto)**

Problema 4B:

Pregunta 4. Opción B. El 80 % de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60 % combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**

b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**

c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Problema 5A:

Pregunta 5. Opción A.* El gasto por visitante en una atracción se puede asumir que sigue distribución normal con desviación 8 euros.

a) ¿Cuál es el tamaño de muestra n mínimo para estimar el gasto medio por visitante en esta atracción mediante un intervalo de confianza al nivel de confianza del 90 % con un error de estimación inferior a 2 €? Si, con el mismo nivel de confianza, se quisiese obtener un intervalo con menos error, ¿habría que aumentar o reducir el tamaño muestral mínimo obtenido? **(1 punto)**

b) Para una muestra de n visitantes se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza al 95 % de confianza (en euros) para el gasto medio por visitante: (11.0947 , 12.9053) ¿Cuál fue el gasto medio por visitante en esa muestra? ¿Cuál fue el tamaño muestral n considerado? ¿Cuál es el error de estimación en este caso? **(0.5 puntos)**

c) Partiendo del intervalo del apartado b), empareja las situaciones y los intervalos siguientes y justifica tu elección. **(1 punto)**

(i) Intervalo a partir de la misma muestra pero a un nivel de confianza mayor	(A) (10.0947 , 11.9053)
(ii) Intervalo con la misma media muestral y nivel de confianza, pero obtenido a partir de una muestra de mayor tamaño	(B) (10.9238 , 13.0762)
(iii) Intervalo con nivel de confianza obtenido a partir de una muestra con el mismo tamaño pero con una media muestral diferente	(C) (11.216 , 12.784)

Problema 5B:

Pregunta 5. Opción B.* Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n. En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90 % y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95 % de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102 , 0.7898), (0.5565 , 0.7435) y (0.6248 , 0.7752).

a) Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90 % de confianza? **(1.5 puntos)**

b) Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n?¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A

Pregunta 1. Opción A. La velocidad de una montaña rusa, medida en km/h, durante los 20 primeros segundos del recorrido se puede aproximar por la siguiente función:

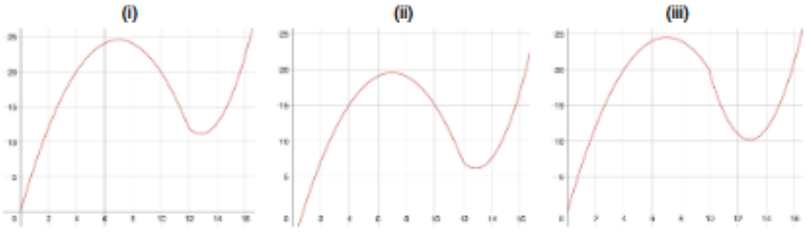
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 7x & \text{si } 0 < x < 12 \\ \frac{-1}{108}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 34x + 220 & \text{si } 12 < x \leq 20 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en segundos) desde la salida.

a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad aumenta y en cuáles decrece? **(1 punto)**

b) Tras el segundo 1 y antes del segundo 20, ¿la velocidad es inferior a 5 km/h en algún momento? ¿Supera los 70 km/h en algún momento? En caso afirmativo, indica cuándo. **(1 punto)**

c) Explica cuál de las siguientes figuras se corresponde con la gráfica de la función f. **(0.5 puntos)**



Solución:

Pregunta 1. Opción A.

a) Al tratarse de una función definida a trozos, estudiamos el crecimiento en cada tramo.

- En el primer tramo,

$$f'(x) = -x + 7 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 7$$

Por tanto, en el primer tramo, la función es creciente en el intervalo $(0, 7)$ y decreciente en $(7, 12)$ y tiene un máximo relativo en $(7, f(7)) = (7, 24.5)$.

- En el segundo tramo, $f'(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34$.

$$-\frac{1}{36}x^2 + 3x - 34 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 108x - 1224 = 0$$

Esta ecuación tiene como soluciones

$$x = 54 + 6\sqrt{47} \approx 95.134 \qquad x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$$

El primer valor no está en el dominio. Estudiamos si el segundo es mínimo o máximo. La segunda derivada es $f''(x) = -\frac{1}{18}x + 3$, de modo que en el segundo punto esta derivada toma un valor positivo y, por tanto, f alcanza un mínimo relativo en $x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$.

Por tanto, f es

- creciente en el intervalo $(0, 7)$,
- decreciente en $(7, 54 - 6\sqrt{47})$, es decir, aproximadamente en el intervalo $(7, 12.866)$ y
- creciente para $x > 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$.

Así, la velocidad aumenta entre los 0 y los 7 segundos, decrece entre los 7 y los 12.866 segundos aproximadamente y vuelve a crecer entre los 12.866 segundos y los 20 segundos.

b) En el segundo 1 la velocidad es $f(1) = -\frac{1}{2}1^2 + 7 \cdot 1 = 6.5$ km/h. A partir de ahí la velocidad crece hasta el segundo 7 y luego decrece hasta el segundo 12. En este instante la velocidad es $f(12) = -\frac{1}{2}12^2 + 7 \cdot 12 = -72 + 84 = 12$ km/h. De modo que en el primer tramo de definición la velocidad no baja a 5 km/h en ningún instante después del segundo 1.
En el segundo tramo la velocidad comienza en $f(12) = -\frac{1}{108} \cdot 12^3 + \frac{3}{2}12^2 - 34 \cdot 12 + 220 = 12$ km/h. El mínimo se alcanza en el punto $x = 54 - 6\sqrt{47} \approx 12.866$, es decir, a los 12.866 segundos, donde la función vale

BY NC SA

f(12.866) ≈ 11.137 km/h y después, según hemos visto en el apartado anterior, la velocidad crece. Por tanto, en ningún instante después del segundo 1 la velocidad se reduce hasta los 5 km/h.

Respecto a si supera los 70 km/h en algún momento, en el primer tramo, la función tiene máximo en (7, 24.5), por lo que no supera los 70 km/h. En el segundo tramo, la función es creciente desde x = 12.866 hasta x = 20. Si evaluamos f en x = 20:

$$f(20) = \frac{-1}{108}20^3 + \frac{3}{2}20^2 - 34 \cdot 20 + 220 \approx 65.9259,$$

por lo que podemos afirmar que la montaña rusa no superará los 70 km/h en los 20 primeros segundos.

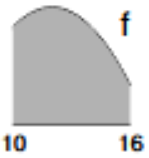
c) A partir del estudio realizado en los dos apartados anteriores, sabemos que f tiene un máximo en x = 7 y un mínimo en x = 12.866, aspecto que se verifica en las tres funciones. Sabemos, además que f(7) = 24.5, lo que nos hace descartar la figura (ii). Podemos fijarnos también en el valor f(12.866) para descartar la gráfica (iii). Alternativamente, la gráfica (iii) también se puede descartar porque el punto en el que cambia la curva es x = 10, que no se corresponde con la expresión de la función. Por lo tanto, la gráfica adecuada tiene que ser la (i).

Problema 1B

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que se verifica que $F(2) = 2$. **(1 punto)**

b) La función f determina, entre $x = 10$ m y $x = 16$ m, el recorrido de una montaña rusa. Se quiere pintar de color gris la superficie bajo el recorrido en ese intervalo. Cada bote contiene pintura para 15 m^2 de superficie. ¿Cuántos botes serán necesarios para pintar toda esa superficie? **(1.5 puntos)**



Solución:

Pregunta 1. Opción B.

a) Puesto que $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x - 30$, entonces $F(x) = \int f(x)dx = -\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 30x + C$. Por otro lado, como se indica que $F(2) = 2$, se tiene que $F(2) = -\frac{2^3}{12} + 3\cdot 2^2 - 30\cdot 2 + C = -\frac{2}{3} - 48 + C = 2$, con lo que $C = 50 + \frac{2}{3} = \frac{152}{3}$ y, por tanto, la primitiva buscada es $F(x) = -\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 30x + \frac{152}{3}$.

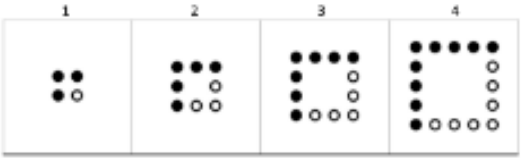
b) El área limitada por la curva f y el eje X entre $x = 10$ y $x = 16$, teniendo en cuenta la representación gráfica y la expresión obtenida para F en el apartado anterior, es igual a:

$$\int_{10}^{16} f(x)dx = F(16) - F(10) = \left(-\tfrac{1}{12}16^3 + 3\cdot 16^2 - 30\cdot 16 + \tfrac{152}{3}\right) - \left(-\tfrac{1}{12}10^3 + 3\cdot 10^2 - 30\cdot 10 + \tfrac{152}{3}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{12}(16^3 - 10^3) + 3(16^2 - 10^2) - 30(16 - 10) = 30\ m^2.$$

De modo que harían falta 2 botes de pintura.

Problema 2A

Pregunta 2. Opción A. En una caseta de feria proponen un reto, a partir de las siguientes figuras.



a) El reto consiste en adivinar cuántos puntos en total (negros y blancos) habrá en la figura número 17 y, además, decir cuántos de ellos serán puntos negros y cuántos blancos. Para quienes han superado este reto, se plantea uno más complicado: ¿eres capaz de encontrar una fórmula que relacione el número de figura con el número de puntos negros para una figura cualquiera? Explica cómo has llegado a ella, indicando qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: «n es el número de figura»). **(2 puntos)**

b) Dos clientes de la caseta, tras observar detenidamente el reto, tienen opiniones encontradas: una dice que no es posible que haya una figura que tenga un número par de puntos negros y otro dice que sí lo es. ¿A quién le das la razón? ¿Qué argumentos puedes utilizar para convencerlos? **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 2. Opción A.

a) Hay varias estrategias posibles para identificar el patrón del número total de puntos, por ejemplo, si nos fijamos en que para cada figura se construye un cuadrado cuyo lado tiene un número de puntos igual al de la figura más uno. Por lo tanto en la figura n-ésima habrá un cuadrado de lado $n + 1$ puntos. En consecuencia, el número total de puntos será $4n$. O, lo que es lo mismo: $4(n + 1) - 4$ si multiplicamos el número de puntos en cada lado por 4 y le restamos 4, para evitar que cada vértice del cuadrado lo contemos dos veces.

Así, en la figura número 17 habrá 68 puntos en total.

También podríamos haber comenzado por identificar el número de puntos de cada color y, posteriormente, sumarlos. Así, por ejemplo, contando los puntos vemos que:

n.º figura	1	2	3	4
n.º puntos negros	3	5	7	9
n.º puntos blancos	1	3	5	7

el patrón es una secuencia de impares en los puntos negros, que obedece al impar inmediatamente superior al doble del número de la figura, y el el número de puntos blancos al impar inmediatamente menor al doble del número de la figura. Por ello, sin necesidad de obtener la generalización, para la figura 17 tendríamos que hay 35 puntos negros y 33 puntos blancos, lo que hacen un total de 68 puntos.

La forma de llegar a la generalización para los puntos blancos y negros par ala figura n sería expresar esta relación en lenguaje algebraico. El número de puntos negros es el impar inmediatamente superior al doble del número de la figura n, es decir: $2n + 1$. El número de puntos blancos es el impar inmediatamente inferior: $2n - 1$. Y el número total de puntos, la suma de ambos: $2n + 1 + (2n - 1) = 4n$.

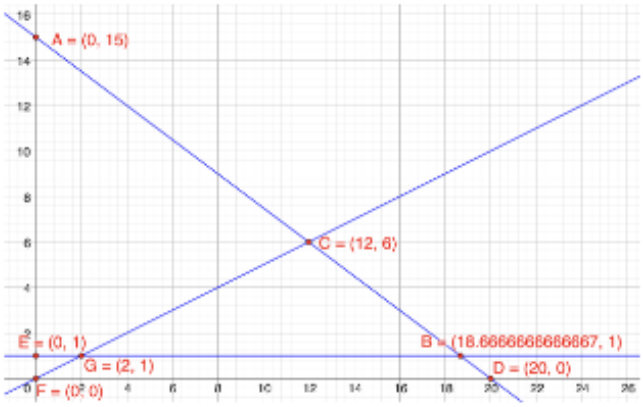
b) A partir de la observación del patrón, se constata que el número de puntos negros siempre es impar, ya que obedece a la expresión $2n + 1$, por lo que es imposible que sea par.

Problema 2B

Pregunta 2. Opción B. En un parque de atracciones quedan 2 horas para el cierre. Una persona quiere repartir ese tiempo entre sus dos atracciones favoritas: dragón rojo y gran loop. Cada viaje en el dragón rojo se estima que dura 6 minutos. Cada viaje en gran loop dura unos 8 minutos. Quiere hacer al menos 1 viaje en el gran loop y que el número de viajes en el dragón rojo sea a lo sumo, el doble que el número de viajes en el gran loop.

a) Si se sube 8 veces en el dragón rojo, ¿cuántos viajes puede hacer en el gran loop? ¿Puede subir 6 veces a cada atracción? **(1 punto)**

b) Siendo «x» el número de viajes en el dragón rojo e «y» el número de viajes en el gran loop, a partir de la imagen, indica cuál es la región factible para el problema que consiste en resolver *cuántas veces puede subir esta persona a cada atracción*. Señala los vértices (p. ej.: «B, D, F y G») y justifica tu respuesta. **(1 punto)**



c) Si los viajes en el dragón rojo cuestan 5 euros y en el gran loop 3 euros, ¿cuánto dinero puede llegar a gastar, como máximo? ¿Y cuánto puede gastar, como mínimo? **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 2. Opción B.

a) Si representamos por x e y el número de viajes en el dragón rojo y en gran loop, respectivamente, las condiciones impuestas llevan al siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 6x+8y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x+4y \leq 60 \\ x \leq 2y \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Si se sube 8 veces en el dragón rojo, puesto que se tiene que subir al menos la mitad de veces en gran loop ($x \leq 2y$), se tiene que al menos $y \geq 4$. Por otro lado, la restricción $3x+4y \leq 60$ lleva a $y \leq 9$. Por tanto, se podría subir entre 4 y 9 veces al gran loop.

Sí puede subirse 6 veces a cada atracción ya que sustituyendo $(x, y) = (6, 6)$ en el sistema de inecuaciones vemos que se verifica:

$$\begin{cases} 3\cdot 6+4\cdot 6 = 42 < 60 \\ 6 < 2\cdot 6 = 12 \\ 6 > 1 \\ 6 > 0 \end{cases}$$

b) Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto delimitado por los extremos $A = (0, 15)$, $C = (12, 6)$, $G = (2, 1)$ y $E = (0, 1)$.

c) La función de gastos es $z(x, y) = 5x + 3y$. Los valores en los extremos del recinto son:

$$z(A) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 15 = 45 \text{ euros}$$
$$z(C) = 5 \cdot 12 + 3 \cdot 6 = 78 \text{ euros}$$
$$z(G) = 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 13 \text{ euros}$$
$$z(E) = 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3 \text{ euros}$$

por lo que la mayor cantidad la gastaría si se subiese 12 veces al dragón rojo y 6 veces al gran loop.
El menor gasto corresponde a un viaje en gran loop y ninguno en el dragón rojo.

Problema 3A

Pregunta 3. Opción A En una de las atracciones hay dos tipos de pases, el pase VIP y el normal, sus precios son, respectivamente, «x» e «y». Un grupo de personas pagó, en total, 90 € cuando compró un pase VIP y tres pases normales, mientras que otro grupo de personas pagó 15m € por comprar dos pases VIP y m pases normales. Para determinar el precio de cada pase, se utiliza el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases}$$

a) Si m = 15, ¿cuál fue el precio de cada tipo de pase? **(1 punto)**

b) Proporciona un valor de m para el cual el sistema tenga solución, pero esa solución carezca de sentido en el contexto del problema. Justifica tu respuesta. **(1 punto)**

c) ¿Para qué valor de m el sistema no tiene solución? Justifica tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 3. Opción A.

a) Si m = 15 se tiene que el sistema es:

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + 15y = 225 \end{cases}$$

Se puede resolver por cualquier método, por ejemplo, por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 90 \\ 2 & 15 & 225 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 90 \\ 0 & 9 & 45 \end{array}\right)$$

Por lo que $y = 45/9 = 5$ y, en consecuencia, $x = 90 - 3 \cdot 5 = 75$. Por lo tanto, el precio de cada pase vip («x») es 75 € y el de cada pase normal («y») es de 5 €.

b) Una forma de obtener una solución al sistema que no sea válida en el contexto del problema es que alguno de los valores de x o de y en la solución sea negativa o nula ($x \leq 0$ o $y \leq 0$); también podría ser que el precio del pase vip fuera inferior al del pase normal (es decir, $x < y$). Podemos intentar resolver el sistema para cualquier valor de m y ver qué valores de m nos dan una solución negativa o en la que $x < y$.

$$\begin{cases} x + 3y = 90 \\ 2x + my = 15m \end{cases}$$

Aplicando, por ejemplo, Rouché-Fröbenius, tenemos que :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 6 = 0 \Longleftrightarrow m = 6$$

se tiene que:

- Para m = 6, como: ran(A) = 1 y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -12 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 90 \\ 2 & 90 \end{vmatrix} = -90 \Longrightarrow ran(A') = 2,$$

por lo que $ran(A) < ran(A')$ y el sistema no tendría solución

- Para $m \neq 6$, el sistema es compatible y determinado, por lo tanto, cualquier valor $m < 0$ el sistema, pero no tendría sentido en el contexto del problema porque m representa el número de pases normales que se compran y debería ser una cantidad positiva. Para $m > 0$ ($m \neq 6$) podemos buscar soluciones con x o y negativas, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A') = n.º incógnitas.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 90 & 3 \\ 15m & m \end{vmatrix} = -45m \quad y \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 90 \\ 2 & 15m \end{vmatrix} = -15m - 180.$$

por lo tanto, las soluciones en (x, y) serían de la forma $\left(\frac{45m}{m-6}, \frac{15m-180}{m-6}\right)$. Así, por ejemplo, para m = 1 tendríamos que la solución en x es negativa.

Otra alternativa, más sencilla, es razonar que carecería de sentido que el número de pases normales que se compran (el valor m) fuera negativo. En este caso, como además $m \neq 6$, el sistema tendría también solución (es compatible determinado).

c) Como hemos visto en la discusión anterior, si m = 6, el sistema no tiene solución, es incompatible.

Problema 3B

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -m\\ 3 & -8-m\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}m & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4\\ 6m-8\end{pmatrix} \text{ y } E=\begin{pmatrix}0\\ -2m\end{pmatrix}.$$

a) Si $A\cdot B\cdot C=\frac{1}{2}D+E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

Solución:

Pregunta 3. Opción B.

a) Puesto que:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -m\\ 3 & -8-m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2m & 3\\ 2m-8 & -9\end{pmatrix}$$

entonces:

$$A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}-2m & 3\\ 2m-8 & -9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2mx+3y\\ (2m-8)x-9y\end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{2}D+E=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\ 6m-8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3m-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ -2m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ m-4\end{pmatrix}$$

con lo que el sistema se puede escribir como:

$$\begin{cases}-2mx+3y=2\\ (2m-8)x-9y=m-4\end{cases}$$

b) Dos de las posibles formas de realizar la discusión de este sistema son:

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c}-2m & 3 & 2\\ 2m-8 & -9 & m-4\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{cc|c}-2m & 3 & 2\\ -4m-8 & 0 & m+2\end{array}\right)$$

Como $-4m-8=0\Leftrightarrow m=-2$, se tiene que:

- Si $m=-2$, la última fila es $(0\quad 0\,|\,0)$, con lo que el sistema es compatible indeterminado.
- En otro caso, si $m\neq -2$, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como:

$$|A| = \begin{vmatrix} -2m & 3 \\ 2m-8 & -9 \end{vmatrix} = 12m + 24 = 0 \iff m = -2$$

se tiene que:

- Para $m = -2$, como:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -12 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow ran(A') = ran(A) = 1,$$

por lo que el sistema es compatible indeterminado.

- Para $m \neq -2$, el sistema es compatible y determinado, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A') = nº incógnitas.

Así pues, el único valor de m para el que el sistema tiene infinitas soluciones es $m = -2$.

Problema 4A

Pregunta 4. Opción A. En la tómbola de un parque de atracciones se puede elegir entre 70 sobres, 40 son rojos y 30 son verdes. De los sobres rojos solo dos tienen el premio del peluche gigante, el 75 % tienen «siga jugando» y el resto tienen otro tipo de premios. Entre los sobres verdes, tres contienen peluches gigantes, 23 tienen «siga jugando» y el resto, otros premios.

a) ¿Es más probable conseguir un peluche gigante si se elige un sobre verde o uno rojo? Si se elige un sobre al azar, ¿cuál es la probabilidad de ganar un peluche gigante? **(1.5 puntos)**

b) Si al elegir un sobre, sin poder ver el color, el premio no fue el peluche gigante y tampoco tenía «siga jugando», ¿cuál es la probabilidad de que el sobre haya sido verde? **(1 punto)**

Solución:

Pregunta 4. Opción A.

a) Si denotamos por P el suceso «peluche gigante», por R el suceso «sobre rojo» y por V el suceso «sobre verde», se tiene que:

$$P(P/R) = \frac{2}{40} = 0.05 \quad P(P/V) = \frac{3}{30} = 0.1$$

de modo que es más probable ganar un peluche gigante si se elige un sobre verde. Por otra parte, aplicando el teorema de la probabilidad total,

$$P(P) = P(R) \cdot P(P/R) + P(V) \cdot P(P/V) = \frac{4}{7} \cdot 0.05 + \frac{3}{7} \cdot 0.1 = 0.0714,$$

de modo que la probabilidad de ganar un peluche gigante es 0.0714.
Esta pregunta se puede resolver más rápidamente observando que si en sobres rojos hay 2 peluches y en sobres verdes hay 3, en total hay 5 peluches gigantes. Así,

$$P(P) = \frac{5}{70} = 0.0714.$$

b) Si denotamos por O el suceso «otro premio», es decir, un premio que no sea ni un peluche gigante, ni «siga jugando», se tiene que de los 40 sobres rojos, 8 tienen «otro premio». De los 30 sobres verdes, 4 tienen «otro premio». Empleando el teorema de Bayes, se tiene que la probabilidad de que el sobre sea verde si el premio ha sido «otro» es

$$P(V/O) = \frac{P(V) \cdot P(O/V)}{P(O)}$$

Se tiene que

$$P(O) = P(R) \cdot P(O/R) + P(V) \cdot P(O/V) = \frac{4}{7} \cdot \frac{8}{40} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{30} = \frac{6}{35}$$

Por tanto,

$$P(V/O) = \frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{30}}{\frac{6}{35}} = \frac{1}{3}$$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	SJ	P	O	
R	30	2	8	40
V	23	3	4	30

BY NC SA

Problema 4B

Pregunta 4. Opción B. El 80 % de las personas que trabajan en un parque de atracciones son menores de 30 años. De ellas, el 60 % combinan este trabajo con estudios. De las 200 personas que trabajan en el parque, hay 120 personas que compaginan el trabajo con los estudios.

a) ¿Cuántas personas de las que trabajan en el parque tienen menos de 30 años y no estudian? **(1 punto)**

b) Si se elige una persona al azar de entre las que compaginan trabajo y estudios, ¿qué probabilidad hay de que tenga menos de 30 años? **(1 punto)**

c) ¿Es independiente, entre el personal de la empresa, estudiar y ser menor de 30 años? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Solución:

Pregunta 4. Opción B. Denotaremos E el suceso «persona empleada que estudia» y por M el suceso «persona empleada menor de 30 años». Entonces, si se elige un empleado al azar, la información del enunciado se puede traducir como:

$$P(M) = 0.8 \quad P(E/M) = 0.6 \quad P(E) = \tfrac{120}{200} = 0.6$$

a) Aplicando la definición de probabilidad condicionada y la probabilidad del suceso contrario llegamos a que:

$$P(M \cap \overline{E}) = P(\overline{E}/M) \cdot P(M) = (1 - P(E/M))P(M) = (1 - 0.6)0.8 = 0.32\,.$$

Puesto que hay 200 personas empleadas, el 32 % se corresponde con 64 personas que tienen menos de 30 años y no estudian.

b) La probabilidad pedida se corresponde con P(M/E). Podemos aplicar el teorema de Bayes o la definición de probabilidad condicionada para deducir que:

$$P(M/E) = \frac{P(E/M) \cdot P(M)}{P(E)} = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.6} = 0.8\,.$$

c) Se trata de comprobar la independencia entre los sucesos E y M. Si fueran independientes, debería cumplirse que:

$$P(E/M) = P(E)$$

y en este caso podemos comprobar que:

$$P(E/M) = 0.6 = P(E)$$

por lo que serían independientes. Alternativamente, podríamos comprobar que

$$P(E \cap M) = P(E) \cdot P(M)$$

y se comprueba que:

$$P(E \cap M) = P(E/M) \cdot P(M) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48 = 0.6 \cdot 0.8 = P(E) \cdot P(M)\,.$$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	M	$\overline{M}$	
E	96	24	120
$\overline{E}$	64	16	80
	160	40	200

Problema 5A

Pregunta 5. Opción A.* El gasto por visitante en una atracción se puede asumir que sigue distribución normal con desviación 8 euros.

a) ¿Cuál es el tamaño de muestra n mínimo para estimar el gasto medio por visitante en esta atracción mediante un intervalo de confianza al nivel de confianza del 90 % con un error de estimación inferior a 2 €? Si, con el mismo nivel de confianza, se quisiese obtener un intervalo con menos error, ¿habría que aumentar o reducir el tamaño muestral mínimo obtenido? **(1 punto)**

b) Para una muestra de n visitantes se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza al 95 % de confianza (en euros) para el gasto medio por visitante: (11.0947 , 12.9053) ¿Cuál fue el gasto medio por visitante en esa muestra? ¿Cuál fue el tamaño muestral n considerado? ¿Cuál es el error de estimación en este caso? **(0.5 puntos)**

c) Partiendo del intervalo del apartado b), empareja las situaciones y los intervalos siguientes y justifica tu elección. **(1 punto)**

(i) Intervalo a partir de la misma muestra pero a un nivel de confianza mayor	(A) (10.0947 , 11.9053)
(ii) Intervalo con la misma media muestral y nivel de confianza, pero obtenido a partir de una muestra de mayor tamaño	(B) (10.9238 , 13.0762)
(iii) Intervalo con nivel de confianza obtenido a partir de una muestra con el mismo tamaño pero con una media muestral diferente	(C) (11.216 , 12.784)

Solución:

Pregunta 5. Opción A.

a) A partir de la expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida que se proporciona en el enunciado, en este caso se tiene que: $\sigma = 8$ y como el nivel de confianza es del 90 %, entonces $z_{\alpha/2} = 1.64$

Por lo tanto, el error de estimación sería:

$$e = 1.64\frac{8}{\sqrt{n}}$$

Como queremos que sea, como máximo 2, debemos hacer:

$$2 \geq 1.64\frac{8}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n \geq \left(1.64\frac{8}{2}\right)^2 = 43.0336$$

y, así, el tamaño muestral mínimo para el que se cumple esta condición es n = 44.

Si, con el mismo nivel de confianza, queremos obtener un intervalo con menos error, habrá que aumentar el tamaño obtenido, ya que, al incrementarse la n en la expresión:

$$e = 1.64\frac{8}{\sqrt{n}}$$

se reducirá el error de estimación.

b) A partir del intervalo numérico (11.0947 , 12.9053) y de la expresión general del intervalo $\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, identificamos el gasto medio como el punto medio del intervalo, es decir:

$$\bar{x} = \frac{11.0947 + 12.9053}{2} = 12\,€.$$

El error de estimación es la semiamplitud del intervalo, por lo tanto:

$$e = \frac{12.9053 - 11.0947}{2} = 0.9053.$$

Como el intervalo se determinó con una confianza del 95 %, el valor $z_{\alpha/2} = 1.96$ y, en consecuencia, el tamaño muestral utilizado fue, aproximadamente:

$$n = \left(1.96\frac{8}{0.9053}\right)^2 \approx 299.99 \approx 300.$$

c) Si el intervalo se calculó a partir de la misma muestra, pero con mayor nivel de confianza (situación (i)) debe estar centrado en 12, por lo que podemos desechar el intervalo (A). Como tiene más confianza, debe ser más amplio que (11.0947 , 12.9053), lo que solo ocurre con el intervalo (B). Además, se puede comprobar que la confianza de (10.9238 , 13.0762) es, aproximadamente, del 98 %.

Si seguimos examinando la situación (ii), en este caso, la media muestral es la misma, por lo que también desecharíamos (A). Además, el nivel de confianza es el mismo pero el tamaño muestral es mayor, lo

que obliga a que el intervalo obtenido sea menos amplio que (11.0947 , 12.9053), lo que solo ocurre con el intervalo (C). Adicionalmente, se puede verificar que el tamaño de muestra a partir del que se obtuvo (11.216 , 12.784) es de n = 400.

La situación (iii), con distinta media muestral, necesariamente se corresponde con (A), por descarte. Se puede comprobar, además, que se verifica que la media muestral es 11.

Problema 5B

Pregunta 5. Opción B.* Para estimar el porcentaje de visitantes que realiza alguna compra en la tienda de un parque de atracciones se tomaron dos muestras del mismo tamaño n. En la primera muestra se obtuvo una proporción muestral (de visitantes que compran en la tienda) de 0.7 y, a partir de ella, se construyeron dos intervalos de confianza para la proporción poblacional de visitantes que realizan alguna compra en la tienda, uno al 90 % y otro al 95 %. A partir de la segunda muestra se obtuvo un tercer intervalo al 95 % de confianza. Los tres intervalos obtenidos (no necesariamente por este orden) fueron: (0.6102 , 0.7898), (0.5565 , 0.7435) y (0.6248 , 0.7752).

a) Razona qué dos intervalos de estos tres corresponden a la primera muestra. ¿Cuál de esos dos es el correspondiente al 90 % de confianza? **(1.5 puntos)**

b) Respecto a la segunda muestra, teniendo en cuenta el intervalo obtenido, ¿cuál fue el tamaño muestral n?¿Cuál fue el número de visitantes en esa muestra que realizó alguna compra en la tienda? **(1 punto)**

Solución:

Pregunta 5. Opción B.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1).

a) Los dos intervalos que correspondan a la misma muestra deben tener el mismo punto medio, que es la proporción muestral. Para los tres intervalos dados, los puntos medios y los errores de estimación son:

$$\begin{aligned}(0.6102, 0.7898) &\to \hat{p} = 0.7 \quad e = 0.0898\\ (0.5565, 0.7435) &\to \hat{p} = 0.65 \quad e = 0.0935\\ (0.6248, 0.7752) &\to \hat{p} = 0.7 \quad e = 0.0752\end{aligned}$$

Por tanto los que corresponden a la misma muestra deben ser el primero y el tercero.

Por otra parte, si uno es al 90 % de confianza y otro al 95 % de confianza, el correspondiente al 90 % de confianza debe ser menos amplio (menor confianza permite mayor precisión en la estimación, es decir, menor error). Por tanto, el intervalo correspondiente al 90 % de confianza es el tercero: (0.6248 , 0.7752).

b) El intervalo obtenido a partir de la segunda muestra debe ser el segundo, (0.5565 , 0.7435), que es el que se obtiene a partir de una proporción muestral diferente, $\hat{p} = 0.65$, como ya se razonó arriba.
Para obtener el tamaño muestral,

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \longrightarrow \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 p(1-p)$$

Si el nivel de confianza es el 95 %, se tiene que $z_{\alpha/2} = 1.96$. Además, $e = 0.0935$ y $\hat{p} = 0.65$. Entonces, $n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 p(1-p) = \left(\frac{1.96}{0.0935}\right)^2 0.65(1-0.65) \approx 99.97$. De modo que el tamaño muestral fue $n = 100$.

Por consiguiente, el número de personas en esa muestra que realizó compras fue de:

$$n\hat{p} = 100 \cdot 0.65 = 65 \text{ personas.}$$

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

- Responda en el pliego en blanco a **una opción** (A o B) de **cuatro** de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Opción A. Dada la función $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que $F(1) = 2$. **(0.5 puntos)**

b) ¿Qué valor toma f en $x = 0$? Estudia la monotonía de f en $x = 0$. Determina un intervalo del dominio en el que f tome valores tanto positivos como negativos. ¿A partir de qué valor f decrece indefinidamente? Calcula el área limitada por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$. **(2 puntos)**

Pregunta 1. Opción B.

Una empresa vende 5000 kg de su producto cuando el precio por kg es de 500 euros. Si el precio aumenta y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida disminuye en $10(x - 500)$ kg. Si el precio baja y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida aumenta en $10(500 - x)$ kg.

a) Determina la expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x). **(1 punto)**

b) ¿Cuál debe ser el precio por kg del producto para que las ventas sean máximas? ¿Qué valor tendrían, en ese caso, las ventas? ¿Qué rango de valores del precio por kg del producto tiene sentido, es decir, da lugar a ventas positivas? **(1.5 puntos)**

Problema 2:

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras.

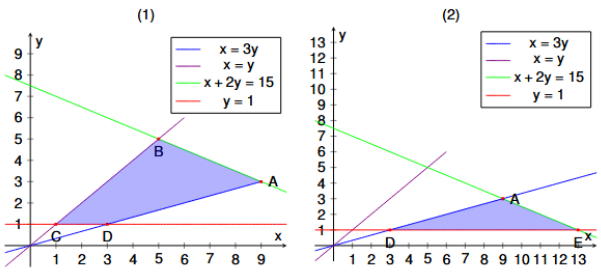
a) Determina cuántos rectángulos habrá en la figura número 13. Encuentra una fórmula general que relacione el número de figura con el número de rectángulos, y explica cómo has llegado a ella, dejando claro qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: «con n represento el número de figura»). **(2 puntos)**

b) Encuentra un número «x» mayor que 300 para el que exista una figura que tenga exactamente «x» rectángulos. ¿Qué número de figura sería? **(0.5 puntos)**

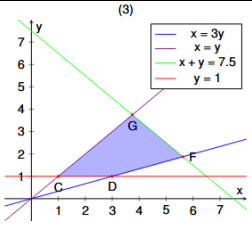
Pregunta 2. Opción B. Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

a) ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**

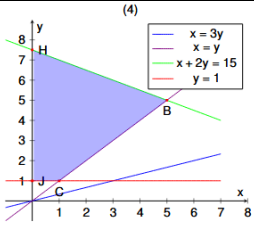
b) Si llamamos «x» al número de sesiones de tipo A e «y» al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las posibles soluciones a la pregunta *¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta?* **(1.5 puntos)**



(3)



(4)



c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

Problema 3:

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema de ecuaciones siguiente, con incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10+m)y = 150 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m el sistema tiene una única solución? **(1.5 puntos)**

b) Si el sistema fuera:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10+m)y = 150 \end{cases}$$

encuentra el valor de m y un valor de λ para los que el sistema tenga infinitas soluciones y calcula una de ellas. **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Si A · B · C + D = E, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. **(1.5 puntos)**

b) Indica un valor de m para el cual el sistema no tenga solución y explica por qué. **(1 punto)**

Problema 4:

Pregunta 4. Opción A. El 70 % de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local. El resto, del equipo visitante. Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30 % de los aficionados del equipo local y el 60 % de los aficionados del equipo visitante compraron su entrada por internet.

a) Elegido un asistente al partido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que comprase su entrada por internet? **(1.5 puntos)**

b) Elegido al azar un asistente entre los que compraron su entrada en taquilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea del equipo visitante? **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3 % del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30 % de todos los bolsos fabricados eran de tipo A; el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además se sabe que el 3 % de los de tipo A y el 5 % de los de tipo C salieron defectuosos.

a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.5 puntos)**

b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿es más probable que sea de tipo A o de tipo B? **(1 punto)**

Problema 5:

Pregunta 5. Opción A.* El peso de los yogures de cierta marca sigue distribución normal con desviación típica 2.7 g.

a) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 g y un nivel de confianza del 95 %? **(1 punto)**

b) Para verificar si el peso medio es realmente el que indica el envase, un cliente pesa 100 yogures obteniendo para ellos un peso medio de 148.5 g. De entre los siguientes intervalos, ¿cuál es imposible que sea un intervalo de confianza construido a partir de esta muestra para el peso medio de los yogures? De los tres restantes, ¿cuál tiene un mayor nivel de confianza y cuál es, en ese caso, el nivel? **(1.5 puntos)**

(1) (147.971, 149.029)

(2) (147.871, 149.129)

(3) (149, 371, 150, 629)

(4) (148.057, 148.943)

Pregunta 5. Opción B.* Un banco quiere estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet.

a) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 99 %. **(1 punto)**

b) A partir de una muestra aleatoria de 600 clientes se construyó un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95 % para estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet. El intervalo resultante fue (0.395, 0.475). ¿Cuántos clientes, de los 600 de la muestra, realizaron todas sus gestiones por internet? **(1 punto)**

c) Según el intervalo de confianza del apartado anterior, ¿tiene sentido pensar que la verdadera proporción de clientes en la población que realizan todas sus gestiones por internet sea 0.5? Responde intentando medir o estimar de alguna forma cuánto te fías de tu razonamiento. **(0.5 puntos)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Opción A. Dada la función $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que $F(1) = 2$. **(0.5 puntos)**

b) ¿Qué valor toma f en $x = 0$? Estudia la monotonía de f en $x = 0$. Determina un intervalo del dominio en el que f tome valores tanto positivos como negativos. ¿A partir de qué valor f decrece indefinidamente? Calcula el área limitada por la función f y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$. **(2 puntos)**

Pregunta 1. Opción B.

Una empresa vende 5000 kg de su producto cuando el precio por kg es de 500 euros. Si el precio aumenta y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida disminuye en $10(x - 500)$ kg. Si el precio baja y pasa a ser x euros por kg, la cantidad vendida aumenta en $10(500 - x)$ kg.

a) Determina la expresión de la función f que representa las ventas (en euros) de la compañía en función del precio por kg del producto (x). **(1 punto)**

b) ¿Cuál debe ser el precio por kg del producto para que las ventas sean máximas? ¿Qué valor tendrían, en ese caso, las ventas? ¿Qué rango de valores del precio por kg del producto tiene sentido, es decir, da lugar a ventas positivas? **(1.5 puntos)**

Solución 1A:

Pregunta 1. Opción A.

a) $F(x) = \int f(x)dx = \int(-x^3 - x^2 + 2x)dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + C$.
De aquí, $F(1) = 2$ equivale a $-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + C = 2$, de donde $\frac{5}{12} + C = 2$. De modo que $C = \frac{19}{12}$ y $F(x) = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{19}{12}$.

b) Se puede factorizar fácilmente $f(x) = -x(x-1)(x+2)$, de modo que f corta al eje X en los puntos -2, 0 y 1. Por lo tanto, en $x = 0$ sabemos que $f(0) = 0$, la función pasa por el origen de coordenadas. Como se trata de una función polinómica podemos comprobar el signo en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$ y, fácilmente, se comprueba que la función es positiva en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 1)$ y negativa en $(-2, 0)$ y en $(1, \infty)$. Así un intervalo donde la función toma valores tanto positivos como negativos podría ser, por ejemplo, cualquiera del tipo (a, b), donde $a \subset (-\infty, -2), b \subset (-2, 0)$, o bien $a \subset (-2, 0), b \subset (0, 1)$ o bien $a \subset (0, 1), b \subset (1, \infty)$.

Para saber a partir de qué valor la función decrece indefinidamente tenemos que estudiar la monotonía. $f'(x) = -3x^2 - 2x + 2$, que se anula en los puntos $\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ y $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$. La segunda derivada es $f''(x) = -6x - 2$. Puesto que $f''\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) > 0$, la función alcanza un mínimo relativo en $x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \approx -1.215$ y $f(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}) \approx -2.1126$. Por otra parte, $f''\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right) < 0$, la función alcanza un máximo relativo en $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \approx 0.5486$ y $f(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}) \approx 0.6313$. Por lo tanto, el máximo relativo lo tiene en $x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ y, a partir de ese valor, decrece indefinidamente.

También podríamos analizar la curvatura, aunque a los efectos del cálculo del área no es relevante. Solo tenemos que tener en cuenta que en $(-1, 0)$ la función es negativa y en $(0, 1)$ es positiva, por lo que el área que hay calcular es la que corresponde a la figura **??**.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 1$ es igual a:

$$\left|\int_{-1}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right| = |F(0) - F(-1)| + |F(1) - F(0)| = \left|\frac{19}{12} - \frac{32}{12}\right| + \left|2 - \frac{19}{12}\right| = \frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \frac{3}{2}.$$

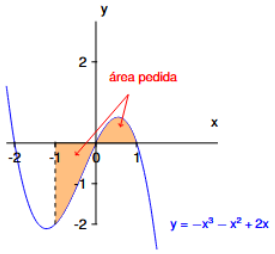


Figura 1: Representación gráfica de f.

Solución 1B:

Pregunta 1. Opción B.

a) Los ingresos por venta se obtienen como resultado de multiplicar la cantidad (en kg) de producto vendido por su precio por kilogramo, es decir, la cantidad (en kg) de producto vendido por x. Además sabemos por el enunciado que la cantidad (en kg) de producto vendido es:

$$\begin{cases} 5000 - 10(x - 500) & \text{si } x > 500 \\ 5000 + 10(500 - x) & \text{si } x < 500 \end{cases} = 10\,000 - 10x \quad \text{si } x = 500 \; 5000$$

Así pues, para la expresión de los ingresos por ventas, se multiplica el producto vendido por x:

$$f(x) = (10\,000 - 10x)x = 10\,000x - 10x^2$$

b) Puesto que $f'(x) = 10\,0000 - 20x = 0 \Leftrightarrow x = 500$ y $f''(x) = -20 < 0$, f es cóncava hacia abajo, creciente en $(-\infty, 500)$, decreciente en $(500, \infty)$ y tiene un máximo en $x = 500$. Con lo cual, los ingresos por ventas son máximos cuando el precio es de 500 €y tales ingresos ascienden a $f(500) = 10\,000 \cdot 50 - 10(500)^2 = 2\,500\,000$ €.

Los ingresos por ventas son positivos si $f(x) > 0$. Como $f(x) = x(10\,000 - 10x)$ se tiene $f(x) > 0$ si, y sólo si, $x > 0$ y $x < 1000$ o bien $x < 0$ y $x > 1000$ (lo cual es imposible). Con lo que los ingresos por ventas son positivos si el precio está entre 0 y 1000 euros.

Pregunta 2.

Pregunta 2. Opción A. Observa la siguiente secuencia de figuras.

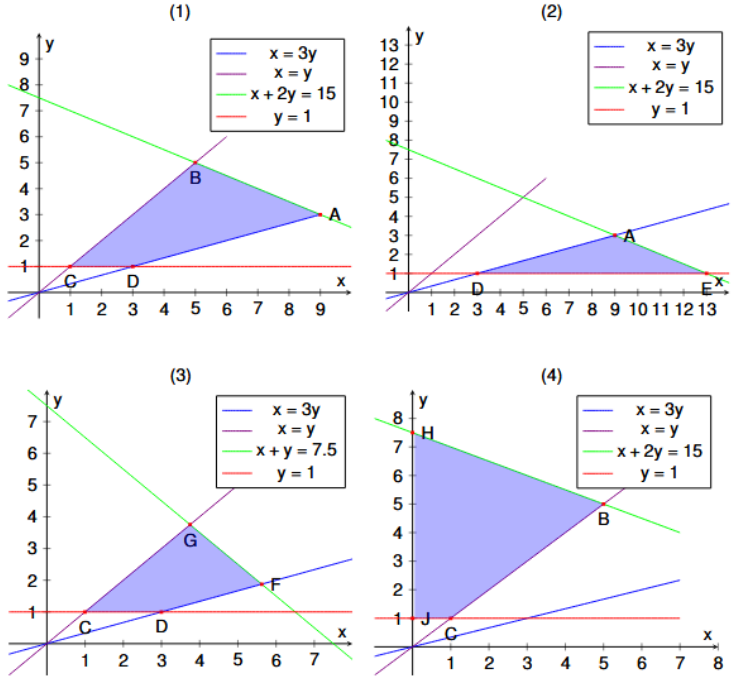
a) Determina cuántos rectángulos habrá en la figura número 13. Encuentra una fórmula general que relacione el número de figura con el número de rectángulos, y explica cómo has llegado a ella, dejando claro qué representa cada símbolo que uses (por ejemplo: «con n represento el número de figura»). **(2 puntos)**

b) Encuentra un número «x» mayor que 300 para el que exista una figura que tenga exactamente «x» rectángulos. ¿Qué número de figura sería? **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. Un terapeuta organiza el tiempo diario que dedica a tratar pacientes en sesiones de tipo A, que duran 30 minutos, y sesiones de tipo B, que duran 60 minutos. En total dedica, a lo sumo, 7 horas y media diarias a tratar pacientes y al menos una sesión al día siempre es de tipo B. Además, quiere tener al menos tantas sesiones diarias de tipo A como de tipo B y también quiere que el número de sesiones de tipo A sea, a lo sumo, el triple que el número de las de tipo B.

a) ¿Puede dar en un día 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B? **(0.5 puntos)**

b) Si llamamos «x» al número de sesiones de tipo A e «y» al número de sesiones de tipo B que hace el terapeuta, explica cuál de las siguientes representaciones se corresponde con las posibles soluciones a la pregunta *¿Cuántas sesiones de cada tipo puede programar el terapeuta?* **(1.5 puntos)**



c) Si por las sesiones de tipo B cobra el triple que por las sesiones de tipo A, ¿cuántas sesiones de cada tipo hacen máximo el beneficio diario? **(0.5 puntos)**

Solución 2A:

Pregunta 2. Opción A.

a) Se observa con facilidad que en cada figura se añade una fila con un número impar consecutivo de rectángulos, comenzando con 1 + 3 en la figura 1, 1 + 3 + 5 en la figura 2 y así, sucesivamente, por lo tanto, en la figura 13 habría: 1 + 3 + 5 + ... + 25 + 27 = 196. Alternativamente (y, quizá, de manera más sencilla) se puede observar geométricamente el patrón y, como se muestra en la figura **??**, parte de los rectángulos se pueden cambiar de posición para configurar una disposición en forma de número cuadrado.

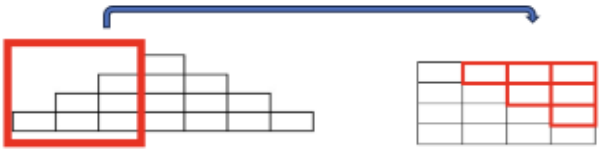


Figura 2: Identificación del patrón cuadrado.

De este modo, el patrón es más fácil de identificar puesto que la figura número n tendría $(n+1)^2$ rectángulos.

Así, para 13, habría $14^2 = 196$ rectángulos.

También se podría determinar el patrón observando que se suman los primeros impares consecutivos (comenzando por 3) y, por lo tanto, aplicando la fórmula de la suma de los términos de una sucesión aritmética. Como en la figura n llegamos a sumar el valor $2n + 1$ (en la figura 1 se suman $1 + 3$, en la figura 2 $1 + 3 + 5$, etc.), podemos hacer:

$$S_n = \frac{(1 + (2n + 1))(n + 1)}{2} = \frac{(2n + 2)(n + 1)}{2} = (n + 1)^2 .$$

b) Sería suficiente con encontrar un número «x» mayor que 300 que sea cuadrado perfecto de un natural. Por ejemplo, $x = 400 = 20^2$, y se correspondería con el número de rectángulos en la figura 19.

Solución 2B:

Pregunta 2. Opción B.

a) No puede planificar 8 sesiones de tipo A y 5 de tipo B porque excedería las horas diarias: $30 \cdot 8 + 60 \cdot 5 = 540 \not\leq 450$.

b) Si representamos por x e y el número de sesiones de tipo A y B, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 30x + 60y \leq 450 \\ y \geq 1 \\ x \geq y \\ x \leq 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 15 \\ y \geq 1 \\ x - y \geq 0 \\ x - 3y \leq 0 \end{cases}$$

Por ello, la región factible que se identifica con estas restricciones es la que se muestra en la figura **??**, que se corresponde con la (1) en el enunciado del examen. Los extremos de dicho recinto son los puntos $A = (9, 3)$, $B = (5, 5)$, $C = (1, 1)$ y $D = (3, 1)$.

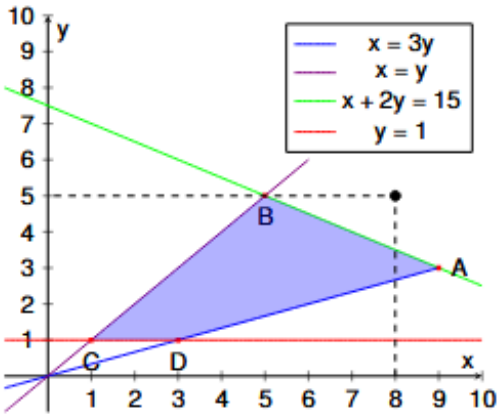


Figura 3: Región factible.

c) Si llamamos p al precio de las sesiones de tipo A, entonces el precio de las de tipo B es 3p, así la función a maximizar es $z(x, y) = px + 3py$. Queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z(A) = 9p + 9p = 18p \text{ euros}$$
$$z(B) = 5p + 15p = 20p \text{ euros}$$
$$z(C) = p + 3p = 4p \text{ euros}$$
$$z(D) = 3p + 3p = 6p \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si en el día planea 5 sesiones de tipo A y 5 de tipo B.

Pregunta 3.

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema de ecuaciones siguiente, con incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x - y = -m \\ 10x + (10+m)y = 150 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores del parámetro m el sistema tiene una única solución? **(1.5 puntos)**

b) Si el sistema fuera:

$$\begin{cases} x - y = -\lambda \\ 10x + (10+m)y = 150 \end{cases}$$

encuentra el valor de m y un valor de λ para los que el sistema tenga infinitas soluciones y calcula una de ellas. **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción B. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Si $A \cdot B \cdot C + D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m. **(1.5 puntos)**

b) Indica un valor de m para el cual el sistema no tenga solución y explica por qué. **(1 punto)**

Solución3A

Pregunta 3. Opción A.

a) Para determinar un valor de m para el cual el sistema tiene única solución, debemos estudiar cuándo, según los valores de m, el sistema es compatible y determinado. La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -m \\ 10 & 10+m & 150 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -m \\ 0 & 20+m & 150+10m \end{array}\right)$$

Como $20 + m = 0 \Leftrightarrow m = -20$ se tiene que si $m = -20$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid -50)$, con lo que el sistema es incompatible, pero para cualquier valor $m \neq -20$, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 10+m \end{vmatrix} = 10 + m + 10 = 0 \Longleftrightarrow m = -20$$

se tiene que:

- Para $m = -20$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 10 & 150 \end{vmatrix} = -50 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

concluimos que el sistema es incompatible.

- Para $m \neq -20$, el sistema es compatible y determinado, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A′) = nº incógnitas.

Por lo tanto, para cualquier valor $m \neq -20$ el sistema tiene solución es única.

b) Aprovechando el estudio que hemos hecho en el apartado anterior, si $m = -20$, tenemos que ran(A) = 1, siendo ran(A) = 2 en el resto de los casos, independientemente de los valores λ. Como el sistema es de dos ecuaciones con dos incógnitas, la única forma de que haya infinitas soluciones es que $m = -20$ y λ tome un valor que haga ran(A′) = 1. Como:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -\lambda \\ 10 & -10 & 150 \end{array}\right),$$

esto sucederá cuando $\lambda = -15$.

En ese caso, las soluciones serán de la forma $x - y = -\lambda \leftrightarrow x - y = 15$, por lo tanto cualquier punto que verifique $y = x - 15$ sería solución, por ejemplo, $(x, y) = (15, 0)$.

Solución 3B:

Pregunta 3. Opción B.

a) Puesto que:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} m & 3 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3mx + (3-2m)y \\ 2mx + 2y \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, $A \cdot B \cdot C + D = E$ equivale a $A \cdot B \cdot C = E - D$

$$E - D = \begin{pmatrix} 2m \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$$

con lo que el sistema se puede escribir como:

$$\begin{cases} 3mx + (3-2m)y = m \\ 2mx + 2y = 1 \end{cases}$$

b) Para encontrar un valor de m que haga que el sistema no tenga solución, debemos determinar qué valores de m lo hacen incompatible. Puede ser, por ejemplo, aplicando:

- **Gauss**.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3m & 3-2m & m \\ 2m & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3m & 3-2m & m \\ 0 & 4m & 3-2m \end{array}\right)$$

Como $4m = 0 \Leftrightarrow m = 0$, se tiene que:

- Si $m = 0$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid 3)$, con lo que el sistema es incompatible.
- En otro caso, si $m \neq 0$, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3m & 3-2m \\ 2m & 2f \end{vmatrix} = 4m^2 = 0 \Longleftrightarrow m = 0$$

se tiene que:

- Para $m = 0$, como:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

por lo que el sistema es incompatible.

- Para $m \neq 0$, el sistema es compatible y determinado, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A') = nº incógnitas.

Así pues, el único valor de m para el que el sistema no tiene solución es $m = 0$.

Pregunta 4.

Pregunta 4. Opción A. El 70 % de los asistentes a un partido de fútbol son aficionados del equipo local. El resto, del equipo visitante. Las entradas solo se pueden comprar por internet o en taquilla. El 30 % de los aficionados del equipo local y el 60 % de los aficionados del equipo visitante compraron su entrada por internet.

a) Elegido un asistente al partido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que comprase su entrada por internet? **(1.5 puntos)**
b) Elegido al azar un asistente entre los que compraron su entrada en taquilla, ¿cuál es la probabilidad de que sea del equipo visitante? **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3 % del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30 % de todos los bolsos fabricados eran de tipo A; el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además se sabe que el 3 % de los de tipo A y el 5 % de los de tipo C salieron defectuosos.

a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.5 puntos)**
b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿es más probable que sea de tipo A o de tipo B? **(1 punto)**

Solución 4A:

Pregunta 4. Opción A. Si denotamos por L el suceso «aficionado del equipo local» y por I el suceso «compra por internet», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(L) = 0.7 \qquad P(I/L) = 0.3 \qquad P(I/\bar{L}) = 0.6$$

y con esto,

a) la probabilidad pedida es:

$$P(I) = P(L)P(I/L) + P(\bar{L})P(I/\bar{L}) = 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.6 = 0.39.$$

b) la probabilidad pedida es:

$$P(\bar{L}/\bar{I}) = \frac{P(\bar{L})P(\bar{I}/\bar{L})}{P(\bar{I})},$$

donde

$P(\bar{L}) = 1 - P(L) = 0.3$

$P(\bar{I}/\bar{L}) = 1 - P(I/\bar{L}) = 1 - 0.6 = 0.4.$

$P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0.39 = 0.61.$

De modo que:

$$P(\bar{L}/\bar{I}) = \frac{P(\bar{L})P(\bar{I}/\bar{L})}{P(\bar{I})} = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.61} \approx 0.1967.$$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	I	$\bar{I}$	
L	0.21	0.49	0.7
$\bar{L}$	0.18	0.12	0.3
	0.39	0.61	1

Solución 4B:

Pregunta 4. Opción B. Si denotamos por A, B y C los sucesos «bolso de tipo A», «bolso de tipo B» y «bolso de tipo C», respectivamente y denotamos por D el suceso «bolso defectuoso», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(D) = 0.03$$
$$P(A) = 0.3 \quad P(D/A) = 0.03$$
$$P(B) = 0.35$$
$$P(C) = 0.35 \quad P(D/C) = 0.05$$

a) Se pide P(D/B). Se puede usar el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$$

Sustituyendo, $0.03 = 0.3 \cdot 0.03 + 0.35 \cdot P(D/B) + 0.35 \cdot 0.05$ y despejando se obtiene:

$$P(D/B) = \frac{0.03 - 0.009 - 0.0175}{0.35} = 0.01\,.$$

b) Tenemos que determinar si es mayor P(A/D) o P(B/D). En el primer caso:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.03}{0.03} \approx 0.3$$

y en el segundo caso:

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B)P(D/B)}{P(D)} = \frac{0.35 \cdot 0.01}{0.03} \approx 0.1167$$

Por lo tanto, es más probable que el bolso defectuoso elegido al azar sea del tipo A.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	A	B	C	
D	0.009	0.0035	0.0175	0.03
$\overline{D}$	0.291	0.3465	0.3325	0.97
	0.3	0.35	0.35	1

Pregunta 5:

Pregunta 5. Opción A.* El peso de los yogures de cierta marca sigue distribución normal con desviación típica 2.7 g.

a) ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero peso medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.5 g y un nivel de confianza del 95 %? **(1 punto)**

b) Para verificar si el peso medio es realmente el que indica el envase, un cliente pesa 100 yogures obteniendo para ellos un peso medio de 148.5 g. De entre los siguientes intervalos, ¿cuál es imposible que sea un intervalo de confianza construido a partir de esta muestra para el peso medio de los yogures? De los tres restantes, ¿cuál tiene un mayor nivel de confianza y cuál es, en ese caso, el nivel? **(1.5 puntos)**

(1) (147.971, 149.029)

(2) (147.871, 149.129)

(3) (149, 371, 150, 629)

(4) (148.057, 148.943)

Pregunta 5. Opción B.* Un banco quiere estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet.

a) Determina el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 99 %. **(1 punto)**

b) A partir de una muestra aleatoria de 600 clientes se construyó un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95 % para estimar la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet. El intervalo resultante fue (0.395, 0.475). ¿Cuántos clientes, de los 600 de la muestra, realizaron todas sus gestiones por internet? **(1 punto)**

c) Según el intervalo de confianza del apartado anterior, ¿tiene sentido pensar que la verdadera proporción de clientes en la población que realizan todas sus gestiones por internet sea 0.5? Responde intentando medir o estimar de alguna forma cuánto te fías de tu razonamiento. **(0.5 puntos)**

Solución 5A:

Pregunta 5. Opción A. Si denotamos por X la v.a. «peso (en gramos) de un yogur», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 2.7$ g, es decir, $X \rightarrow N(\mu, 2.7)$.

a) Una vez fijados el error máximo de estimación ϵ y el nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, si se considera que la variable en estudio sigue una distribución normal con desviación típica conocida, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\epsilon}\right)^2$$

Así, puesto que la mitad de la amplitud del intervalo debe ser, como mucho 0.5 g, se tiene que $\epsilon \leq 0.5$ y, por otro lado, como $1-\alpha = 0.95$ se tiene que $z_{\alpha/2} = 1.96$. De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1.96\frac{2.7}{0.5}\right)^2 = 112.02$$

con lo que el tamaño mínimo muestral para cumplir las condiciones será de 113 yogures.

b) Ahora, para la v.a. X tenemos una muestra aleatoria de tamaño n = 100 con media muestral $\overline{x} = 148.5$ g. Por lo tanto, cualquier intervalo de confianza (con independencia del nivel de confianza) para μ a partir de esta muestra debe estar centrado en el valor $\overline{x} = 148.5$. Así, podemos descartar fácilmente el intervalo (3), que es imposible que se haya construido a partir de esta muestra.

Además, sin necesidad de operaciones adicionales, el de mayor nivel de confianza de los tres intervalos restantes será aquel que tenga una mayor amplitud, es decir, el (2), con amplitud 1.258. En ese caso, a partir de la expresión del intervalo al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

tenemos que la semiamplitud es:

$$2\cdot z_{\alpha/2}\frac{2.7}{\sqrt{100}} = 1.258$$

de donde se deduce que $z_{\alpha/2} = 2.3296 \approx 2.33$, por lo que el nivel de confianza para este intervalo es del 99 % ya que F(2.33) = 0.99.

Solución 5B:

Pregunta 5. Opción B. Llamamos p a la proporción de clientes del banco que realizan todas sus gestiones por internet. Este valor es desconocido.

a) Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon} \right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0.05$,
- p representa la proporción poblacional, que es un valor desconocido. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es p = 0.5 y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.99$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.995$, con lo que $z_{\alpha/2} = 2.58$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(2.58 \frac{\sqrt{0.5(1-0.5)}}{0.05} \right)^2 = 665.64$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 666 clientes.

b) Puesto que el intervalo se construye a partir de la muestra de tamaño n = 600, estará centrado en el valor $\hat{p}$ que representa la proporción de clientes que realizan todas sus gestiones por internet en la muestra. Así, si denotamos por c el número de clientes que, en la muestra, realiza sus gestiones por internet, tenemos que:

$$\frac{0.475 + 0.395}{2} = \hat{p} = \frac{c}{600} \Leftrightarrow c = 0.435 \cdot 600 = 261 .$$

Por lo tanto, 261 personas de la muestra realizaron sus gestiones por internet.

c) El intervalo anterior, al 95 % de confianza, tiene su extremo superior en 0.475, aún bastante por debajo de 0.5. Esto nos lleva a pensar que una verdadera proporción de 0.5 en la población no sería muy verosímil. No obstante, hay que tener en cuenta que cuando obtenemos un intervalo de confianza, no podemos afirmar si el valor estimado está dentro o fuera del intervalo, solo podemos decir que el verdadero valor de p se encontraría fuera del intervalo en, aproximadamente, el 5 % de los intervalos construidos así, pero ignoramos si este intervalo está en ese 5 %. Por ello, podemos sospechar, pero con la cautela de que podríamos equivocarnos, que la verdadera p seguramente no será 0.5 sino inferior a ese valor.

El nivel de confianza es el indicador que nos ayuda a decir cuánto nos podemos fiar de este razonamiento que hemos seguido. Es decir, podemos asumir que en el 5 % de los casos que razonemos de esta forma, aproximadamente, nos estaremos equivocando.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de las Islas BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de las Islas Baleares

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Universitat de les Illes Balears – Proves d'accés a la Universitat	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

.

Problema A1:

Problema A1 (obligatori). — A la loteria de Nadal, el número guanyador de la grossa és un únic número de 5 xifres. Tots els números tenen la mateixa probabilitat de resultar guanyadors. Considera els següents esdeveniments:

- A: el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 00000.
- B: el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 72480.
- C: el número guanyador el Nadal de 2026 serà el 72480.

a) Expressa, amb les teves pròpies paraules, què volen dir els dos termes següents: $P(C \mid B)$, i $P(A \cap B)$.

Criteris: No penalitzar si s'expressa en termes d'A i B. **(Total 1 pt)**

b) Calcula $P(C \mid B)$ i $P(A \cap B)$.

Criteris: 0.5 pts per cada càlcul. Penalització amb -0.25 pts si no es justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts si es considera 99999 per al nombre de casos totals, i penalització amb -0.5 pts per qualsevol altre valor incorrecte. **(Total 1 pt)**

Problema A2:

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa de les dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants totals i la quantitat de treballadors per nacionalitat i sexe a Espanya, que són les següents:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

Quantitat d'habitants total.

	Espanyols	Estrangers
Homes	10.8 milions	1.9 milions
Dones	9.6 milions	1.7 milions

Quantitat de treballadors.

a) Escollint un home a l'atzar, quina és la probabilitat que treballi?

Criteris: Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul. **(Total 1 pt)**

b) Escollint un individu a l'atzar, els esdeveniments "ser dona" i "treballar" són independents?

Criteris: 0.25 pts per plantejar, 0.75 pts per calcular. Penalització amb -0.25 pts si no indica en cap càlcul llei de Laplace o casos favorables/casos totals. **(Total 1 pt)**

Problema A3:

Problema A3. — Després d'una formació acadèmica determinada, el temps que tarden els titulats a trobar feina el podem aproximar mitjançant una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional μ desconeguda, i desviació típica $\sigma = 30$ dies. Respecte dels 22 titulats d'enguany, el nombre mitjà de dies que han tardat a trobar feina ha estat de 86.

Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional μ amb un nivell de confiança del 80%.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema B1:

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) És cert que $A = B^{-1}$? És cert que $B = A^{-1}$?

b) Calcula x tal que $Ax = v$.

c) Amb el valor de x de l'apartat anterior, calcula y tal que $B^2y = x$.

Problema B2:

Problema B2. — Per organitzar un esdeveniment social, volem contractar el transport amb una empresa que ens ofereix autocars i minibusos.

- Cada autocar té una capacitat de 50 viatgers i té un preu de 100 €.
- Cada minibús té una capacitat de 30 viatgers i té un preu de 55 €.

Podem contractar tants autocars com vulguem, i fins a 8 minibusos. Per limitacions en el nombre de conductors, només podem contractar 11 vehicles. Si volem assegurar el transport per a almenys 450 persones, quina és la combinació més avantatjosa i quin cost té?

Problema C1:

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Considera la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$, per a $x \in [-1, \infty)$.

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts.

b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 1$. Quin és el valor del seu pendent?

Problema C2:

Problema C2. — En psicologia, la funció següent modela com les persones valoren recompenses en un instant de temps futur, t:

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty),$$

on r és una constant positiva, i t es mesura en dies.

a) Si $r = 0.01$, què val la funció $V(t)$ a $t = 50$?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts per errors de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema A1:

Problema A1 (obligatori). — A la loteria de Nadal, el número guanyador de la grossa és un únic número de 5 xifres. Tots els números tenen la mateixa probabilitat de resultar guanyadors. Considera els següents esdeveniments:

- A: el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 00000.
- B: el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 72480.
- C: el número guanyador el Nadal de 2026 serà el 72480.

a) Expressa, amb les teves pròpies paraules, què volen dir els dos termes següents: $P(C \mid B)$, i $P(A \cap B)$.

Criteris: No penalitzar si s'expressa en termes d'A i B. **(Total 1 pt)**

b) Calcula $P(C \mid B)$ i $P(A \cap B)$.

Criteris: 0.5 pts per cada càlcul. Penalització amb -0.25 pts si no es justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts si es considera 99999 per al nombre de casos totals, i penalització amb -0.5 pts per qualsevol altre valor incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solución A1:

Problema A1 (obligatori). — A la loteria de Nadal, el número guanyador de la grossa és un únic número de 5 xifres. Tots els números tenen la mateixa probabilitat de resultar guanyadors. Considera els següents esdeveniments:

- A: el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 00000.
- B: el número guanyador el Nadal de 2025 serà el 72480.
- C: el número guanyador el Nadal de 2026 serà el 72480.

a) Expressa, amb les teves pròpies paraules, què volen dir els dos termes següents: $P(C \mid B)$, i $P(A \cap B)$.

Criteris: No penalitzar si s'expressa en termes d'A i B. **(Total 1 pt)**

Solució. Els termes són:

- $P(C \mid B)$: Probabilitat que el Nadal de 2026 el número guanyador sigui el 72480, sabent que aquest mateix número també ha estat el guanyador el proper Nadal de 2025.
- $P(A \cap B)$: Probabilitat que el número guanyador el proper Nadal de 2025 sigui el 00000 i també sigui el 72480.

b) Calcula $P(C \mid B)$ i $P(A \cap B)$.

Criteris: 0.5 pts per cada càlcul. Penalització amb -0.25 pts si no es justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts si es considera 99999 per al nombre de casos totals, i penalització amb -0.5 pts per qualsevol altre valor incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solució. En el primer cas, els esdeveniments són independents, així que, per la llei de Laplace,

$$P(C \mid B) = P(C) = \frac{\#\text{ Casos favorables}}{\#\text{ Casos totals}} = \frac{1}{100000} = 0.00001.$$

En el segon cas, els esdeveniments són incompatibles, així que $P(A \cap B) = 0$.

Problema A2:

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa de les dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants totals i la quantitat de treballadors per nacionalitat i sexe a Espanya, que són les següents:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

Quantitat d'habitants total.

	Espanyols	Estrangers
Homes	10.8 milions	1.9 milions
Dones	9.6 milions	1.7 milions

Quantitat de treballadors.

a) Escollint un home a l'atzar, quina és la probabilitat que treballi?

Criteris: Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul. **(Total 1 pt)**

b) Escollint un individu a l'atzar, els esdeveniments "ser dona" i "treballar" són independents?

Criteris: 0.25 pts per plantejar, 0.75 pts per calcular. Penalització amb -0.25 pts si no indica en cap càlcul llei de Laplace o casos favorables/casos totals. **(Total 1 pt)**

Solución A2:

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa de les dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants totals i la quantitat de treballadors per nacionalitat i sexe a Espanya, que són les següents:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

Quantitat d'habitants total.

	Espanyols	Estrangers
Homes	10.8 milions	1.9 milions
Dones	9.6 milions	1.7 milions

Quantitat de treballadors.

a) Escollint un home a l'atzar, quina és la probabilitat que treballi?

Criteris: Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments següents:

- H: ser home.
- T: treballar.

Per la llei de Laplace,

$$P(T \mid H) = \frac{\#\text{ Homes que treballen}}{\#\text{ Homes}} = \frac{10.8+1.9}{20.6+3} = 0.538$$

b) Escollint un individu a l'atzar, els esdeveniments "ser dona" i "treballar" són independents?

Criteris: 0.25 pts per plantejar, 0.75 pts per calcular. Penalització amb -0.25 pts si no indica en cap càlcul llei de Laplace o casos favorables/casos totals. **(Total 1 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments següents:

- D: ser dona.
- T: treballar.

Per la llei de Laplace, i tenint en compte que hi ha 48.1 milions d'habitants,

$$\begin{cases} P(D) = \frac{\#\text{ Dones}}{\#\text{ Habitants}} = \frac{21.2+3.3}{48.1} = 0.509, \\ P(T) = \frac{\#\text{ Treballadors}}{\#\text{ Habitants}} = \frac{10.8+1.9+9.6+1.7}{48.1} = 0.499. \\ P(D \cap T) = \frac{\#\text{ Dones treballadores}}{\#\text{ Habitants}} = \frac{9.6+1.7}{48.1} = 0.235. \end{cases}$$

Els esdeveniments no són independents ja que

$$\begin{array}{rcl} P(D) \cdot P(T) & \neq & P(D \cap T), \\ 0.509 \cdot 0.499 & \neq & 0.235. \end{array}$$

Problema A3:

Problema A3. — Després d'una formació acadèmica determinada, el temps que tarden els titulats a trobar feina el podem aproximar mitjançant una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional μ desconeguda, i desviació típica $\sigma = 30$ dies. Respecte dels 22 titulats d'enguany, el nombre mitjà de dies que han tardat a trobar feina ha estat de 86.

Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional μ amb un nivell de confiança del 80%.

Solución:

Problema A3. — Després d'una formació acadèmica determinada, el temps que tarden els titulats a trobar feina el podem aproximar mitjançant una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional μ desconeguda, i desviació típica $\sigma = 30$ dies. Respecte dels 22 titulats d'enguany, el nombre mitjà de dies que han tardat a trobar feina ha estat de 86.

Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional μ amb un nivell de confiança del 80%.

Criteris: 0.5 pt per calcular $z_{\alpha/2}$, 1.5 pt per calcular l'interval. No penalitzar si s'utilitza el valor $z_{\alpha/2}$ més proper o interpolat. Penalització amb -0.5 pts si s'utilitza el valor de $z_{\alpha/2}$ sense justificar. Penalització amb -0.25 pts si utilitzen el valor $z_{\alpha/2} = 1.29$. Penalització amb -0.25 pts si no s'indica la fórmula de l'interval. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 2 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 80%, el nivell de significació és $\alpha = 0.2$. Per tant, $\alpha/2 = 0.10$ i $z_{\alpha/2} = 1.285$. Amb les dades de l'enunciat ($n = 22$, $\bar{x} = 86$, $\sigma = 30$), podem calcular l'interval demanat com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (77.78,\ 94.22).$$

Problema B1:

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) És cert que $A = B^{-1}$? És cert que $B = A^{-1}$?

b) Calcula x tal que $Ax = v$.

c) Amb el valor de x de l'apartat anterior, calcula y tal que $B^2y = x$.

Solución:

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — Considera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) És cert que $A = B^{-1}$? És cert que $B = A^{-1}$?

Criteris: Penalització amb -0.25 pt si es respon només a una de les dues qüestions. Penalització amb -1 pt si es calcula la inversa amb calculadora. **(Total 1 pt)**

Solució. Per comprovar-ho, les multiplicam:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}.$$

Per tant, $B \cdot A = \mathrm{I}$, i podem dir que ambdues igualtats són certes: $A = B^{-1}$ i, per tant, $B = A^{-1}$.

b) Calcula x tal que $Ax = v$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per errors aïllant a l'equació matricial. Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul numèric. **(Total 1 pt)**

Solució. Ens demanen calcular el vector $x = (x_1, x_2, x_3)^t$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Podem resoldre el problema pel mètode de Gauss, però és més senzill utilitzar l'apartat anterior:

$$Ax = v \implies x = A^{-1}v \implies x = Bv \implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

c) Amb el valor de x de l'apartat anterior, calcula y tal que $B^2y = x$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per errors aïllant a l'equació matricial. Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul numèric. **(Total 1 pt)**

Solució. De nou, és més senzill utilitzar els apartats anteriors:

$$B^2y = x \implies A \cdot B^2y = Ax \implies \mathrm{I} \cdot By = v \implies By = v \implies y = Av \implies \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Problema B2:

Problema B2. — Per organitzar un esdeveniment social, volem contractar el transport amb una empresa que ens ofereix autocars i minibusos.

- Cada autocar té una capacitat de 50 viatgers i té un preu de 100 €.
- Cada minibús té una capacitat de 30 viatgers i té un preu de 55 €.

Podem contractar tants autocars com vulguem, i fins a 8 minibusos. Per limitacions en el nombre de conductors, només podem contractar 11 vehicles. Si volem assegurar el transport per a almenys 450 persones, quina és la combinació més avantatjosa i quin cost té?

Solución:

Problema B2. — Per organitzar un esdeveniment social, volem contractar el transport amb una empresa que ens ofereix autocars i minibusos.

- Cada autocar té una capacitat de 50 viatgers i té un preu de 100 €.
- Cada minibús té una capacitat de 30 viatgers i té un preu de 55 €.

Podem contractar tants autocars com vulguem, i fins a 8 minibusos. Per limitacions en el nombre de conductors, només podem contractar 11 vehicles. Si volem assegurar el transport per a almenys 450 persones, quina és la combinació més avantatjosa i quin cost té?

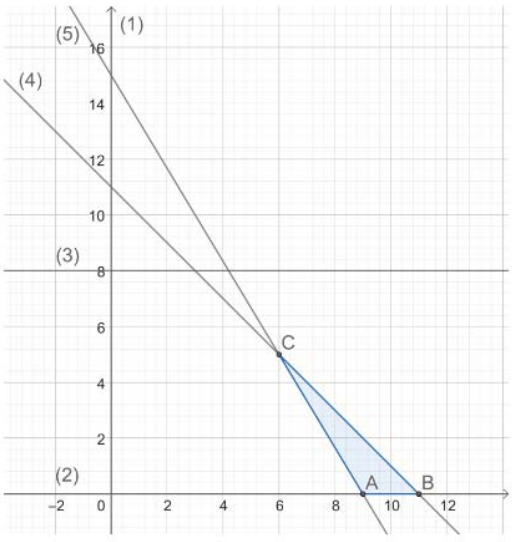
Criteris: 0.5 pts per plantejar (0.1 pt/recta). 0.5 pts per indicar la funció objectiu. 1 pt per traçar les rectes i indicar la regió factible (penalitzar amb -0.5 pts per cada recta incorrectament traçada). 0.5 pts per calcular els vèrtexs (penalitzar amb -0.25 pts per cada vèrtex incorrecte). 0.5 pts per calcular el vèrtex corresponent al mínim i interpretar-lo. Penalització amb -3 pt si les variables són incorrectes. Penalització amb -0.25 pts si no es descriuen les variables.

(Total 3 pt)

Solució. Siguin a el nombre d'autocars i b el nombre de minibusos que contractarem. La funció a minimitzar serà $f(a,b) = 100a + 55b$. D'acord amb l'enunciat,

$$\begin{cases} a & \geq & 0, \\ 0 & \leq & b \leq 8, \\ a+b & \leq & 11, \\ 50a+30b & \geq & 450, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (1) & a \geq 0, \\ (2) & b \geq 0, \\ (3) & b \leq 8, \\ (4) & a+b \leq 11, \\ (5) & 5a+3b \geq 45. \end{cases}$$

Amb aquestes rectes traçam la següent regió factible:



On els vèrtexs són els punts $A = (9,0)$, $B = (11,0)$ i el punt d'intersecció de les rectes (4) i (5), $C = (6,5)$. Avaluant la funció objectiu, s'observa que el mínim es dona en el vèrtex C, amb $f(6,5) = 875$. És a dir, que la combinació més avantatjosa és contractar 6 autocars i 5 minibusos, per un preu de 875 €.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema C1:

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Considera la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$, per a $x \in [-1, \infty)$.

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts.

b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 1$. Quin és el valor del seu pendent?

Solución:

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Considera la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$, per a $x \in [-1, \infty)$.

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$. Calcula o justifica i indica sobre la gràfica el valor de la funció en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims relatius i absoluts.

Criteris: 0.5 pt per indicar els valors en els extrems del domini. 0.5 pt per indicar els intervals de creixement/decreixement. 0.75 pt per indicar els màxims/mínims relatius i absoluts (penalitzar amb -0.25 pts si no indiquen quins són els màxims o mínims absoluts). 0.25 pt per la claredat/correcció de la gràfica i els eixos. **(Total 2 pt)**

Solució. El domini és $x \in [-1, \infty)$ per l'enunciat.

En els extrems del domini,

$$f(-1) = -1^3 - 3 \cdot (-1)^2 = -4, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot (x - 3) = +\infty.$$

Pels intervals de creixement i decreixement, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, que s'anul·la a

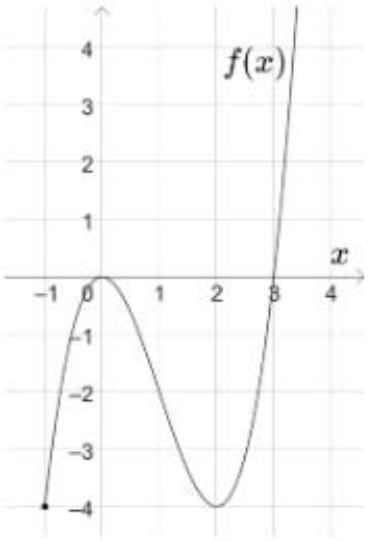
$$f'(x) = 0 \implies 3 \cdot x \cdot (x - 2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0, \\ x = 2. \end{cases}$$

Amb el valor de la funció en els punts d'interès,

$$\begin{cases} f(-1) = -4 \\ f(0) = 0 \\ f(2) = -4 \\ \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \end{cases} \implies \begin{cases} f(x) \text{ és creixent per a } x \in (-1, 0), \\ f(x) \text{ és decreixent per a } x \in (0, 2), \\ f(x) \text{ és creixent per a } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Per tant, té un màxim relatiu, $f(0) = 0$; un mínim relatiu, $f(2) = -4$; el mínim absolut s'assoleix a $x = -1$ i a $x = 2$; i no té màxim absolut.

La gràfica demanada és la següent:

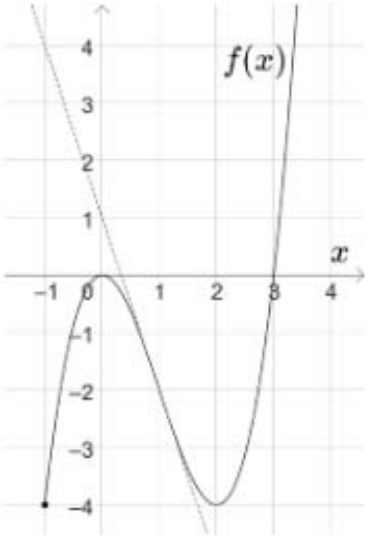


b) Sobre la mateixa gràfica, traça la recta tangent a la funció en el punt $x = 1$. Quin és el valor del seu pendent?

Criteris: 0.5 pt per calcular el pendent, 0.5 pt per traçar la recta. **(Total 1 pt)**

Solució. El seu pendent ve donat per $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$.

Sobre la gràfica, la representació és



Problema C2:

Problema C2. — En psicologia, la funció següent modela com les persones valoren recompenses en un instant de temps futur, t:

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty),$$

on r és una constant positiva, i t es mesura en dies.

a) Si $r = 0.01$, què val la funció $V(t)$ a $t = 50$?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts per errors de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

b) Per a quin valor de r, la funció $V(t)$ val 0.75 a $t = 50$?

Criteris: 0.25 pt per plantejar, 0.75 pt per calcular. Penalització amb -0.25 pt per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

c) Si $r = 0.03$, a quin valor tendeix la valoració d'una recompensa en un futur molt llunyà?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul. **(Total 1 pt)**

Solución:

Problema C2. — En psicologia, la funció següent modela com les persones valoren recompenses en un instant de temps futur, t:

$$V(t) = \frac{1}{(1+r)^t}, \quad t \in [0, +\infty),$$

on r és una constant positiva, i t es mesura en dies.

a) Si $r = 0.01$, què val la funció $V(t)$ a $t = 50$?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts per errors de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$V(50) = \frac{1}{(1+0.01)^{50}} = 0.61.$$

b) Per a quin valor de r, la funció $V(t)$ val 0.75 a $t = 50$?

Criteris: 0.25 pt per plantejar, 0.75 pt per calcular. Penalització amb -0.25 pt per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error d'arrodoniment. **(Total 1 pt)**

Solució. Ens demanen resoldre r per a:

$$0.75 = V(50) = \frac{1}{(1+r)^{50}}.$$

Operant,

$$(1+r)^{50} = \frac{1}{0.75} \implies (1+r) = \left(\frac{1}{0.75}\right)^{1/50} \implies r = \left(\frac{1}{0.75}\right)^{1/50} - 1 \implies r \approx 0.0058.$$

c) Si $r = 0.03$, a quin valor tendeix la valoració d'una recompensa en un futur molt llunyà?

Criteris: 0.5 pt per plantejar, 0.5 pt per calcular. Penalització amb -0.5 pts si no es justifica el càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. La tendència en un futur molt llunyà ve donada pel límit d'aquesta funció quan t tendeix a infinit:

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+0.03)^t} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

És a dir, el valor de la recompensa tendeix a zero.

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: **2024 – 2025**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

No es permet l'ús de calculadores gràfiques ni programables, ni de dispositius que puguin transmetre o emmagatzemar informació. Es poden usar regles i bolígrafs de colors (excepte vermell i verd).

Problema A1:

Part A. Contestau el problema A1, i contestau també un problema a escollir entre el problema A2 i el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatori). — Donats dos esdeveniments, A i B, d'un experiment aleatori, sabem que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, i que $P(A \mid B) = x$, on $x \in [0,1]$. Es demana:

a) Existeix algun valor de x per al qual els esdeveniments siguin independents?

Criteris: 0.5 pts per indicar el valor, 0.5 pts per justificar-ho. **(Total 1 pt)**

b) Per a quin valor de x es té que la probabilitat de $A \cap B$ és màxima?

Criteris: 0.5 pts per trobar el valor, 0.5 pts per justificar-ho. **(Total 1 pt)**

Problema A2:

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa d'aquestes dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants a Espanya per nacionalitat i sexe:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

a) Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica "llei de Laplace" o casos favorables/casos totals. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

b) Escollint dos habitants a l'atzar de manera independent, quina és la probabilitat que almenys un sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica els successos. Penalització amb -0.25 pts si no justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

Problema A3:

Problema A3. — Suposem que, quan un client entra en una botiga d'electrodomèstics, el temps que hi passa dedins ve donat per una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional $\mu = 15$ minuts i desviació típica $\sigma = 10$ minuts: $X \sim \mathcal{N}(15,\ 10)$.

a) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga 25 minuts o menys?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

b) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga entre 5 i 25 minuts?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Problema B1:

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — En una fàbrica tèxtil fabricam vestits, samarretes i faldes.

- Cada vestit requereix 5 m^2 de teixit i 5 botons.
- Cada samarreta requereix 4 m^2 de teixit i 3 botons.
- Cada falda requereix 4 m^2 de teixit i cap botó.

a) Si volem fabricar 10 vestits, 15 samarretes i 20 faldes, quants m^2 de teixit i quants botons necessitam?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per no justificar els càlculs. Penalització amb -0.25 pts per no interpretar el resultat.**(Total 0.5 pt)**

BY NC SA
Textos Marea Verde

b) Resol el sistema d'equacions següent:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -1 pt si només troben una solució particular. **(Total 1.5 pt)**

c) Si disposam de 100 m^2 de teixit i 120 botons, podem utilitzar completament els recursos fabricant productes? **(Total 1 pt)**

Problema B2:

Problema B2. — Considera les matrius quadrades A, B, M, i N de mida 3×3.

a) Calcula tots els valors de x tals que $A^2 = A$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.5 pts si no comprova que el valor de x calculat també satisfà totes les condicions necessàries. **(Total 1 pt)**

b) Troba una matriu B invertible, tal que $B^2 = B$.

Criteris: No s'ha de penalitzar si no es dedueix a partir de l'expressió matricial. **(Total 1 pt)**

c) Donades dues matrius M i N invertibles tals que $M^2 = M$ i $N^2 = N$, construïm la matriu següent: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. És cert que $C^2 = C$? **(Total 1 pt)**

Problema C1:

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Restringits al domini $x \in [0, 20]$, considera les tres funcions següents:

$$f(x) = x(10 - x), \qquad g(x) = 125 - 20x, \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } 0 \le x \le 15, \\ g(x) \text{ si } 15 < x \le 20. \end{cases}$$

a) Per a quins x es té que $f(x) = g(x)$? Per a quins x es té que $f'(x) = g'(x)$?

Criteris: 0.5 pts per cada pregunta. Penalització amb -0.25 pts si no es rebutja $x = 25$. **(Total 1 pt)**

b) Estudia la continuïtat de la funció $h(x)$.

Criteris: 0.5 pts per estudiar la continuïtat en $x = 15$, 0.5 pts per justificar la continuïtat a la resta del domini. No s'ha de penalitzar si no s'especifica el tipus de continuïtat.

(Total 1 pt)

c) És la funció $h(x)$ derivable? En quins intervals és creixent?

Criteris: 0.25 pts per expressar la derivada a troços, 0.25 pts estudiar la derivabilitat a $x = 15$, 0.50 pt per estudiar el creixement. No s'ha de penalitzar si s'especifica l'interval de creixement obert, $(0, 5)$. No s'ha de penalitzar si a l'expressió de la derivada a troços, aquesta es defineix per a $x = 15$. **(Total 1 pt)**

Problema C2:

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 10^x + x^{10}$, per a $x \in (0, +\infty)$.

a) Calcula $\lim_{x \to 0} f(x)$ i $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

b) Calcula $f'(x)$.

Criteris: 0.75 pts per calcular la derivada de 10^x, 0.25 pts per calcular la derivada de x^{10}. **(Total 1 pt)**

c) Calcula justificadament $\int_0^1 f'(x)\,dx$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. **(Total 1 pt)**

Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema A1:

Part A. Contestau el problema A1, i contestau també un problema a escollir entre el problema A2 i el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatori). — Donats dos esdeveniments, A i B, d'un experiment aleatori, sabem que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, i que $P(A \mid B) = x$, on $x \in [0,1]$. Es demana:

a) Existeix algun valor de x per al qual els esdeveniments siguin independents?
Criteris: 0.5 pts per indicar el valor, 0.5 pts per justificar-ho. **(Total 1 pt)**

b) Per a quin valor de x es té que la probabilitat de $A \cap B$ és màxima?
Criteris: 0.5 pts per trobar el valor, 0.5 pts per justificar-ho. **(Total 1 pt)**

Solución:

Part A. Contestau el problema A1, i contestau també un problema a escollir entre el problema A2 i el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatori). — Donats dos esdeveniments, A i B, d'un experiment aleatori, sabem que $P(A) = 0.5$, que $P(B) = 0.1$, i que $P(A \mid B) = x$, on $x \in [0,1]$. Es demana:

a) Existeix algun valor de x per al qual els esdeveniments siguin independents?
Criteris: 0.5 pts per indicar el valor, 0.5 pts per justificar-ho. **(Total 1 pt)**

Solució. Sí: els esdeveniments són independents quan $P(A \mid B) = P(A)$, és a dir, per a $x = 0.5$.

b) Per a quin valor de x es té que la probabilitat de $A \cap B$ és màxima?
Criteris: 0.5 pts per trobar el valor, 0.5 pts per justificar-ho. **(Total 1 pt)**

Solució. $P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = 0.1 \cdot x$, així que aquesta probabilitat és major quan més gran és x. Per a $x = 1$, el valor més gran per a x, aleshores $P(A \cap B)$ assoleix el seu valor més gran, de 0.1.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema A2:

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa d'aquestes dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants a Espanya per nacionalitat i sexe:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

a) Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica "llei de Laplace" o casos favorables/casos totals. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

b) Escollint dos habitants a l'atzar de manera independent, quina és la probabilitat que almenys un sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica els successos. Penalització amb -0.25 pts si no justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solución:

Problema A2. — L'Institut Nacional d'Estadística (INE) disposa d'aquestes dades, per al 2023, sobre la quantitat d'habitants a Espanya per nacionalitat i sexe:

	Espanyols	Estrangers
Homes	20.6 milions	3.0 milions
Dones	21.2 milions	3.3 milions

a) Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica "llei de Laplace" o casos favorables/casos totals. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solució. Sigui E l'esdeveniment "l'habitant és estranger". Per la llei de Laplace,

$$P(E) = \frac{\#\text{ Casos favorables}}{\#\text{ Casos totals}} = \frac{3+3.3}{20.6+3+21.2+3.3} = 0.131.$$

b) Escollint dos habitants a l'atzar de manera independent, quina és la probabilitat que almenys un sigui estranger?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts si no indica els successos. Penalització amb -0.25 pts si no justifica el càlcul. Penalització amb -0.25 pts per arrodoniment incorrecte. **(Total 1 pt)**

Solució. Siguin E_1, E_2 els esdeveniments corresponents als fets que la primera i la segona elecció, respectivament, siguin d'habitants estrangers. Aleshores,

$$P(E_1 \cup E_2) = 1 - P(E_1^c \cap E_2^c) = 1 - (1-0.131)^2 = 0.245.$$

Problema A3:

Problema A3. — Suposem que, quan un client entra en una botiga d'electrodomèstics, el temps que hi passa dedins ve donat per una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional $\mu = 15$ minuts i desviació típica $\sigma = 10$ minuts: $X \sim \mathcal{N}(15,\ 10)$.

a) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga 25 minuts o menys?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

b) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga entre 5 i 25 minuts?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Solución:

Problema A3. — Suposem que, quan un client entra en una botiga d'electrodomèstics, el temps que hi passa dedins ve donat per una variable aleatòria X que segueix una distribució normal de mitjana poblacional $\mu = 15$ minuts i desviació típica $\sigma = 10$ minuts: $X \sim \mathcal{N}(15,\ 10)$.

a) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga 25 minuts o menys?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Solució. Sigui $Z = (X - 15)/10$, que segueix una distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$. Aleshores,

$$P(X \leq 25) = P\left(Z \leq \frac{25-15}{10}\right) = P(Z \leq 1) = 0.8413.$$

b) Quina és la probabilitat que un client estigui dins la botiga entre 5 i 25 minuts?

Criteris: 0.5 pts per tipificar i 0.5 pts per calcular. Penalització amb -0.5 pts si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Solució. De manera similar a l'apartat anterior,

$$P(X \leq 5) = P\left(Z \leq \frac{5-15}{10}\right) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0.1587.$$

Per tant,

$$P(5 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 5) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826.$$

Problema B1:

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — En una fàbrica tèxtil fabricam vestits, samarretes i faldes.

- Cada vestit requereix 5 m^2 de teixit i 5 botons.
- Cada samarreta requereix 4 m^2 de teixit i 3 botons.
- Cada falda requereix 4 m^2 de teixit i cap botó.

a) Si volem fabricar 10 vestits, 15 samarretes i 20 faldes, quants m^2 de teixit i quants botons necessitam?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per no justificar els càlculs. Penalització amb -0.25 pts per no interpretar el resultat. **(Total 0.5 pt)**

b) Resol el sistema d'equacions següent:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -1 pt si només troben una solució particular. **(Total 1.5 pt)**

c) Si disposam de 100 m^2 de teixit i 120 botons, podem utilitzar completament els recursos fabricant productes? **(Total 1 pt)**

Solución:

Part B. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema B1. — En una fàbrica tèxtil fabricam vestits, samarretes i faldes.

- Cada vestit requereix 5 m^2 de teixit i 5 botons.
- Cada samarreta requereix 4 m^2 de teixit i 3 botons.
- Cada falda requereix 4 m^2 de teixit i cap botó.

a) Si volem fabricar 10 vestits, 15 samarretes i 20 faldes, quants m^2 de teixit i quants botons necessitam?

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per no justificar els càlculs. Penalització amb -0.25 pts per no interpretar el resultat. **(Total 0.5 pt)**

Solució. Podem representar la informació donada en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 95 \end{pmatrix}.$$

És a dir, necessitarem 190 m^2 de teixit i 95 botons.

b) Resol el sistema d'equacions següent:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -1 pt si només troben una solució particular. **(Total 1.5 pt)**

Solució. Ho podem fer matricialment o amb les equacions lineals que el sistema representa:

$$\begin{cases} 5x+4y+4z=100 \\ 5x+3y\quad\ =120 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5x+4y=100-4z \\ 5x+3y=120 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 5x+4y=100-4z \\ y\quad\ =-20-4z \end{cases}$$
$$\longrightarrow \begin{cases} 5x=180+12z \\ y\quad\ =-20-4z \end{cases}$$

És a dir, admet infinites solucions, totes elles de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (180+12z)/5 \\ -20-4z \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{per a } z \in \mathbb{R}.$$

c) Si disposam de 100 m^2 de teixit i 120 botons, podem utilitzar completament els recursos fabricant productes? (Total 1 pt)

Solució. D'acord amb la solució de l'apartat anterior: no, ja que qualsevol solució del sistema d'equacions implica que si z és zero o positiva, aleshores y és negativa, i per tant no és una solució realitzable.

Problema B2:

Problema B2. — Considera les matrius quadrades A, B, M, i N de mida 3×3.

a) Calcula tots els valors de x tals que $A^2 = A$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.5 pts si no comprova que el valor de x calculat també satisfà totes les condicions necessàries. **(Total 1 pt)**

b) Troba una matriu B invertible, tal que $B^2 = B$.
Criteris: No s'ha de penalitzar si no es dedueix a partir de l'expressió matricial. **(Total 1 pt)**

c) Donades dues matrius M i N invertibles tals que $M^2 = M$ i $N^2 = N$, construïm la matriu següent: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. És cert que $C^2 = C$? **(Total 1 pt)**

Solución:

Problema B2. — Considera les matrius quadrades A, B, M, i N de mida 3×3.

a) Calcula tots els valors de x tals que $A^2 = A$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Criteris: Penalització amb -0.25 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.5 pts si no comprova que el valor de x calculat també satisfà totes les condicions necessàries. **(Total 1 pt)**

Solució. En la multiplicació $A \cdot A$, ens podem fixar en la tercera filera per la segona columna:

$$\begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & x & 4 \\ 9 & x & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow -6 \cdot x + 2 \cdot x + (-3) \cdot 2 = 2 \Longrightarrow x = -2.$$

És a dir, si existeix algun valor, l'única possibilitat és $x = -2$. Fent el càlcul, observam que aquest és un valor vàlid:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & -2 & 6 \\ -6 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Troba una matriu B invertible, tal que $B^2 = B$.
Criteris: No s'ha de penalitzar si no es dedueix a partir de l'expressió matricial. **(Total 1 pt)**

Solució. Si B és invertible, aleshores B^{-1} existeix i, aleshores,

$$B^2 = B \Longrightarrow B^{-1} \cdot B^2 = B^{-1} \cdot B \Longrightarrow B = \mathrm{Id},$$

que és, de fet, l'única matriu invertible que satisfà la condició.

c) Donades dues matrius M i N invertibles tals que $M^2 = M$ i $N^2 = N$, construïm la matriu següent: $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$. És cert que $C^2 = C$? **(Total 1 pt)**

Solució. Sí. Podem veure que si M, N són invertibles i satisfan la condició, aleshores $M = N = \mathrm{Id}$ i, per tant, $C = \mathrm{Id}$, que satisfà $\mathrm{Id}^2 = \mathrm{Id}$.
Alternativament, si $C = N \cdot M \cdot N^{-1}$,

$$C^2 = (N \cdot M \cdot N^{-1}) \cdot (N \cdot M \cdot N^{-1}) = N \cdot M^2 \cdot N^{-1} = N \cdot M \cdot N^{-1} = C.$$

Problema C1:

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Restringits al domini $x \in [0,20]$, considera les tres funcions següents:

$$f(x) = x(10-x), \qquad g(x) = 125 - 20x, \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \le x \le 15, \\ g(x) & \text{si } 15 < x \le 20. \end{cases}$$

a) Per a quins x es té que $f(x) = g(x)$? Per a quins x es té que $f'(x) = g'(x)$?

Criteris: 0.5 pts per cada pregunta. Penalització amb -0.25 pts si no es rebutja $x = 25$.

b) Estudia la continuïtat de la funció $h(x)$.

Criteris: 0.5 pts per estudiar la continuïtat en $x = 15$, 0.5 pts per justificar la continuïtat a la resta del domini. No s'ha de penalitzar si no s'especifica el tipus de continuïtat.

(Total 1 pt)

c) És la funció $h(x)$ derivable? En quins intervals és creixent?

Criteris: 0.25 pts per expressar la derivada a troços, 0.25 pts estudiar la derivabilitat a $x = 15$, 0.50 pt per estudiar el creixement. No s'ha de penalitzar si s'especifica l'interval de creixement obert, $(0,5)$. No s'ha de penalitzar si a l'expressió de la derivada a troços, aquesta es defineix per a $x = 15$. **(Total 1 pt)**

Solución:

Part C. Escolliu només un problema d'aquesta part (total 3 pt).

Problema C1. — Restringits al domini $x \in [0,20]$, considera les tres funcions següents:

$$f(x) = x(10-x), \qquad g(x) = 125 - 20x, \qquad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \le x \le 15, \\ g(x) & \text{si } 15 < x \le 20. \end{cases}$$

a) Per a quins x es té que $f(x) = g(x)$? Per a quins x es té que $f'(x) = g'(x)$?

Criteris: 0.5 pts per cada pregunta. Penalització amb -0.25 pts si no es rebutja $x = 25$.

(Total 1 pt)

Solució. Ens demanen el valor de x tal que

$$f(x) = g(x) \implies x \cdot (10-x) = 125 - 20x \implies x^2 - 30x + 125 = 0 \implies \begin{cases} x = 5, \\ x = 25. \end{cases}$$

Per tant, l'únic valor és $x = 5$, ja que l'altra solució no està dins del domini.

Per a la segona pregunta,

$$f'(x) = g'(x) \implies 10 - 2x = -20 \implies x = 15,$$

que és un punt dins del domini.

b) Estudia la continuïtat de la funció $h(x)$.

Criteris: 0.5 pts per estudiar la continuïtat en $x = 15$, 0.5 pts per justificar la continuïtat a la resta del domini. No s'ha de penalitzar si no s'especifica el tipus de continuïtat.

(Total 1 pt)

Solució. La funció $h(x)$ està formada per dues funcions contínues, així que l'únic punt en què podria no ser contínua és al punt frontera $x = 15$. Tal i com hem vist a l'apartat anterior, $f(x) = g(x) \implies x = 5$, així que a $x = 15$, les dues funcions tenen un valor diferent. És a dir, $h(x)$ té una única discontinuïtat en el punt $x = 15$, que és una discontinuïtat inevitable de salt.

c) És la funció $h(x)$ derivable? En quins intervals és creixent?

Criteris: 0.25 pts per expressar la derivada a troços, 0.25 pts estudiar la derivabilitat a $x = 15$, 0.50 pt per estudiar el creixement. No s'ha de penalitzar si s'especifica l'interval de creixement obert, $(0,5)$. No s'ha de penalitzar si a l'expressió de la derivada a troços, aquesta es defineix per a $x = 15$.

(Total 1 pt)

Solució. No és derivable perquè no és contínua al punt $x = 15$.

La derivada de la funció $h(x)$ és:

$$h'(x) = \begin{cases} 10 - 2x & \text{si } 0 \le x < 15, \\ -20 & \text{si } 15 < x \le 20. \end{cases}$$

i no està definida al punt $x = 15$.

Al primer tram, la derivada és estrictament positiva quan $x < 5$, i és estrictament negativa quan $x > 5$; al segon tram, la derivada és sempre negativa. Per tant, l'únic interval en què la funció és creixent és $[0,5)$.

Problema C2:

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 10^x + x^{10}$, per a $x \in (0, +\infty)$.

a) Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$ i $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

b) Calcula $f'(x)$.

Criteris: 0.75 pts per calcular la derivada de 10^x, 0.25 pts per calcular la derivada de x^{10}. **(Total 1 pt)**

c) Calcula justificadament $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. **(Total 1 pt)**

Solución:

Problema C2. — Considera la funció $f(x) = 10^x + x^{10}$, per a $x \in (0, +\infty)$.

a) Calcula $\lim_{x\to 0} f(x)$ i $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. Penalització amb -0.25 pts per cada error de llenguatge. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 10^0 + 0^{10} = 1 + 0 = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 10^\infty + \infty^{10} = \infty + \infty = \infty.$$

b) Calcula $f'(x)$.

Criteris: 0.75 pts per calcular la derivada de 10^x, 0.25 pts per calcular la derivada de x^{10}. **(Total 1 pt)**

Solució.

$$f'(x) = \left(10^x + x^{10}\right)' = 10^x \cdot \ln(10) + x^9 \cdot 10.$$

c) Calcula justificadament $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Criteris: Penalització amb -0.5 pts per cada error de càlcul. **(Total 1 pt)**

Solució. Atès que $f(x)$ és una primitiva de $f'(x)$,

$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\Big]_0^1 = \left(10^1 + 1^{10}\right) - \left(10^0 + 0^{10}\right) = 10.$$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Paula Orta y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S
Vallecas

CC BY NC SA

Vídeos

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DHC2sO6KoGbE

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D2HLcE3gLNpI

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DNaf_Kyau16g

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones: La pregunta 1 es obligatoria. Además, elegir un máximo de 3 preguntas, eligiendo UNA entre 2A y 2B, UNA entre 3A y 3B y UNA entre 4A y 4B.

Bloque 1.- Estadística

1. El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad sigue una distribución normal.

a) Si, para una muestra de 400 pisos de dos habitaciones, con una confianza del 99 %, se ha obtenido [1174,25,1225,75] como el intervalo para la media de PA, ¿cuál es la desviación típica de PA? **(0,75 puntos)**

b) Si los gastos de gestión representan el 10% del precio de alquiler, usando los datos del apartado anterior, ¿cuál sería el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, para la media de dichos gastos de gestión? **(1 punto)**

c) Usando la media muestral y la desviación típica obtenidas en a), ¿cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 25 pisos de dos habitaciones de la referida ciudad, el precio medio de alquiler sea mayor o igual que 1250 euros? **(0,75 puntos)**

Bloque 2: Probabilidad

2A. Una cadena de supermercados envasa al vacío tres tipos de queso, en las siguientes proporciones: fresco (45%), semicurado (30%) y curado (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 15% del queso fresco, el 23% del semicurado y el 40% del curado.

a) Representar, mediante un árbol de probabilidades, la situación descrita. **(0,5 puntos)**

b) Se elige al azar un paquete de queso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de importación? **(1 punto)**

c) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado? **(1 punto)**

2B. En una cafetería se pretende implementar una aplicación móvil que permita a los clientes escanear un código QR, ubicado en cada mesa, para realizar pedidos, pagar e incluso llamar al camarero. Para conocer la opinión de los usuarios, se encuestó a una muestra aleatoria de 210 clientes, de los cuales 140 consideraron que este nuevo sistema ayudaría a reducir el tiempo de espera.

a) Determinar un intervalo de confianza, al 98%, para estimar la proporción de clientes que opinan que esta aplicación permitiría reducir los tiempos de espera. ¿Cuál sería el error máximo en la estimación? **(1 punto)**

b) Si, realizando una nueva encuesta, se quisiese estimar la proporción de clientes que opinan que la aplicación reduciría los tiempos de espera, con un error inferior al 4% y un nivel de confianza del 96%, ¿a cuántos clientes, como mínimo, se debería preguntar si usamos como estimación inicial de la proporción la obtenida en la muestra anterior? **(1 punto)**

c) De la muestra inicial se seleccionan 9 clientes para una entrevista personal. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera? **(0,5 puntos)**

Bloque 3: Análisis:

3A. Un psicólogo ha colocado unos electrodos en la cabeza de un ratón para evaluar su actividad cerebral (medida en microvoltios μV) durante un experimento que ha durado 12 horas. La actividad registrada se ajustó a la siguiente función:

$$f(t) = \begin{cases} 24t^2 - 96t + 736, & 0 \le t < 4 \\ t^3 - 30t^2 + 288t, & 4 \le t \le 12 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas (de 0 a 12)

a) Estudiar la continuidad de $f(t)$. ¿Es $f(t)$ derivable en t=4? **(0,75 puntos)**

b) Usando derivadas, estudiar el crecimiento y decrecimiento de esta función. ¿En qué momentos alcanzó el ratón los valores mínimo y máximo de actividad cerebral? ¿Cuáles fueron dichos valores? (0,75 puntos) **(1 punto)**

c) Representar gráficamente la función. ¿Cuál es la actividad cerebral del ratón a las $t = 6$ horas? ¿En qué momentos anteriores la actividad cerebral fue exactamente 200 microvoltios menor? **(0,75 puntos)**

3B. En una plaza hay una superficie limitada por las curvas

$$y = 3x^2 - 5x + 3, \qquad y = x + 3,$$

con x expresado en metros, donde se quiere hacer un jardín para instalar dentro una estatua conmemorativa.

a) Representar la superficie que se destina al jardín. **(0,75 puntos)**

b) ¿Cuánto mide dicha superficie? **(1 punto)**

c) La superficie se recubre con césped artificial, con un precio de 25,99 €/m^2. Para colocar el césped se requiere material adicional con un coste de 18 €/m^2, siendo además el coste de la mano de obra de 20 €/m^2. A los costes anteriores hay que añadir el impuesto que es un 7% para el césped y materiales y un 4% para la mano de obra. ¿Cuál es el coste total de la obra? **(0,75 puntos)**

3A:

Bloque 4: Álgebra:

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

a) Formular el correspondiente programa de programación lineal. **(1 punto)**

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**

c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? **(0,75 puntos)**

4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**

b) ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA

Bloque 1.- Análisis

1A:

1. El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad sigue una distribución normal.

a) Si, para una muestra de 400 pisos de dos habitaciones, con una confianza del 99 %, se ha obtenido [1174,25,1225,75] como el intervalo para la media de PA, ¿cuál es la desviación típica de PA? **(0,75 puntos)**

b) Si los gastos de gestión representan el 10% del precio de alquiler, usando los datos del apartado anterior, ¿cuál sería el correspondiente intervalo de confianza, al 90%, para la media de dichos gastos de gestión? **(1 punto)**

c) Usando la media muestral y la desviación típica obtenidas en a), ¿cuál es la probabilidad de que, para una muestra de 25 pisos de dos habitaciones de la referida ciudad, el precio medio de alquiler sea mayor o igual que 1250 euros? **(0,75 puntos)**

X = El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad. $X = N(\mu, \sigma)$.

a) La muestra es de tamaño n = 400 pisos.

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x} = \frac{1174,25 + 1225,75}{2} = 1200$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{1225,75 - 1174,25}{2} = 25.75$$

Con un nivel de confianza del 99 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575$$

Solución:

Textos Marea Verde

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934
2.5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9949	0.9951
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

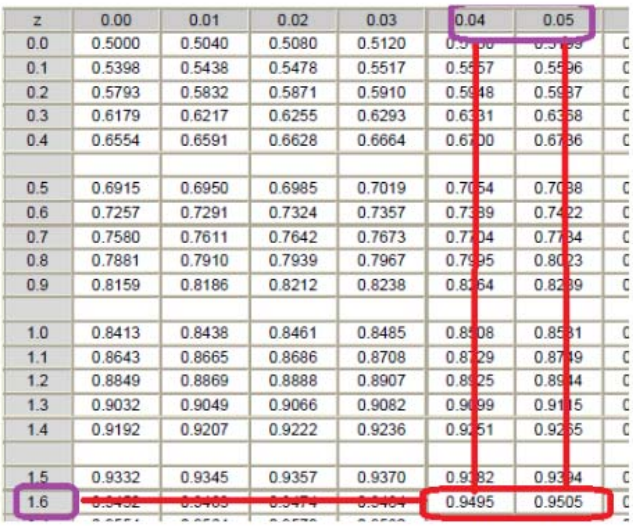
Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 25.75 = 2.575 \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \Rightarrow \frac{25.75}{2.575} = \frac{\sigma}{20} \Rightarrow \boxed{\sigma = 200}$$

La desviación típica tiene un valor de $\sigma = 200$ euros.

b) Y = Los gastos de gestión en el alquiler de un piso de dos habitaciones de una gran ciudad.
Como la desviación típica del precio del alquiler es 200 entonces la desviación típica de los gastos de gestión es el 10%: $0.10 \cdot 200 = 20$. Y = N(μ, 20).
La muestra es de tamaño n = 400 pisos.
La media muestral es el 10% de la muestra de la variable X: $\bar{y} = 0.10 \cdot \bar{x} = 0.10 \cdot 1200 = 120$
Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120		
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517		
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910		
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293		
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664		
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019		
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357		
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673		
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967		
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238		
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485		
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708		
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907		
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082		
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236		
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370		
1.6					0.9495	0.9505

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{400}} = 1.645$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{y} - Error, \bar{y} + Error\right) = (120 - 1.645, 120 + 1.645) = (118.355, 121.645)$$

c) X = El precio de alquiler, PA, de pisos de dos habitaciones de una gran ciudad.

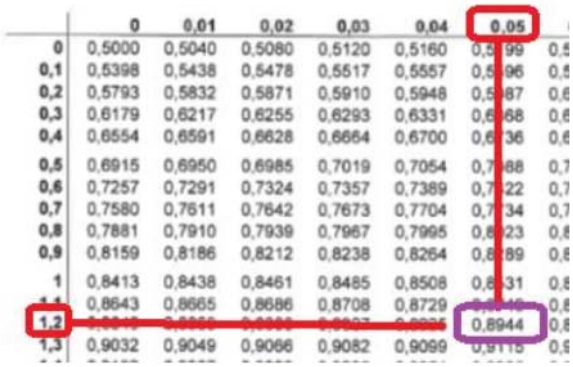
La media muestral es $\bar{x} = 1200$. X = N(1200, 200).

La distribución de las medias muestrales de tamaño 25 sigue una ley normal con la misma media (1200) y con desviación típica $\sigma = \frac{200}{\sqrt{25}} = 40$. $\overline{X_{25}} = N(1200, 40)$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{25}} \geq 1250\right)$.

$$P\left(\overline{X_{25}} \geq 1250\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{1250 - 1200}{40}\right) = P(Z \geq 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	
1,2					0,8944	
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	

Textos Marea Verde

Bloque 2: Probabilidad

2A. Una cadena de supermercados envasa al vacío tres tipos de queso, en las siguientes proporciones: fresco (45%), semicurado (30%) y curado (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 15% del queso fresco, el 23% del semicurado y el 40% del curado.

a) Representar, mediante un árbol de probabilidades, la situación descrita. **(0,5 puntos)**

b) Se elige al azar un paquete de queso, ¿cuál es la probabilidad de que no sea de importación? **(1 punto)**

c) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado? **(1 punto)**

2B. En una cafetería se pretende implementar una aplicación móvil que permita a los clientes escanear un código QR, ubicado en cada mesa, para realizar pedidos, pagar e incluso llamar al camarero. Para conocer la opinión de los usuarios, se encuestó a una muestra aleatoria de 210 clientes, de los cuales 140 consideraron que este nuevo sistema ayudaría a reducir el tiempo de espera.

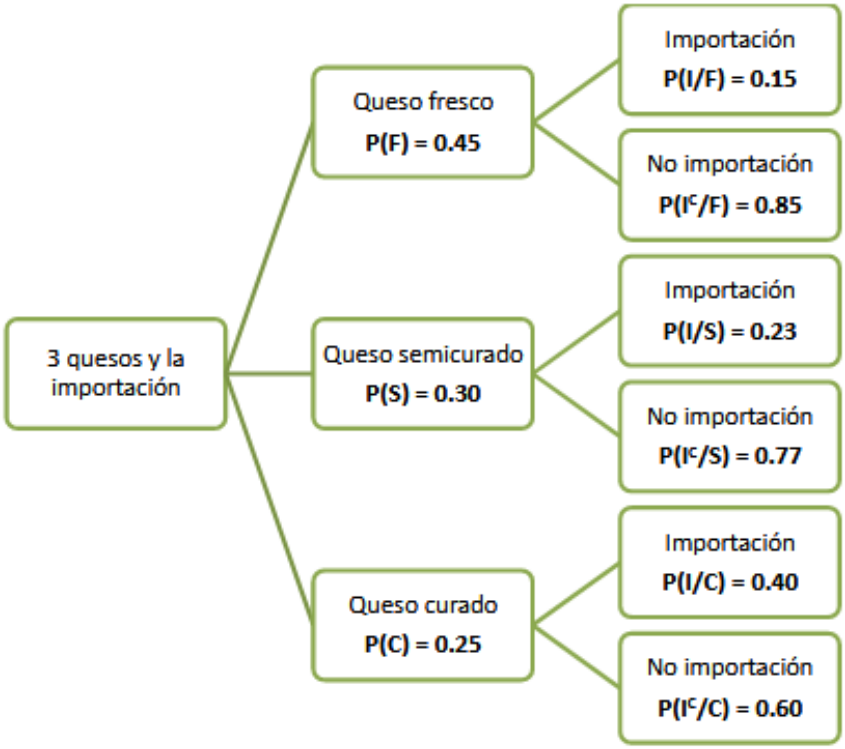
a) Determinar un intervalo de confianza, al 98%, para estimar la proporción de clientes que opinan que esta aplicación permitiría reducir los tiempos de espera. ¿Cuál sería el error máximo en la estimación? **(1 punto)**

b) Si, realizando una nueva encuesta, se quisiese estimar la proporción de clientes que opinan que la aplicación reduciría los tiempos de espera, con un error inferior al 4% y un nivel de confianza del 96%, ¿a cuántos clientes, como mínimo, se debería preguntar si usamos como estimación inicial de la proporción la obtenida en la muestra anterior? **(1 punto)**

c) De la muestra inicial se seleccionan 9 clientes para una entrevista personal. ¿Cuál es la probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera? **(0,5 puntos)**

Solución 2A:

a) Llamamos F a "Queso fresco", S a "Queso semicurado", C a "Queso curado" e I a "Queso de Importación".



b) Nos piden calcular $P(I^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(I^C)=P(F)P(I^C/F)+P(S)P(I^C/S)+P(C)P(I^C/C)=$$

$$=0.45\cdot 0.85+0.3\cdot 0.77+0.25\cdot 0.6=\boxed{0.7635}$$

c) Nos piden calcular $P(C/I)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I)=\frac{P(C\cap I)}{P(I)}=\frac{P(C)P(I/C)}{1-P(I^C)}=\frac{0.25\cdot 0.4}{1-0.7635}=\boxed{\frac{200}{473}\simeq 0.4228}$$

Solución 2B:

a) La proporción muestral de los clientes que consideran que este nuevo sistema ayuda a reducir el tiempo de espera es $p = \frac{140}{210} = \frac{2}{3} \simeq 0.6667$.

Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32+2.33}{2} = 2.325$$

	0	0,01	0,02	0,03
0	0,5000	0,5040		
0,1	0,5398	0,5438	0,[illegible]78	0,[illegible]517
0,2	0,5793	0,5832	0,[illegible]71	0,[illegible]910
0,3	0,6179	0,6217	0,[illegible]55	0,[illegible]293
0,4	0,6554	0,6591	0,[illegible]28	0,[illegible]664
0,5	0,6915	0,6950	0,[illegible]85	0,[illegible]019
0,6	0,7257	0,7291	0,[illegible]24	0,[illegible]357
0,7	0,7580	0,7611	0,[illegible]42	0,[illegible]673
0,8	0,7881	0,7910	0,[illegible]39	0,[illegible]967
0,9	0,8159	0,8186	0,[illegible]12	0,[illegible]238
1	0,8413	0,8438	0,[illegible]61	0,[illegible]485
1,1	0,8643	0,8665	0,[illegible]86	0,[illegible]708
1,2	0,8849	0,8869	0,[illegible]88	0,[illegible]907
1,3	0,9032	0,9049	0,[illegible]66	0,[illegible]082
1,4	0,9192	0,9207	0,[illegible]22	0,[illegible]236
1,5	0,9332	0,9345	0,[illegible]57	0,[illegible]370
1,6	0,9452	0,9463	0,[illegible]74	0,[illegible]484
1,7	0,9554	0,9564	0,[illegible]73	0,[illegible]582
1,8	0,9641	0,9649	0,[illegible]56	0,[illegible]664
1,9	0,9713	0,9719	0,[illegible]26	0,[illegible]732
2	0,9772	0,9778	0,[illegible]83	0,[illegible]788
2,1	0,9821	0,9826	0,[illegible]30	0,[illegible]834
[illegible]	0,9861	0,9864	[illegible]	[illegible]
2,3	[illegible]	[illegible]	0,9898	0,9901
[illegible]	0,9918	0,9920	[illegible]	[illegible]

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{210}} \simeq 0.0756$$

El error máximo en la estimación sería de 0.0756.

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.6667 - 0.0756,\quad 0.6667 + 0.0756) = (0.5911,\quad 0.7423)$$

b) Con un nivel de confianza del 96 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \alpha/2 = 0.02 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05+2.06}{2} = 2.055$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838		

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.04 = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{2.055} = \sqrt{\frac{2}{9n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.04}{2.055}\right)^2 = \frac{2}{9n} \Rightarrow 9n\left(\frac{0.04}{2.055}\right)^2 = 2 \Rightarrow n = \frac{2}{9\left(\frac{0.04}{2.055}\right)^2} \simeq 586.53$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 587 clientes.

c) Llamamos X = Número de clientes de un grupo de 9 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera. Esta variable es una binomial de parámetros n = 9 y p = 1/3.

$X = B\left(9, \frac{1}{3}\right)$

Debemos calcular $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{9}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 + \binom{9}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8\right] = 1 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^9 + 9\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8\right] = \boxed{0.857}$$

La probabilidad de que entre esos 9 clientes haya al menos 2 que consideran que la aplicación no reducirá el tiempo de espera es de 0.857.

Textos Marea Verde

Bloque 3: Análisis:

3A. Un psicólogo ha colocado unos electrodos en la cabeza de un ratón para evaluar su actividad cerebral (medida en microvoltios μV) durante un experimento que ha durado 12 horas. La actividad registrada se ajustó a la siguiente función:

$$f(t)=\begin{cases}24t^2-96t+736, & 0\le t<4\\ t^3-30t^2+288t, & 4\le t\le 12\end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas (de 0 a 12)

a) Estudiar la continuidad de $f(t)$. ¿Es $f(t)$ derivable en t=4? **(0,75 puntos)**

b) Usando derivadas, estudiar el crecimiento y decrecimiento de esta función. ¿En qué momentos alcanzó el ratón los valores mínimo y máximo de actividad cerebral? ¿Cuáles fueron dichos valores? (0,75 puntos) **(1 punto)**

c) Representar gráficamente la función. ¿Cuál es la actividad cerebral del ratón a las $t=6$ horas? ¿En qué momentos anteriores la actividad cerebral fue exactamente 200 microvoltios menor? **(0,75 puntos)**

3B. En una plaza hay una superficie limitada por las curvas

$$y=3x^2-5x+3, \qquad y=x+3,$$

con x expresado en metros, donde se quiere hacer un jardín para instalar dentro una estatua conmemorativa.

a) Representar la superficie que se destina al jardín. **(0,75 puntos)**

b) ¿Cuánto mide dicha superficie? **(1 punto)**

c) La superficie se recubre con césped artificial, con un precio de 25,99 €/m^2. Para colocar el césped se requiere material adicional con un coste de 18 €/m^2, siendo además el coste de la mano de obra de 20 €/m^2. A los costes anteriores hay que añadir el impuesto que es un 7% para el césped y materiales y un 4% para la mano de obra. ¿Cuál es el coste total de la obra? **(0,75 puntos)**

Solución: 3A

a) En el intervalo $[0,4)$ la función tiene la expresión $f(t)=24t^2-96t+736$, que es una función polinómica y por tanto es continua.
En el intervalo $(4,12]$ la función tiene la expresión $f(t)=t^3-30t^2+288t$, que es una función polinómica y por tanto es continua.
Estudiamos la continuidad en $t=4$.

$$f(4)=4^3-30\cdot 4^2+288\cdot 4=736$$
$$\lim_{t\to 4^+} f(t)=\lim_{t\to 4^+} t^3-30t^2+288t=736$$
$$\lim_{t\to 4^-} f(t)=\lim_{t\to 4^-} 24t^2-96t+736=24\cdot 4^2-96\cdot 4+736=736$$

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=736\\ \lim_{t\to 4^+} f(t)=736\\ \lim_{t\to 4^-} f(t)=736\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{t\to 4^+} f(t)=\lim_{t\to 4^-} f(t)=f(4)=736$$

Textos Marea Verde

La función es continua en $t=4$. La función es continua en $[0,12]$.

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{4\}$ es $f'(t)=\begin{cases}48t-96, & 0\le t<4\\ 3t^2-60t+288, & 4<t\le 12\end{cases}$.

Comprobamos si la función es derivable en $t=4$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left.\begin{aligned} f'(4^-)&=\lim_{t\to 4^-} f'(t)=\lim_{t\to 4^-} 48t-96=48\cdot 4-96=96\\ f'(4^+)&=\lim_{t\to 4^+} f'(t)=\lim_{t\to 4^+} 3t^2-60t+288=3\cdot 4^2-60\cdot 4+288=96\end{aligned}\right\}\Rightarrow f'(4^-)=f'(4^+)=96$$

La función es derivable en $t=4$.

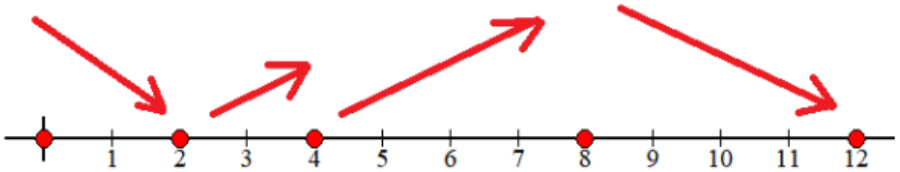
b) La derivada de la función es $f'(t)=\begin{cases}48t-96, & 0\le t<4\\ 3t^2-60t+288, & 4\le t\le 12\end{cases}$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(t)=0\Rightarrow\begin{cases}48t-96=0\to 48t=96\to \boxed{t=\dfrac{96}{48}=2}\in[0,4)\\ 3t^2-60t+288=0\to t^2-20t+96=0\to t=\dfrac{20\pm\sqrt{(-20)^2-4\cdot 96}}{2}=\\ =\dfrac{20\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{20+4}{2}=\boxed{12}\in(4,12]\\ \dfrac{20-4}{2}=\boxed{8}\in(4,12]\end{cases}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y despues de los valores críticos obtenidos, añadiendo el momento de cambio de definición.

- En el intervalo $[0,2)$ consideramos $t=1$ y la derivada vale $f'(1)=48\cdot 2-96=-48<0$. La función decrece en $[0,2)$.
- En el intervalo $(2,4)$ consideramos $t=3$ y la derivada vale $f'(3)=48\cdot 3-96=48>0$. La función crece en $(2,4)$.
- En el intervalo $(4,8)$ consideramos $t=5$ y la derivada vale $f'(5)=3\cdot 5^2-60\cdot 5+288=63>0$. La función crece en $(4,8)$.
- En el intervalo $(8,12)$ consideramos $t=10$ y la derivada vale $f'(10)=3\cdot 10^2-600+288=-12<0$. La función decrece en $(8,12)$.

La función decrece en $[0,2)\cup(8,12]$ y crece en $(2,8)$.
La función sigue el esquema siguiente.

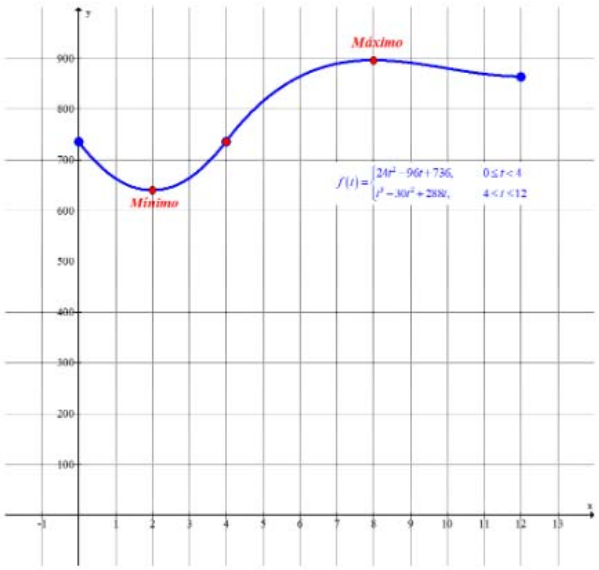


La función alcanza un mínimo relativo en $t=2$ y un máximo relativo en $t=8$.
Estos son máximo y mínimo relativos, faltaría compararlo con los valores de la función en los extremos del intervalo para determinar si son máximo o/y mínimo absoluto.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=24\cdot 0^2-96\cdot 0+736=736 \\ f(2)=24\cdot 2^2-96\cdot 2+736=640 \ \textit{Mínimo} \\ f(8)=8^3-30\cdot 8^2+288\cdot 8=896 \ \textit{Máximo} \\ f(12)=12^3-30\cdot 12^2+288\cdot 12=864 \end{array}\right\}$$

El valor mínimo de actividad cerebral se produce a las 2 horas y tiene un valor de 640 μV.
El valor máximo de actividad cerebral se produce a las 8 horas y tiene un valor de 896 μV.

c) Representamos la gráfica de la función usando todos los puntos de la gráfica obtenidos en los apartados anteriores.

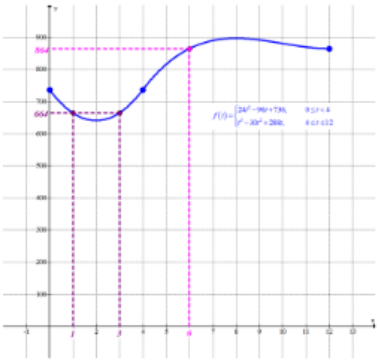


Para $t=6$ la función vale $f(6)=6^3-30\cdot 6^2+288\cdot 6=864$. La actividad cerebral es de 864 microvoltios.
Buscamos cuando antes de la sexta hora la actividad cerebral es 864 – 200 = 664 micovolitos.
En la gráfica de la función se aprecia que este valor se alcanza antes de $t=4$.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=664 \\ t\in(0,4) \end{array}\right\} \Rightarrow 24t^2-96t+736=664 \Rightarrow 24t^2-96t+72=0 \Rightarrow t^2-4t+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4-2}{2}=\boxed{1=t}\\ \frac{4+2}{2}=\boxed{3=t}\end{cases}$$

Una actividad cerebral de 664 μV se consigue en la hora 1 y en la hora 3.



Solución 3B:

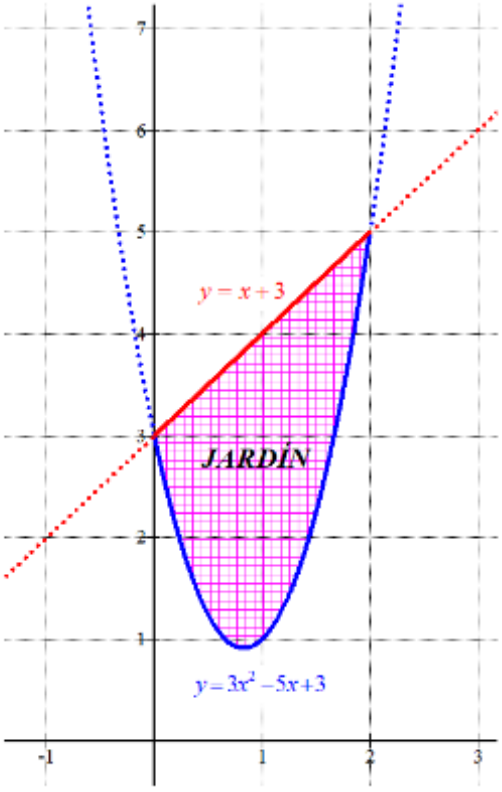
a) Debemos representar la gráfica de una parábola y de una recta. Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$3x^2-5x+3=x+3 \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos el recinto del jardín.

x	$y=3x^2-5x+3$
0	3
1	1
2	5

x	$y=x+3$
0	3
1	4
2	5



b) Hallamos la superficie del jardín calculando la integral definida entre 0 y 2 de la diferencia de las dos funciones.

$$Sperficie=\int_0^2 x+3-\left(3x^2-5x+3\right)dx=\int_0^2 x+3-3x^2+5x-3dx=$$

$$=\int_0^2 -3x^2+6xdx=\left[-x^3+3x^2\right]_0^2=\left[-2^3+3\cdot 2^2\right]-\left[-0^3+3\cdot 0^2\right]=-8+12=\boxed{4\,m^2}$$

La zona dedicada al jardín tiene una superficie de 4 metros cuadrados.

Textos Marea Verde

c) El cesped artificial necesario tiene un coste de $25{,}99\ €/m^2 \cdot 4 = 103.96\ €$.
El material adicional cuesta $18 \cdot 4 = 72\ €$.
Todos los materiales cuestan $103.96 + 72 = 175.96\ €$.
El coste de la mano de obra es $20 \cdot 4 = 80\ €$.
El impuesto cuesta $0.07 \cdot 175.96 + 80 \cdot 0.04 = 15.5172$.
Sumamos el coste del material, la mano de obra y los impuestos para obtener el coste total.

$$175.96 + 80 + 15.5175 = 271.4772\ €$$

El coste total de la obra es de 271.4772 €.

Bloque 4: Álgebra:

4A:

4A. El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€ para ampliar la capacidad de almacenamiento de su centro de datos, al que se encuentran conectados los 700 ordenadores que dan servicio a la administración. Para ello, el Ayuntamiento puede adquirir discos duros SATA de 9,6 terabytes (Tb) y discos duros SSD de 1,2 Tb de capacidad. Cada disco SATA es capaz de dar servicio a 100 ordenadores y cuesta 200€. En cambio, los discos SSD pueden dar servicio a un máximo de 50 ordenadores y cuestan 100€ cada uno. De acuerdo con un estudio realizado por los técnicos, para garantizar una adecuada calidad de servicio, será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco.

a) Formular el correspondiente programa de programación lineal. **(1 punto)**
b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo deben instalarse para conseguir la máxima capacidad de almacenamiento? Una vez instalados, ¿cuál es la capacidad media disponible por ordenador? **(0,75 puntos)**

4B. Los huéspedes de un hotel pueden elegir entre: Solo Alojamiento (SA), Alojamiento y Desayuno (AD), y Todo Incluido (TI). Se sabe que el número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento y que, por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno. Además, si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**
b) ¿Cuántos clientes hay en cada régimen de alojamiento? **(1 punto)**

Solución 4A:

a) Llamamos x = número de discos SATA e y = número de discos SSD.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Nº ordenadores	Tb	Coste
Nº de discos SATA (x)	100x	9.6x	200x
Nº de discos SSD (y)	50y	1.2y	100y
TOTAL	$100x+50y$	$9.6x+1.2y$	$200x+100y$

La función que deseamos maximizar la capacidad de almacenamiento $C(x,y)=9.6x+1.2y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$
"El Ayuntamiento dispone de un presupuesto de 4000€" → $200x+100y\leq 4000$.
"Deben conectarse 700 ordenadores" → $100x+50y\geq 700$.
"Será necesario instalar como mínimo 30 discos duros en total, con al menos una unidad de cada tipo de disco" → $x+y\geq 30,\ x\geq 1;\ y\geq 1$

Textos Marea Verde

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 200x+100y\le 4000 \\ 100x+50y\ge 700 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 1;\ \ y\ge 1 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\le 40 \\ 2x+y\ge 14 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 1;\ \ y\ge 1 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x+y=40$

x	$y=40-2x$
0	40
10	20
20	0

$2x+y=14$

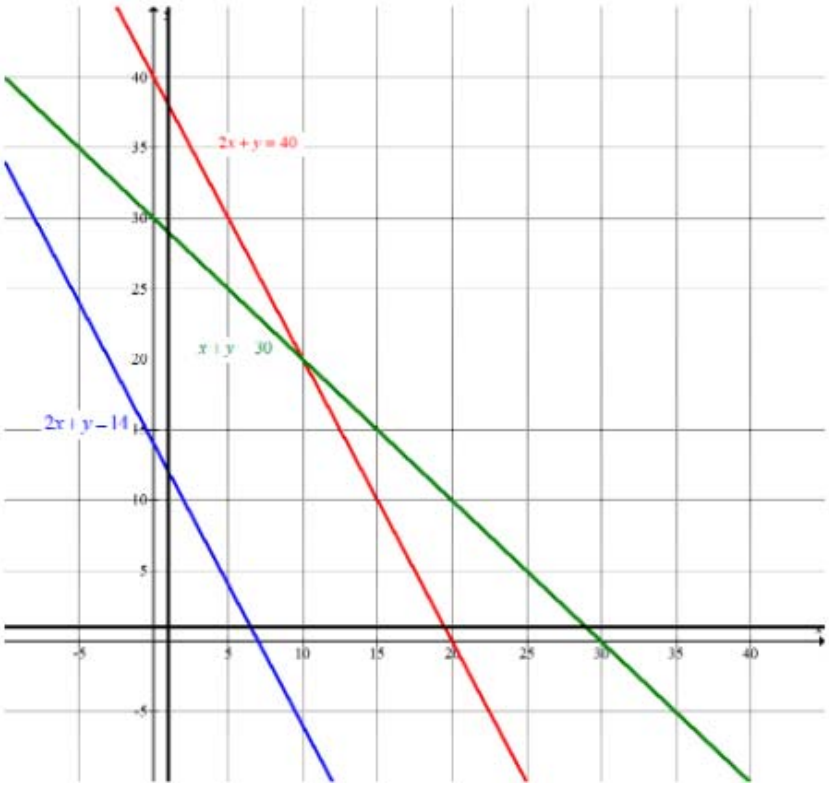
x	$y=14-2x$
0	14
5	4
7	0

$x+y=30$

x	$y=30-x$
1	29
10	20
29	1

$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

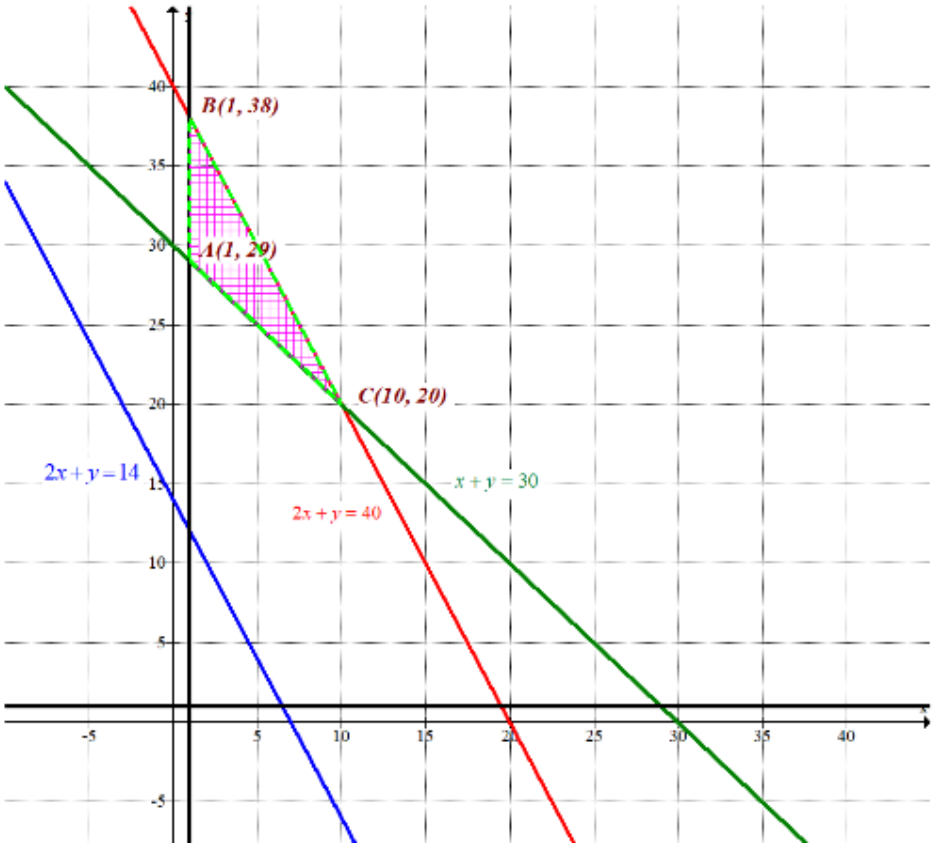
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 40 \\ 2x+y\ge 140 \\ x+y\ge 30 \\ x\ge 1;\ \ y\ge 1 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul y verde, a la derecha de la recta vertical negra.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.

BY NC SA
Textos Marea Verde



Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(1, 29), B(1, 38) y C(10, 20).

c) Valoramos la función capacidad de almacenamiento $C(x,y)=9.6x+1.2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(1, 29) → $C(1,29)=9.6\cdot1+1.2\cdot29=44.4$
B(1, 38) → $C(1,38)=9.6\cdot1+1.2\cdot38=55.2$
C(10, 20) → $C(10,20)=9.6\cdot10+1.2\cdot20=120$ *Máximo*

El almacenamiento máximo es de 120 Tb y se consigue en el vértice C(10, 20), que significa instalar 10 discos SATA y 20 discos SSD.

La capacidad media es de $\frac{120}{700}=\frac{6}{35}\ Tb$ por ordenador.

LA RECTA AZUL NO PINTA MUCHO ¡ALGO NO CUADRA!

Solución 4B:

a) Llamamos "x" al número de clientes en SA, "y" al número de clientes en AD y "z" al número de clientes en TI.

"El número de clientes en Todo Incluido es el doble que en Solo Alojamiento" → $z = 2x$.
"Por cada tres clientes en Solo Alojamiento, hay dos en Alojamiento y Desayuno" →

$$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow y \\ 3 \longrightarrow 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 3y$$

"Si se marcharan 39 clientes de Todo Incluido, la suma de los que están en los otros dos regímenes sería igual a los que quedan en Todo Incluido" → $z - 39 = x + y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} z = 2x \\ 2x = 3y \\ z - 39 = x + y \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2x \\ 2x = 3y \\ z - 39 = x + y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = 3y \\ 2x - 39 = x + y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = 3y \\ x = y + 39 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(y + 39) = 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y + 78 = 3y \Rightarrow \boxed{78 = y} \Rightarrow \boxed{x = 78 + 39 = 117} \Rightarrow \boxed{z = 2 \cdot 117 = 234}$$

Hay 117 clientes en Solo Alojamiento, 78 en Alojamiento y Desayuno, 234 en Todo Incluido.

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Instrucciones: La pregunta 1 es obligatoria. Además, elegir un máximo de 3 preguntas, eligiendo UNA entre 2A y 2B, UNA entre 3A y 3B y UNA entre 4A y 4B.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Estadística

1. Se quiere estimar el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. Suponiendo que el sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €:

a) Hallar el intervalo de confianza del 95% para el sueldo medio de un trabajador. **(1 punto)**

b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 15 €, con una confianza del 98%, determinar el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir. **(1 punto)**

c) Si se considera el valor 1480 como sueldo medio poblacional, y se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 €? **(0,5 puntos)**

Bloque 2: Estadística

2A. En un estudio sobre el país de origen de los cruceristas que visitan las Islas Canarias se ha seleccionado una muestra aleatoria de 196 cruceristas, de los cuales 34 procedían de Alemania.

a) Determinar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de cruceristas procedentes de Alemania. **(0,75 puntos)**

b) Si se deseara estimar dicha proporción con un margen de error del 2% y una confianza del 95% ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra? **(1 punto)**

c) De los 196 cruceristas anteriores se selecciona al azar un grupo de 5 para una entrevista en la TV. ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho grupo haya al menos un alemán? **(0,75 puntos)**

2B. Determinados productos envasados de larga duración se transportan cada semana, entre dos ciudades españolas, por carretera (el 42%), por tren (el 47%) y por avión (el resto). Por causas diversas, las entregas en destino sufren retraso en el 10%, el 5% y el 7% de los envíos, respectivamente.

a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades. **(0,5 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que, en una determinada semana, los envíos se entreguen en destino sin retrasos. **(1 punto)**

c) Sabiendo que se ha producido retraso en la entrega en destino, ¿cuál es la probabilidad de que el envío se haya realizado por tren? **(1 punto)**

Bloque 3: Análisis:

3A. Una empresa canaria ha decidido comercializar una bebida refrescante con zumo de aloe vera ecológico. El número de bebidas vendidas (en miles de unidades), durante los primeros seis meses tras el lanzamiento, viene dado por la función:

$$A(t)=\begin{cases}12-t(t-2), & 0\le t\le 3\\ \dfrac{5t+12}{3}, & 3<t\le 6\end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses.

(a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante los 6 primeros meses tras el lanzamiento de la bebida. **(1 punto)**

Textos Marea Verde

(b) Estudiar, usando las derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuáles fueron los valores mínimo y máximo de unidades vendidas y en qué meses se produjeron dichos valores? **(1 punto)**

(c) Dibujar la gráfica de la función A(t). A la vista de la información proporcionada por la función $A(t)$, y considerando que el incremento de ventas solo se consigue mediante campañas publicitarias, ¿crees que la empresa contrató servicios de publicidad previos al lanzamiento? ¿En algún momento tuvo que realizar un refuerzo de la campaña publicitaria? **(0,5 puntos)**

3B. El ayuntamiento de una ciudad está renovando un parque y va a construir un lago artificial con forma curva, delimitado por un sendero recto. El parque tiene forma rectangular y sus dimensiones (en metros) van de 0 a 50 en el eje x y de 0 a 90 en el eje y. La silueta del lago sigue la función $y = \frac{-2}{10}x^2 + 11x - 70$ (metros), y se sitúa al norte del sendero, definido por la recta $y = x + 10$

a) Representar el parque después de que esté terminada su renovación. **(0,75 puntos)**

b) Calcular la superficie del lago. **(1 punto)**

c) La superficie del parque situada al norte del sendero se va a plantar con flores y la situada al sur con césped. Calcular el coste de renovación del parque si el coste de construcción del lago supone 1000 €/m^2, la zona de flores 180 €/m^2 y la zona de césped 110 €/m^2. **(0,75 puntos)**

Bloque 4: Álgebra:

4A. Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicas y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicas y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**

c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

4B. En la cafetería "*Desayuna como un mencey*" ofrecen desayunos ecológicos y saludables, compuestos por batidos de frutas, yogur con cereales y tortitas. Tres amigos han ido en tres ocasiones a desayunar. El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros. Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros. Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**

b) ¿Qué precio tienen los batidos, yogures y las tortitas en esta cafetería? **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.

1. Se quiere estimar el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. Suponiendo que el sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €:

a) Hallar el intervalo de confianza del 95% para el sueldo medio de un trabajador. **(1 punto)**

b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 15 €, con una confianza del 98%, determinar el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir. **(1 punto)**

c) Si se considera el valor 1480 como sueldo medio poblacional, y se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector, ¿cuál es la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 €? **(0,5 puntos)**

Solución:

X = el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. X = N(μ, 250).

a) La muestra es de tamaño n = 625 trabajadores. La media muestral es $\bar{x} = 1480\,€$

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Textos Marea Verde

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}} = 19.6 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{y} - Error, \bar{y} + Error\right) = (1480 - 19.6,\ 1480 + 19.6) = (1460.4,\ 1499.6)$$

b) Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$

	0	0,01	0,02	0,03
0	0,5000	0,5040		
0,1	0,5398	0,5438		
0,2	0,5793	0,5832		
0,3	0,6179	0,6217		
0,4	0,6554	0,6591		
0,5	0,6915	0,6950		
0,6	0,7257	0,7291		
0,7	0,7580	0,7611		
0,8	0,7881	0,7910		
0,9	0,8159	0,8186		
1	0,8413	0,8438		
1,1	0,8643	0,8665		
1,2	0,8849	0,8869		
1,3	0,9032	0,9049		
1,4	0,9192	0,9207		
1,5	0,9332	0,9345		
1,6	0,9452	0,9463		
1,7	0,9554	0,9564		
1,8	0,9641	0,9649		
1,9	0,9713	0,9719		
2	0,9772	0,9778		
2,1	0,9821	0,9826		
	0,9861	0,9864		
2,3			0,9898	0,9901
	0,9918	0,9920		

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} < 15 \Rightarrow 2.325 \cdot 250 < 15\sqrt{n} \Rightarrow$$

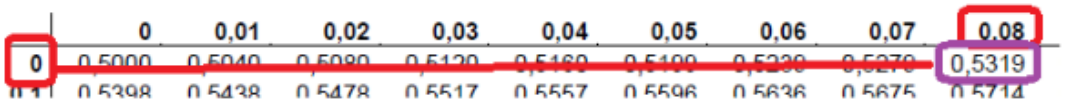
$$\Rightarrow \frac{581.25}{15} < \sqrt{n} \Rightarrow n > \left(\frac{581.25}{15}\right)^2 \Rightarrow \boxed{n > 1501.5625}$$

El tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir es de 1502 trabajadores.

c) X = el sueldo medio de los trabajadores de cierto sector. X = N(1480, 250).
Calculamos $P(X \geq 1500)$.

$$P(X \geq 1500) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{1500 - 1480}{250}\right) = P(Z \geq 0.08) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.08) = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.5319 = \boxed{0.4681}$$



La probabilidad de que un trabajador gane más de 1500 € es de 0.4681. Si se eligen al azar y de manera independiente dos trabajadores del sector la probabilidad de que cada uno de ellos gane más de 1500 € vale $0.4681 \cdot 0.4681 = 0.2191$.

Bloque 2:

2A. En un estudio sobre el país de origen de los cruceristas que visitan las Islas Canarias se ha seleccionado una muestra aleatoria de 196 cruceristas, de los cuales 34 procedían de Alemania.

a) Determinar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de cruceristas procedentes de Alemania. **(0,75 puntos)**

b) Si se deseara estimar dicha proporción con un margen de error del 2% y una confianza del 95% ¿cuál debería ser el tamaño de la muestra? **(1 punto)**

c) De los 196 cruceristas anteriores se selecciona al azar un grupo de 5 para una entrevista en la TV. ¿Cuál es la probabilidad de que en dicho grupo haya al menos un alemán? **(0,75 puntos)**

2B. Determinados productos envasados de larga duración se transportan cada semana, entre dos ciudades españolas, por carretera (el 42%), por tren (el 47%) y por avión (el resto). Por causas diversas, las entregas en destino sufren retraso en el 10%, el 5% y el 7% de los envíos, respectivamente.

a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades. **(0,5 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que, en una determinada semana, los envíos se entreguen en destino sin retrasos. **(1 punto)**

c) Sabiendo que se ha producido retraso en la entrega en destino, ¿cuál es la probabilidad de que el envío se haya realizado por tren? **(1 punto)**

Solución 2A:

a) La proporción muestral de los cruceristas alemanes que visitan las Islas Canarias es

$$p = \frac{34}{196} = \frac{17}{98} \simeq 0.1735.$$

Con un nivel de confianza del 98 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32+2.33}{2} = 2.325$$

	0	0,01	0,02	0,03
0	0,5000	0,5040		
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834
	0,9861	0,9864		
2,3			0,9898	0,9901
	0,9918	0,9920		

Textos Marea Verde

Utilizamos la fórmula del error:

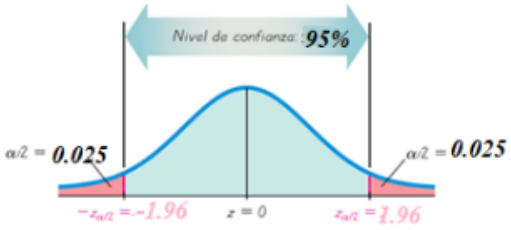
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{98-17}{98}}{196}} \simeq 0.0629$$

El error máximo en la estimación sería de 0.0629.
El intervalo de confianza es:

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.1735 - 0.0629,\quad 0.1735 + 0.0629) = (0.1106,\quad 0.2364)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Utilizamos la fórmula del error para despejar "n" siendo el error de 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{98-17}{98}}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.96} = \sqrt{\frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 = \frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\frac{17}{98} \cdot \frac{81}{98}}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} = 1377}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 1377 cruceristas.

c) Llamamos X = Número de cruceristas alemanes de un grupo de 5. Esta variable es una binomial de parámetros n = 5 y p = $\frac{17}{98}$. $X = B\left(5, \frac{17}{98}\right)$

Debemos calcular $P(X \geq 1)$.

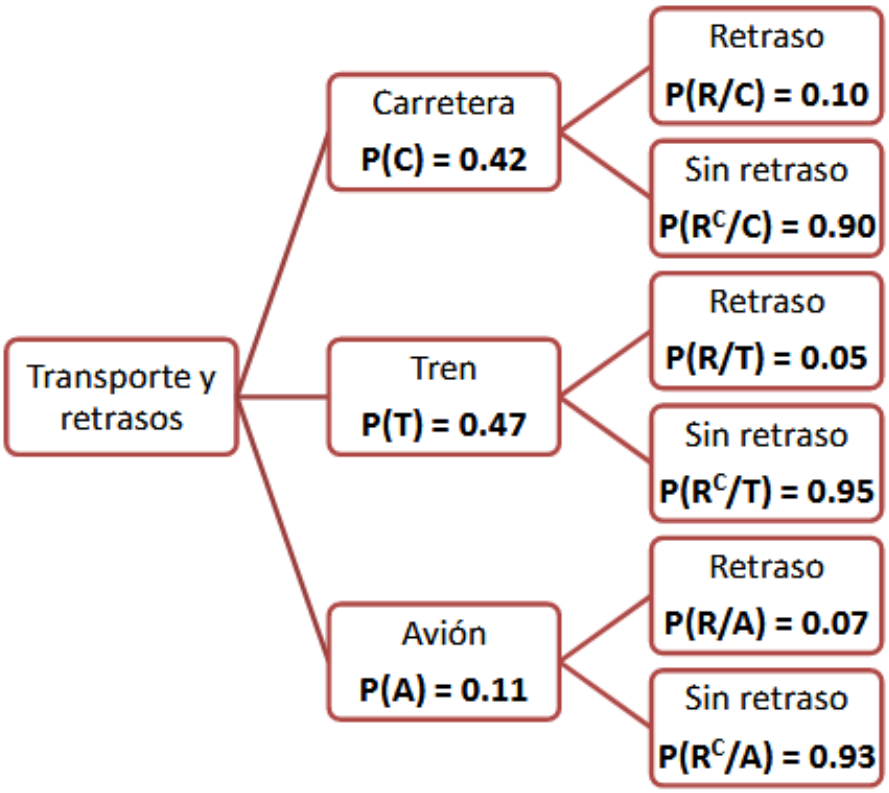
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{17}{96}\right)^0 \cdot \left(\frac{81}{96}\right)^5 = 1 - \left(\frac{81}{96}\right)^5 = \boxed{0.5724}$$

La probabilidad de que en un grupo de 5 cruceristas haya al menos un alemán es de 0.5724.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Solución 2B:

a) Llamamos C a "el producto llega por carretera", T a "el producto llega en tren", A a "el producto llega en avión" y R a "el producto llega con retraso". Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(R^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R^C) = P(C)P(R^C/C) + P(T)P(R^C/T) + P(A)P(R^C/A) =$$

$$= 0.42 \cdot 0.9 + 0.47 \cdot 0.95 + 0.11 \cdot 0.93 = \boxed{0.9268}$$

c) Nos piden calcular $P(T/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{P(T)P(R/T)}{1 - P(R^C)} = \frac{0.47 \cdot 0.05}{1 - 0.9268} = \boxed{\frac{235}{732} = 0.321}$$

Bloque 3:

3A. Una empresa canaria ha decidido comercializar una bebida refrescante con zumo de aloe vera ecológico. El número de bebidas vendidas (en miles de unidades), durante los primeros seis meses tras el lanzamiento, viene dado por la función:

$$A(t)=\begin{cases}12-t(t-2), & 0\le t\le 3\\ \dfrac{5t+12}{3}, & 3<t\le 6\end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses.

(a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función durante los 6 primeros meses tras el lanzamiento de la bebida. **(1 punto)**

(b) Estudiar, usando las derivadas, el crecimiento y decrecimiento de la función. ¿Cuáles fueron los valores mínimo y máximo de unidades vendidas y en qué meses se produjeron dichos valores? **(1 punto)**

(c) Dibujar la gráfica de la función A(t). A la vista de la información proporcionada por la función $A(t)$, y considerando que el incremento de ventas solo se consigue mediante campañas publicitarias, ¿crees que la empresa contrató servicios de publicidad previos al lanzamiento? ¿En algún momento tuvo que realizar un refuerzo de la campaña publicitaria? **(0,5 puntos)**

3B. El ayuntamiento de una ciudad está renovando un parque y va a construir un lago artificial con forma curva, delimitado por un sendero recto. El parque tiene forma rectangular y sus dimensiones (en metros) van de 0 a 50 en el eje x y de 0 a 90 en el eje y. La silueta del lago sigue la función $y=\dfrac{-2}{10}x^2+11x-70$ (metros), y se sitúa al norte del sendero, definido por la recta $y=x+10$

a) Representar el parque después de que esté terminada su renovación. **(0,75 puntos)**

b) Calcular la superficie del lago. **(1 punto)**

c) La superficie del parque situada al norte del sendero se va a plantar con flores y la situada al sur con césped. Calcular el coste de renovación del parque si el coste de construcción del lago supone 1000 €/m^2, la zona de flores 180 €/m^2 y la zona de césped 110 €/m^2. **(0,75 puntos)**

Solución 3A:

a) En el intervalo $[0,3)$ la función tiene la expresión $A(t)=12-t(t-2)=12-t^2+2t$, que es una función polinómica y por tanto es continua y derivable.

En el intervalo $(3,6]$ la función tiene la expresión $A(t)=\dfrac{5t+12}{3}=\dfrac{5}{3}t+4$, que es una función polinómica y por tanto es continua y derivable.

Estudiamos la continuidad en $t=3$.

$$\left.\begin{array}{l}A(3)=12-3(3-2)=9\\ \lim\limits_{t\to 3^+}A(t)=\lim\limits_{t\to 3^+}\dfrac{5t+12}{3}=\dfrac{15+12}{3}=9\\ \lim\limits_{t\to 3^-}A(t)=\lim\limits_{t\to 3^-}12-t(t-2)=9\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{t\to 3^+}A(t)=\lim_{t\to 3^-}A(t)=A(3)=9$$

La función es continua en $t=3$. La función es continua en $[0,6]$.

La derivada de la función en $[0,3)\cup(3,6]$ es $A'(t)=\begin{cases}-2t+2, & 0\le t<3\\ \dfrac{5}{3}, & 3<t\le 6\end{cases}$.

Comprobamos si la función es derivable en $t=3$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Comprobamos si la función es derivable en $t=3$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} A'(3^-)=\lim\limits_{t\to 3^-}A'(t)=\lim\limits_{t\to 3^-}-2t+2=-2\cdot 3+2=-4 \\ A'(3^+)=\lim\limits_{t\to 3^+}A'(t)=\lim\limits_{t\to 3^+}\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow A'(3^-)=-4\neq\frac{5}{3}=A'(3^+)$$

La función no es derivable en $t=3$. La función es derivable en $[0,3)\cup(3,6]$.

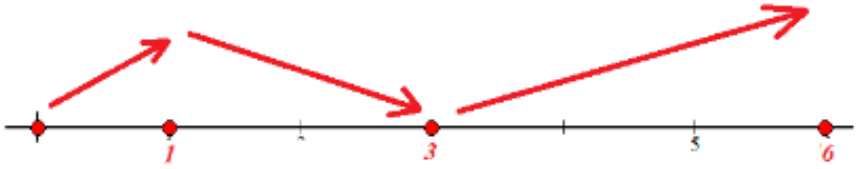
b) La derivada de la función es $A'(t)=\begin{cases}-2t+2, & 0\le t<3\\ \dfrac{5}{3}, & 3<t\le 6\end{cases}$. Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

$$A'(t)=0\Rightarrow\begin{cases}-2t+2=0\to -2t=-2\to \boxed{t=1}\in[0,3)\\ \dfrac{5}{3}=0\to \text{Imposible}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y despues de $t=1$ y $t=3$.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $t=0.5$ y la derivada vale $A'(0.5)=-2\cdot 0.5+2=1>0$. La función crece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ consideramos $t=2$ y la derivada vale $A'(2)=-2\cdot 2+2=-2<0$. La función decrece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3,6)$ la derivada es $A'(t)=\dfrac{5}{3}>0$. La función crece en $(3,6)$.

La función crece en $[0,2)\cup(3,6]$ y decrece en $(1,3)$.
La función sigue el esquema siguiente.



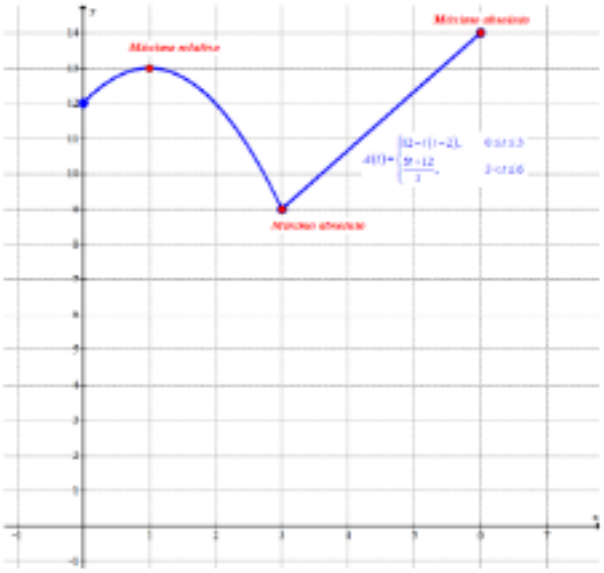
BY NC SA
Textos Marea Verde

La función alcanza un máximo relativo en $t=1$ y un mínimo relativo en $t=3$.
Estos son máximo y mínimo relativos, faltaría compararlo con los valores de la función en los extremos del intervalo para determinar si son máximo o/y mínimo absoluto.

$$\left.\begin{array}{l} A(0)=12-0(0-2)=12 \\ A(1)=12-1(1-2)=13 \\ A(3)=9 \textit{ Mínimo} \\ A(6)=\dfrac{5\cdot 6+12}{3}=14 \textit{ Máximo} \end{array}\right\}$$

El valor mínimo de unidades vendidas se produce a los 3 meses y es de 9000 unidades.
El valor máximo de unidades vendidas se produce a los 6 meses y es de 14000 unidades.

c) Representamos la gráfica de la función usando todos los datos obtenidos.



A la vista de la gráfica las ventas crecieron durante el primer mes, lo que indica que se hizo una campaña de publicidad previa al lanzamiento.
Como las ventas bajaron en los siguientes meses tuvo que realizar un refuerzo para que las ventas volvieran a crecer a partir del tercer mes.

Textos Marea Verde

Solución 3B:

a) Debemos representar la gráfica de una parábola y de una recta. Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

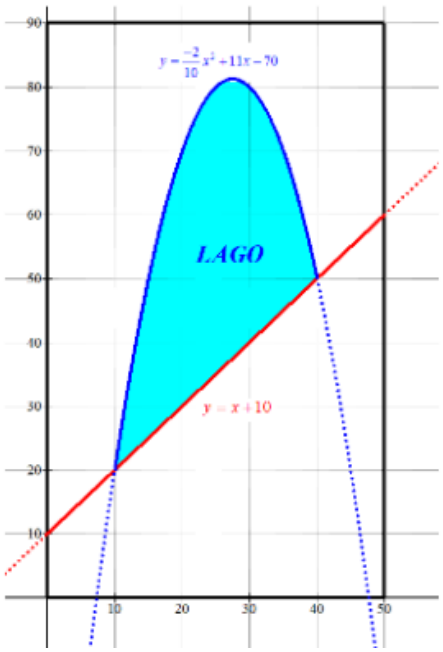
$$\frac{-2}{10}x^2+11x-70=x+10 \Rightarrow \frac{-1}{5}x^2+10x-80=0 \Rightarrow x^2-50x+400=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{50\pm\sqrt{(-50)^2-4\cdot 400}}{2}=\frac{50\pm 30}{2}=\begin{cases}\frac{50+30}{2}=\boxed{40=x}\\ \frac{50-30}{2}=\boxed{10=x}\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos el recinto del jardín.

x	$y=x+10$
0	10
10	20
40	50
50	60

x	$y=\frac{-2}{10}x^2+11x-70$
0	−70
10	20
40	50
50	−20



b) Hallamos la superficie del lago calculando la integral definida entre 10 y 40 de la diferencia de las dos funciones.

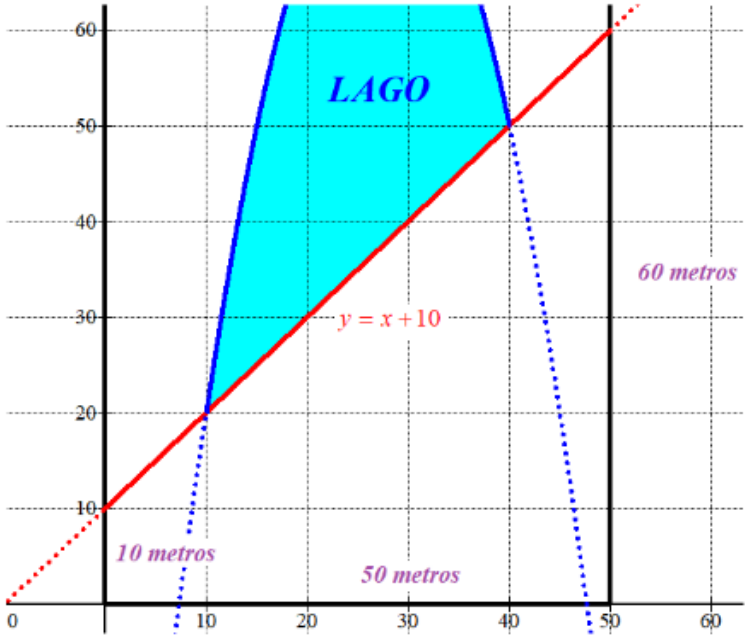
$$Superficie=\int_{10}^{40}\frac{-1}{5}x^2+11x-70-(x+10)\,dx=\int_{10}^{40}\frac{-1}{5}x^2+10x-80dx=$$

$$=\left[\frac{-x^3}{15}+5x^2-80x\right]_{10}^{40}=\left[\frac{-40^3}{15}+5\cdot 40^2-80\cdot 40\right]-\left[\frac{-10^3}{15}+5\cdot 10^2-80\cdot 10\right]=$$

$$=\frac{-64000}{15}+8000-3200+\frac{1000}{15}-500+800=\boxed{900\,m^2}$$

La zona dedicada al lago tiene una superficie de 900 metros cuadrados.

c) El parque tiene forma rectantular y una superficie de $90\cdot 50=4500$ metros cuadrados. El sendero lo divide en dos partes. Calculamos la superficie de la parte inferior.



Superficie $= \frac{60+10}{2} \cdot 50 = 1750$ metros cuadrados.

Esta parte del parque situada al sur del sendero se cubre con cesped que cuesta a 110 €/m^2, lo que supone un coste de $110 \cdot 1750 = 192500$ €.

El lago tiene una superficie de 900 metros cuadrados cuya construcción cuesta a 1000 €/m^2, lo que supone un coste de $900 \cdot 1000 = 900000$ €.

La parte norte fuera del lago tiene una superficie de 4500 – 900 – 1750 = 1850 metros cuadrados. Esta zona la cubrimos con flores a un precio de 180 €/m^2, lo que supone un coste de $180 \cdot 1850 = 333000$ €.

El coste total de la renovación es 192500 + 900000 + 333000 = 1.425.500 €.

Bloque 4:

4A. Un taller especializado repara aparatos eléctricos de dos tipos, A y B. La reparación de cada aparato tipo A precisa de la sustitución de 3 componentes electrónicas y requiere 4 horas de trabajo. La reparación de cada aparato tipo B precisa de la sustitución de 5 componentes electrónicas y requiere 6 horas de trabajo. Si el taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo, y los beneficios que se obtienen por cada aparato A y B reparado son, respectivamente 80 y 130 euros

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal **(1 punto)**.
b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. **(0,75 puntos)**
c) ¿Cuántos aparatos de cada tipo se deben reparar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? **(0,75 puntos)**

4B. En la cafetería "*Desayuna como un mencey*" ofrecen desayunos ecológicos y saludables, compuestos por batidos de frutas, yogur con cereales y tortitas. Tres amigos han ido en tres ocasiones a desayunar. El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros. Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros. Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. **(1,5 puntos)**
b) ¿Qué precio tienen los batidos, yogures y las tortitas en esta cafetería? **(1 punto)**

Solución 4A:

a) Llamamos x = número de aparatos A que repara e y = número de aparatos B que repara. Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	N° componentes	Horas de trabajo	Beneficios
N° de aparatos A (x)	3x	4x	80x
N° de aparatos B (y)	5y	6y	130y
TOTAL	$3x+5y$	$4x+6y$	$80x+130y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x,y)=80x+130y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$
"El taller dispone de 480 componentes electrónicas y de 600 horas de trabajo" → $3x+5y\leq 480;\ 4x+6y\leq 600$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+5y\leq 480 \\ 4x+6y\leq 600 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+5y\leq 480 \\ 2x+3y\leq 300 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$3x+5y=480$

x	$y=\frac{480-3x}{5}$
0	96
60	60
160	0

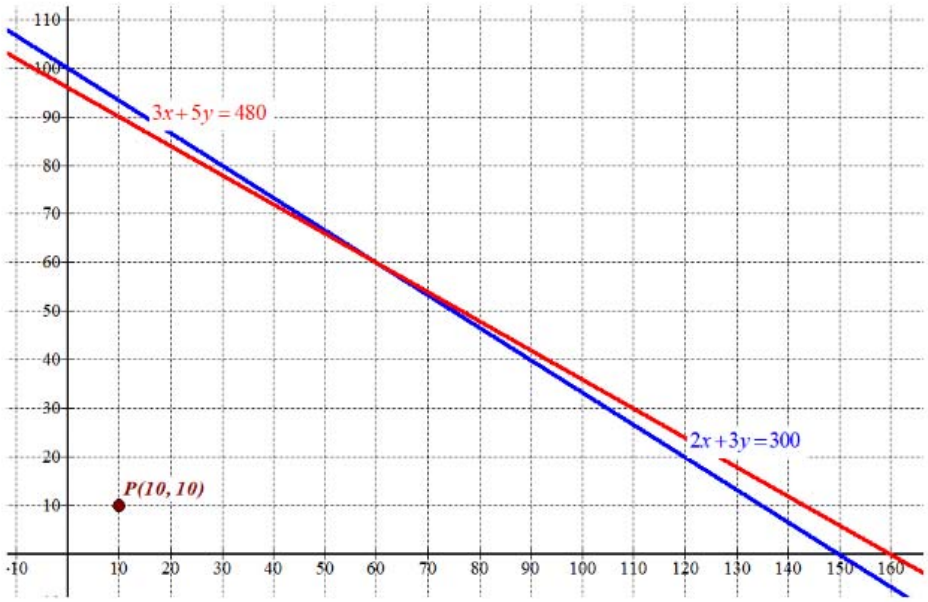
$2x+3y=300$

x	$y=\frac{300-2x}{3}$
0	100
60	60
150	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

Textos Marea Verde

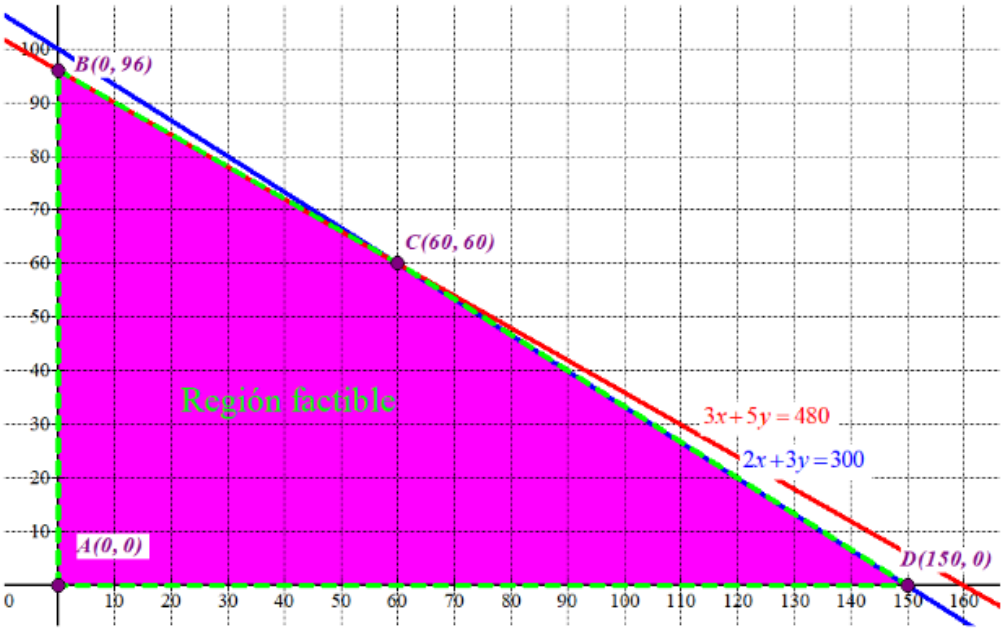


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+5y\le 480 \\ 2x+3y\le 300 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+50\le 480 \\ 20+30\le 300 \\ 10\ge 0;\ \ 10\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las restricciones. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(0, 0), B(0, 96), C(60, 60) y D(150, 0).
Las coordenadas del vértice C las obtenemos resolviendo el sistema siguiente.

$$\left.\begin{array}{l} -2\times \rightarrow 3x+5y=480 \\ 3\times \rightarrow 2x+3y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -6x-10y=-960 \\ 6x+9y=900 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$-y=-60 \Rightarrow y=60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+300=480 \Rightarrow 3x=180 \Rightarrow x=60 \Rightarrow \boxed{C(60,60)}$$

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=80x+130y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 96) → $B(0,96)=80\cdot 0+130\cdot 96=12480$
C(60, 60) → $B(60,60)=80\cdot 60+130\cdot 60=12600$ Máximo
D(150, 0) → $B(150,0)=80\cdot 150+130\cdot 0=12000$

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=80x+130y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 96) → $B(0,96)=80\cdot 0+130\cdot 96=12480$
C(60, 60) → $B(60,60)=80\cdot 60+130\cdot 60=12600$ Máximo
D(150, 0) → $B(150,0)=80\cdot 150+130\cdot 0=12000$

El máximo beneficio se consigue en el vértice C(60, 60).
El máximo beneficio que se puede conseguir es de 12600 euros con la reparación de 60 aparatos tipo A y otros 60 del tipo B.

Textos Marea Verde

Solución 4B:

a) Llamamos "x" al precio de un batido de frutas, "y" al precio de un yogur con cereales y "z" al precio de una tortita.

"El primer día decidieron probar entre los tres dos batidos, una tortita y un yogur con cereales, pagando un total de 12,25 euros" → $2x+y+z=12.25$.

"Otro día aprovecharon que las tortitas tenían un descuento del 20% (pagan el 80%) y pidieron 3, acompañándolas con dos batidos, pagando un total de 13,90 euros" → $3\cdot 0.8\cdot z+2x=13.9$

"Ayer descubrieron que si pedían 3 batidos y 3 yogures con cereales pagarían un euro menos que si pedían 2 batidos, 2 yogures y 2 tortitas" → $3x+3y=2x+2y+2z-1$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=12.25 \\ 3\cdot 0.8\cdot z+2x=13.9 \\ 3x+3y=2x+2y+2z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y+z=12.25 \\ 2.4z+2x=13.9 \\ y=-x+2z-1 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=12.25 \\ 2.4z+2x=13.9 \\ y=-x+2z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-x+2z-1+z=12.25 \\ 2.4z+2x=13.9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=13.25 \\ 2.4z+2x=13.9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=13.25-3z \\ 2.4z+2x=13.9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2.4z+2(13.25-3z)=13.9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4z+26.5-6z=13.9 \Rightarrow -3.6z=-12.6 \Rightarrow \boxed{z=\frac{12.6}{3.6}=3.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=13.25-3\cdot 3.5=2.75} \Rightarrow \boxed{y=-2.75+2\cdot 3.5-1=3.25}$$

Un batido de frutaas cuesta 2.75 €, un yogur con cereales vale 3.25 € y por una tortita debemos pagar 3.5 €.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

Vídeos

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DBbDwCPh__JI

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DID3rtVTJHLU

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3DZImz7ayANb4

UC Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INDICACIONES

– El examen consta de 3 apartados. Cada apartado puede contener una o dos opciones. En el caso de aparecer dos opciones, se escogerá una que se deberá realizar íntegramente.
– En caso de resolver más opciones de las establecidas en cada apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
– Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
– Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
– Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1.

Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:

Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.

Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.

Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

Opción 2.

Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tuppers. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tuppers fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

Apartado 2 [4 puntos]. Realice las siguientes tareas a partir de esta función.

Dada la función $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases}(x-4)^2-4, & si\ x\le 6\\ 16-(x-10)^2, & si\ x>6\end{cases}$$

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Estudie la continuidad de la función (x).
Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función (x) con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.
Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la curva (x) y el eje de abscisas OX en el intervalo [2,6].

Apartado 3 [3 puntos].
Opción 1.
En un estudio sobre el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, se ha determinado que esta variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 minutos. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 alumnos, obteniendo un promedio de 180 minutos. Realice las siguientes tareas:
Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para el valor promedio del tiempo dedicado al ejercicio físico por semana.
Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de la media, con un nivel de confianza del 97,5%, sea de 5 minutos.

Opción 2.
En una cierta ciudad, el 45 % del censo vota al partido A, el 40 % al partido B y el 15 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 25 % de los votantes del partido A, el 45 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se escoge al azar un ciudadano censado. Realice las siguientes tareas que se plantean:
Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?
Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?
Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Apartado 1 [3 puntos].
Opción 1.
Una tienda gourmet prepara tres tipos de lotes para regalo: Lote Clásico a 20 euros, Lote Selección a 30 euros y Lote Premium a 45 euros. Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes, obteniéndose unos ingresos de 855 euros. Además, se sabe que el número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos. Realice las tareas que se describen a continuación:
Tarea 1.1A [1,2 PUNTOS]. Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de lotes vendidos de cada tipo ese día.
Tarea 1.1B [1 PUNTO]. Analice la compatibilidad de dicho sistema.
Tarea 1.1C [0,8 PUNTOS]. Si se puede, calcule cuántos lotes de cada tipo (Clásico, Selección y Premium) se vendieron ese día; y si no se puede, justifique por qué.

Solución:

1.1A Llamamos "x" al número de lotes Clásicos, "y" al número de lotes Selección y "z" al número de lotes Premium.
Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada.
"Un día concreto, la tienda vende un total de 33 lotes" → $x+y+z=33$.
"Se obtienen 855 €, siendo el precio de un lote Clásico de 20 €, de uno Selección de 30 € y de uno Premium de 45 €" → $20x+30y+45z=855$.
"El número de Lotes Clásicos vendidos fue el triple que el número de Lotes Selección vendidos" → $x=3y$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema: $\left.\begin{array}{l} x+y+z=33 \\ 20x+30y+45z=855 \\ x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrr} x+y+z=33 \\ 4x+6y+9z=171 \\ x-3y\quad\quad=0 \end{array}\right\}$.

1.1B Este sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 33 \\ 4 & 6 & 9 & 171 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0+9-12-6-0+27=18\neq 0$$

Al ser el determinante de A no nulo su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada también es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una solución única).

1.1C Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=33 \\ 4x+6y+9z=171 \\ x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+y+z=33 \\ 4\cdot 3y+6y+9z=171 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y+z=33 \\ 18y+9z=171 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=33-4y \\ 2y+z=19 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+33-4y=19 \Rightarrow -2y=-14 \Rightarrow \boxed{y=7} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=3\cdot 7=21} \\ \boxed{z=33-4\cdot 7=5} \end{array}\right.$$

Se vendieron 21 lotes Clásicos, 7 lotes Selección y 5 lotes Premium.

Problema 2:

Opción 2.
Una empresa fabrica dos tipos de envases: botellas de plástico y tuppers. Para su producción, dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible. Cada botella de plástico requiere 200 g de plástico rígido y 300 g de plástico flexible. Cada tupper requiere 400 g de plástico rígido y 100 g de plástico flexible. Además, la cantidad de tuppers fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas. El precio de venta de cada botella de plástico es de 5 euros, mientras que cada tupper se vende a 7 euros. Se pretende maximizar los ingresos. Realice las siguientes tareas:
Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos envases de cada tipo se deben fabricar para maximizar los ingresos?
Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden los ingresos obtenidos?

Solución:

1.2A Llamamos "x" = número de botellas de plástico e "y" = número de tuppers.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Plástico rígido	Plástico flexible	Ingresos
Nº botellas plástico (x)	$200x$	$300x$	$5x$
Nº tuppers (y)	$400y$	$100y$	$7y$
TOTAL	$200x+400y$	$300x+100y$	$5x+7y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los ingresos que vienen expresados como:

$$I(x,y)=5x+7y$$

Las restricciones son:

"Se dispone de 160 kg de plástico rígido y 100 kg de plástico flexible" → $200x+400y\le 160000;\ 300x+100y\le 100000$

"La cantidad de tuppers fabricados no debe superar en más de 100 unidades a la cantidad de botellas producidas" → $y\le 100+x$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}200x+400y\le 160000\\300x+100y\le 100000\\y\le 100+x\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y\le 800\\3x+y\le 1000\\y\le 100+x\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=800$

x	$y=\dfrac{800-x}{2}$
0	400
200	300
800	0

$3x+y=1000$

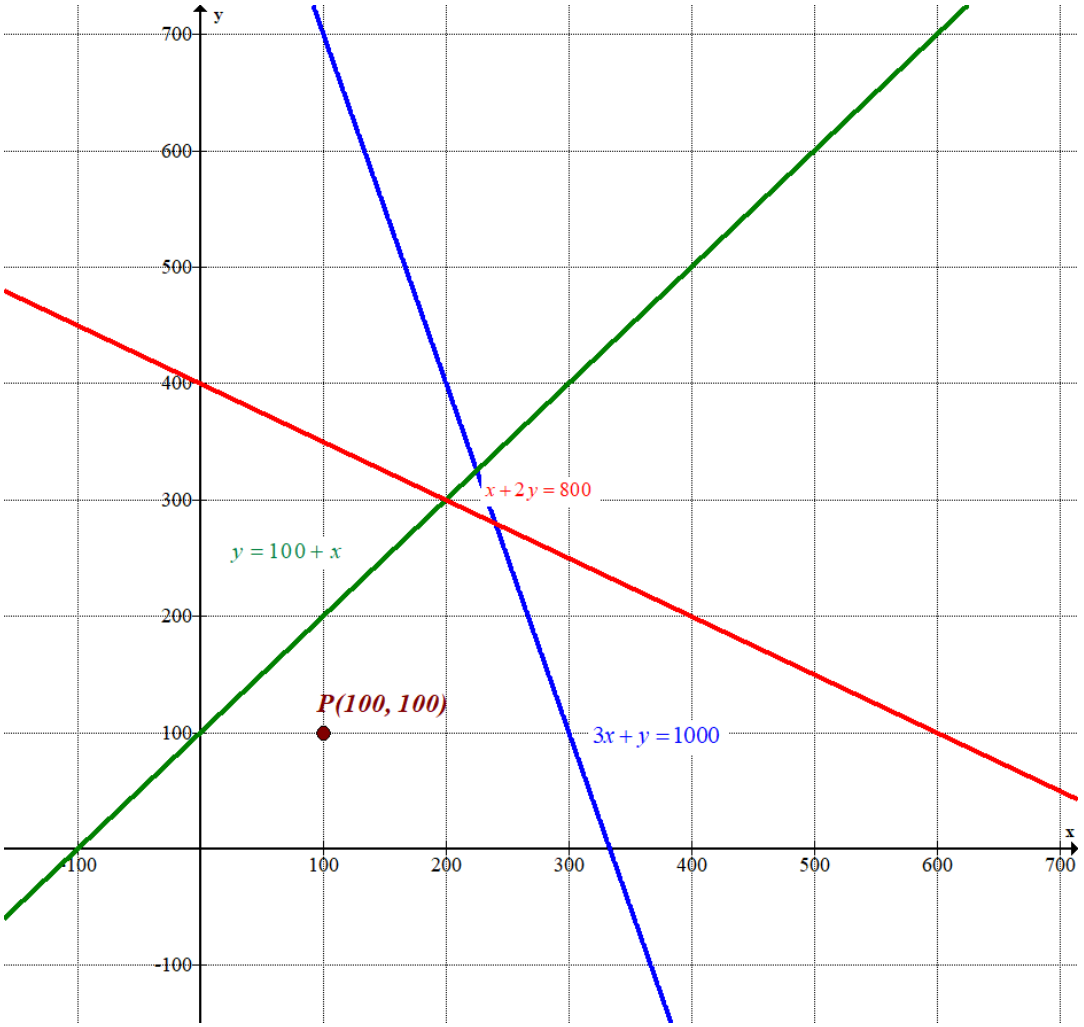
x	$y=1000-3x$
0	1000
300	100
$\dfrac{1000}{3}$	0

$y=100+x$

x	$y=100+x$
0	100
200	300

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

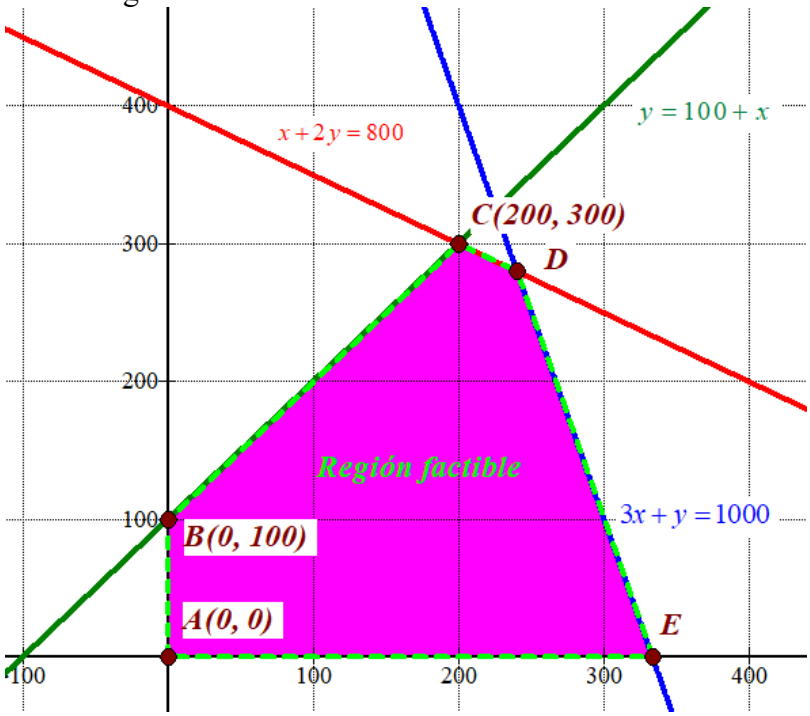


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 800 \\ 3x+y\leq 1000 \\ y\leq 100+x \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(100, 100) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100+200\le 800 \\ 300+100\le 1000 \\ 100\le 100+100 \\ 100\ge 0; 100\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices D y E.

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=800 \\ 3x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=800 \\ y=1000-3x \end{array}\right\} \Rightarrow x+2000-6x=800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x=-1200 \Rightarrow x=\frac{1200}{5}=240 \Rightarrow y=1000-3\cdot 240=280 \Rightarrow \boxed{D(240,280)}$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y=1000 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=1000 \Rightarrow x=\frac{1000}{3} \Rightarrow \boxed{E\left(\frac{1000}{3},0\right)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 100); C(200, 300), D(240, 280) y $E\left(\frac{1000}{3},0\right)$.

1.2C Valoramos la función objetivo $I(x,y)=5x+7y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 100) → $I(0,100)=5\cdot 0+7\cdot 100=700$

C(200, 300) → $I(200,300)=5\cdot 200+7\cdot 300=3100$

$D(240, 280) \rightarrow I(240,280) = 5\cdot 240 + 7\cdot 280 = 3160$ *Máximo*

$E\left(\frac{1000}{3},0\right) \rightarrow I\left(\frac{1000}{3},0\right) = 5\cdot\frac{1000}{3} + 7\cdot 0 = \frac{5000}{3} \approx 1666.67$

Los máximos ingresos se obtienen en el vértice D(240, 280). Los máximos ingresos se obtienen fabricando 240 botellas de plástico y 280 tuppers.

1.2D Los máximos ingresos que se pueden obtener son de 3160 €.

Problema 3:

Apartado 2 [4 puntos]. Realice las siguientes tareas a partir de esta función.
Dada la función (x)

$$f(x)=\begin{cases}(x-4)^2-4, & si\ x\le 6\\ 16-(x-10)^2, & si\ x>6\end{cases}$$

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Estudie la continuidad de la función (x).
Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función (x) con los ejes coordenados y realice un esbozo de la misma.
Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la curva (x) y el eje de abscisas OX en el intervalo [2,6].

Solución:

2.1A En el intervalo $(-\infty, 6)$ la función tiene la expresión $f(x)=(x-4)^2-4$ que es una función polinómica y por tanto, continua.
En el intervalo $(6, +\infty)$ la función tiene la expresión $f(x)=16-(x-10)^2$ que es una función polinómica y por tanto, continua.
Estudiamos la continuidad en el cambio de definición $x=6$.

$$\left.\begin{array}{l} f(6)=(6-4)^2-4=0\\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^-}(x-4)^2-4=0\\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+}16-(x-10)^2=16-(6-10)^2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^+} f(x)=f(6)=0$$

La función es continua en $x=6$. La función es continua en □ .

2.1B Hallamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

$$Eje\,X\Rightarrow f(x)=0\Rightarrow\begin{cases}(x-4)^2-4=0\Rightarrow(x-4)^2=4\Rightarrow\begin{cases}x-4=2\to\boxed{x=6}\in(-\infty,6]\\ x-4=-2\to\boxed{x=2}\in(-\infty,6]\end{cases}\\ 16-(x-10)^2=0\Rightarrow(x-10)^2=16\Rightarrow\begin{cases}x-10=4\to\boxed{x=14}\in(6,+\infty)\\ x-10=-4\to x=6\notin(6,+\infty)\end{cases}\end{cases}$$

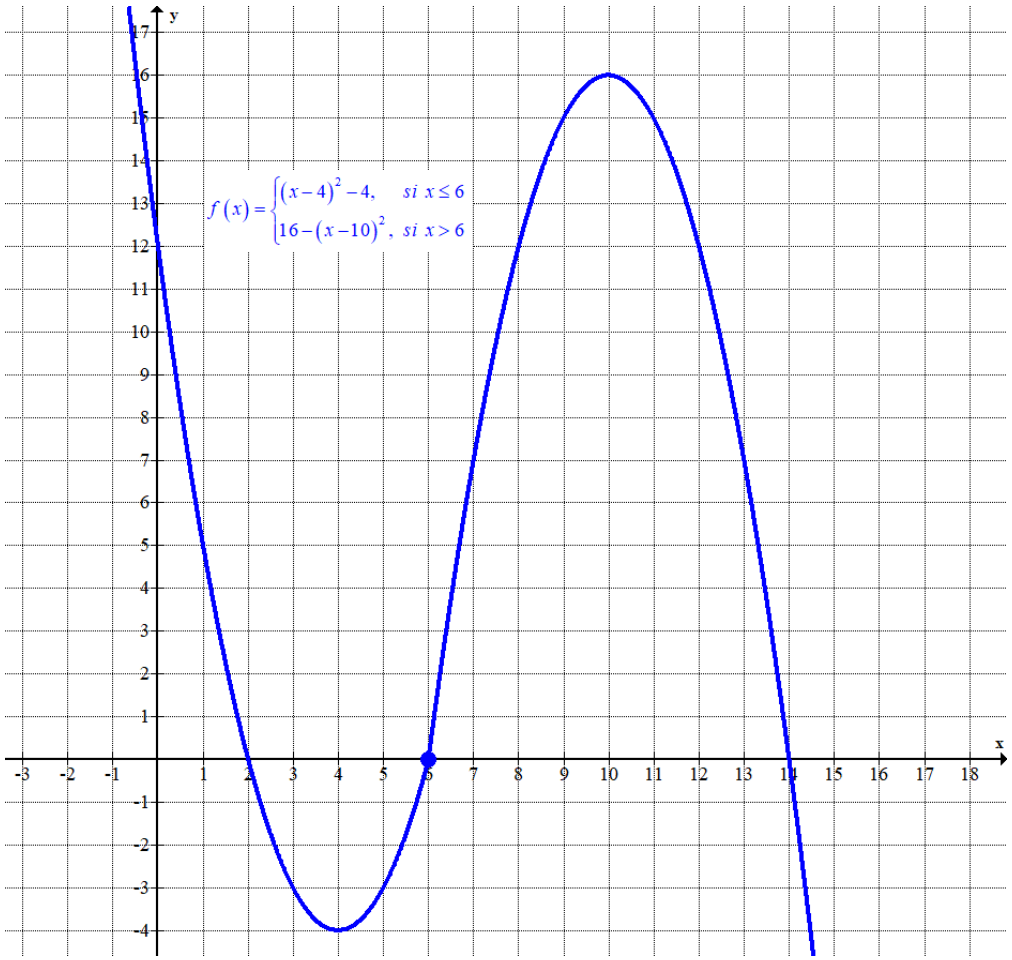
Los puntos de corte con el eje OX son A(2, 0), B(6, 0) y C(14, 0).

$$Eje\,Y\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=(0-4)^2-4=12$$

El punto de corte con el eje OY es el punto D(0, 12).

Sabemos que la gráfica son dos trozos de parábolas. Hallamos el vértice de cada una de ellas y dibujamos la gráfica de la función.

$$f'(x)=\left.\begin{cases}2(x-4), & si\ x<6\\ 2(x-10), & si\ x>6\end{cases}\right\}\Rightarrow\begin{cases}2(x-4)=0\rightarrow\boxed{x=4}\rightarrow V_1(4,-4)\\ 2(x-10)=0\rightarrow\boxed{x=10}\rightarrow V_2(10,16)\end{cases}$$



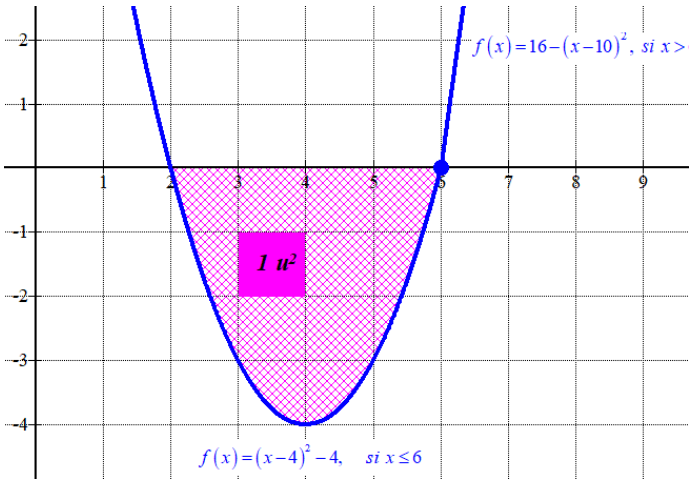
2.1C El área del recinto delimitado por la curva (x) y el eje de abscisas OX en el intervalo [2,6] lo representamos en el dibujo. Como la función es negativa en ese intervalo calculamos el valor del área como el valor absoluto de la integral definida entre 2 y 6 de la función.

$$\int_2^6 f(x)\,dx = \int_2^6 (x-4)^2 - 4\,dx =$$

$$= \left[\frac{(x-4)^3}{3} - 4x \right]_2^6 =$$

$$= \left[\frac{(6-4)^3}{3} - 4\cdot 6 \right] - \left[\frac{(2-4)^3}{3} - 4\cdot 2 \right] =$$

$$= \frac{8}{3} - 24 + \frac{8}{3} + 8 = \boxed{\frac{-32}{3}}$$



El área tiene un valor de $\frac{32}{3} \approx 10.667$ unidades cuadradas.

Problema 4:

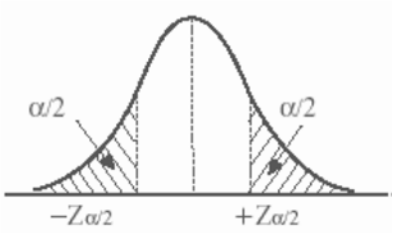
Apartado 3 [3 puntos].
Opción 1.
En un estudio sobre el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico, se ha determinado que esta variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 minutos. Se ha seleccionado una muestra aleatoria de 100 alumnos, obteniendo un promedio de 180 minutos. Realice las siguientes tareas:
Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para el valor promedio del tiempo dedicado al ejercicio físico por semana.
Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de la media, con un nivel de confianza del 97,5%, sea de 5 minutos.

Solución:

X = el tiempo semanal que los alumnos de Bachillerato dedican al ejercicio físico (en minutos).
X = N(**μ**, 25)
Tamaño de muestra = *n = 100*. Media muestral = $\bar{x} = 180$ minutos.

3.1A Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$$



z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9

Calculamos el valor del error.

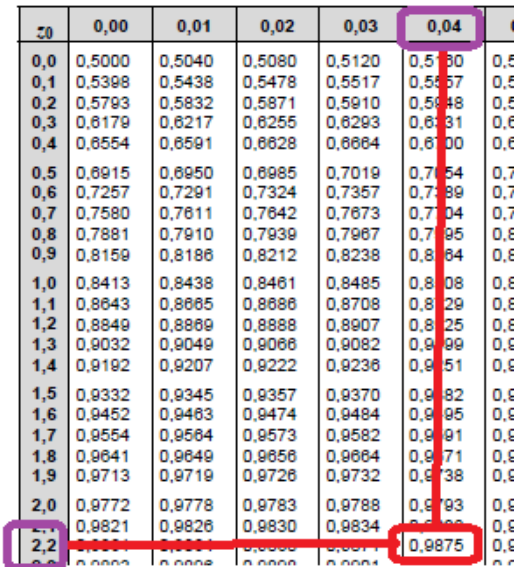
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{25}{\sqrt{100}} = 4.525 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(180 - 4.525, 180 + 4.525\right) = \left(175.475, 184.525\right)$$

3.1B Con un nivel de confianza del 97.5% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}975 \rightarrow \alpha = 0{,}025 \rightarrow \alpha/2 = 0'0125 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9875 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.24}$$



z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793
	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	
2,2					0,9875

Igualamos el error a 5 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 2.24 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5\sqrt{n} = 56 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{56}{5} \Rightarrow n = \left(\frac{56}{5}\right)^2 = 125.44$$

Como *n* debe ser entero y superior al "*n*" hallado:

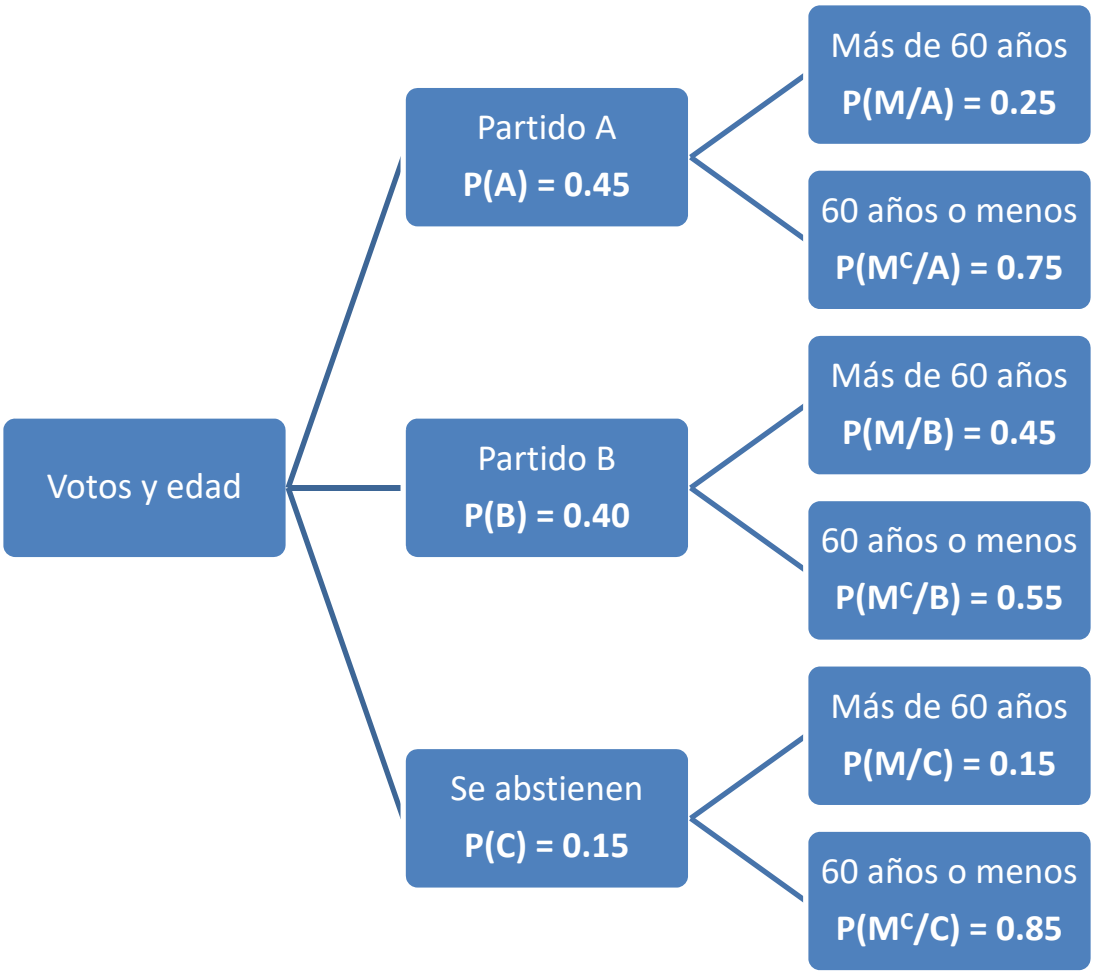
el tamaño mínimo de la muestra es de 126 estudiantes.

Problema 5:

Opción 2.
En una cierta ciudad, el 45 % del censo vota al partido A, el 40 % al partido B y el 15 % restante se abstiene. Se sabe, además, que el 25 % de los votantes del partido A, el 45 % de los del partido B y el 15 % de los que se abstienen son mayores de 60 años. Se escoge al azar un ciudadano censado. Realice las siguientes tareas que se plantean:
Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que vote al partido B y tenga como máximo 60 años?
Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?
Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si es mayor de 60 años, ¿cuál es la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones?

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.



3.2A Nos piden calcular $P\left(B \cap M^{C}\right)$.

$$P\left(B \cap M^{C}\right) = P\left(B\right) P\left(M^{C} / B\right) = 0.4 \cdot 0.55 = \boxed{0.22}$$

3.2B Nos piden calcular $P\left(M\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=0.45\cdot0.25+0.40\cdot0.45+0.15\cdot0.15=\boxed{0.315}$$

3.2C Nos piden calcular $P(C/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/M)=\frac{P(C\cap M)}{P(M)}=\frac{P(C)P(M/C)}{P(M)}=\frac{0.15\cdot0.15}{0.315}=\boxed{\frac{1}{14}\approx 0.0714}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos relativos a absolutos suponiendo que hay una población de 400 personas (elijo esta cifra para que los cálculos salgan exactos, de no conseguirlo la cambio por otra).

El 45 % votan al partido A, esto significa que el partido A tiene 0.45 · 400 = 180 votantes.
El 40 % votan al partido B, esto significa que 0.4 · 400 = 160 personas votan a B.
El resto se abstiene, es decir, 400 – 180 – 160 = 60 personas se abstienen.

El 25 % de los votantes de A son mayores de 60 años, es decir, 0.25 · 180 = 45 personas son mayores de 60 años y votantes del partido A.
El 45 % de los votantes de B son mayores de 60 años, es decir, 0.45 · 160 = 72 personas son mayores de 60 años y votantes del partido B.
El 15% de las personas que se abstienen son mayores de 60 años, es decir, 0.15 · 60 = 9 personas son mayores de 60 años y se abstienen.
Ponemos todos estos datos en una tabla para tenerlos mejor ordenados y claros.

	Mayores de 60 años	60 años o menos	TOTALES
Partido A	45		180
Partido B	72		160
Abstención	9		60
TOTALES			**400**

Completamos la tabla.

	Mayores de 60 años	60 años o menos	TOTALES
Partido A	45	**135**	180
Partido B	72	**88**	160
Abstención	9	**51**	60
TOTALES	**126**	**274**	**400**

Aplicando la regla de Laplace respondemos a las cuestiones planteadas.

Tarea 3.2A. Hay 88 personas que votan al partido B y que son menores de 60 años. La probabilidad de que la persona elegida al azar vote al partido B y tenga como máximo 60 años vale $\frac{88}{400} = 0.22$.

Tarea 3.2B. De las 400 habitantes 126 son mayores de 60 años. La probabilidad de que la persona elegida al azar sea mayor de 60 años vale $\frac{126}{400} = 0.315$.

Tarea 3.2C. Hay 126 habitantes mayores de 60 años y de estos 9 se abstuvieron. Si la persona elegida al azar es mayor de 60 años, la probabilidad de que se haya abstenido en las elecciones vale $\frac{9}{126} = \frac{1}{14} \approx 0.0714$.

UC Universidad de Cantabria	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INDICACIONES

– El examen consta de 3 apartados, todos ellos obligatorios. Cada apartado contiene una o dos opciones. Cuando en un apartado haya dos opciones, se escogerá únicamente una.
– En caso de resolver más de una opción en algún apartado, se corregirá únicamente la que aparezca en primer lugar en el cuadernillo del examen.
– Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.
– Se permitirá el uso de reglas y calculadoras que no sean programables, ni gráficas o con capacidad para almacenar y/o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
– Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1.

Dadas las matrices:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & a & 1\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix} \text{ y } N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro a la matriz M tiene inversa.

Tarea 1.1B [2 PUNTOS]. Para $a=1$, obtenga la matriz X de la siguiente ecuación:.

$$MX=2N$$

Opción 2.

Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?

Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden dicho beneficio?

Apartado 2 [4 puntos].

Dada la función $f(x)$:

$$f(x)=(x+2)(x-3)^2$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e identifique los extremos relativos.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función (x) con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente (x) señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la gráfica de la función (x) y el eje de abscisas *OX*.

Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1.

Se sabe que el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma = 5$. Para una muestra de 225 usuarios, seleccionados aleatoriamente, se obtiene una media de 21 viajes por mes. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para la media de los viajes mensuales.

Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de dicha media, con un nivel de confianza del 97%, sea de 1 viaje al mes.

Opción 2.

En una compañía de seguros de automóviles, el 17% de los clientes tiene menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años. El historial de partes de accidente del último año indica lo siguiente:

- entre los menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte;
- entre los clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte;
- entre los mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte.

Se selecciona al azar un cliente de la compañía. Realice las siguientes tareas:

Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si se sabe que el cliente presentó un parte de accidente el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Apartado 1 [3 puntos].

Opción 1.

Dadas las matrices:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & a & 1\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix} \text{ y } N=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 1.1A [1 PUNTO]. Estudie para qué valores del parámetro a la matriz M tiene inversa.

Tarea 1.1B [2 PUNTOS]. Para $a=1$, obtenga la matriz X de la siguiente ecuación:

$$MX=2N$$

Solución:

1.1A Para que la matriz M tenga inversa su determinante debe tener un valor distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de M.

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & a & 1\\ 1 & 6 & 5\end{vmatrix}=5a+0+0-a^2-0-6=-a^2+5a-6$$

$$|M|=0\Rightarrow -a^2+5a-6=0\Rightarrow a=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4(-1)(-6)}}{-2}=\frac{-5\pm 1}{-2}=\begin{cases}\frac{-5-1}{-2}=\boxed{3=a}\\ \frac{-5+1}{-2}=\boxed{2=a}\end{cases}$$

La matriz M tiene inversa para cualquier valor de "a" distinto de 2 y 3.

1.1B Para $a=1$ la matriz M queda $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 6 & 5\end{pmatrix}$ y hemos visto que es invertible.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$MX=2N\Rightarrow X=M^{-1}2N=2M^{-1}N$$

Obtenemos la inversa de M y terminamos de hallar la expresión de la matriz X.

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 6 & 5\end{vmatrix}=5-1-6=-2\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^{T}\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 6\\ 1 & 5\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 6 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -1 & -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=2M^{-1}N=2\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 6 & -1\\ 1 & 4 & -1\\ -1 & -6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=-\begin{pmatrix}-1-1 & 12+1 & -1-1\\ 1-1 & 8+1 & 1-1\\ -1+1 & -12-1 & -1+1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-2 & 13 & -2\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & -13 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -13 & 2\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 13 & 0\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $MX=2N$ tiene la expresión

$$X=\begin{pmatrix}2 & -13 & 2\\ 0 & -9 & 0\\ 0 & 13 & 0\end{pmatrix}.$$

Opción 2.

Un pastelero dispone de un máximo de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas. Para la elaboración de cada sobao se requieren 45 minutos y 200 gramos de mantequilla, y para la elaboración de cada quesada se requieren 90 minutos y 100 gramos de mantequilla. Por limitaciones logísticas, la cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades y se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla. El beneficio que se obtiene por cada sobao es de 1,5€ y el que se obtiene por cada quesada es de 2€. La intención del pastelero es maximizar el beneficio total. Realice las siguientes tareas:
Tarea 1.2A [1 PUNTO]. Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
Tarea 1.2B [1 PUNTO]. Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
Tarea 1.2C [0,75 PUNTOS]. ¿Cuántos sobaos y cuántas quesadas se deben fabricar para maximizar el beneficio total?
Tarea 1.2D [0,25 PUNTOS]. ¿A cuánto ascienden dicho beneficio?

Solución:

1.2A Llamamos "x" = número de sobaos que elabora e "y" = número de quesadas que elabora. Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Minutos	Mantequilla (gramos)	Beneficio
Nº sobaos (x)	$45x$	$200x$	$1.5x$
Nº quesadas (y)	$90y$	$100y$	$2y$
TOTAL	$45x+90y$	$200x+100y$	$1.5x+2y$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios obtenidos por la venta de los sobaos y quesadas, que vienen expresados como $B(x,y)=1.5x+2y$.

Las restricciones son:

"La cantidad total de sobaos y quesadas producidas no puede exceder de 11 unidades" → $x+y\le 11$

"Se dispone únicamente de 1600 gramos de mantequilla y de 810 minutos para producir una serie de sobaos y quesadas" → $200x+100y\le 1600;\ 45x+90y\le 810$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 11 \\ 200x+100y\le 1600 \\ 45x+90y\le 810 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\le 11 \\ 2x+y\le 16 \\ x+2y\le 18 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

1.2B Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

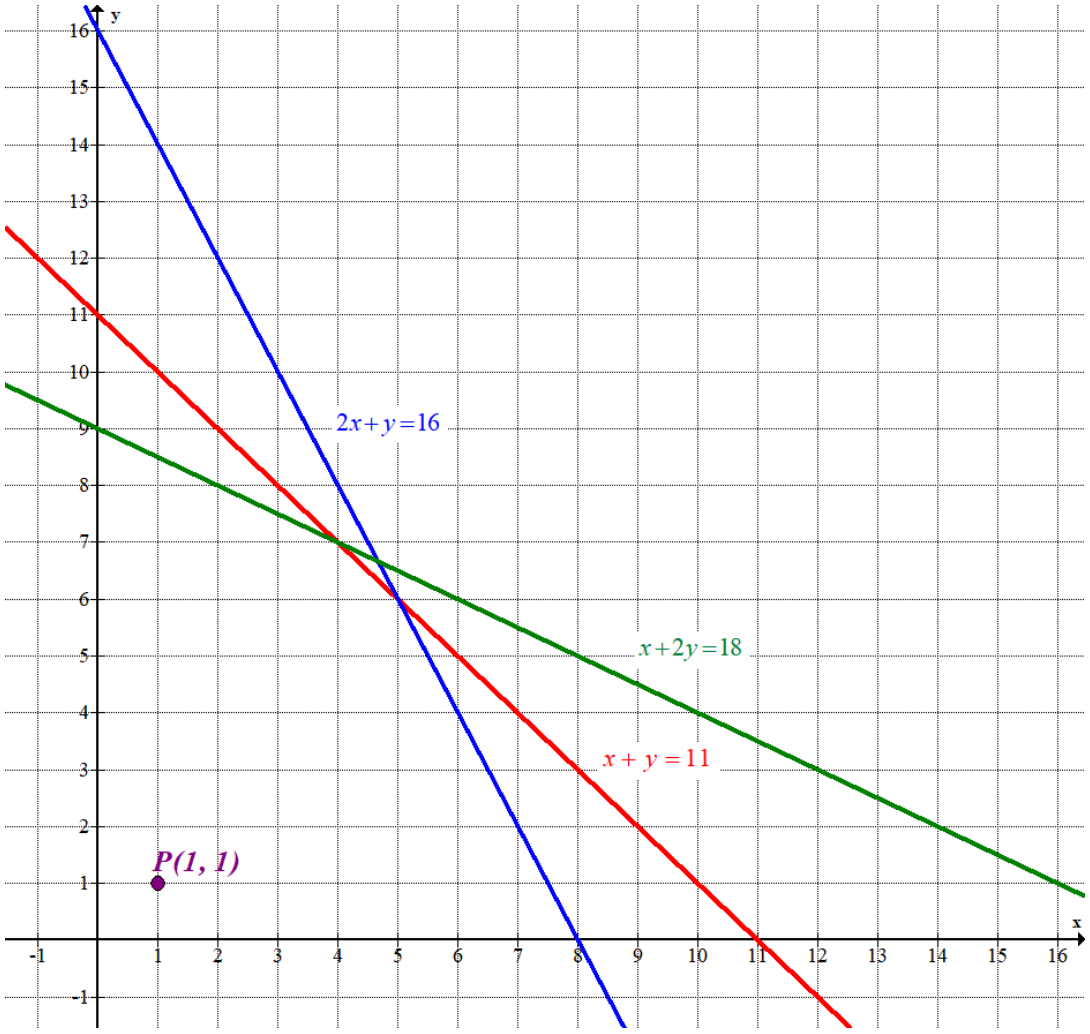
$x+y=11$ $2x+y=16$ $x+2y=18$ $x\geq 0;\ y\geq 0$

x	$y=11-x$
0	11
4	7
5	6
11	0

x	$y=16-2x$
0	16
5	6
8	0

x	$y=\frac{18-x}{2}$
0	9
4	7
18	0

Primer cuadrante

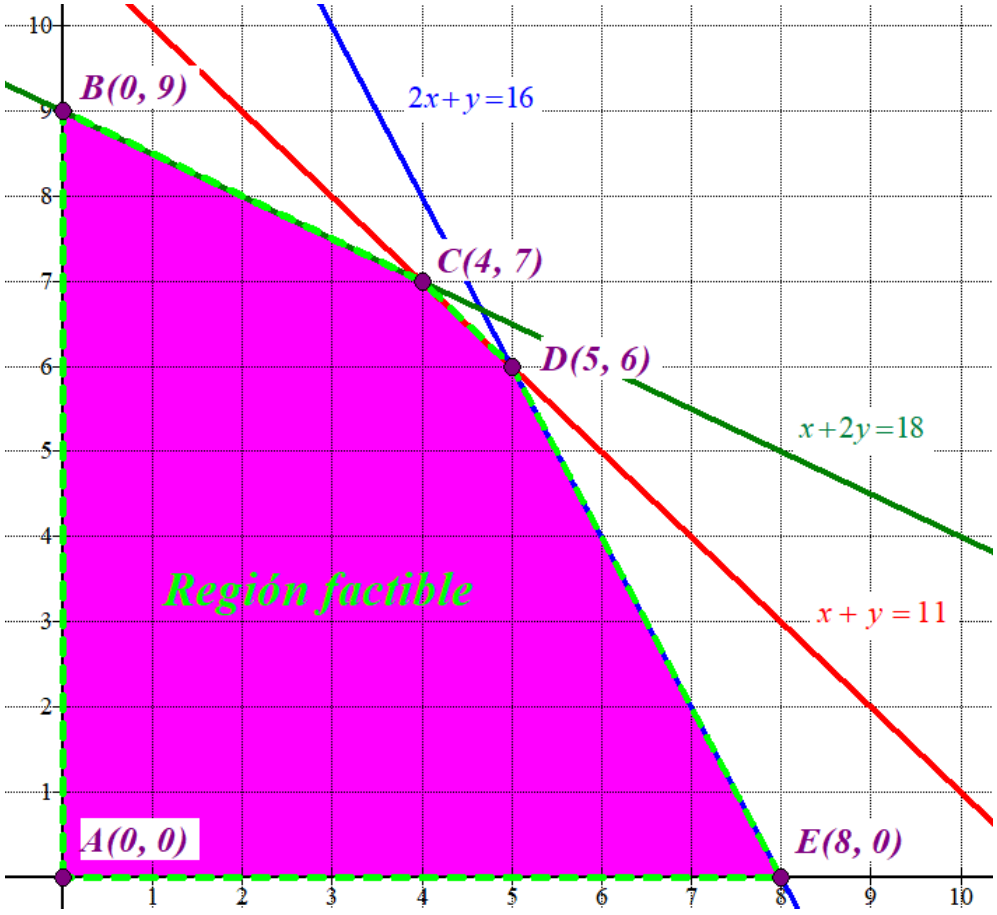


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 11 \\ 2x+y\leq 16 \\ x+2y\leq 18 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(1, 1) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1+1\le 11 \\ 2+1\le 16 \\ 1+2\le 18 \\ 1\ge 0; 1\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=18 \\ x+y=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=18 \\ x=11-y \end{array}\right\} \Rightarrow 11-y+2y=18 \Rightarrow y=7 \Rightarrow x=11-7=4 \Rightarrow \boxed{C(4,7)}$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=16 \\ x+y=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=16 \\ y=11-x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+11-x=16 \Rightarrow x=5 \Rightarrow y=11-5=6 \Rightarrow \boxed{D(5,6)}$$

Los vértices son A(0, 0); B(0, 9); C(4, 7), D(5, 6) y $E(8,0)$.

1.2C Valoramos la función objetivo $B(x,y)=1.5x+2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

$A(0, 0) \rightarrow I(0,0) = 0$

$B(0, 9) \rightarrow B(0,9) = 1.5 \cdot 0 + 2 \cdot 9 = 18$

$C(4, 7) \rightarrow B(4,7) = 1.5 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 20$ Máximo

$D(5, 6) \rightarrow B(5,6) = 1.5 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 19.5$

$E(8, 0) \rightarrow B(8,0) = 1.5 \cdot 8 + 2 \cdot 0 = 12$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(4, 7). El máximo beneficio se obtiene fabricando 4 sobaos y 7 quesadas.

1.2D

El beneficio máximo que se pueden obtener es de 20 €.

Apartado 2 [4 puntos].

Dada la función (x):

$$f(x)=(x+2)(x-3)^2$$

Realice las siguientes tareas:

Tarea 2.1A [1,5 PUNTOS]. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función e identifique los extremos relativos.

Tarea 2.1B [1 PUNTO]. Estudie los puntos de corte de la gráfica de la función (x) con los ejes coordenados. A continuación, represente gráficamente (x) señalando dichos puntos de corte y los extremos relativos.

Tarea 2.1C [1,5 PUNTOS]. Calcule el área del recinto delimitado por la gráfica de la función (x) y el eje de abscisas *OX*.

Solución:

2.1A Hallamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula.

$$f(x)=(x+2)(x-3)^2 \Rightarrow f'(x)=(x-3)^2+2(x+2)(x-3)=(x-3)\big(x-3+2(x+2)\big)=$$

$$=(x-3)(x-3+2x+4)=(x-3)(3x+1)=3(x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3(x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x-3=0\rightarrow \boxed{x=3}\\ x+\frac{1}{3}=0\rightarrow \boxed{x=\frac{-1}{3}}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=\frac{-1}{3}$ y $x=3$.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{-1}{3}\right)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=3(-2-3)\left(-2+\frac{1}{3}\right)=25>0$. La función crece en $\left(-\infty,\frac{-1}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{-1}{3},3\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=3(0-3)\left(0+\frac{1}{3}\right)=-3<0$. La función decrece en $\left(\frac{-1}{3},3\right)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la derivada vale $f'(4)=3(4-3)\left(4+\frac{1}{3}\right)=13>0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

La función crece en $\left(-\infty,\frac{-1}{3}\right)\cup(3,+\infty)$ y decrece en $\left(\frac{-1}{3},3\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=\frac{-1}{3}$ y un mínimo relativo en $x=3$.

Como $f\left(\frac{-1}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}+2\right)\left(\frac{-1}{3}-3\right)^2=\frac{500}{27}\approx 18.52$ y $f(3)=(3+2)(3-3)^2=0$

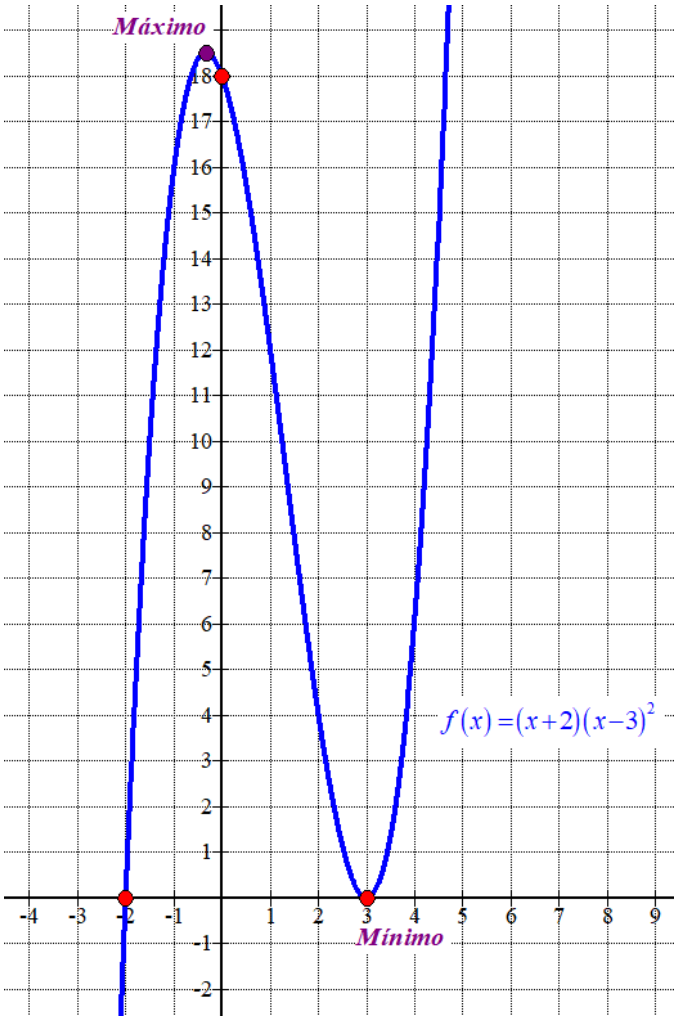
Las coordenadas del máximo relativo son $\left(\frac{-1}{3},\frac{500}{27}\right)$ y las del mínimo relativo son (3, 0).

2.1B Hallamos los puntos de corte de la gráfica con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x+2)(x-3)^2 \\ Eje\,X \Rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+2)(x-3)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \rightarrow A(-2,0) \\ x=3 \rightarrow B(3,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x+2)(x-3)^2 \\ Eje\,Y \Rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=(0+2)(0-3)^2=18 \Rightarrow C(0,18)$$

Los puntos de corte con los ejes son A(–2, 0), B(3, 0) y C(0, 18).



2.1C Los puntos de corte de la gráfica con el eje OX son A(–2, 0) y B(3, 0). El área del recinto delimitado por la curva (x) y el eje de abscisas OX es el valor de la integral definida de la función entre –2 y 3.

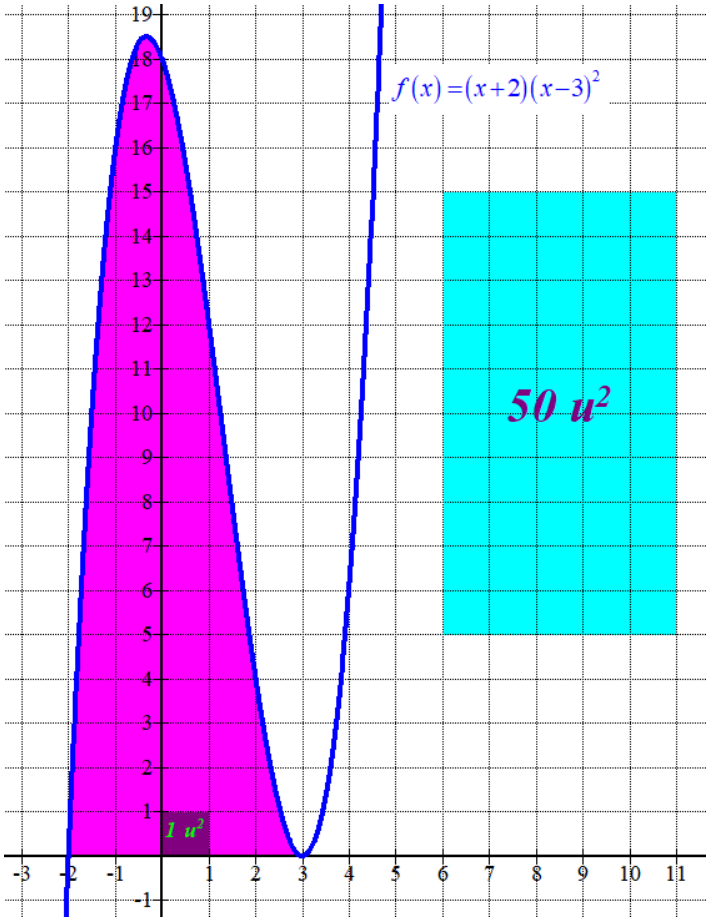
$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (x+2)(x-3)^2\,dx = \int_{-2}^{3} (x+2)\left(x^2+9-6x\right)dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} x^3+9x-6x^2+2x^2+18-12x\,dx = \int_{-2}^{3} x^3-4x^2-3x+18\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+18x\right]_{-2}^{3} =$$

$$= \left[\frac{3^4}{4}-\frac{4\cdot 3^3}{3}-\frac{3\cdot 3^2}{2}+18\cdot 3\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-\frac{4(-2)^3}{3}-\frac{3(-2)^2}{2}+18(-2)\right] =$$

$$= \frac{81}{4}-\cancel{36}-\frac{27}{2}+54-4-\frac{32}{3}+6+\cancel{36} = \boxed{\frac{625}{12} \approx 52.0833 u^2}$$

El área tiene un valor de 625/12 = 52.0833 unidades cuadradas.



Apartado 3 [3 puntos].

Opción 1.

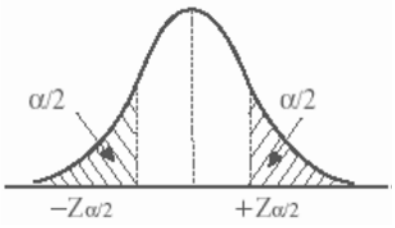
Se sabe que el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses sigue una distribución normal con desviación estándar $\sigma = 5$. Para una muestra de 225 usuarios, seleccionados aleatoriamente, se obtiene una media de 21 viajes por mes. Realice las siguientes tareas:
Tarea 3.1A [1,5 PUNTOS]. Calcule el intervalo de confianza del 93% para la media de los viajes mensuales.
Tarea 3.1B [1,5 PUNTOS]. Determine el tamaño mínimo necesario de la muestra para que el error en la estimación de dicha media, con un nivel de confianza del 97%, sea de 1 viaje al mes.

Solución:

X = el número de viajes realizados mensualmente por los usuarios de una línea de autobuses.
X = N(**μ**, 5)
Tamaño de muestra = $n = 225$. Media muestral = $\bar{x} = 21$ viajes.

3.1A Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$$



z	0.00	0.01	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6
0.6	0.7257	0.7291	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{5}{\sqrt{225}} = 0.603 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(21 - 0.603, 21 + 0.603\right) = \left(20.397, 21.603\right)$$

Intervalo de confianza: (20.397, 21.603)

3.1B Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850

Igualamos el error a 1 viaje y despejamos "n".

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 2.17 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 10.85 \Rightarrow n = (10.85)^2 = 117.7225$$

Como el tamaño mínimo debe ser entero y superior al "*n*" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 usuarios.

Tamaño mínimo: 118 usuarios

Opción 2.

En una compañía de seguros de automóviles, el 17% de los clientes tiene menos de 30 años, el 60% tiene entre 30 y 60 años, y el resto es mayor de 60 años. El historial de partes de accidente del último año indica lo siguiente:

- entre los menores de 30 años, 3 de cada 5 no presentaron ningún parte;
- entre los clientes de 30 a 60 años, 9 de cada 10 no presentaron ningún parte;
- entre los mayores de 60 años, 3 de cada 4 no presentaron ningún parte.

Se selecciona al azar un cliente de la compañía. Realice las siguientes tareas:

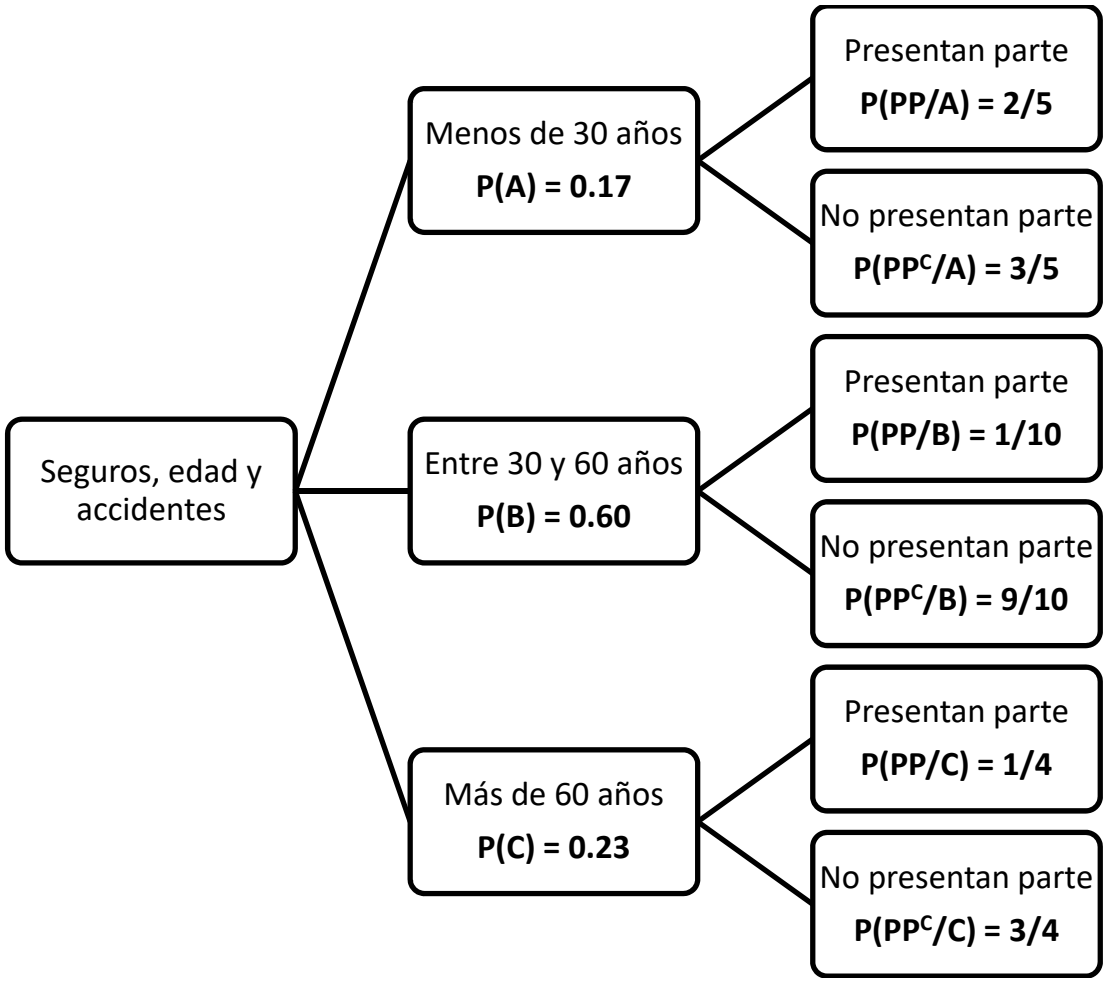
Tarea 3.2A [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente seleccionado presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2B [1 PUNTO]. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente tenga 30 años o más y no presentara un parte de accidente el año pasado?

Tarea 3.2C [1 PUNTO]. Si se sabe que el cliente presentó un parte de accidente el año pasado, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 30 años?

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información proporcionada.



3.2A Nos piden calcular $P(PP)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(PP) = P(A)P(PP/A) + P(B)P(PP/B) + P(C)P(PP/C) =$$

$$= 0.17 \cdot \frac{2}{5} + 0.6 \cdot \frac{1}{10} + 0.23 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{0.1855}$$

3.2B Nos piden calcular $P\left((B \cup C) \cap PP^C\right)$.

$$P\left((B \cup C) \cap PP^C\right) = P\left(B \cap PP^C\right) + P\left(C \cap PP^C\right) =$$

$$= P(B)P\left(PP^C/B\right) + P(C)P\left(PP^C/C\right) = 0.6 \cdot \frac{9}{10} + 0.23 \cdot \frac{3}{4} = \boxed{\frac{57}{80} = 0.7125}$$

3.2C Nos piden calcular $P(A/PP)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/PP) = \frac{P(A \cap PP)}{P(PP)} = \frac{P(A)P(PP/A)}{P(PP)} = \frac{0.17 \cdot \frac{2}{5}}{0.1855} = \boxed{\frac{136}{371} \approx 0.3666}$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

PAU 2025

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica σ = 4 minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0,75 puntos)**

c) Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0,75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2.5 puntos)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & si\ x \leq k \\ x^2 - 4x + 9 & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si k = 1, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0,75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0,75 puntos)**

BY NC SA

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a, b y c. **(1,5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0,5 puntos)**

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas **independientes**: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %. Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0,5 puntos)**

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0,5 puntos)**

b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0,25 puntos)**

b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b. **(1,25 puntos)**

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Ejercicio 1.- Un centro de atención telefónica estima que el tiempo, en minutos, de atención a las llamadas que recibe se aproxima por una distribución normal con desviación típica σ = 4 minutos. Se toma una muestra de 36 llamadas y se observa que el tiempo medio de atención es de 15 minutos. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el tiempo de atención medio poblacional. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0,75 puntos)**

c) Una asociación de consumidores afirma que el tiempo medio de atención a las llamadas es de 17 minutos. Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar tal afirmación con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0,75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Respuestas:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

donde X es la variable "tiempo de atención de una llamada", X sigue una $N(\mu, 4)$

Nos dan los siguientes datos:

nivel de confianza = 97% , $1 - \alpha = 0,97$, $\sigma = 4$, n = 36, $\overline{x} = 15$.

$1 - \alpha = 0,97$, $\alpha = 0,03$, $\frac{\propto}{2} = 0,015$ $1 - \frac{\propto}{2} = 0,985$,

buscamos en la tabla: $Z_{0,985} = 2,17$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$\left(15 - 2,17\frac{4}{\sqrt{36}}, \quad 15 + 2,17\frac{4}{\sqrt{36}}\right) = (13,55 \, , \, 16,45)$

Con un nivel de confianza del 97% el tiempo medio de atención a una llamada se encuentra en (13,55 , 16,45)

Respuesta: Intervalo de confianza: (13,55 , 16,45)

b) Para disminuir la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que disminuir el valor de $Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, como σ es un valor dado y mantenemos $Z_{1-\frac{\propto}{2}}$, la única opción es aumentar el tamaño de la muestra, que al aparecer en el denominador hace que disminuya $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto $Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como consecuencia se reduce la amplitud del intervalo.

c) Tiempo de atención a las llamadas según la asociación, 17 minutos, que no está dentro del intervalo calculado en el apartado a) con un nivel de confianza del 97%, al tomar un nivel de confianza menor, 95%, la amplitud del intervalo se reduce ya que disminuye el valor de $Z_{1-\frac{\propto}{2}}$ y por tanto el valor 17 no entraría en el intervalo, es decir, no se puede aceptar la afirmación de la asociación.

BY NC SA

Ejercicio 2.- Lucía, en un examen de Historia que constaba de tres preguntas, ha obtenido una calificación total de 7,2 puntos. La puntuación obtenida en la primera pregunta fue un 40 % más que la obtenida en la segunda, y la puntuación del tercer enunciado fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en la primera y segunda pregunta. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Lucía en cada pregunta? **(2,5 puntos)**

Respuesta:

Sea **x** la puntuación obtenida en la primera pregunta, **y** en la segunda y **z** en la tercera.

Al ser 40% más equivale a 1 + 0,4 = 1,4, tenemos, x = 1,4y ; z = 2(x + y); x + y +z = 7,2

Ordenamos: $\begin{cases} x+y+z = 7{,}2 \\ 2x+2y-z=0 \\ x-1{,}4y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = -2E1+E2 \\ E3' = -E1+E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z = 7{,}2 \\ -3z = -14{,}4 \rightarrow z = \frac{14{,}4}{3} = 4{,}8 \rightarrow \\ -2{,}4y - z = -7{,}2 \end{cases}$

$$-2{,}4y - z = -7{,}2 \rightarrow -2{,}4y - 4{,}8 = -7{,}2 \rightarrow y = \frac{-7{,}2+4{,}8}{-2{,}4} = 1$$

$$x+y+z = 7{,}2 \rightarrow x + 1 + 4{,}8 = 7{,}2 \rightarrow x = 7{,}2 - 1 - 4{,}8 = 1{,}4$$

Respuesta: 1ª pregunta 1,4 puntos; 2ª pregunta 1 punto; 3ª pregunta 4,8 puntos

BY NC SA

Ejercicio 3.-

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & si\ x \le k \\ x^2 - 4x + 9 & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valores de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0,75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es creciente y en cuáles es decreciente. **(0,75 puntos)**

Respuestas:

a.1) Para que la función f sea continua en x = k, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a k debe existir y para ello los límites laterales han de existir y ser iguales, los calculamos,

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} (-x^2 - 3x + 10) = -k^2 - 7k + 10$$

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} (x^2 - 4x + 9) = k^2 - 4k + 9$$

$$-k^2 - 7k + 10 = k^2 - 4k + 9 \to 2k^2 + 3k - 1 = 0 \to k = 0{,}2808\,, \quad k = -1{,}7808$$

Respuesta: La función es continua en $x = k$ si $k = 0,2808$ o $k = -1,7808$

a.2) Para k = 1, la función queda $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & si\ x \le 1 \\ x^2 - 4x + 9 & si\ x > 1 \end{cases}$ calculamos la derivada

$f'(x) = \begin{cases} -2x - 3 & si\ x < 1 \\ 2x - 4 & si\ x > 1 \end{cases}$ resolvemos, $\begin{matrix} -2x - 3 = 0 \to x = -\frac{3}{2} \\ 2x - 4 = 0 \to x = \frac{4}{2} = 2 \end{matrix}$ calculamos la segunda derivada

$f''(x) = \begin{cases} -2 & si\ x < 1 \\ 2 & si\ x > 1 \end{cases} \to \begin{matrix} f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -2 < 0 \to máximo \\ f''(2) = 2 > 0 \to mínimo \end{matrix}$ $\begin{matrix} f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 10 = \frac{49}{4} \\ f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 9 = 5 \end{matrix}$

Respuesta: Máximo relativo en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$, Mínimo relativo en (2, 5)

a.3) Según el apartado anterior tenemos los intervalos $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ $(1, 2)$ $(2, \infty)$

Atendiendo al apartado anterior obtenemos

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ Creciente

$\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ Decreciente

$(1, 2)$ Decreciente

$(2, \infty)$ Creciente

Respuesta: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ **Creciente,** $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ **Decreciente,** $(1, 2)$ **Decreciente** , $(2, \infty)$ **Creciente**

BY NC SA

Ejercicio 3.-

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(2, -3)$ y un punto de inflexión en $(1, -1)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a, b y c. **(1,5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

Respuestas:

b.1) Calculamos la derivada y la segunda derivada, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Aplicamos los datos: Mínimo en (2, -3), $f'(2) = 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 = 0$ y $f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -3$

Punto de inflexión en (1, -1), $f''(1) = 6 \cdot a \cdot 1 + 2b = 0$ y $f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c = -1$

Ordenamos en un sistema de ecuaciones $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 8a + 4b + c = -3 \\ 6a + 2b = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$ la 3ª y 4ª son proporcionales,

simplificamos la 3ª y nos queda, $\begin{cases} a + b + c = -1 \\ 8a + 4b + c = -3 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = -8E1 + E2 \\ E3' = -3E1 + E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ -4b - 7c = 5 \\ -2b - 3c = 3 \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{matrix} E1'' = E1' \\ E2'' = E2' \\ E3'' = E2' - 2E3' \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ -4b - 7c = 5 \\ -c = -1 \rightarrow c = 1 \end{cases} ; \begin{matrix} -4b - 7c = 5 \rightarrow -4b - 7 \cdot 1 = 5 \rightarrow b = -3 \\ a + b + c = -1 \rightarrow a - 3 + 1 = -1 \rightarrow a = 1 \end{matrix}$$

Respuesta: **a = 1, b = -3, c = 1 ; $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$**

b.2) Despejamos X en la ecuación, $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$, $A \cdot B \cdot X - C \cdot X = I$, $(A \cdot B - C) \cdot X = I$

$X = (A \cdot B - C)^{-1} \cdot I$, $X = (A \cdot B - C)^{-1}$, hacemos los cálculos,

$$A \cdot B - C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$|D| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \ , \ D^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} , \ Adj(D^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} , \ D^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{-4} & \frac{2}{-4} \\ \frac{2}{-4} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

BY NC SA

Ejercicio 4.-

Apartado a) Una fábrica de quesos organiza paquetes para enviar: A y B. Para la elaboración del paquete tipo A se necesitan 30 minutos de trabajo manual y 45 minutos de trabajo en máquinas. Para la de tipo B, 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de máquinas. Tienen necesidad de enviarlo pronto, por lo que disponen de 85 horas de trabajo manual y 75 horas de trabajo con máquinas y deben enviar, al menos, 100 paquetes. El beneficio total es de 20 € por cada paquete tipo A y 17 € por cada paquete tipo B y se pretende maximizar el beneficio total.

a.1) Expresa la función objetivo; escribe, mediante inecuaciones, las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. **(2 puntos)**

a.2) Determina cuántos paquetes de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. **(0,5 puntos)**

Respuestas:

	Minutos manual	Minutos máquina	Beneficios	
Paquetes A (x)	30	45	20€	
Paquetes B (y)	60	20	17€	
Tiempo disponible	85·60 = 5 100	75·60 = 4 500		Mínimo 100 paquetes

a.1) Función objetivo: f(x, y) = 20x + 17y, maximizar

Restricciones $\begin{cases} x \geq 0 \ , \quad y \geq 0 \\ 30x + 60y \leq 5\,100 \\ 45x + 20y \leq 4\,500 \\ x + y \geq 100 \end{cases}$ Representamos las rectas y los semiplanos válidos

$30x + 60y = 5\,100 \rightarrow x = 0, y = 85; \quad y = 0, \ x = 170\,; \quad 30 \cdot 0 + 60 \cdot 0 \leq 5\,100$ Sí

$45x + 20y = 4\,500 \rightarrow x = 0, y = 225\,; \ y = 0, \ x = 100\,; \quad 45 \cdot 0 + 20 \cdot 0 \leq 4\,500$ Sí

$x + y = 100 \rightarrow x = 0, \ y = 100\,; \ y = 0, \ x = 100 \quad ; \quad 0 + 0 \geq 100$ No

a.2) Resolvemos los sistemas de 2 en 2: $\begin{cases} x + y = 100 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (100, 0)$

$\begin{cases} x + y = 100 \\ 30x + 60y = 5100 \end{cases} \rightarrow -30E1 + E2 \begin{cases} x + y = 100 \\ 30y = 2100 \end{cases} \rightarrow (30, 70)$

$\begin{cases} 45x + 20y = 4500 \\ 30x + 60y = 5100 \end{cases} \rightarrow -3E1 + E2 \begin{cases} 45x + 20y = 4500 \\ -105x \quad = -8400 \end{cases} \rightarrow (80, 45)$

Sustituimos en la función objetivo: f(100, 0) = 20·100 + 17·0 = 2 000

f(30, 70) = 20·30 + 17·70 = 1790 ; f(80, 45) = 20·80 + 17·45 = 2 365 Máximo beneficio

Respuesta: Deben fabricar 80 paquetes del tipo A y 45 del tipo B

BY NC SA

Ejercicio 4.-

Apartado b) Se va a proceder a la selección de pilotos para una compañía de vuelos. Se realizan tres pruebas **independientes**: A (idiomas), B (conocimientos teórico-prácticos) y C (pruebas físicas). Para acceder al puesto hay que superar las tres pruebas y se sabe, por procesos realizados anteriormente, que el 10 % de los presentados superan la prueba A, la B, el 40 % y la C, el 20 %. Sabiendo que todos los candidatos realizan las tres pruebas, se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato pase la selección? **(0,5 puntos)**

b.2) ¿Cuál es la probabilidad de que un candidato no sea seleccionado por haber fallado en una sola prueba? **(0,5 puntos)**

b.3) Sabiendo que un candidato no ha sido seleccionado por haber fallado en una sola prueba, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado en la prueba B? **(0,25 puntos)**

b.4) Si la velocidad punta de la prueba física de carrera de 1000 m sigue una función de la forma: $V(t) = at^3 + bt^2 + t$, con t en minutos, y sabemos que alcanza el máximo en el instante $t = 1$ alcanzando, en ese instante, una velocidad de 150 m/min, encuentra los valores de los parámetros a y b. **(1,25 puntos)**

Respuestas:

Superan A el 10%, B el 40% y C el 20%

b.1) Las probabilidades de superar cada prueba son: P(A) = 0,1 ; P(B) = 0,4 ; P(C) = 0,2

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$$

Respuesta: $P(A \cap B \cap C) = 0{,}008$

b.2) Las probabilidades de no superar cada prueba son: P($\bar{A}$) = 0,9 ; P($\bar{B}$) = 0,6 ; P($\bar{C}$) = 0,8

Sea noS no superar la selección

$$P(noS) = P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(A \cap B \cap \bar{C}) =$$
$$= P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}116$$

Respuesta: $P(noS) = 0{,}116$

b.3) $P(\bar{B}/noS) = \frac{P(\bar{B} \cap noS)}{P(noS)} = \frac{P(A \cap \bar{B} \cap C)}{P(noS)} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C)}{P(noS)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2}{0{,}116} = 0{,}276$

Respuesta: $P(\bar{B}/noS) = 0{,}276$

b.4) $V(t) = at^3 + bt^2 + t$ como en t = 1, la velocidad es 150 m/min, V(1) = 150

$V'(t) = 3at^2 + 2bt + 1$, como t = 1 hay un máximo, V'(1) = 0

Planteamos el sistema $\begin{cases} V(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 = 150 \\ V'(1) = 3 \cdot a \cdot 1^2 + 2 \cdot b \cdot 1 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} a + b = 149 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = -3E1 + E2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a + b = 149 \\ -b = -448 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} b = 448 \\ a + b = 149 \rightarrow a = -299 \end{matrix}$$

$V(t) = -299t^3 + 448t^2 + t$

Respuesta: $V(t) = -299t^3 + 448t^2 + t$

BY NC SA

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: El estudiante deberá resolver los cuatro ejercicios propuestos. En **los ejercicios 3 y 4** deberá contestar solamente a **UNO** de los dos apartados propuestos. Si resuelve más, se corregirá solo el primero de los dos apartados resueltos. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo están permitidas **las calculadoras de tipo 1 y 2**. **Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos.** Duración de la prueba: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Ejercicio 1.- Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica σ = 0.05 litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0.97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0,75 puntos)**

c) Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0,75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Ejercicio 2.- En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1,5 puntos)**

b) Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

Ejercicio 3.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & si\ x \leq k \\ -2x^2 + 8x & si\ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valor de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0,75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles es convexa. **(0,75 puntos)**

BY NC SA

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto $(-1, 2)$ y un punto de inflexión en $(1, -14)$.

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a, b y c . **(1,5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial C · X = A · B + X. **(1 punto)**

Ejercicio 4.- Elige y resuelve **sólo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$"

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto $(3, 0)$.

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? **Razona tu respuesta. (1,25 puntos)**

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto $(3, 0)$? **Razona tu respuesta. (0,75 puntos)**

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? **(0,5 puntos)**

Apartado b) La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados. El bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70 % de los presentados. Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? **(0,75 puntos)**

b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. **(0,5 puntos)**

b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde t = tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora $t = 3$, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante encuentra el valor de los parámetros a y b. **(1,25 puntos)**

BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Ejercicio 1.- Una empresa envasa zumos en botellas de 1 litro. La cantidad de zumo que la máquina embotelladora inyecta en cada botella sigue una distribución normal con una desviación típica σ = 0,05 litros. Se toma una muestra aleatoria de 16 botellas y se observa que el contenido medio es de 0,97 litros. Con un nivel de confianza del 97%,

a) Calcula el intervalo de confianza para el contenido medio poblacional de una botella. **(1 punto)**

b) Explica, justificando la respuesta, cómo se podría obtener un intervalo de confianza con menor amplitud sin modificar el nivel de confianza. **(0,75 puntos)**

c) Dado el intervalo del apartado a), ¿se puede aceptar que el contenido medio poblacional es de 1 litro con un nivel de confianza del 95%? Justificar la respuesta. **(0,75 puntos)**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Respuesta

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \overline{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

donde X es la variable "cantidad de zumo en una botella", X sigue una $N(\mu, 0{,}05)$

Nos dan los siguientes datos:

nivel de confianza = 97% , $1-\alpha = 0,97$, $\sigma = 0,05$, n = 16, $\overline{x} = 0,97$.

$1-\alpha = 0,97$, $\alpha = 0,03$, $\frac{\propto}{2} = 0,015$ $1-\frac{\propto}{2} = 0,985$,

buscamos en la tabla: $Z_{0,985} = 2,17$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$\left(0,97 - 2,17\frac{0,05}{\sqrt{16}}, \quad 0,97 + 2,17\frac{0,05}{\sqrt{16}}\right)$ = (0,9429 , 0,9971)

Con un nivel de confianza del 97% el contenido medio poblacional de una botella se encuentra en (0,9429 , 0,9971)

Respuesta: I. C. (0,9429 , 0,9971)

b) Para disminuir la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que disminuir el valor de $Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, como σ es un valor dado y mantenemos $Z_{1-\frac{\propto}{2}}$, la única opción es aumentar el tamaño de la muestra, que al aparecer en el denominador hace que disminuya $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto $Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como consecuencia se reduce la amplitud del intervalo.

c) El contenido medio poblacional, 1 litro, que no está dentro del intervalo calculado en el apartado a) con un nivel de confianza del 97%, al tomar un nivel de confianza menor, 95%, la amplitud del intervalo se reduce ya que disminuye el valor de $Z_{1-\frac{\propto}{2}}$ y por tanto el valor 1 no entraría en el intervalo, es decir, no se puede aceptar que el contenido medio poblacional sea de 1 litro con un nivel de confianza del 95%.

BY NC SA

Ejercicio 2.- En el Parador de Turismo de Almagro se alojaron ayer 25 huéspedes que hicieron las reservas con distintas compañías, procedentes de Italia, Portugal y Japón. El gasto total en el Parador fue de 3610 €, correspondiendo 140 € a cada huésped italiano, 130 € a cada huésped portugués y 160 € a cada huésped japonés. El registro del Parador muestra que el número de portugueses es la cuarta parte de la suma del número de huéspedes de los otros dos países.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cuántos huéspedes hay de cada país. **(1,5 puntos)**

b) Calcula número de huéspedes de cada uno de los países. **(1 punto)**

Respuesta

Sea **x** el número de huéspedes de Italia, **y** el de Portugal y **z** el de Japón.

Tenemos, x + y + z = 25 ; 140x + 130y + 160z = 3610 ; $y = \frac{1}{4}(x + z)$

a) Planteamos el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ 140x + 130y + 160z = 3610 \\ y = \frac{1}{4}(x + z) \end{cases}$$

b) Resolvemos

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ 140x + 130y + 160z = 3610 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = -140E1 + E2 \\ E3' = -E1 + E3 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 25 \\ -10y + 20z = 110 \\ -5y = -25 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$-10y + 20z = 110 \rightarrow -10 \cdot 5 + 20z = 110 \rightarrow z = 8$$

$$x + y + z = 25 \rightarrow x + 5 + 8 = 25 \rightarrow x = 12$$

Respuesta: 12 italianos, 5 portugueses y 8 japoneses.

BY NC SA

Ejercicio 3.-

Apartado a) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4 & si \ x \leq k \\ -2x^2 + 8x & si \ x > k \end{cases}$

a.1) ¿Para qué valor de k la función $f(x)$ es continua en $x = k$? **(1 punto)**

a.2) Si $k = 1$, calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. **(0,75 puntos)**

a.3) En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos la función es cóncava y en cuáles es convexa. **(0,75 puntos)**

Respuestas:

a.1) Para que la función f sea continua en x = k, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a k debe existir y para ello los límites laterales han de existir y ser iguales, los calculamos e igualamos:

$$\lim_{x \to k^-} f(x) = \lim_{x \to k^-} (2x^2 + 4) = 2k^2 + 4$$

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = \lim_{x \to k^+} (-2x^2 + 8x) = -2k^2 + 8k$$

$$2k^2 + 4 = -2k^2 + 8k \to 4k^2 - 8k + 4 = 0 \to k^2 - 2k + 1 = 0 \to (k-1)^2 = 0 \to k = 1 \text{ doble}$$

Respuesta: La función es continua en $x = k$ si $k = 1$

a.2) Para k = 1, la función queda $f(x) = \begin{cases} \mathbf{2x^2 + 4} & si \ x \leq 1 \\ \mathbf{-2x^2 + 8x} & si \ x > 1 \end{cases}$ calculamos la derivada

$f'(x) = \begin{cases} 4x & si \ x < 1 \\ -4x + 8 & si \ x > 1 \end{cases}$ resolvemos, $\begin{matrix} 2x = 0 \to x = 0 \\ -4x + 8 = 0 \to x = \frac{8}{4} = 2 \end{matrix}$ calculamos la segunda derivada

$$f''(x) = \begin{cases} 4 & si \ x < 1 \\ -4 & si \ x > 1 \end{cases} \to \begin{matrix} f''(0) = 4 > 0 \to mínimo & f(0) = 2(0)^2 + 4 = 4 \\ f''(2) = -4 < 0 \to máximo & f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = 0 \end{matrix}$$

Respuesta: Máximo relativo en $(2, 0)$, Mínimo relativo en (0, 4)

a.3) Estudiamos el signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = \begin{cases} 4 & si \ x < 1 \\ -4 & si \ x > 1 \end{cases} \to f''(x) = \begin{cases} > 0 & si \ x < 1 \\ < 0 & si \ x > 1 \end{cases}.$$

Luego $f(x)$ es convexa [U] en el intervalo $(-\infty, 1)$ y

cóncava [∩] en el intervalo $(1, +\infty)$.

Respuesta: f(x) es convexa [U] en el intervalo $(-\infty, 1)$ y cóncava [∩] en el intervalo $(1, +\infty)$

BY NC SA

Ejercicio 3.-

Apartado b) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 3$, se sabe que tiene un mínimo relativo en el punto (−1, 2) y un punto de inflexión en (1, −14).

b.1) Encuentra el valor de los parámetros a, b y c . **(1,5 puntos)**

b.2) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X en la ecuación matricial C · X = A · B + X. **(1 punto)**

Respuestas:

b.1) Calculamos la primera y la segunda derivada, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$

Aplicamos los datos:

Mínimo en (-1, 2), $f'(-1) = 3\cdot a\cdot(-1)^2 + 2\cdot b\cdot(-1) + c = 0$ y $f(-1) = a\cdot(-1)^3 + b\cdot(-1)^2 + c(-1) - 3 = 2$

Punto de inflexión en (1, -14), $f''(1) = 6\cdot a\cdot 1 + 2b = 0$ y $f(1) = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + c\cdot 1 - 3 = -14$

Ordenamos en un sistema de ecuaciones $\begin{cases} -a + b - c - 3 = 2 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ a + b + c - 3 = -14 \end{cases}$ operamos y nos queda,

$$\begin{cases} a - b + c = -5 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = -11 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \rightarrow \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = -3E1 + E2 \\ E3' = -E1 + E3 \\ E4' = -3E1 + E4 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} a - b + c = -5 \\ b - 2c = 15 \\ 2b = -6 \\ 4b - 3c = 15 \end{cases} \rightarrow b = -3$$

$b - 2c = 15 \rightarrow -3 - 2c = 15 \rightarrow c = -9$

$$a - b + c = -5 \rightarrow a - (-3) - 9 = -5 \rightarrow a = 1$$

Respuesta: **a = 1, b = -3, c = -9 ; $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 3$**

b.2) Despejamos X en la ecuación, $C \cdot X = A \cdot B + X$, $C \cdot X - X = A \cdot B$, $(C - I) \cdot X = A \cdot B$

$X = (C - I)^{-1} \cdot A \cdot B$, hacemos los cálculos,

$$C - I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \ , \ D^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} , \ Adj(D^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} , \ D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \quad , \quad X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta: $\mathbf{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

BY NC SA

Ejercicio 4.-

Apartado a) En un examen de matemáticas se propone el siguiente problema:

"Indica el punto donde la función $F(x, y) = 6x + 3y - 2$, alcanza el mínimo en la región determinada por las siguientes restricciones: $2x + y \geq 6$; $2x + 5y \leq 30$; $2x - y \leq 6$"

Laura responde que el mínimo de la función se alcanza en el punto $(1, 2)$ y Jesús, por el contrario, que lo hace en el punto (3, 0).

a.1) ¿Es exacta la respuesta de Laura? **Razona tu respuesta. (1,25 puntos)**

a.2) ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en el punto (3, 0)? **Razona tu respuesta. (0,75 puntos)**

a.3) ¿Cuánto vale dicho mínimo? **(0,5 puntos)**

Respuestas:

a.1) Función objetivo: F(x, y) = 6x + 3y – 2 , minimizar.

Laura: F(1, 2) = 6·1 + 3·2 – 2 = 10 ; Jesús: F(3, 0) = 6·3 + 3·0 – 2 = 16

La respuesta de Laura puede ser acertada pues el valor de su punto en la función objetivo es menor que en el punto que dice Jesús.

Sustituimos el punto (1, 2) en las restricciones $2 \cdot 1 + 2 = 4 \leq 6$, (1, 2) no cumple la primera restricción, luego no puede ser mínimo.

a.2) Restricciones $\begin{cases} 2x + y \geq 6 \\ 2x + 5y \leq 30 \\ 2x - y \leq 6 \end{cases}$ Representamos las rectas y los semiplanos válidos:

$2x + y = 6 \rightarrow x = 0, y = 6$; $y = 0,\ x = 3$; puntos (0,6) y (3,0)

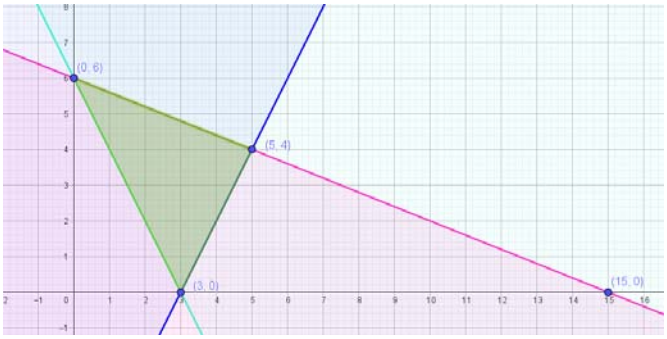
Vemos la región válida, (Si comprende el (0, 0) o No) $2 \cdot 0 + 0 \geq 6$, No

$2x + 5y = 30 \rightarrow x = 0, y = 6$; $y = 0,\ x = 15$; puntos (0, 6) y (15, 0)

Vemos la región válida, (Si comprende el (0, 0) o No) $2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \leq 30$ Sí

$2x - y = 6 \rightarrow x = 0,\ y = -6$; $y = 0,\ x = 3$; puntos (0. -6) y (3, 0)

Vemos la región válida, (Si comprende el (0, 0) o No) $2 \cdot 0 - 0 \leq 6$ Sí



Los posibles mínimos son el (3, 0), el (0, 6) y el punto intersección de $2x + 5y = 30$ con $2x - y = 6$, resolvemos y obtenemos el punto (5,4)

Sustituimos en la función objetivo: F(3, 0) = 6·3 + 3·0 – 2 = 16 ; F(0, 6) = 6·0 + 3·6 – 2 = 16

F(5, 4) = 6·5 + 3·4 – 2 = 40.

Como hay 2 puntos con el mismo valor, todos los puntos pertenecientes a la recta que los une son puntos solución, luego no es cierto que el mínimo se alcanza en el punto (3, 0)

a.3) El mínimo vale 16

BY NC SA

Textos Marea Verde

Ejercicio 4.-

Apartado b) La compañía de seguros SEGURVIDA utiliza tres bufetes de abogados para resolver sus casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30 % de los casos legales y gana en los tribunales el 60 % de los casos presentados. El bufete B recibe el 50 % de los casos legales y gana el 80 % de los casos presentados y el bufete C recibe el resto de los casos y gana el 70 % de los presentados. Se elige al azar uno de los casos que ha llegado a los tribunales y ya ha sido resuelto. Se pide, de forma razonada:

b.1) ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía haya ganado el caso? **(0,75 puntos)**

b.2) Si el caso elegido se ha perdido, calcula la probabilidad de que haya sido defendido por el bufete A. **(0,5 puntos)**

b.3) Si el precio por acción de la compañía de seguros sigue una función de la forma $A(t) = at^3 - 12t^2 + bt$, donde t = tiempo en horas transcurridas desde el inicio, alcanza un máximo en la tercera hora t = 3, alcanzando un valor de 54 € la acción en ese instante encuentra el valor de los parámetros a y b. **(1,25 puntos)**

Respuestas:

Bufete A el 30%, B el 50% y C el 20% ; P(A) = 0,3 , P(B) = 0,5 , P(C) = 0,2

Ganar A: P(G/A) = 0,6 ; P(noG/A) = 0,4 ; Ganar B: P(G/B) = 0,8 y Ganar C: P(G/C) = 0,7 ;

b.1) Teorema de la probabilidad total

$$P(G) = P(A)\cdot P(G/A) + P(B)\cdot P(G/B) + P(C)\cdot P(G/C) =$$
$$0{,}3\cdot 0{,}6 + 0{,}5\cdot 0{,}8 + 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}72$$

Respuesta: $P(G)$ = 0,72

b.2) Teorema de Bayes

$$P(A/noG) = \frac{P(A\cap noG)}{P(noG)} = \frac{P(A)\cdot P(noG/A)}{P(noG)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}4}{1-P(G)} = \frac{0{,}12}{1-0{,}72} = 0{,}4286$$

Respuesta: $P(A/noG) = 0{,}4286$

b.3) A(t) = at^3 - $12t^2$ + bt como en t = 3, hay un máximo con valor 54, A(3) = 54 y A'(3) = 0

A'(t) = 3at^2 - 24t + b ,

Planteamos el sistema $\begin{cases} A(3) = a\cdot 3^3 - 12\cdot 3^2 + b\cdot 3 = 54 \\ A'(3) = 3\cdot a\cdot 3^2 - 24\cdot 3 + b = 0 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{cases} 27a + 3b = 162 \\ 27a + b = 72 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} E1' = E1 \\ E2' = -E1 + E2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 27a + 3b = 162 \\ -2b = -90 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} b = 45 \\ 27a + 3\cdot 45 = 162 \rightarrow a = 1 \end{matrix}$$

Respuesta: a = 1 y b = 45 ; A(t) = t^3 - 12t^2 + 45t

BY NC SA

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

Castilla y León

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JULIO**

APARTADO 1 (Bloques A+C))

1.

Dado el sistema con los parámetros a y b $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + by + 2z = 4 \\ 3x + y + bz = 5 \end{cases}$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (1.1, 1.2, 1.3):

1.1 [1.5 puntos] Si $b = -1$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a.

1.2 [1.5 puntos] Si $a = 3$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro b.

1.3 [1.5 puntos] Resolver el sistema para $a = 1$ y $b = -2$.

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según la función

$$m(t) = \frac{1}{200}t^3 - \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

donde m es la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día.

Responda a las siguientes cuestiones (2.1, 2.2):

2.1 [1.5 puntos] ¿A qué hora del día arroja la máxima cantidad de material contaminante? ¿Y a qué hora la mínima? Determinar la cantidad arrojada en ambos momentos.

2.2 [1.5 puntos] ¿Cuánto material contaminante arroja en un día? Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Se ha publicado una encuesta sobre hábitos deportivos según la cual seis de cada diez personas practicaron deporte en el último año, ya sea de forma periódica u ocasional, en su tiempo libre. Por otra parte, entre las personas que practicaban deporte, el 85 % presenció, al menos una vez al año (en vivo o a través de medios audiovisuales) un evento deportivo mientras que, entre las que no practicaban deporte, fue el 70 %.

Responda a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1. a) [1 punto] Definir correctamente los sucesos y escribir la información anterior en términos de probabilidad.

b) [1 punto] Se selecciona una persona al azar y resulta que no ha presenciado ningún evento

deportivo. Determinar si es más probable que haya practicado deporte o que no lo haya hecho.

3.2. Se seleccionan 8 personas al azar entre las que no practicaron deporte.

a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que exactamente la mitad de ellas hayan presenciado un evento deportivo.

b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que alguna de ellas haya presenciado un evento deportivo.

3.3. El tiempo (en horas) en el que las personas que practicaron deporte presenciaron eventos deportivos sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 10 horas.

a) [1 punto] Suponiendo que μ toma el valor de 25, calcular el porcentaje de personas que presenciaron eventos deportivos más de 30 horas al año.

b) [1 punto] Se elige al azar una muestra de 49 personas y se obtiene una media muestral de 26 horas. Determinar, al nivel de confianza del 98 %, un intervalo de confianza para el número medio de horas que presenciaron eventos deportivos en dicha población.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

APARTADO 1 (Bloques A+C))

1.

Dado el sistema con los parámetros a y b $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ x + by + 2z = 4 \\ 3x + y + bz = 5 \end{cases}$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (1.1, 1.2, 1.3):

1.1 [1.5 puntos] Si $b = -1$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a.

1.2 [1.5 puntos] Si $a = 3$, clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro b.

1.3 [1.5 puntos] Resolver el sistema para $a = 1$ y $b = -2$.

Solución:

Para $b = -1$

$$\begin{cases} \boldsymbol{ax + 2y + z = 1} \\ \boldsymbol{x - y + 2z = 4} \\ \boldsymbol{3x + y - z = 5} \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{|A| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = a + 1 + 12 + 3 - 2a + 2 = -a + 18}$$

Si a $\neq 18$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $k = 18$ las matrices son

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 18 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 36$ distinto de cero el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

a	$rango\ A$	$rango A^*$	Sistema
$\neq 18$	3	3	Compatible determinado
18	2	3	Incompatible

Para $a = 3$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + by + 2z = 4 \\ 3x + y + bz = 5 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 & 4 \\ 3 & 1 & b & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & b & 2 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 3b^2 + 1 + 12 - 3b - 6 - 2b = 3b^2 - 5b + 7$$

La ecuación $3b^2 - 5b + 7 = 0$ tiene sus dos raíces complejas.

En consecuencia el determinante de A es siempre distinto de cero, independientemente del valor de b. El rango de la matriz A es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada es también 3, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Para *a* = 3 el sistema es compatible indeterminado para cualquier valor de *b*

c) Para $a = 1$ y $b = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 25$$

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{52}{25}$$

Textos Marea Verde

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{-2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\end{vmatrix}}=\frac{-17}{25}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{4}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{5}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2}\\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2}\end{vmatrix}}=\frac{7}{25}$$

En resumen $x=\frac{52}{25}; y=-\frac{17}{25}; z=\frac{7}{25}$

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según la función

$$m(t) = \frac{1}{200}t^3 - \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

donde m es la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día.

Responda a las siguientes cuestiones (2.1, 2.2):

2.1 [1.5 puntos] ¿A qué hora del día arroja la máxima cantidad de material contaminante? ¿Y a qué hora la mínima? Determinar la cantidad arrojada en ambos momentos.

2.2 [1.5 puntos] ¿Cuánto material contaminante arroja en un día? Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución

Cuestión 2.1

Hay que hallar un máximo y un mínimo de la función

$$m'(t) = \frac{3}{200}t^2 - \frac{2}{10}t + \frac{1}{2} = \frac{3}{200}t^2 - \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}$$

Igualando a cero la derivada:

$$m'(t) = 0 \Longrightarrow 3t^2 - 40t + 100 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Sustituimos los valores que anulan la primera derivada en la segunda derivada

$$m''(t) = \frac{6}{200}t - \frac{1}{5}$$

Para $t = 10$

$$m''(10) = \frac{6}{200}10 - \frac{1}{5} = \frac{1}{10} > 0$$

Como la segunda derivada es positiva hay un mínimo en $t = 10$. La cantidad arrojada es

$$m(10) = \frac{1}{200}10^3 - \frac{1}{10}10^2 + \frac{1}{2}10 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}kg$$

Para $t = \frac{10}{3}$

$$m''\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{6}{200}\frac{10}{3} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{10} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa hay un máximo en $t = \frac{10}{3}$. La cantidad arrojada es

$$m\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{1}{200}\left(\frac{10}{3}\right)^3 - \frac{1}{10}\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{10}{3} + \frac{1}{2} = \frac{67}{54} = 1.2407kg$$

Si asumimos que la función está restringida al intervalo $[0,24]$ (que no está en el enunciado) hay que calcular los valores de la función en los extremos.

$$m(0) = \frac{1}{2}$$

$$m(24) = \frac{1}{200}24^3 - \frac{1}{10}24^2 + \frac{1}{2}24 + \frac{1}{2} = 24.02$$

Como el valor en $t = 24$ es mayor que el máximo local $\left(\frac{10}{3}\right)$, el máximo absoluto se produce en $t = 24$. El mínimo local coincide con el valor de la función en 0.

A las 10 h y a las 0 h se arroja la mínima cantidad de material contaminante (0.5 kg) y a las 3 h 20 m se arroja la máxima cantidad local de material contaminante (1.2407 kg). El valor absoluto se alcanza en *t* = 24 y su valor es 24.02. Ver nota al final.

Cuestión 2.2

Para saber el crecimiento y decrecimiento hay que hallar el signo de la primera derivada.

Asumimos que la función tiene sentido a lo largo de un día, y por tanto existe en un intervalo $[0,24]$

$$m'(t)\begin{cases} > 0 & si \quad 0 < x < \frac{10}{3} \\ < 0 & si \quad \frac{10}{3} < x < 10 \\ > 0 & si \quad 10 < x < 24 \end{cases} \Longrightarrow m(t)\begin{cases} Crece & si \quad 0 < x < \frac{10}{3} \\ Decrece & si \quad \frac{10}{3} < x < 10 \\ Crece & si \quad 10 < x < 24 \end{cases}$$

Para saber la cantidad de material arrojado a lo largo de un día

$$C = \int_0^{24}\left(\frac{1}{200}t^3 - \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{800}t^4 - \frac{1}{30}t^3 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{t}{2}\right]_0^{24} =$$

$$= \frac{1}{800}24^4 - \frac{1}{30}24^3 + \frac{1}{4}24^2 + \frac{24}{2} = \frac{2748}{25} = 109.92kg$$

La función $m(t)\begin{cases} Crece & si \quad 0 < x < \frac{10}{3} \\ Decrece & si \quad \frac{10}{3} < x < 10 \\ Crece & si \quad 10 < x < 24 \end{cases}$

En un día arroja una cantidad de 109.92kg. Ver nota.

NOTA: El enunciado del ejercicio no es claro, por lo que, para su resolución, es necesario hacer algunas suposiciones. Yo he supuesto que la función proporciona el material arrojado a lo largo de un día que empieza a las 0 h, y termina a las 24 h, para poder poner los extremos a la integral. La función no es periódica de periodo 24 h, porque los valores de la función en 0 y en 24 no coinciden, lo cual resulta extraño en el contexto del problema.

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Se ha publicado una encuesta sobre hábitos deportivos según la cual seis de cada diez personas practicaron deporte en el último año, ya sea de forma periódica u ocasional, en su tiempo libre.
Por otra parte, entre las personas que practicaban deporte, el 85 % presenció, al menos una vez al año (en vivo o a través de medios audiovisuales) un evento deportivo mientras que, entre las que no practicaban deporte, fue el 70 %.
Responda a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):
3.1. a) [1 punto] Definir correctamente los sucesos y escribir la información anterior en términos de probabilidad.
b) [1 punto] Se selecciona una persona al azar y resulta que no ha presenciado ningún evento deportivo. Determinar si es más probable que haya practicado deporte o que no lo haya hecho.
3.2. Se seleccionan 8 personas al azar entre las que no practicaron deporte.
a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que exactamente la mitad de ellas hayan presenciado un evento deportivo.
b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que alguna de ellas haya presenciado un evento deportivo.
3.3. El tiempo (en horas) en el que las personas que practicaron deporte presenciaron eventos deportivos sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 10 horas.
a) [1 punto] Suponiendo que μ toma el valor de 25, calcular el porcentaje de personas que presenciaron eventos deportivos más de 30 horas al año.
b) [1 punto] Se elige al azar una muestra de 49 personas y se obtiene una media muestral de 26 horas. Determinar, al nivel de confianza del 98 %, un intervalo de confianza para el número medio de horas que presenciaron eventos deportivos en dicha población.

Solución:

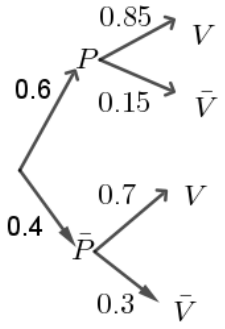
3.1
a)
Sean los sucesos

$$P = \{practicar\ un\ deporte\ en\ el\ último\ año\}$$
$$V = \{presenciar\ un\ evento\ deportivo\ al\ menos\ una\ vez\ al\ año\}$$

Los sucesos $\bar{P}, \bar{V}$ son los sucesos contrarios de P y V.
El enunciado proporciona las siguientes probabilidades:

$$\boldsymbol{p(P) = \frac{6}{10} = 0.6 \Longrightarrow p(\bar{P}) = 0.4}$$
$$\boldsymbol{p(V/P) = 0.85 \Longrightarrow p(\bar{V}/P) = 0.15}$$
$$\boldsymbol{p(V/\bar{P}) = 0.7 \Longrightarrow p(\bar{V}/\bar{P}) = 0.3}$$

El árbol de probabilidades queda así



b)

Hay que calcular $p(P/\bar{V})$ y $p(\bar{P}/\bar{V})$. Para ello debemos calcular primero $p(\bar{V})$. Es una probabilidad total:

$$p(\bar{V}) = p(P)p(\bar{V}/\mathrm{P}) + p(\bar{P})p(\bar{V}/\bar{P}) = 0.6 \cdot 0.15 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.21$$

Ahora utilizamos el teorema de Bayes

$$p(P/\bar{V}) = \frac{p(P)p(\bar{V}/\mathrm{P})}{p(\bar{V})} = \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.21} = \frac{3}{7}$$

$$p(\bar{P}/\bar{V}) = \frac{p(\bar{P})p(\bar{V}/\bar{P})}{p(\bar{V})} = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.21} = \frac{4}{7}$$

Es más probable que no haya practicado deporte.

3.2 a)

La probabilidad de que una persona que no ha practicado deporte vea un acontecimiento deportivo es 0.7. Estamos entonces ante una distribución binomial $B(8,0.7)$, donde llamamos "éxito" a presenciar un acontecimiento deportivo, $p = 0.7$ y $q = 1 - 0.7 = 0.3$. Tenemos que calcular $p(X = 4)$

$$p(X = 4) = \binom{8}{4} 0.7^4 0.3^4 = 0.1361$$

La probabilidad de que exactamente 4 personas de 8 que no han practicado deporte hayan presenciado un acontecimiento deportivo en el último año es 0.1361

b)

Hay que calcular $p(X \geq 1)$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{8}{0} 0.7^0 0.3^8 = 0.9999$$

La probabilidad de que alguna de las 8 personas que no han practicado deporte hayan presenciado un acontecimiento deportivo en el último año es 0.9999

3.3

a) Es una distribución normal $N(25,10)$ y hay que calcular $p(X > 30)$

$$p(X > 30) = p\left(Z > \frac{30 - 25}{10}\right) = p(Z > 0.5) = 1 - p(Z \leq 0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

El porcentaje de personas que presenciaron eventos deportivos más de 30 horas al año es del 30.85%.

b)

La desviación típica de la población es $\sigma = 10h$ y la media muestral es de 26 h. Con esto la distribución muestral de medias es $N\left(26, \frac{10}{\sqrt{49}}\right) = N(26,1.43)$

Llamemos $X = \{número\ de\ horas\}$

El nivel de confianza es $N_c = 0.98$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.02$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.01$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.33$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C98\%} = (26 - 2.33 \cdot 1.43; 26 + 2.33 \cdot 1.43) = (22.67; 29.33)$$

El intervalo de confianza al 98 % es $(22.67; 29.33)$

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

APARTADO 1 (Bloques A+C)

1. [3 puntos] Una empresa fabrica dos tipos de máquinas, A y B. Para satisfacer toda la demanda, debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B. El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superase los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos.

Sabiendo que el beneficio por unidad vendida de tipo A es 250 euros y por unidad vendida de tipo B es 200 euros, determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de unidades de cada tipo de máquina que se han de fabricar mensualmente para obtener el beneficio máximo de su venta. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una planta de carburantes analiza la cantidad de gasolina, medida en miles de litros, almacenada en el nuevo depósito instalado, que viene dada por $ff(tt)$, donde tt es el tiempo (en horas):

$$f(t)=\begin{cases}\frac{3}{4}t^2+2 & si \quad 0\le t\le 2\\ \frac{15}{t+1} & si \quad t>2\end{cases}$$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (2.1, 2.2, 2.3):

2.1 [1.5 puntos] Determinar la cantidad de litros de gasolina almacenada inicialmente y al cabo de 108 minutos.

2.2 [1.5 puntos] Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

2.3 [1.5 puntos] Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(2,\infty)$.

APARTADO 3 (Bloque D)

3. Un ayuntamiento estudia la movilidad hacia un campus universitario. El estudio detecta que, para ir al campus, el 20 % de los ciudadanos circula por aceras o carriles bici (a pie o bicicleta) y el resto circula por la calzada (patinete, coche o trasporte público). Entre los usuarios de aceras o carriles bici únicamente el 10 % encuentra problemas de circulación, porcentaje que llega al 30 % entre los usuarios de la calzada.

Responder a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1

a) [1 punto] Si se elige un usuario al azar que va al campus, calcular la probabilidad de que sufra problemas de circulación.

b) [1 punto] Sabiendo que, al ir al campus, un usuario ha tenido problemas de circulación, ¿con qué probabilidad ha circulado por la calzada?

3.2. Un estudio reciente midió el tiempo de retraso según lo previsto (en minutos) que experimentaron 100 ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario.

El tiempo medio de retraso en la muestra es de 4.2 minutos, con una desviación típica de 1.5 minutos.

a) [1 punto] Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de retraso que experimentan los ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario en la población.

b) [1 punto] Calcular qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de ciudadanos para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error máximo admisible sea de 0.12 minutos en la estimación de la media.

3.3. Se considera que el 45 % de los ciudadanos utiliza el transporte público para desplazarse al campus. Se pregunta a 10 ciudadanos a su llegada al campus si han utilizado el transporte público.

a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que exactamente 8 de ellos usen transporte público.

b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que más de 8 ciudadanos usen transporte público

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

APARTADO 1 (Bloques A+C)

1. [3 puntos] Una empresa fabrica dos tipos de máquinas, A y B. Para satisfacer toda la demanda, debe producir, mensualmente, al menos 6 unidades del tipo A y como mucho 15 unidades del tipo B. El coste de fabricación es de 500 euros por cada unidad de tipo A y 300 euros por unidad de tipo B, sin que puedan superase los 12000 euros mensuales en la fabricación total de ambos tipos.

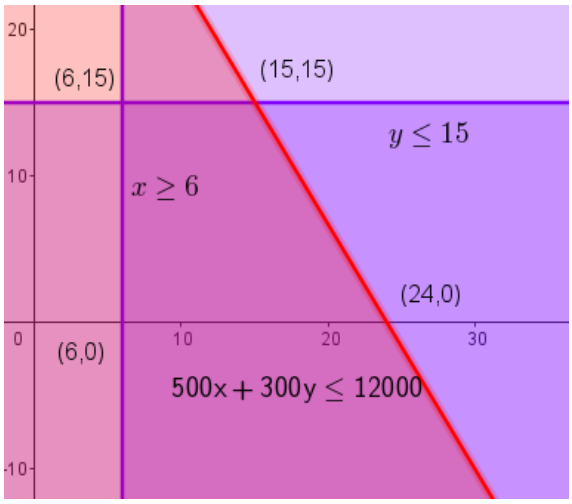
Sabiendo que el beneficio por unidad vendida de tipo A es 250 euros y por unidad vendida de tipo B es 200 euros, determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de unidades de cada tipo de máquina que se han de fabricar mensualmente para obtener el beneficio máximo de su venta. ¿A cuánto asciende ese beneficio?

Solución

Si llamamos x, y al número de máquinas de tipo A y b respectivamente, tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ 0 \leq y \leq 15 \\ 500x + 300y \leq 12000 \end{cases}$$

Esto proporciona una región trapezoidal:



Los puntos donde se cortan los semiplanos son:

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 15 \end{cases} \Longrightarrow A(6,15) \qquad \begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow B(6,0)$$

$$\begin{cases} 5x + 3y = 120 \\ y = 15 \end{cases} \Longrightarrow C(15,15) \qquad \begin{cases} 5x + 3y = 120 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow D(24,0)$$

La función de beneficio es

$$B(x, y) = 250x + 200y$$

Hay que hallar los valores del beneficio para cada uno de estos puntos.

$$B(6,15) = 250 \cdot 6 + 200 \cdot 15 = 4500$$
$$B(6,0) = 250 \cdot 6 + 200 \cdot 0 = 1500$$
$$B(15,15) = 250 \cdot 15 + 200 \cdot 15 = 6750$$
$$B(24,0) = 250 \cdot 24 + 200 \cdot 0 = 6000$$

El mayor beneficio se obtiene con 15 máquinas del tipo A y 15 del tipo B. El beneficio asciende a 6750 €

APARTADO 2 (Bloque B)

2. Una planta de carburantes analiza la cantidad de gasolina, medida en miles de litros, almacenada en el nuevo depósito instalado, que viene dada por $f(t)$, donde t es el tiempo (en horas):

$$f(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}t^2 + 2 & si \quad 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{15}{t+1} & si \quad t > 2 \end{cases}$$

Responder a dos de las siguientes cuestiones (2.1, 2.2, 2.3):

2.1 [1.5 puntos] Determinar la cantidad de litros de gasolina almacenada inicialmente y al cabo de 108 minutos.

2.2 [1.5 puntos] Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

2.3 [1.5 puntos] Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(2, \infty)$.

Solución

2.1

108 minutos son 1.8 h. Por tanto

$$f(0) = 2\ mil\ litros$$

$$f(1.8) = \frac{3}{4}1.8^2 + 2 = 4.43\ miles\ de\ litros$$

Inicialmente había 2000 litros y al cabo de 108 minutos había 4430 litros

2.2

En $x = 2$

$$\lim_{t \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to t^-} \frac{3}{4}t^2 + 2 = 5$$

$$\lim_{t \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{15}{t+1} = 5$$

$$f(2) = 5$$

Como estos tres valores son iguales la función es continua.

La función es continua

2.3

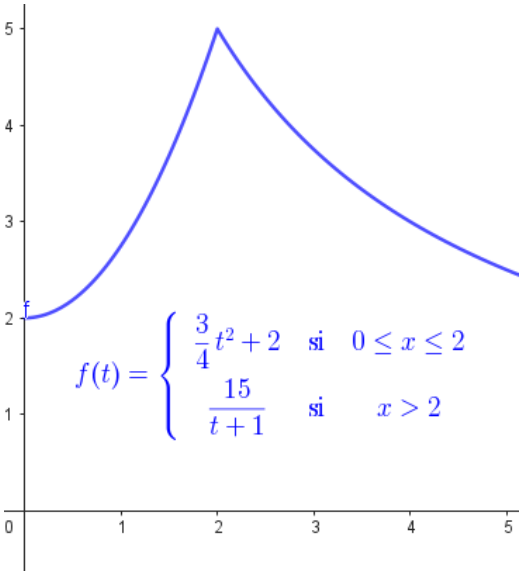
La función $j(t) = \frac{15}{t+1}$ es un hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

La derivada es

$$j'(t) = -\frac{15}{(t+1)^2}$$

Por tanto, la derivada es negativa para cualquier valor de x donde la función exista, y la función es decreciente a partir del 2

La función $f(t)$ es así:



En resumen la función decrece siempre para valores mayores de 2.

3. Un ayuntamiento estudia la movilidad hacia un campus universitario. El estudio detecta que, para ir al campus, el 20 % de los ciudadanos circula por aceras o carriles bici (a pie o bicicleta) y el resto circula por la calzada (patinete, coche o trasporte público). Entre los usuarios de aceras o carriles bici únicamente el 10 % encuentra problemas de circulación, porcentaje que llega al 30 % entre los usuarios de la calzada.

Responder a dos de los siguientes problemas (3.1, 3.2, 3.3):

3.1

a) [1 punto] Si se elige un usuario al azar que va al campus, calcular la probabilidad de que sufra problemas de circulación.

b) [1 punto] Sabiendo que, al ir al campus, un usuario ha tenido problemas de circulación, ¿con qué probabilidad ha circulado por la calzada?

3.2. Un estudio reciente midió el tiempo de retraso según lo previsto (en minutos) que experimentaron 100 ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario.

El tiempo medio de retraso en la muestra es de 4.2 minutos, con una desviación típica de 1.5 minutos.

a) [1 punto] Calcular un intervalo de confianza del 95 % para la media del tiempo de retraso que experimentan los ciudadanos al circular por aceras o carriles bici hacia el campus universitario en la población.

b) [1 punto] Calcular qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de ciudadanos para que, con un nivel de confianza del 99 %, el error máximo admisible sea de 0.12 minutos en la estimación de la media.

3.3. Se considera que el 45 % de los ciudadanos utiliza el transporte público para desplazarse al campus. Se pregunta a 10 ciudadanos a su llegada al campus si han utilizado el transporte público.

a) [1 punto] Calcular la probabilidad de que exactamente 8 de ellos usen transporte público.

b) [1 punto] Calcular la probabilidad de que más de 8 ciudadanos usen transporte público

Solución

Sean los sucesos

$$C = \{Circular\ por\ aceras\ o\ carriles\ bici\}$$
$$\bar{C} = \{No\ circular\ por\ aceras\ ni\ carriles\ bici\}$$
$$P = \{Tener\ problemas\ de\ circulación\}$$

El enunciado nos dice que:

$$p(C) = 0.2; p(\bar{C}) = 0.8$$
$$p(P/C) = 0.1; p(P/\bar{C}) = 0.3$$

3.1

a) Hay que calcular $p(P)$

$$p(P) = p(C)p(P/C) + p(\bar{C})p(P/\bar{C}) = 0.2 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.3 = 0.26$$

b)

Hay que calcular $p(\bar{C}/P)$

$$p(\bar{C}/P) = \frac{p(\bar{C})p(P/\bar{C})}{p(P)} = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.26} = \frac{12}{13} \cong 0.9231$$

La probabilidad de que un usuario sufra problemas de circulación es de 0.26.

Un usuario que haya tenido problemas de circulación ha utilizado la calzada con una probabilidad de 0.9231

3.2

a) Para la variable

$$X = \{\text{retraso que experimentan los ciudadanos al circular por aceras o carriles bici}\}$$

La distribución de la población es $N(4.2; 1.5)$.

Para una muestra de 100 personas la distribución muestral de medias es $N\left(4.2; \frac{1.5}{\sqrt{100}}\right) = N(4.2; 0.15)$.

El nivel de confianza es $N_c = 0.95$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.05$ y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.025$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C95\%} = (4.2 - 1.96 \cdot 0.15; 4.2 + 1.96 \cdot 0.15) = (3.906; 4.494)$$

El intervalo de confianza para el retraso en minutos que experimentan los ciudadanos por aceras o carril bici es $(3.906; 4.494)$.

b)

Si el nivel de confianza es $N_c = 0.99$, hallamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para determinar el error máximo admitido y a partir de él el tamaño de la muestra.

El nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.01$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.005$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

El error en la estimación es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso

$$2.575 \cdot \frac{1.15}{\sqrt{n}} \leq 0.12 \Longrightarrow \sqrt{n} \geq 24.68 \Longrightarrow n \geq 608.96$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 609 personas

3.3

Es una distribución binomial $B(10,0.45)$, donde llamamos "éxito" a utilizar el transporte público.

a) Hay que calcular $p(X = 8)$

$$p(X = 8) = \binom{10}{8} 0.45^8 0.55^2 = 0.0229$$

b) Hay que calcular $p(X > 8)$

$$p(X > 8) = p(X = 9) + p(X = 10) = \binom{10}{9} 0.45^9 \cdot 0.55 + \binom{10}{10} 0.45^{10} = 0.00408$$

La probabilidad de que exactamente 8 personas utilicen el transporte público es 0.0229, y la probabilidad de que más de ocho personas utilicen el transporte público es 0.00408

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Juan Antonio Martínez García y Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

Ejercicio 1

Queremos alojar a 10 personas en un hotel que tiene habitaciones individuales, dobles y triples. Sabemos que si reservamos seis habitaciones individuales y dos dobles, debemos pagar 702 €, y si reservamos una individual y tres triples, debemos pagar lo mismo que si reservamos dos dobles y dos triples.

a) Determine los precios de la habitación doble y de la triple en función del precio de la individual.
[1,25 puntos]

b) Si el precio de la habitación triple es el doble del precio de la individual, ¿cuál es el precio de cada tipo de habitación? De las tres opciones planteadas para alojar a las 10 personas, ¿con cuál obtenemos el precio más bajo y cuál es ese precio?
[1,25 puntos]

Problema 2:

Ejercicio 2

Un inversor tiene un dinero invertido en un fondo de inversión muy volátil. El valor de su inversión en euros durante un día determinado es dado por la función

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{35x^2}{2}+300x+250,$$

donde $x \in [0, 24]$ representa el tiempo en horas.

a) Calcule el valor inicial de la inversión al empezar el día y determine qué beneficio o pérdida habrá tenido al cabo de 24 horas. Encuentre también a qué hora del día el valor de la inversión ha sido máximo y cuál era ese valor máximo.
[1,5 puntos]

b) ¿Hay algún momento del día en el que el valor de la inversión es negativo?
[1 punto]

Problema 3:

Ejercicio 3

Hace unos años una granja de vacas frisonas dedicada a la producción de leche realizó un estudio sobre el peso de sus vacas y llegó a la conclusión de que esta variable seguía una distribución normal con una media de 580 kg y una desviación típica de 25 kg.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim \text{normal}(0, 1) \rightarrow P(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \le Z \le 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$
  - para la proporción (muestras grandes):
    $$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$
  - para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):
    $$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

- para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

a) Calcule, de forma razonada, la probabilidad de que si tomamos al azar una vaca frisona de esta granja, su peso esté entre 531 y 629 kg.
[1 punto]

b) Creemos que un cambio en el tipo de forraje que se da a las vacas ha modificado la media del peso. Para comprobarlo, hemos obtenido el peso de una muestra de 10 vacas de la granja escogidas al azar:

569, 575, 611, 581, 583, 614, 589, 555, 566, 571

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la media del peso de las vacas, suponiendo que este peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 kg. ¿A partir del resultado obtenido, podemos afirmar que la media del peso de las vacas ha cambiado? Justifique la respuesta.
[1.5 puntos]

Problema 4:

Ejercicio 4

En el Congreso Catalán de Educación Matemática (C2EM), que se celebrará en Lleida el próximo mes de julio, asistirán docentes de universidad, de educación secundaria y de educación infantil y primaria.

A estas alturas, un 10% de los docentes inscritos son de universidad, un 50% son de secundaria y el resto son de infantil y primaria. Por otra parte, un 40% de los docentes inscritos de universidad, un 52% de los docentes inscritos de secundaria y un 65% de los docentes inscritos de infantil y primaria son mujeres.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

a) Calcule la probabilidad de que una persona escogida al azar de entre todos los inscritos sea una mujer. Si entre todas las mujeres inscritas escogemos una al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea docente de secundaria?
[1.25 puntos]

b) Calcule el número de docentes que se han inscrito en el Congreso de cada nivel educativo si sabemos que en total hay 476 mujeres inscritas.
[1.25 puntos]

OPCIÓN B

a) La organización del Congreso quiere dar un detalle diferente a cada grupo de docentes: el detalle tipo D1 para el grupo de docentes universitarios, el detalle tipo D2 para el grupo de docentes de secundaria y el detalle tipo D3 para el grupo de docentes de infantil y primaria. Han pedido presupuesto a tres empresas distintas, que llamaremos E1, E2 y E3. La siguiente matriz nos da los precios unitarios, en euros, de cada detalle de tipos D1, D2 y D3 (filas) según las empresas E1, E2 y E3 (columnas):

$$\begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix}$$

El pedido de la organización puede representarse como un vector fila (x, y, z), en el que x representa la cantidad de detalles de tipo D1, y es la cantidad de detalles de tipo D2 y z corresponde a la cantidad de detalles de tipo D3 a comprar.

La organización trabaja con la previsión de que en el Congreso asistirán 1.000 personas en total y que los porcentajes de cada grupo de docentes respecto al total serán los mismos que los que existen en este momento de la inscripción.

Calcule mediante un producto de matrices qué empresa ofrece el mejor precio y cuál es ese precio.
[1.25 puntos]

b) Un hotel situado cerca del espacio donde se celebrará el Congreso ha realizado un estudio de mercado. Inicialmente se planteaban ofrecer la habitación doble a un precio de 80€ la noche y con ese precio estimaban que tendrían 100 reservas de habitaciones dobles. Pero el estudio muestra que la relación entre el precio de la habitación doble y el número de reservas es lineal, por lo que por cada euro de descuento sobre el precio de la habitación consiguen dos reservas más. Si llamamos x el número de veces que se aplica el descuento de un euro, escriba la función que da los ingresos del hotel en función de x. ¿Cuál debe ser el precio de la habitación doble para maximizar los ingresos?
[1.25 puntos]

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Ejercicio 1

Queremos alojar a 10 personas en un hotel que tiene habitaciones individuales, dobles y triples. Sabemos que si reservamos seis habitaciones individuales y dos dobles, debemos pagar 702 €, y si reservamos una individual y tres triples, debemos pagar lo mismo que si reservamos dos dobles y dos triples.

a) Determine los precios de la habitación doble y de la triple en función del precio de la individual.
[1,25 puntos]

b) Si el precio de la habitación triple es el doble del precio de la individual, ¿cuál es el precio de cada tipo de habitación? De las tres opciones planteadas para alojar a las 10 personas, ¿con cuál obtenemos el precio más bajo y cuál es ese precio?
[1,25 puntos]

Solución:

a) Llamamos "x" al precio de la habitación individual, "y" al precio de la habitación doble y "z" al precio de la habitación triple.

"si reservamos seis habitaciones individuales y dos dobles cuesta 702 €" → $6x+2y=702$.

"si reservamos una individual y tres triples, debemos pagar lo mismo que si reservamos dos dobles y dos triples" → $x+3z=2y+2z$.

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix}6x+2y=702\\ x+3z=2y+2z\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}3x+y=351\\ x-2y+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}y=351-3x\\ x-2y+z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x-2(351-3x)+z=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-702+6x+z=0\Rightarrow z=702-7x\Rightarrow\boxed{\begin{cases}y=351-3x\\ z=702-7x\end{cases}}$$

El precio de la habitación doble es 351 € menos el triple del precio de la habitación individual.
El precio de la habitación triple es 702 € menos 7 veces el precio de la habitación individual.

b) Tenemos una nueva ecuación que añadimos al sistema obtenido en el apartado anterior.

"el precio de la habitación triple es el doble del precio de la individual" → $z=2x$.

Resolvemos el nuevo sistema.

$$\left.\begin{matrix}6x+2y=702\\ x+3z=2y+2z\\ z=2x\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}y=351-3x\\ z=702-7x\\ z=2x\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}y=351-3x\\ 702-7x=2x\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}y=351-3x\\ 702=9x\rightarrow\boxed{x=\frac{702}{9}=78}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=351-3\cdot78=117}\\ \boxed{z=2\cdot78=156}\end{cases}$$

La habitación individual cuesta 78 €, la doble 117 € y la triple 156 €.
Para decidir la opción más barata calculamos el precio de cada opción.
6 habitaciones individuales y 2 dobles cuestan 702 €.
1 individual y 3 triples cuestan $78+3\cdot156=546$ €
2 dobles y 2 triples cuestan $2\cdot117+2\cdot234=546$ €

Las opciones más económicas son las dos últimas que cuestan lo mismo 546 €.
Lo más económico es reservar "1 individual + 3 triples" o bien "2 dobles + 2 triples".

Problema 2:

Ejercicio 2

Un inversor tiene un dinero invertido en un fondo de inversión muy volátil. El valor de su inversión en euros durante un día determinado es dado por la función

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{35x^2}{2}+300x+250,$$

donde $x \in [0, 24]$ representa el tiempo en horas.

a) Calcule el valor inicial de la inversión al empezar el día y determine qué beneficio o pérdida habrá tenido al cabo de 24 horas. Encuentre también a qué hora del día el valor de la inversión ha sido máximo y cuál era ese valor máximo.
[1,5 puntos]

b) ¿Hay algún momento del día en el que el valor de la inversión es negativo?
[1 punto]

Solución:

a) Como $f(0)=\frac{0^3}{3}-\frac{35\cdot 0^2}{2}+300\cdot 0+250=250$ el valor inicial de la inversión es 250 €. Al acabar el día el valor de su inversión es $f(24)=\frac{24^3}{3}-\frac{35\cdot 24^2}{2}+300\cdot 24+250=1978$ €. Ha tenido un beneficio de 1978 – 250 = 1528 €.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{35x^2}{2}+300x+250 \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}-\frac{70x}{2}+300=x^2-35x+300$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-35x+300=0 \Rightarrow x=\frac{35\pm\sqrt{(-35)^2-4\cdot 300}}{2}=\frac{35\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{35+5}{2}=\boxed{20=x}\\ \frac{35-5}{2}=\boxed{15=x}\end{cases}$$

Calculamos el valor de la inversión a las 15 y a las 20 horas y lo comparamos con el valor inicial y final.

$f(0)=250$ *Mínimo*

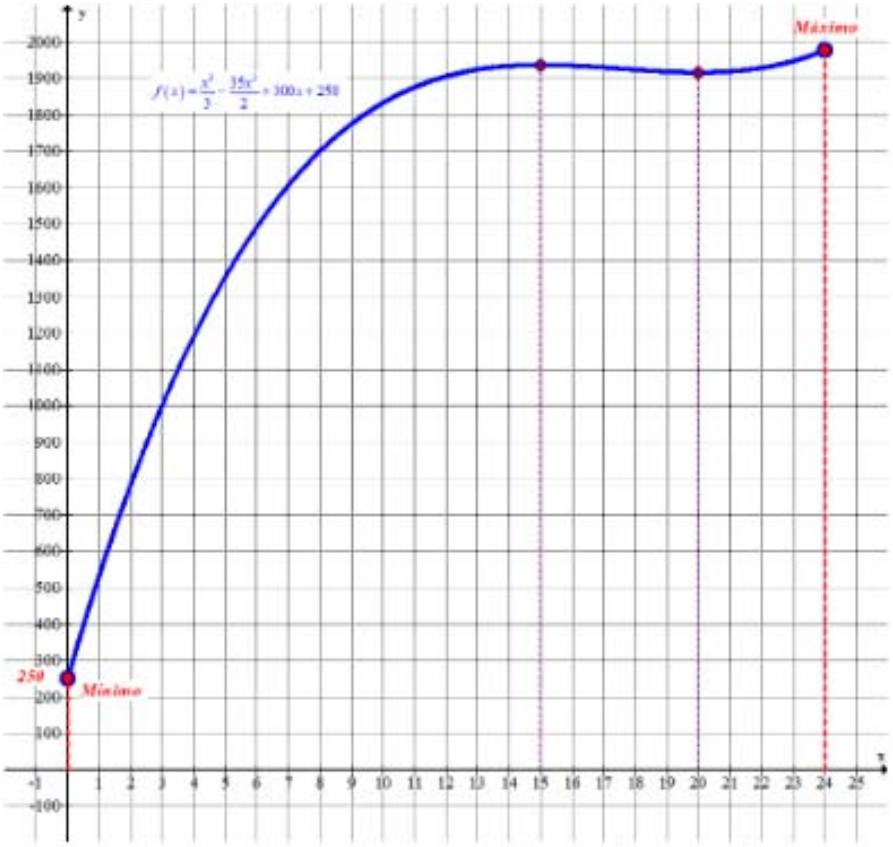
$$f(15)=\frac{15^3}{3}-\frac{35\cdot 15^2}{2}+300\cdot 15+250=1937.5$$

$$f(20)=\frac{20^3}{3}-\frac{35\cdot 20^2}{2}+300\cdot 20+250=1916.66$$

$f(24)=1978$ *Máximo*

Al acabar el día se alcanza el valor máximo de 1978 €.

b) Nunca se alcanza un valor negativo de la inversión pues el valor mínimo es de 250 € al comenzar el día. El valor de la inversión a lo largo del día permanece entre 250 € y 1978 €.


Máximo
Mínimo
250

Problema 3:

Ejercicio 3

Hace unos años una granja de vacas frisonas dedicada a la producción de leche realizó un estudio sobre el peso de sus vacas y llegó a la conclusión de que esta variable seguía una distribución normal con una media de 580 kg y una desviación típica de 25 kg.

FÓRMULAS PARA RESOLVER EL EJERCICIO:

- $Z \sim$ normal (0, 1) $\rightarrow P(-1.96 \le Z \le 1.96) = 0.95$ y $P(-2.58 \le Z \le 2.58) = 0.99$
- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$
  - para la proporción (muestras grandes):
    $$\left[p - z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$
  - para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):
    $$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$
  - para la media (muestras grandes con la varianza σ^2 desconocida):
    $$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

a) Calcule, de forma razonada, la probabilidad de que si tomamos al azar una vaca frisona de esta granja, su peso esté entre 531 y 629 kg.
[1 punto]

b) Creemos que un cambio en el tipo de forraje que se da a las vacas ha modificado la media del peso. Para comprobarlo, hemos obtenido el peso de una muestra de 10 vacas de la granja escogidas al azar:

569, 575, 611, 581, 583, 614, 589, 555, 566, 571

Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la media del peso de las vacas, suponiendo que este peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 kg. ¿A partir del resultado obtenido, podemos afirmar que la media del peso de las vacas ha cambiado? Justifique la respuesta.
[1.5 puntos]

Solución:

Sea X = el peso de las vacas de una granja. X = N(580, 25)

a) Nos piden calcular $P(531 \le X \le 629)$.

$$P(531 \le X \le 629) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{531-580}{25} \le Z \le \frac{629-580}{25} \right) =$$

$$= P(-1.96 \le Z \le 1.96) = P(Z \le 1.96) - P(Z \le -1.96) = P(Z \le 1.96) - P(Z \ge 1.96) =$$

$$= P(Z \le 1.96) - [1 - P(Z \le 1.96)] = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = 0.975 - (1 - 0.975) = \boxed{0.95}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8188	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8688	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

b) El tamaño muestral es n = 10.

La media muestral es $\frac{569+575+611+581+583+614+589+555+566+571}{10} = 581.4$ kg.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{25}{\sqrt{10}} \simeq 15.5 \text{ kg}$$

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\frac{25}{\sqrt{10}} \simeq 15.5 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left[\bar{x}-z_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}+z_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [581.4-15.5, 581.4+15.5] = [565.9, 596.9]$$

La media dada al principio era de 580 kg que pertenece al intervalo de confianza. Por tanto, podemos decir que no ha cambiado la media del peso de las vacas. De hecho, la diferencia con la media muestral es de solo 1.4 kg.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 4:

Ejercicio 4

En el Congreso Catalán de Educación Matemática (C2EM), que se celebrará en Lleida el próximo mes de julio, asistirán docentes de universidad, de educación secundaria y de educación infantil y primaria.

A estas alturas, un 10% de los docentes inscritos son de universidad, un 50% son de secundaria y el resto son de infantil y primaria. Por otra parte, un 40% de los docentes inscritos de universidad, un 52% de los docentes inscritos de secundaria y un 65% de los docentes inscritos de infantil y primaria son mujeres.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

a) Calcule la probabilidad de que una persona escogida al azar de entre todos los inscritos sea una mujer. Si entre todas las mujeres inscritas escogemos una al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea docente de secundaria?
[1.25 puntos]

b) Calcule el número de docentes que se han inscrito en el Congreso de cada nivel educativo si sabemos que en total hay 476 mujeres inscritas.
[1.25 puntos]

OPCIÓN B

a) La organización del Congreso quiere dar un detalle diferente a cada grupo de docentes: el detalle tipo D1 para el grupo de docentes universitarios, el detalle tipo D2 para el grupo de docentes de secundaria y el detalle tipo D3 para el grupo de docentes de infantil y primaria. Han pedido presupuesto a tres empresas distintas, que llamaremos E1, E2 y E3. La siguiente matriz nos da los precios unitarios, en euros, de cada detalle de tipos D1, D2 y D3 (filas) según las empresas E1, E2 y E3 (columnas):

$$\begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix}$$

El pedido de la organización puede representarse como un vector fila (x, y, z), en el que x representa la cantidad de detalles de tipo D1, y es la cantidad de detalles de tipo D2 y z corresponde a la cantidad de detalles de tipo D3 a comprar.

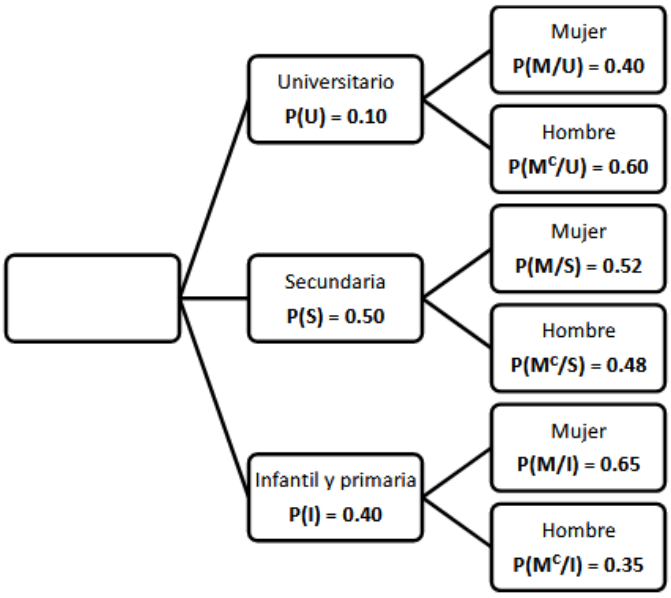
La organización trabaja con la previsión de que en el Congreso asistirán 1.000 personas en total y que los porcentajes de cada grupo de docentes respecto al total serán los mismos que los que existen en este momento de la inscripción.

Calcule mediante un producto de matrices qué empresa ofrece el mejor precio y cuál es ese precio.
[1.25 puntos]

b) Un hotel situado cerca del espacio donde se celebrará el Congreso ha realizado un estudio de mercado. Inicialmente se planteaban ofrecer la habitación doble a un precio de 80€ la noche y con ese precio estimaban que tendrían 100 reservas de habitaciones dobles. Pero el estudio muestra que la relación entre el precio de la habitación doble y el número de reservas es lineal, por lo que por cada euro de descuento sobre el precio de la habitación consiguen dos reservas más. Si llamamos x el número de veces que se aplica el descuento de un euro, escriba la función que da los ingresos del hotel en función de x. ¿Cuál debe ser el precio de la habitación doble para maximizar los ingresos?
[1.25 puntos]

Solución Opción A:

a) Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(U)P(M/U)+P(S)P(M/S)+P(I)P(M/I)=$$

$$=0.1\cdot 0.4+0.5\cdot 0.52+0.4\cdot 0.65=\boxed{0.56}$$

También nos piden calcular $P(S/M)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S/M)=\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{P(S)P(M/S)}{P(M)}=\frac{0.5\cdot 0.52}{0.56}=\boxed{\frac{13}{28}\simeq 0.4643}$$

b) La probabilidad de que al elegir un docente asistente al congreso este sea mujer es de 0.56. Esto se corresponde con un 56% de los asistentes. Hacemos una regla de tres y obtenemos cuantos asistentes hay al congreso viendo lo que representa el 100%.

$$\left.\begin{array}{l}56\%\longrightarrow 476\ mujeres\\ 100\%\longrightarrow x\ asistentes\end{array}\right\}\Rightarrow 56x=476\cdot 100\Rightarrow x=\frac{47600}{56}=850\ \text{asistentes.}$$

El número total de asistentes es de 850 docentes. Como un 10% son universitarios, esto representa $0.10 \cdot 850 = 85$ docentes universitarios. Un 50% son docentes de secundaria, esto representa $0.5 \cdot 850 = 425$ docentes de secundaria. El resto son de infantil y primaria, es decir, $850 - 85 - 425 = 340$ son docentes de infantil y primaria.

Solución Problema 4: Opción B

a) Como los porcentajes son el 10 % de docentes universitarios serían $0{,}10 \cdot 1000 = 100$ docentes universitarios, el 50 % de docentes de secundaria, significa $0.5 \cdot 1000 = 500$ docentes de secundaria y el resto $1000 - 100 - 500 = 400$ docentes de infantil y primaria.

La matriz fila que representa el pedido es $(100 \quad 500 \quad 400)$.

Calculamos el coste del pedido para cada uno de los proveedores.

$$\begin{matrix} D1 & D2 & D3 & E1 & E2 & E3 & & E1 & & E2 & & E3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{matrix}$$

$$(100 \quad 500 \quad 400)\begin{pmatrix} 1.25 & 1 & 1.25 \\ 0.75 & 1 & 1.15 \\ 1 & 0.85 & 0.80 \end{pmatrix}\begin{matrix} \rightarrow D1 \\ \rightarrow D2 \\ \rightarrow D3 \end{matrix} = (125+375+400 \quad 100+500+340 \quad 125+575+320) =$$

$$1\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 3 \longrightarrow 1\times 3$$

$$\begin{matrix} E1 & E2 & E3 \end{matrix}$$

$$= (900 \quad 940 \quad 1020)$$

El mejor precio lo ofrece la empresa E1, siendo el precio de 900 €.

b) Con 0 descuentos tenemos 100 reservas que a 80 € cada una representa unos ingresos de 8000 €.

Con 1 € de descuento tenemos 100 + 2 reservas que a 80 – 1 € representan unos ingresos de:

$$x = 1 \Rightarrow I(1) = (100 + 2 \cdot 1) \cdot (80 - 1) = 8058$$

Con 2 € de descuento tenemos $100 + 2 \cdot 2$ reservas que a 80 – 2 € representan unos ingresos de:

$$x = 2 \Rightarrow I(2) = (100 + 2 \cdot 2) \cdot (80 - 2) = 8112$$

Con x € de descuento tenemos $100 + 2x$ reservas que a $80 - x$ € representan unos ingresos de:

$$I(x) = (100 + 2x)(80 - x) = 8000 - 100x + 160x - 2x^2 = -2x^2 + 60x + 8000$$

Hallamos los puntos críticos de la función ingresos.

$$I(x) = -2x^2 + 60x + 8000 \Rightarrow I'(x) = -4x + 60$$

$$I'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 60 = 0 \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow \boxed{x = \frac{60}{4} = 15}$$

En $x = 15$ la función tiene un punto crítico. Sustituimos este valor en la derivada segunda y comprobamos si es un máximo de la función ingresos.

$$I'(x) = -4x + 60 \Rightarrow I''(x) = -4 \Rightarrow I''(15) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función ingresos presenta un máximo relativo para $x = 15$. Para este valor los ingresos son $I(15) = (100 + 2 \cdot 15)(80 - 15) = 8450$ €, siendo el precio de la habitación doble que hacen máximos los ingresos de 80 – 15 = 65 €.

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 1:

1º) Un agricultor ha observado que, si se plantan 25 perales por hectárea, el rendimiento es de 370 peras por árbol. Además, también ha comprobado que la relación entre el número de peras por árbol y el número de perales por hectárea es lineal, por lo que, por cada árbol plantado de más por hectárea, el rendimiento disminuye en 10 peras por peral.

a) Llamamos x al número de perales de más que plantamos, adicionales a los 25 iniciales. Calcule la función de la producción total de peras por hectárea, $P(x)$, en función de x.

b) ¿Cuál es el número total de perales por hectárea a plantar para obtener el máximo de producción por hectárea? ¿Cuál es esa producción máxima? ¿A partir de cuántos perales por hectárea no se obtienen ninguna producción?

Ejercicio 2:

2º) Una marca de zapatos conocida puso a la venta uno de sus modelos más populares y vendió toda su producción en la temporada de verano. El precio de cada par de zapatos era de 90 euros, pero algunos se vendieron al precio original, otros con un 20 % de descuento y el resto con un 50 % de descuento en la liquidación de final de temporada. En total se produjeron 820.000 pares de zapatos de este modelo, que proporcionaron unos ingresos de 63.837.000 euros. Sabemos también que se vendieron el doble de zapatos rebajados al 20 % que al 50 %. Encuentre cuántos pares de zapatos se vendieron al precio original, cuántos con un 20 % de descuento y cuántos al 50 %.

Ejercicio 3:

3º) En un parque natural, los visitantes pueden acceder en coche, en bicicleta o a pie. Una vez dentro del parque, los visitantes pueden realizar una ruta guiada o bien visitarlo por su cuenta.

a) Sabemos que el 60 % de los visitantes acceden en coche, el 15 % en bicicleta y el 25 % restante a pie. También sabemos que de los que llegan en coche el 80 % hacen la ruta guiada, mientras que de los que llegan en bicicleta la hacen el 60 % y de los que llegan a pie sólo la hacen el 30 %. Si escogemos un visitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haga la ruta guiada? Si sabemos que ha realizado la ruta guiada, ¿cuál es la probabilidad de que haya accedido al parque en coche?

b) Queremos realizar un estudio del tiempo que pasan de media los visitantes dentro del parque. Hemos preguntado a 100 visitantes cuánto rato han estado dentro del parque y hemos obtenido una media de 231 minutos con una desviación típica de 32 minutos. Construya un intervalo de confianza del

Textos Marea Verde

95 % para el tiempo medio que pasan los visitantes dentro del parque.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD

Ejercicio 4:

4A) Una empresa fabrica coches eléctricos y coches de motor de combustión. La empresa tiene tres líneas de fabricación: L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra el número de vehículos de cada tipo que hay en este momento en cada línea. Por otra parte, sabemos que el precio de venta de los vehículos eléctricos es de 40.000 euros y el precio de venta de los vehículos a motor de combustión es de 30.000 euros.

	Coches eléctricos	Coches de combustión
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El coste medio de mantenimiento y consumo por cada 100 km es de un euro para los vehículos eléctricos y de 6 euros para los de motor de combustión. El 2 % de la producción de vehículos de motor de combustión sale de la empresa con algún defecto, mientras que sólo el 1 % de los vehículos eléctricos sale con alguna tara.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

a) Obtenga, mediante un producto de matrices, la matriz que expresa los ingresos por cada línea una vez se hayan vendido todos los choches. Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la fábrica, ¿cuál es la probabilidad de motor de combustión si sabemos que ha salido defectuoso?

b) Es más caro comprar un coche eléctrico, pero tiene menos gastos por kilómetros recorridos que uno de combustión. Determine la función que representa el gasto acumulado entre la compra y los kilómetros recorridos, para cada tipo de vehículo en función del número de kilómetros recorridos, x. Si un conductor recorre 20.000 km al año, ¿a partir de cuántos años le saldrá más en cuenta el coche eléctrico que el de combustión?

OPCIÓN B

a) Ha habido un error en el recuento de vehículos eléctricos de la L2. El valor 30 de la tabla del enunciado es erróneo, pero sabemos que, si se vendieran todos los vehículos de la L2, los ingresos de esta línea serían de 3.720.000 euros. ¿Cuántos coches eléctricos existen realmente en la L2? Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la L2, ¿cuál es la probabilidad de que sea de motor eléctrico, si sabemos que ha salido defectuoso?

b) Si sabemos que el gasto acumulado entre la compra y los kilómetros recorridos de un vehículo de combustión es de 36.000 euros, ¿cuántos kilómetros ha recorrido? ¿Qué gasto acumulado tendría un vehículo eléctrico que hubiera recorrido ese mismo número de kilómetros?

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Ejercicio 1:

1º) Un agricultor ha observado que, si se plantan 25 perales por hectárea, el rendimiento es de 370 peras por árbol. Además, también ha comprobado que la relación entre el número de peras por árbol y el número de perales por hectárea es lineal, por lo que, por cada árbol plantado de más por hectárea, el rendimiento disminuye en 10 peras por peral.

a) Llamamos x al número de perales de más que plantamos, adicionales a los 25 iniciales. Calcule la función de la producción total de peras por hectárea, $P(x)$, en función de x.

b) ¿Cuál es el número total de perales por hectárea a plantar para obtener el máximo de producción por hectárea? ¿Cuál es esa producción máxima? ¿A partir de cuántos perales por hectárea no se obtienen ninguna producción?

Solución:

a) El número de perales por hectárea con el aumento es: $(25 + x)$.

El número de peras por hectárea es $n = (370 - 10x)$.

$Producción = Número\ de\ perales \times peras\ de\ cada\ peral \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) = (25 + x)(370 - 10x) = 9.250 - 250x + 370x - 10x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(x) = -10x^2 + 120x + 9.250.}$$

b) La producción será máxima cuando se anule su primera derivada y sea negativa su segunda derivada.

$P'(x) = -20x + 120 = 0;\ -x + 6 = 0;\ x = 6.$

$P''(x) = -20 < 0 \Rightarrow$ Máximo para $x = 6.$

$nº\ perales\ por\ hectárea = 25 + 6 = 31.$

El rendimiento es máximo plantando 31 perales por hectárea.

$$P(6) = -10 \cdot 6^2 + 120 \cdot 6 + 9.250 = -360 + 720 + 9.250 = 9.610.$$

La producción máxima es de 9.610 peras por hectárea.

$P(x) = 0 \Rightarrow -10x^2 + 120x + 9.250 = 0;\ x^2 - 12x - 925 = 0;$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 3.700}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{3.844}}{2} = \frac{12 \pm 62}{2} = 6 \pm 31 \Rightarrow x_1 = -25, x_2 = 37.$

La solución negativa carece de sentido lógico.

$25 + 37 = 62.$

A partir de 62 perales por hectárea no se obtiene ninguna producción

Ejercicio 2:

2º) Una marca de zapatos conocida puso a la venta uno de sus modelos más populares y vendió toda su producción en la temporada de verano. El precio de cada par de zapatos era de 90 euros, pero algunos se vendieron al precio original, otros con un 20 % de descuento y el resto con un 50 % de descuento en la liquidación de final de temporada. En total se produjeron 820.000 pares de zapatos de este modelo, que proporcionaron unos ingresos de 63.837.000 euros. Sabemos también que se vendieron el doble de zapatos rebajados al 20 % que al 50 %. Encuentre cuántos pares de zapatos se vendieron al precio original, cuántos con un 20 % de descuento y cuántos al 50 %.

Solución:

Sean x, y, z el número de miles de pares de zapatos que se vendieron al precio original, con el 20 % de descuento y con el 50 % de descuento, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 90x + 72y + 45z &= 63.837 \\ x + y + z &= 820 \\ y &= 2z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 10x + 8y + 5z &= 7.093 \\ x + y + z &= 820 \\ y &= 2z \end{aligned}\right\}.$$

$$\left.\begin{aligned} 10x + 16z + 5z &= 7.093 \\ x + 2z + z &= 820 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 10x + 21z &= 7.093 \\ x + 3z &= 820 \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} -10x - 21z &= -7.093 \\ 10x + 30z &= 8.200 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9z = 1.107;\ \ z = 123.\ \ y = 246.$$

$$x + 246 + 123 = 820;\ \ x = 820 - 369 = 451.$$

El número de miles de pares de zapatos que vendió la marca conocida fue:

451 *al precio original*, 246 *con el* 20 % *y* 123 *con el* 50 % *de descuento.*

Ejercicio 3:

3º) En un parque natural, los visitantes pueden acceder en coche, en bicicleta o a pie. Una vez dentro del parque, los visitantes pueden realizar una ruta guiada o bien visitarlo por su cuenta.

a) Sabemos que el 60 % de los visitantes acceden en coche, el 15 % en bicicleta y el 25 % restante a pie. También sabemos que de los que llegan en coche el 80 % hacen la ruta guiada, mientras que de los que llegan en bicicleta la hacen el 60 % y de los que llegan a pie sólo la hacen el 30 %. Si escogemos un visitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haga la ruta guiada? Si sabemos que ha realizado la ruta guiada, ¿cuál es la probabilidad de que haya accedido al parque en coche?

b) Queremos realizar un estudio del tiempo que pasan de media los visitantes dentro del parque. Hemos preguntado a 100 visitantes cuánto rato han estado dentro del parque y hemos obtenido una media de 231 minutos con una desviación típica de 32 minutos. Construya un intervalo de confianza del 95 % para el tiempo medio que pasan los visitantes dentro del parque.

Solución:

Fórmulas para resolver el ejercicio:

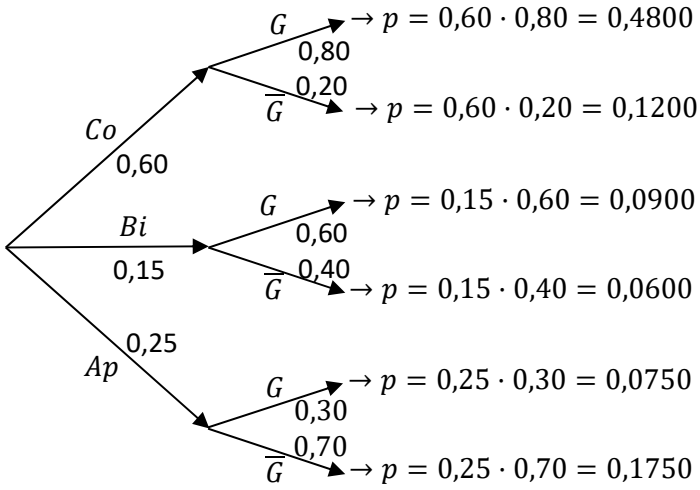
--- $Z \sim Normal\ (0,1) \rightarrow P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$ y $P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99$.

--- Intervalos de confianza con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$:

Para la proporción (muestras grandes): $\left[p - z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_\gamma \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$.

Para la media (muestras normales con varianza σ^2 desconocida):

$\left[\overline{x} - z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.



$$P = P(G) = P(Co) \cap P(G) + P(Bi) \cap P(G) + P(Ap) \cap P(G) =$$

$$= P(Co) \cdot P(G/Co) + P(Bi) \cdot P(G/Bi) + P(Ap) \cdot P(G/Ap) =$$

$$= 0{,}60 \cdot 0{,}80 + 0{,}15 \cdot 0{,}60 + 0{,}25 \cdot 0{,}30 = 0{,}4800 + 0{,}0900 + 0{,}0750 = \underline{0{,}6450}.$$

$$\boldsymbol{P(G) = \underline{0{,}6450}.}$$

$$P = P(Co/G) = \frac{P(Co \cap G)}{P(G)} = \frac{P(Co)\cdot(G/Co)}{P(G)} = \frac{0{,}60\cdot 0{,}80}{0{,}6450} = \frac{0{,}4800}{0{,}6450} = \underline{0{,}7742}.$$

$$\boldsymbol{P(Co/G) = \underline{0{,}7742}.}$$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$

$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 100;\ \overline{x} = 231;\ \sigma = 32;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(231 - 1{,}96 \cdot \frac{32}{\sqrt{100}};\ 231 + 1{,}96 \cdot \frac{32}{\sqrt{100}}\right);\ (231 - 1{,}96 \cdot 3{,}2;\ 231 + 1{,}28 \cdot 3{,}2);$$

$(231 - 6{,}272;\ 231 + 6{,}272).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\ \%} = (224{,}728;\ 237{,}272).}}$$

Ejercicio 4:

4A) Una empresa fabrica coches eléctricos y coches de motor de combustión. La empresa tiene tres líneas de fabricación: L1, L2 y L3. La siguiente tabla muestra el número de vehículos de cada tipo que hay en este momento en cada línea. Por otra parte, sabemos que el precio de venta de los vehículos eléctricos es de 40.000 euros y el precio de venta de los vehículos a motor de combustión es de 30.000 euros.

	Coches eléctricos	Coches de combustión
L1	20	80
L2	30	100
L3	40	110

El coste medio de mantenimiento y consumo por cada 100 km es de un euro para los vehículos eléctricos y de 6 euros para los de motor de combustión. El 2 % de la producción de vehículos de motor de combustión sale de la empresa con algún defecto, mientras que sólo el 1 % de los vehículos eléctricos sale con alguna tara.

Elija UNA de las dos opciones (A o B) y responda a las cuestiones que se plantean.

OPCIÓN A

$a)$ Obtenga, mediante un producto de matrices, la matriz que expresa los ingresos por cada línea una vez se hayan vendido todos los choches. Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la fábrica, ¿cuál es la probabilidad de motor de combustión si sabemos que ha salido defectuoso?

$b)$ Es más caro comprar un coche eléctrico, pero tiene menos gastos por kilómetros recorridos que uno de combustión. Determine la función que representa el gasto acumulado entre la compra y los kilómetros recorridos, para cada tipo de vehículo en función del número de kilómetros recorridos, x. Si un conductor recorre 20.000 km al año, ¿a partir de cuántos años le saldrá más en cuenta el coche eléctrico que el de combustión?

OPCIÓN B

$a)$ Ha habido un error en el recuento de vehículos eléctricos de la L2. El valor 30 de la tabla del enunciado es erróneo, pero sabemos que, si se vendieran todos los vehículos de la L2, los ingresos de esta línea serían de 3.720.000 euros. ¿Cuántos coches eléctricos existen realmente en la L2? Si escogemos al azar uno de los vehículos que hay ahora en la L2, ¿cuál es la probabilidad de que sea de motor eléctrico, si sabemos que ha salido defectuoso?

$b)$ Si sabemos que el gasto acumulado entre la compra y los kilómetros recorridos de un vehículo de combustión es de 36.000 euros, ¿cuántos kilómetros ha recorrido? ¿Qué gasto acumulado tendría un vehículo eléctrico que hubiera recorrido ese mismo número de kilómetros?

Solución opción A:

$a)$ La matriz de los coches eléctricos y de combustión fabricados por línea es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix}.$$

La matriz de los precios de los coches eléctricos y de combustión fabricados es la siguiente:

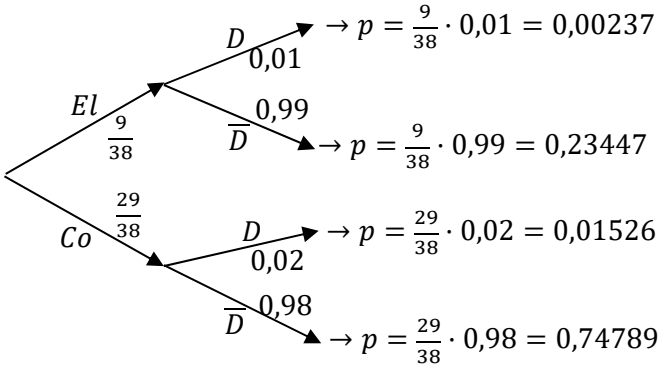
$$P = \begin{pmatrix} 40.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}.$$

El producto de matrices pedido es:

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (8+24)\cdot 10^5 \\ (12+30)\cdot 10^5 \\ (16+33)\cdot 10^5 \end{bmatrix} = 10^5 \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ 42 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{M \cdot P = \begin{pmatrix} 20 & 80 \\ 30 & 100 \\ 40 & 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40.000 \\ 30.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.200.000 \\ 4.200.000 \\ 4.900.000 \end{pmatrix}.}$$

El número total de coches es 380, de los cuales, 90 son eléctricos y 290 son de combustión.



$$P(Co/D) = \frac{P(Co \cap D)}{P(D)} = \frac{P(Co)\cdot P(D/Co)}{P(El)\cdot P(D/El) + P(Co)\cdot P(D/Co)} = \frac{\frac{29}{38}\cdot 0{,}02}{\frac{9}{38}\cdot 0{,}01 + \frac{29}{38}\cdot 0{,}02} =$$

$$= \frac{0{,}01526}{0{,}00237 + 0{,}01526} = \frac{0{,}01526}{0{,}01763} = \underline{0{,}86557}.$$

$$\boldsymbol{P(Co/D) = \underline{0{,}86557}.}$$

$b)$ $\underline{E(x) = 40.000 + 0{,}01 \cdot x.}$ $\underline{C(x) = 30.000 + 0{,}06 \cdot x.}$

Vamos a determinar ahora el número de kilómetros que se debe recorrer para que se equiparen los gastos de compra, consumo y mantenimiento de los coches eléctricos y de combustión.

$$E(x) = C(x) \Rightarrow 40.000 + 0{,}01 \cdot x = 40.000 + 0{,}01 \cdot x;\ \ 10.000 = 0{,}05 \cdot x;$$

$$x = \frac{10.000}{0{,}05} = \frac{1.000.000}{5} = 200.000.$$

A partir de 200.000 kilómetros recorridos es más ventajoso comprar un coche eléctrico.

Si un conductor recorre 20.000 kilómetros por año:

A partir de 10 años le interesa más comprar un coche eléctrico.

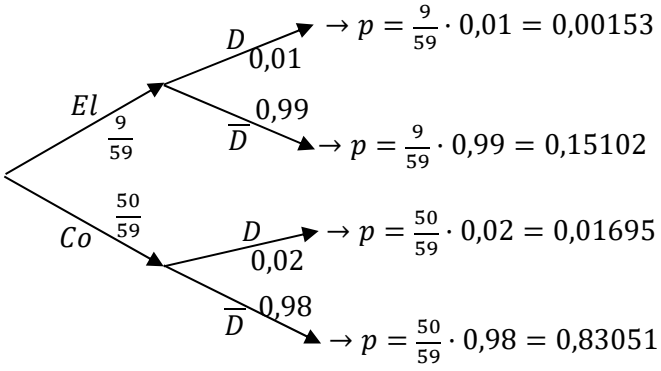
Solución opción B:

$a)$ Sea n el número de vehículos eléctricos que se fabrican en la línea L2.

$40.000 \cdot n + 100 \cdot 30.000 = 3.720.000;\ \ n + 75 = 93;\ \ n = 18.$

En la línea L2 existen realmente 18 coches eléctricos.

$P(El) = \frac{18}{18+100} = \frac{18}{118} = \frac{9}{59}.$ $\qquad P(Co) = \frac{100}{118} = \frac{50}{59}.$



$$P(El/D) = \frac{P(El \cap D)}{P(D)} = \frac{P(El)\cdot P(D/El)}{P(El)\cdot P(D/El)+P(Co)\cdot P(D/Co)} = \frac{\frac{5}{59}\cdot 0{,}01}{\frac{5}{59}\cdot 0{,}01+\frac{50}{59}\cdot 0{,}02} =$$

$$= \frac{0{,}00153}{0{,}00153+0{,}01695} = \frac{0{,}00153}{0{,}01848} = \underline{0{,}08279}.$$

$$\boldsymbol{P(El/D) = \underline{0{,}08279}}$$

$b)$ Sabemos de apartados anteriores que el gasto acumulado por un vehículo de combustión viene dado por la función $C(x) = 30.000 + 0{,}06 \cdot x$.

$C(x) = 36.000 \Rightarrow 30.000 + 0{,}06x = 36.000;\ \ 0{,}06x = 6.000;\ \ x = 100.000.$

El vehículo de combustión ha recorrido 100.000 kilómetros.

Sabemos que el coste medio de mantenimiento y consumo de un vehículo eléctrico es $E(x) = 40.000 + 0{,}01 \cdot x$, donde x son los kilómetros recorridos, por lo cual:

$E(100.000) = 40.000 + 0{,}01 \cdot 100.000 = 40.000 + 1.000 = 41.000.$

El coste y mantenimiento del vehículo eléctrico es de 41.000 euros.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA**

Instrucciones para realizar el examen: En algunos apartados existe la posibilidad de elegir entre dos preguntas. En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada bloque sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.
Criterios generales: Las respuestas a las preguntas o tareas deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.
En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o tarea.
Ortografía y redacción: Con carácter general se penalizará la incorrección gramatical de la siguiente manera: Los 2 primeros errores ortográficos no se penalizarán. Se comenzará a deducir 0,10 puntos por cada falta ortográfica a partir de la tercera, hasta alcanzar la máxima penalización de 1 punto. Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola. Por errores en la sintaxis, el vocabulario y la presentación se podrá deducir un máximo de 0.50 puntos.
Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable. También se podrá utilizar una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

APARTADO A (4 puntos)

El servicio de atención al cliente de una compañía telefónica decide realizar un estudio sobre el tipo de reclamaciones que recibe. Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron:

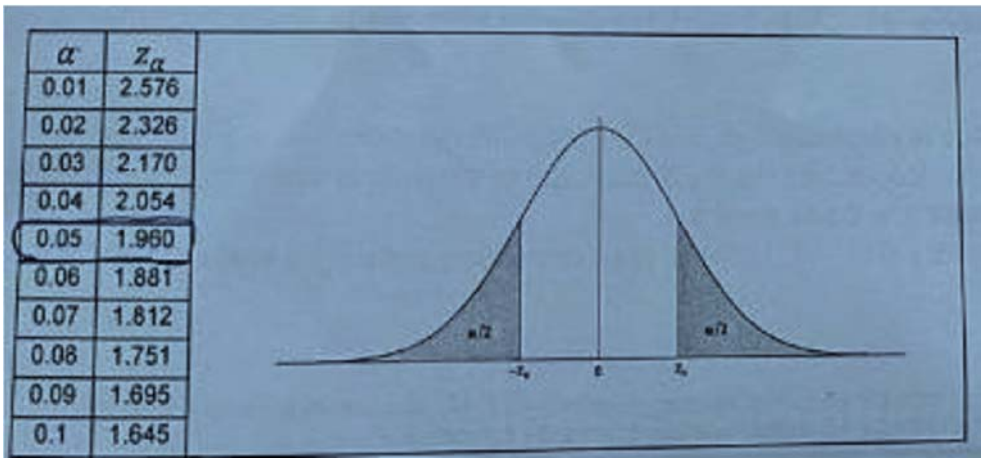
A1. En este servicio se reciben 1500 llamadas al día, de las cuales 700 son consultas técnicas, 600 consultas financieras y el resto son reclamaciones. El cliente queda satisfecho en el 50% de las consultas técnicas, en el 40% de las consultas financieras ye en el 10% de las reclamaciones. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente presente una reclamación y no quede satisfecho con el resultado de la misma.
b) Calcular la probabilidad de que un cliente atendido por dicho servicio quede satisfecho con la atención recibida.

A2. De las 200 reclamaciones recibidas telefónicamente cierto día, se resolvieron favorablemente para el cliente 64. Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de reclamaciones telefónicas favorables al cliente.
b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20%?

BY NC SA
Textos Marea Verde



α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645

Ejercicio A1 (2 puntos): Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 1 punto.
Ejercicio A2 (2 puntos): Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 0.5 puntos.

APARTADO B (3 puntos)
Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5x & 4\\ -x & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & y\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}z & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2

a) Calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $I+A^t=B\cdot C$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.
b) Tomando $x=1$, determinar los valores de *y* para los que $A\cdot B$ tiene inversa.

B2. Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo. La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar y de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2. Además, la granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo. Determinar el número de hectáreas que se deben dedicar a cada cultivo para obtener los beneficios máximos y calcular dichos beneficios.

Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 2 puntos, apartado b) entre 0 y 1 punto.
Ejercicio B2: Entre 0 y 3 puntos.

APARTADO C (3 puntos)
Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. La temperatura de una bodega oscila entre los 6 y los 14 grados y la cantidad de vino que se estropea, $C(x)$ en litros, depende de su temperatura de conservación, *x* en grados, de acuerdo con la siguiente función:

$$C(x)=1000-231x+27x^2-x^3 \qquad 6\le x\le 14$$

Determinar, razonando las respuestas:

BY NC SA
Textos Marea Verde

a) El crecimiento y decrecimiento de la cantidad de vino que se estropea dependiendo de la temperatura de conservación.
b) Las temperaturas de la bodega que hacen que se estropee la cantidad máxima y mínima de vino y los valores de estas cantidades.
c) La diferencia, en cuanto a cantidad de vino estropeada, entre mantener la bodega a 8 y a 10 grados.

C2. Consideramos la parábola $p(x) = Ax^2 + Bx - 30$. Se pide:

a) Determinar los valores de A y B para que el valor de la parábola en $x = 1$ sea –32 y su derivada en $x = 2$ sea igual a 4.
b) Para $A = 1$ y $B = -1$, hallar el área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x = 5$ y $x = 7$.

Ejercicio C1: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1 punto, apartado c) entre 0 y 0.5 puntos.
Ejercicio C2: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

APARTADO A (4 puntos)

El servicio de atención al cliente de una compañía telefónica decide realizar un estudio sobre el tipo de reclamaciones que recibe. Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron:

A1. En este servicio se reciben 1500 llamadas al día, de las cuales 700 son consultas técnicas, 600 consultas financieras y el resto son reclamaciones. El cliente queda satisfecho en el 50% de las consultas técnicas, en el 40% de las consultas financieras ye en el 10% de las reclamaciones. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un cliente presente una reclamación y no quede satisfecho con el resultado de la misma.

b) Calcular la probabilidad de que un cliente atendido por dicho servicio quede satisfecho con la atención recibida.

A2. De las 200 reclamaciones recibidas telefónicamente cierto día, se resolvieron favorablemente para el cliente 64. Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de reclamaciones telefónicas favorables al cliente.

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20%?

Solución A1:

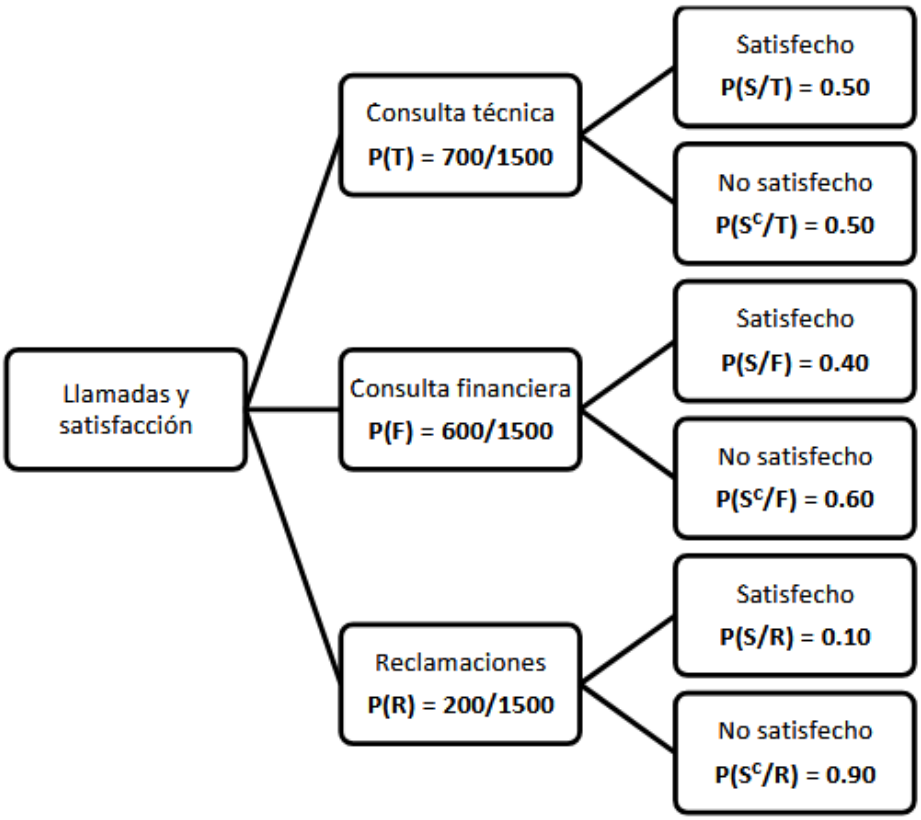
A1. Pasamos los datos a valores absolutos. Presentan una reclamación $1500 - 700 - 600 = 200$ clientes. Si el cliente queda satisfecho en el 50% de las consultas técnicas entonces son $700/2 = 350$ los clientes satisfechos, en el 40% de las consultas financieras, entonces son $0.40 \cdot 600 = 240$ los clientes satisfechos y en el 10% de las reclamaciones, entonces son $0.10 \cdot 200 = 20$ los clientes que han reclamado y han acabado satisfechos.

a) Como de 1500 clientes que realizan una llamada son 20 los que presentan una reclamación y quedan satisfechos, entonces hay $200 - 20 = 180$ clientes que presentan una reclamación y no resultan satisfechos. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un cliente presente una reclamación y no quede satisfecho con el resultado de la misma tiene un valor de $\frac{180}{1500} = 0.12$.

b) De las 1500 llamadas hay $350 + 240 + 20 = 610$ clientes que quedan satisfechos. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que un cliente atendido por dicho servicio quede satisfecho con la atención recibida tiene un valor de $\frac{610}{1500} = \frac{61}{150} \simeq 0.4067$.

Textos Marea Verde

También se puede resolver realizando un diagrama de árbol.



a) $P(R\cap S)=P(R)P(S/R)=\dfrac{200}{1500}\cdot 0.90=\boxed{0.12}$.

b) Nos piden calcular $P(S)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S)=P(T)P(S/T)+P(F)P(S/F)+P(R)P(S/R)=$$

$$=\frac{700}{1500}\cdot 0.50+\frac{600}{1500}\cdot 0.40+\frac{200}{1500}\cdot 0.10=\boxed{\frac{61}{150}\simeq 0.4067}$$

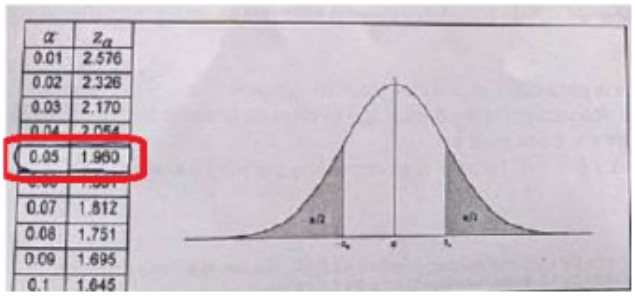
a) 0,12; b) 0,4067

Textos Marea Verde

Solución A2:

A2. a) Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 200$, la proporción muestral de reclamaciones telefónicas favorables al cliente es $p = \frac{64}{200} = 0.32$.

El nivel de confianza del 95% significa que $1 - \propto = 0.95 \rightarrow \propto = 0.05 \rightarrow$



α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645

Tenemos que $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.32 \cdot 0.68}{200}} \simeq 0.06465$$

El intervalo de confianza es

$$(p_r - Error,\ p_r + Error) = (0.32 - 0.06465, 0.32 + 0.06465) = (0.25535,\ 0.38465)$$

b) El porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20% supone una proporción de 0.20. Todos los valores del intervalo de confianza están por encima de este valor, por lo que se puede afirmar que el porcentaje de reclamaciones favorables al cliente supera el 20%.

Problema B1:

APARTADO B (3 puntos)
Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}5x & 4\\ -x & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & y\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}z & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2

a) Calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad $I+A^t=B\cdot C$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.
b) Tomando $x=1$, determinar los valores de y para los que $A\cdot B$ tiene inversa.

Solución B1:

a) Resolvemos la ecuación matricial.

$$I+A^t=B\cdot C\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5x & -x\\ 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & y\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1+5x & -x\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3z+2y & -3\\ -z+8 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}1+5x=3z+2y\\ -x=-3\\ 4=-z+8\\ 1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+5x=3z+2y\\ \boxed{x=3}\\ \boxed{z=8-4=4}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+5\cdot 3=3\cdot 4+2y\Rightarrow 1+15=12+2y\Rightarrow 4=2y\Rightarrow\boxed{y=2}$$

Para $x=3$, $y=2$, $z=4$ se cumple la igualdad $I+A^t=B\cdot C$.

b) Con $x=1$ nos quedan las matrices $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & y\\ -1 & 4\end{pmatrix}$. Obtenemos la expresión de la matriz $A\cdot B$.

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & y\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-4 & 5y+16\\ -3+0 & -y+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 5y+16\\ -3 & -y\end{pmatrix}$$

Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$|AB|=\begin{vmatrix}11 & 5y+16\\ -3 & -y\end{vmatrix}=-11y+15y+48=48+4y$$

$$|AB|\neq 0\Rightarrow 48+4y\neq 0\Rightarrow 4y\neq -48\Rightarrow\boxed{y\neq -12}$$

La matriz $A\cdot B$ tiene inversa para cualquier valor de "y" distinto de –12.

$a)$ $x=3, y=2, z=4$

b) La matriz *A.B* tiene inversa para todo y distinto de -12

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema B2:

B2. Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo. La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar y de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2. Además, la granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo. Determinar el número de hectáreas que se deben dedicar a cada cultivo para obtener los beneficios máximos y calcular dichos beneficios.

Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 2 puntos, apartado b) entre 0 y 1 punto.
Ejercicio B2: Entre 0 y 3 puntos.

Solución B2:

Llamamos "x" al número de hectáreas de maíz e "y" al número de hectáreas de trigo.

"Una granja produce dos tipos de cultivos: maíz y trigo, generando un beneficio de 50 euros por hectárea de maíz y 40 euros por hectárea de trigo" → Los beneficios son $B(x,y)=50x+40y$.

Las restricciones son:

"La granja dispone de 120 hectáreas para cultivar" → $x+y\le 120$.
"La granja dispone de 300 depósitos de agua. Cada hectárea de maíz requiere 3 depósitos de agua y cada hectárea de trigo requiere 2." → $3x+2y\le 300$
"La granja debe dedicar al menos 20 hectáreas al maíz y 15 hectáreas al trigo" → $x\ge 20;\ y\ge 15$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 120 \\ 3x+2y\le 300 \\ x\ge 20;\ y\ge 15 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=120$

x	$y=120-x$
0	120
120	0

$3x+2y=300$

x	$y=\dfrac{300-3x}{2}$
0	150
100	0

$x=20$

$x=20$	y
20	0
20	15

$y=15$

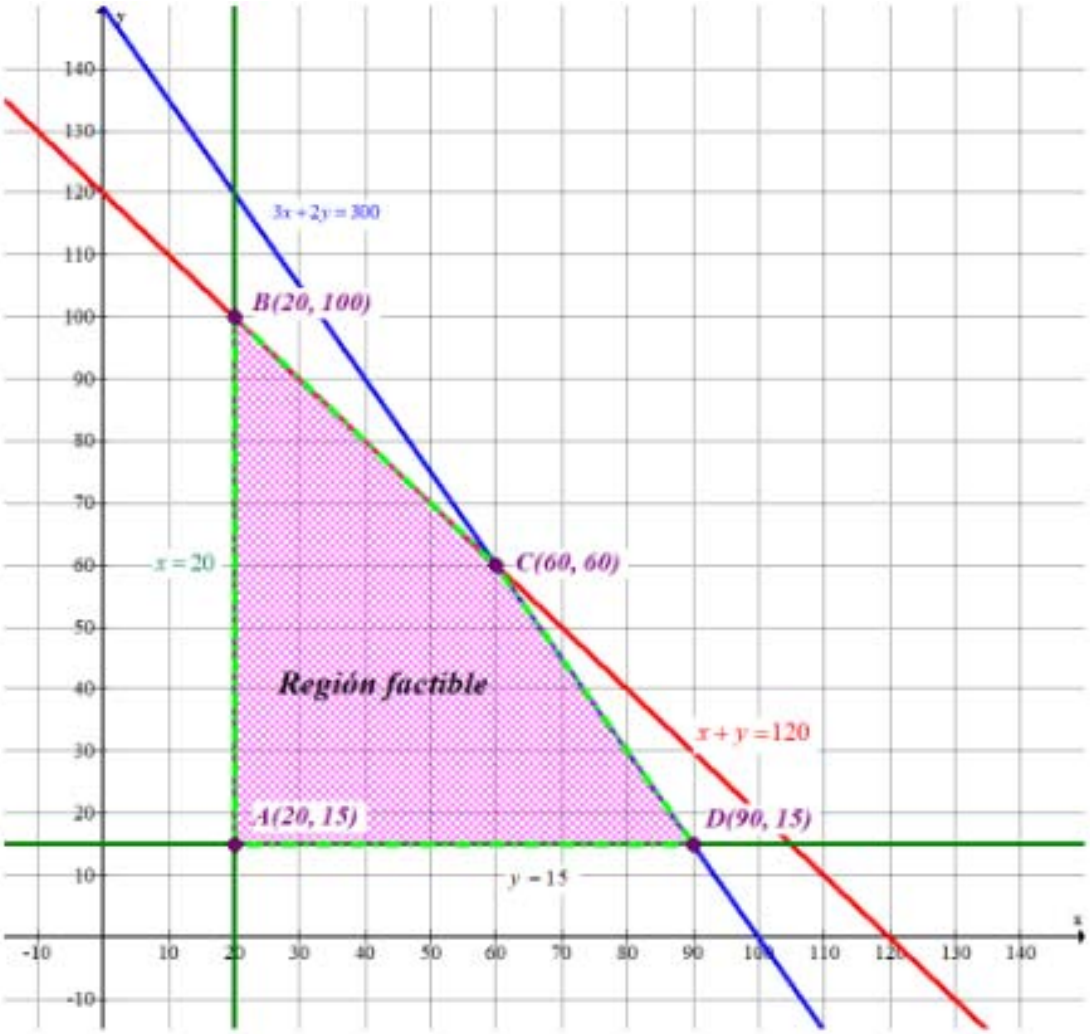
x	$y=15$
0	15
20	15

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 120 \\ 3x+2y\le 300 \\ x\ge 20;\ y\ge 15 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul, por encima de la recta horizontal verde y a la derecha de la recta vertical verde.

Comprobamos que el punto P(50, 50) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50+50\le 120 \\ 3\cdot 50+2\cdot 50\le 300 \\ 50\ge 20;\ 50\ge 15 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x,y)=50x+40y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(20, 15) → $B(20,15)=50\cdot 20+40\cdot 15=1600$

B(20, 100) → $B(20,100)=50\cdot 20+40\cdot 100=5000$

C(60, 60) → $B(60,60)=50\cdot 60+40\cdot 60=$ 5400 máximo

D(90, 15) → $B(90,15)=50\cdot 90+40\cdot 15=5100$

El valor máximo es 5400 y se obtiene en el vértice C(60, 60). Significa que se obtienen unos máximos beneficios de 5400 euros plantando 60 hectáreas de maíz y 60 de trigo.

Problema C1:

APARTADO C (3 puntos)
Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. La temperatura de una bodega oscila entre los 6 y los 14 grados y la cantidad de vino que se estropea, $C(x)$ en litros, depende de su temperatura de conservación, x en grados, de acuerdo con la siguiente función:

$$C(x)=1000-231x+27x^2-x^3 \qquad 6\le x\le 14$$

Determinar, razonando las respuestas:

a) El crecimiento y decrecimiento de la cantidad de vino que se estropea dependiendo de la temperatura de conservación.

b) Las temperaturas de la bodega que hacen que se estropee la cantidad máxima y mínima de vino y los valores de estas cantidades.

c) La diferencia, en cuanto a cantidad de vino estropeada, entre mantener la bodega a 8 y a 10 grados.

Solución C1:

a) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$C(x)=1000-231x+27x^2-x^3 \Rightarrow C'(x)=-231+54x-3x^2$$

$$C'(x)=0 \Rightarrow -231+54x-3x^2=0 \Rightarrow x^2-18x+77=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot 77}}{2}=\frac{18\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{18+4}{2}=11\in[6,14]\\ \frac{18-4}{2}=7\in[6,14]\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $[6,7)$ consideramos $x=6$ y la derivada vale $C'(6)=-231+54\cdot 6-3\cdot 6^2=-15<0$. La función decrece en $[6,7)$.
- En el intervalo $(7,11)$ consideramos $x=8$ y la derivada vale $C'(8)=-231+54\cdot 8-3\cdot 8^2=9>0$. La función crece en $(7,11)$.
- En el intervalo $(11,14]$ consideramos $x=12$ y la derivada vale $C'(12)=-231+54\cdot 12-3\cdot 12^2=-15<0$. La función decrece en $(11,14]$.

La cantidad de vino que se estropea decrece entre 6 y 7 grados, crece entre 7 y 11 grados y vuelve a decrecer entre 11 y 14 grados.

b) Con el estudio anterior podemos afirmar que la función presenta un mínimo relativo en $x=7$ y un máximo relativo en $x=11$
Valoramos la función en estos puntos y en los extremos del intervalo para encontrar los máximos y mínimos absolutos.

$$\begin{cases} C(6)=1000-231\cdot 6+27\cdot 6^2-6^3=370 \\ C(7)=1000-231\cdot 7+27\cdot 7^2-7^3=363 \\ C(11)=1000-231\cdot 11+27\cdot 11^2-11^3=395 \ \textit{Máximo} \\ C(14)=1000-231\cdot 14+27\cdot 14^2-14^3=314 \ \textit{Mínimo} \end{cases}$$

La máxima cantidad de vino estropeada es de 395 litros y se produce con la temperatura de 11 grados.
La mínima cantidad de vino estropeada es de 314 litros y se produce con la temperatura de 14 grados.

c) La cantidad de vino estropeada con 8 grados es de $C(8)=1000-231\cdot 8+27\cdot 8^2-8^3=368$ litros y con 10 grados es de $C(10)=1000-231\cdot 10+27\cdot 10^2-10^3=390$ litros. La diferencia es un incremento de 390 – 368 = 22 litros.

a) La cantidad de vino que se estropea decrece entre 6 y 7 grados, crece entre 7 y 11 grados y vuelve a decrecer entre 11 y 14 grados

b) Máximo: (11, 395); Mínimo: (14, 314)

c) 22 litros

Problema C2:

C2. Consideramos la parábola $p(x)=Ax^2+Bx-30$. Se pide:

a) Determinar los valores de A y B para que el valor de la parábola en $x=1$ sea –32 y su derivada en $x=2$ sea igual a 4.

b) Para $A=1$ y $B=-1$, hallar el área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x=5$ y $x=7$.

Ejercicio C1: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1 punto, apartado c) entre 0 y 0.5 puntos.
Ejercicio C2: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos.

Solución C2:

a) Si el valor de la parábola en $x=1$ es –32 entonces $p(1)=-32$

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=Ax^2+Bx-30 \\ p(1)=-32 \end{array}\right\} \Rightarrow -32=A+B-30 \Rightarrow A+B=-2$$

Si su derivada en $x=2$ es igual a 4 entonces $p'(2)=4$.

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=Ax^2+Bx-30 \Rightarrow p'(x)=2Ax+B \\ p'(2)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4=2A\cdot 2+B \Rightarrow 4A+B=4$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} A+B=-2 \\ 4A+B=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=-2 \\ B=4-4A \end{array}\right\} \Rightarrow A+4-4A=-2 \Rightarrow -3A=-6 \Rightarrow \boxed{A=2} \Rightarrow \boxed{B=4-4\cdot 2=-4}$$

Para $A=2$ y $B=-4$ se cumple lo pedido.

b) Para $A=1$ y $B=-1$ la función queda $p(x)=x^2-x-30$. Determinamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=x^2-x-30 \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-x-30=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-30)}}{2}=\frac{1\pm 11}{2}=\begin{cases}\frac{1+11}{2}=6\in(5,7)\\ \frac{1-11}{2}=-5=x\end{cases}$$

El área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x=5$ y $x=7$ la calculamos como la suma del valor absoluto de la integral definida de la función entre 5 y 6 más el valor absoluto de la integral definida de la función entre 6 y 7.

$$\int_5^6 p(x)dx=\int_5^6 x^2-x-30dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-30x\right]_5^6=\left[\frac{6^3}{3}-\frac{6^2}{2}-30\cdot 6\right]-\left[\frac{5^3}{3}-\frac{5^2}{2}-30\cdot 5\right]=$$

$$=72-18-180-\frac{125}{3}+\frac{25}{2}+150=24-\frac{175}{6}=\frac{-31}{6}\approx -5.1667$$

Textos Marea Verde

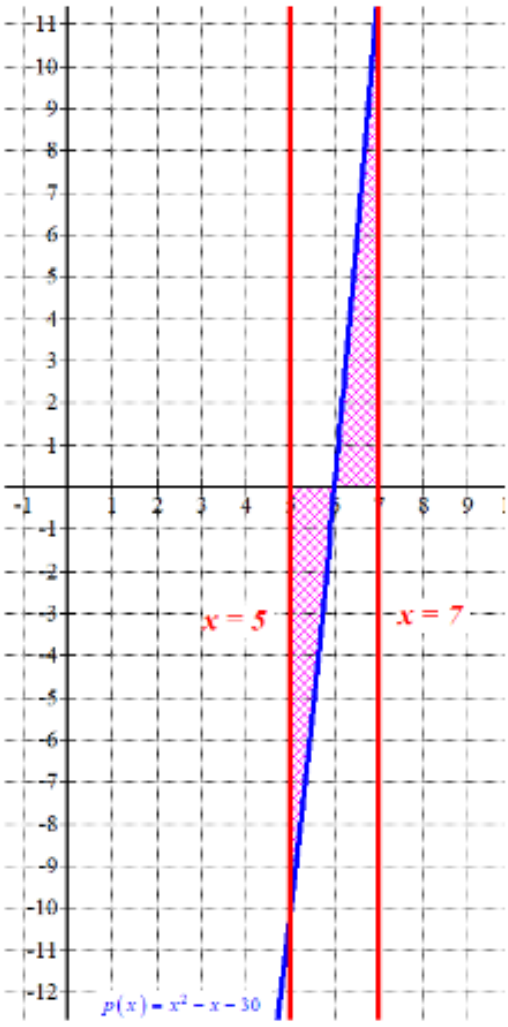
El área del primer trozo vale $\frac{31}{6} \approx 5.1667$ unidades cuadradas.

$$\int_6^7 p(x)dx = \int_6^7 x^2 - x - 30dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 30x\right]_6^7 =$$

$$= \left[\frac{7^3}{3} - \frac{7^2}{2} - 30 \cdot 7\right] - \left[\frac{6^3}{3} - \frac{6^2}{2} - 30 \cdot 6\right] = \frac{35}{6} \approx 5.8333$$

El área del segundo trozo vale $\frac{35}{6} \approx 5.8333$ unidades cuadradas.

El área encerrada por $p(x)$ y el eje OX entre $x = 5$ y $x = 7$ vale $\frac{31}{6} + \frac{35}{6} = 11$ unidades cuadradas.



a) A = 2; B = -4. b) Área = 11 u²

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Instrucciones para realizar el examen: En algunos apartados existe la posibilidad de elegir entre dos preguntas. En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada bloque sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.
Criterios generales: Las respuestas a las preguntas o tareas deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.
En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.
Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o tarea.
Ortografía y redacción: Con carácter general se penalizará la incorrección gramatical de la siguiente manera: Los 2 primeros errores ortográficos no se penalizarán. Se comenzará a deducir 0,10 puntos por cada falta ortográfica a partir de la tercera, hasta alcanzar la máxima penalización de 1 punto. Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola. Por errores en la sintaxis, el vocabulario y la presentación se podrá deducir un máximo de 0.50 puntos.
Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable. También se podrá utilizar una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas..

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

APARTADO A (4 puntos)

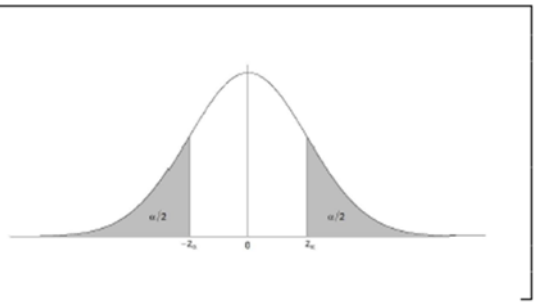
Una piscifactoría realiza un estudio de mercado para determinados tipos de pescado (salmones y truchas). Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron en el estudio:

A1. Los salmones suponen el 70% de la producción y las truchas el 30% de la producción. El 40% de los salmones se vende en España, el 35% en Portugal y el resto en otros países. En cuanto a las truchas, el 30% se vende en España, el 10% en Portugal y el resto en otros países. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un pescado sea vendido en países distintos de España y Portugal.
b) Calcular la probabilidad de que un pescado que sabemos que se ha vendido en Portugal, sea trucha.

A2. Se asume que el precio por kg de estos pescados tiene distribución normal con desviación típica 3 euros. ¿Cuántas pescaderías habrá que visitar como mínimo si se quiere estimar el precio medio mediante un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, cuya longitud no sea superior a 4 euros? Razonar la respuesta.

α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645



Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 1 punto.

Ejercicio B2: Entre 0 y 2 puntos.

APARTADO B (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -5 & x\\ 0 & x & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -x\end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar los valores de *x* para los que no existe la matriz inversa de $A+C$.

b) Para $x=3$, obtener la matriz Y que verifica la ecuación matricial $A\cdot Y=C-B\cdot Y$.

B2. Un pastor elabora quesos de oveja y de cabra. Los gastos de producción de cada queso de oveja ascienden a 10€ con unos beneficios de 5€. Por otra parte, fabricar cada queso de cabra le cuesta 15€ y le reporta unos beneficios de 11€. Se sabe que diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos y que, para atender a las exigencias del mercado, debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso. Además, por normativa sanitaria, el número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades. Calcular, razonando la respuesta, el número de quesos de cada tipo que deben fabricarse diariamente para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos

Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 2 puntos.
Ejercicio B2: Entre 0 y 3 puntos.

APARTADO C (3 puntos)

Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. Los ingresos *I(t)* y gastos *G(t)* (en miles de euros) de un establecimiento desde el primer al sexto mes que lleva abierto dependen del tiempo, en meses, según las funciones:

$$I(t)=3t^3+10Bt,\ G(t)=2t^3+3At^2+Bt \qquad 1\le t\le 6$$

Se pide, justificando la respuesta:

a) Calcular la función *F(t)* que relaciona los beneficios con el tiempo.

b) Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que el beneficio máximo fue de 112 mil euros y se alcanzó a los 4 meses desde la apertura.

c) Para los valores de A y B calculados en el apartado anterior, determinar el momento donde se produce el beneficio mínimo y a cuánto asciende éste.

C2. Calcular de forma razonada:

a) El área encerrada por la función $f(x)=x^2-2x$ y el eje OX entre $x=-1$ y $x=4$.

b) Las asíntotas de la función:

$$g(x)=\frac{2x-4}{x^2-2x}$$

Ejercicio C1: Apartado a) entre 0 y 0.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos, apartado c) entre 0 y 1 punto.
Ejercicio C2: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A:

APARTADO A (4 puntos)

Una piscifactoría realiza un estudio de mercado para determinados tipos de pescado (salmones y truchas). Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron en el estudio:

A1. Los salmones suponen el 70% de la producción y las truchas el 30% de la producción. El 40% de los salmones se vende en España, el 35% en Portugal y el resto en otros países. En cuanto a las truchas, el 30% se vende en España, el 10% en Portugal y el resto en otros países. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que un pescado sea vendido en países distintos de España y Portugal.

b) Calcular la probabilidad de que un pescado que sabemos que se ha vendido en Portugal, sea trucha.

A2. Se asume que el precio por kg de estos pescados tiene distribución normal con desviación típica 3 euros. ¿Cuántas pescaderías habrá que visitar como mínimo si se quiere estimar el precio medio mediante un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, cuya longitud no sea superior a 4 euros? Razonar la respuesta.

α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645

Solución A1:

A1. Pasamos los datos a valores absolutos. Supongamos que hay 1000 peces en la piscifactoría, nos da lo mismo suponer otra cantidad, elegimos esta porque no nos va a dar números decimales.

El 70 % de la producción son salmones, es decir, en la piscifactoría hay $0.7 \cdot 1000 = 700$ salmones, el 30% son truchas, es decir, en la piscifactoría hay $0.3 \cdot 1000 = 300$ truchas.

El 40% de los salmones se vende en España ($0.4 \cdot 700 = 280$), el 35% en Portugal ($0.35 \cdot 700 = 245$) y el resto en otros países ($700 - 280 - 245 = 175$).

En cuanto a las truchas, el 30% se vende en España ($0.3 \cdot 300 = 90$), el 10% en Portugal ($0.1 \cdot 300 = 30$) y el resto en otros países ($300 - 90 - 30 = 180$).

Ponemos estos datos en una tabla para tener más fácil acceso a ellos.

	Salmones	Truchas	
España	280	90	370
Portugal	245	30	275
Otros países	175	180	355
	700	300	1000

Textos Marea Verde

a) De los 1000 peces que hemos supuesto que produce la piscifactoría hay 355 que se venden fuera de España y Portugal. La probabilidad de que un pescado sea vendido en países distintos de España y Portugal es de $\frac{355}{1000} = 0.355$.

b) De los 275 peces vendidos en Portugal sabemos que 30 son truchas. La probabilidad de que un pescado vendido en Portugal sea trucha tiene un valor de $\frac{30}{275} = \frac{6}{55} \approx 0.1091$.

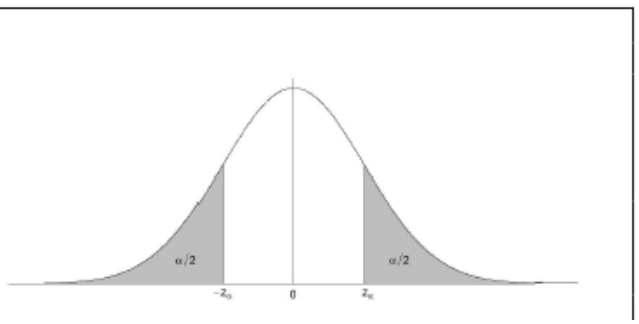
Solución A2:

A2. Consideramos X = Precio en euros del kg de pescado de la piscifactoría. X = N(μ, 3)

Si la longitud del intervalo de confianza no puede ser superior a 4 euros entonces el error no puede superar los 2 euros.

El nivel de confianza del 99% significa que $1 - \propto = 0.99 \rightarrow \propto = 0.01 \rightarrow$

α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695



Tenemos que $z_\alpha = \mathbf{2.576}$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.576 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{7.728}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{7.728}{2} \Rightarrow \boxed{n = 3.864^2 = 14.93}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 15 pescaderías.

Problema B1:

B1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -5 & x\\ 0 & x & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -x\end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar los valores de *x* para los que no existe la matriz inversa de $A+C$.

b) Para $x=3$, obtener la matriz Y que verifica la ecuación matricial $A\cdot Y=C-B\cdot Y$.

Solución B1:

a) Obtenemos la expresión de la matriz $A+C$.

$$A+C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -5 & x\\ 0 & x & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ -1 & -4 & x\\ 0 & x & -1-x\end{pmatrix}$$

Para que no exista la matriz inversa debe ser su determinante nulo.

$$|A+C|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ -1 & -4 & x\\ 0 & x & -1-x\end{vmatrix}=0\Rightarrow 8+8x-2x-2x^2=0\Rightarrow -2x^2+6x+8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(-4)}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=\boxed{4=x}\\ \dfrac{3-5}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

Para $x=-1$ y $x=4$ no existe la matriz inversa de $A+C$.

b) Para $x=3$ las matrices quedan $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -5 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

Despejamos Y en la ecuación matricial.

$$A\cdot Y=C-B\cdot Y\Rightarrow A\cdot Y+B\cdot Y=C\Rightarrow (A+B)Y=C\Rightarrow Y=(A+B)^{-1}C$$

Comprobamos que la matriz $A+B$ es invertible y calculamos su inversa.

$$A+B=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&-5&3\\0&3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-2&-4&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$|A+B|=\begin{vmatrix}1&0&2\\-2&-4&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=4-4-1=-1\neq 0$$

$$(A+B)^{-1}=\frac{Adj\left((A+B)^{T}\right)}{|A+B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-4&1\\2&1&-1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-4&1\\1&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\2&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&-4\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-2&0\\1&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-2&0\\-4&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-2\\0&-4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=(A+B)^{-1}=-\begin{pmatrix}3&2&8\\-2&-1&-5\\-2&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2&-8\\2&1&5\\2&1&4\end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz Y.

$$Y=(A+B)^{-1}C=\begin{pmatrix}-3&-2&-8\\2&1&5\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-2&-2&24\\2+1&1&-15\\2+1&1&-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-2&24\\3&1&-15\\3&1&-12\end{pmatrix}$$

Problema B2:

B2. Un pastor elabora quesos de oveja y de cabra. Los gastos de producción de cada queso de oveja ascienden a 10€ con unos beneficios de 5€. Por otra parte, fabricar cada queso de cabra le cuesta 15€ y le reporta unos beneficios de 11€. Se sabe que diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos y que, para atender a las exigencias del mercado, debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso. Además, por normativa sanitaria, el número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades. Calcular, razonando la respuesta, el número de quesos de cada tipo que deben fabricarse diariamente para obtener unos beneficios máximos, así como el valor de dichos beneficios máximos.

Solución B2:

Llamamos "x" al número de quesos de oveja que se fabrica diariamente e "y" al número de quesos de cabra.

"Cada queso de oveja le reporta unos beneficios de 5 € y cada queso de cabra le reporta 11 €" → Los beneficios son $B(x,y)=5x+11y$.

Las restricciones son:

"Diariamente dispone de 300€ para la fabricación de estos quesos" → $10x+15y\le 300$.

"Debe fabricar, al menos, un total de 25 unidades entre los dos tipos de queso" → $x+y\ge 25$

"El número de quesos de oveja más el doble de los de cabra no puede superar las 30 unidades" → $x+2y\le 30$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0,\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}10x+15y\le 300\\ x+y\ge 25\\ x+2y\le 30\\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+3y\le 60\\ x+y\ge 25\\ x+2y\le 30\\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+3y=60$

x	$y=\dfrac{60-2x}{3}$
0	20
30	0

$x+y=25$

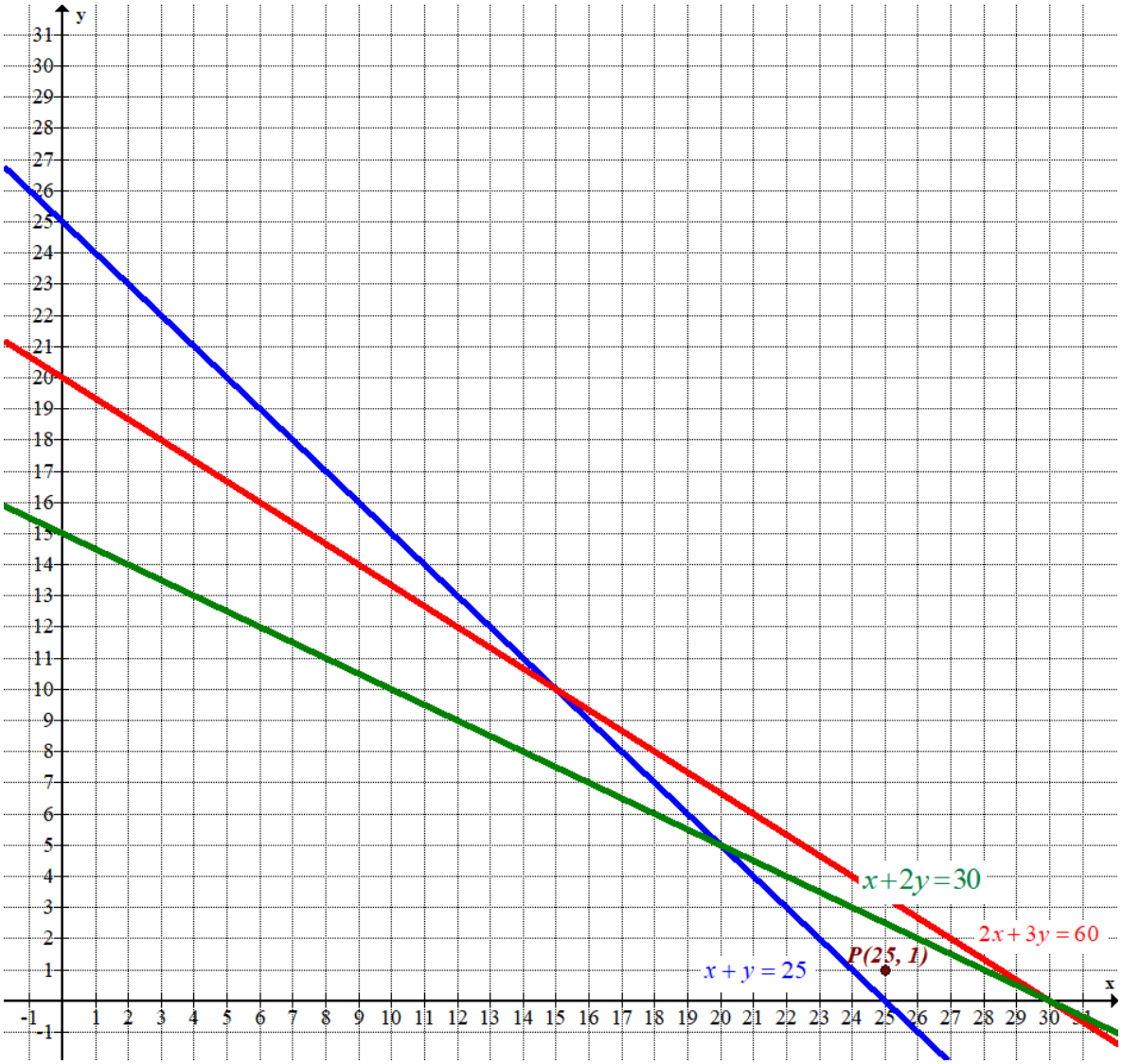
x	$y=25-x$
0	25
20	5
25	0

$x+2y=30$

x	$y=\dfrac{30-x}{2}$
0	15
20	5
30	0

$x\ge 0,\ y\ge 0$

Primer cuadrante

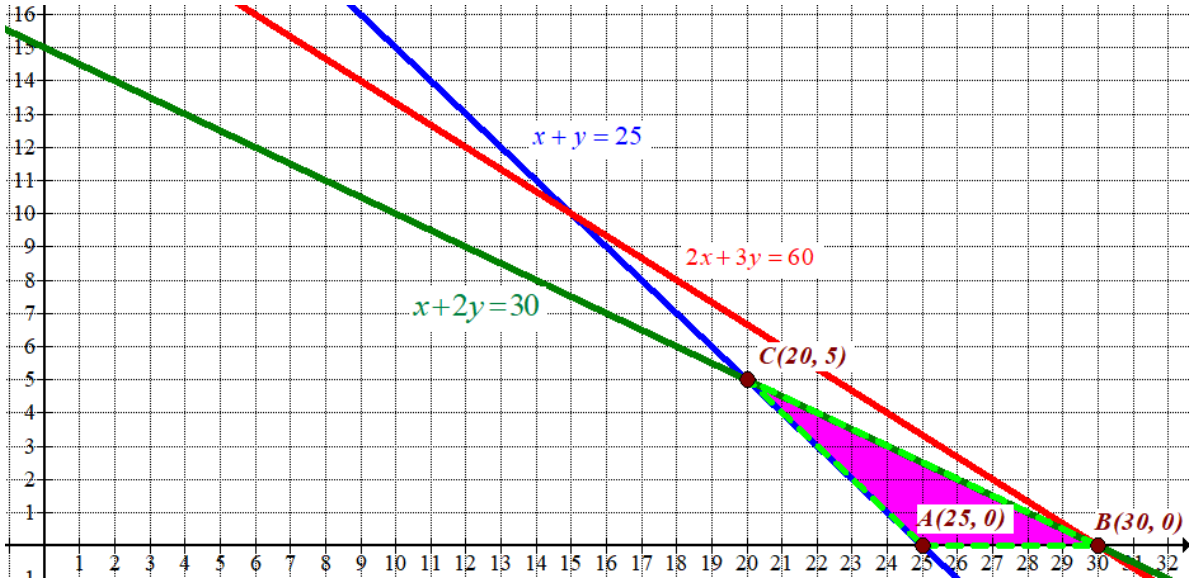


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 60 \\ x+y\ge 25 \\ x+2y\le 30 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y verde, y por encima de la recta azul.

Comprobamos que el punto P(25, 1) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 25+3\cdot 1\le 60 \\ 25+1\ge 25 \\ 25+2\cdot 1\le 30 \\ 25\ge 0,\ 1\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x,y)=5x+11y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(25, 0) → $B(25,0)=5\cdot 25+11\cdot 0=125$

B(30, 0) → $B(30,0)=5\cdot 30+11\cdot 0=150$

C(20, 5) → $B(20,5)=5\cdot 20+11\cdot 5=155$ Máximo

El valor máximo es 155 y se obtiene en el vértice C(20, 5).

Significa que se obtienen unos máximos beneficios de 155 euros con la fabricación de 20 quesos de oveja y 5 quesos de cabra.

Problema C1:

C1. Los ingresos *I(t)* y gastos *G(t)* (en miles de euros) de un establecimiento desde el primer al sexto mes que lleva abierto dependen del tiempo, en meses, según las funciones:

$$I(t)=3t^3+10Bt,\ G(t)=2t^3+3At^2+Bt \qquad 1\le t\le 6$$

Se pide, justificando la respuesta:

a) Calcular la función *F(t)* que relaciona los beneficios con el tiempo.

b) Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que el beneficio máximo fue de 112 mil euros y se alcanzó a los 4 meses desde la apertura.

c) Para los valores de A y B calculados en el apartado anterior, determinar el momento donde se produce el beneficio mínimo y a cuánto asciende éste.

Solución C1:

a) Los beneficios son la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$F(t)=I(t)-G(t)=3t^3+10Bt-\left(2t^3+3At^2+Bt\right)=t^3-3At^2+9Bt \qquad 1\le t\le 6$$

La función beneficios tiene la expresión $F(t)=t^3-3At^2+9Bt \qquad 1\le t\le 6$.

b) Nos dicen que $B(4)=112$. Además, como el beneficio es máximo para $t=4$ la derivada debe anularse para este valor: $F'(4)=0$.

$$\left.\begin{array}{l}F(4)=112\\F(t)=t^3-3At^2+9Bt\end{array}\right\}\Rightarrow 112=4^3-3A\cdot 4^2+9B\cdot 4\Rightarrow 36B-48A=48\Rightarrow \boxed{3B-4A=4}$$

$$\left.\begin{array}{l}F'(t)=3t^2-6At+9B\\F'(4)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=3\cdot 4^2-6A\cdot 4+9B\Rightarrow 48-24A+9B=0\Rightarrow \boxed{16-8A+3B=0}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l}16-8A+3B=0\\3B-4A=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}16-8A+3B=0\\3B=4+4A\end{array}\right\}\Rightarrow 16-8A+4+4A=0\Rightarrow -4A=-20\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=5}\Rightarrow 3B=4+4\cdot 5=24\Rightarrow \boxed{B=8}$$

Los valores buscados son $A=5$ y $B=8$.

c) Para $A=5$ y $B=8$ la función beneficios queda $F(t)=t^3-15t^2+72t \qquad 1\le t\le 6$.

Averiguamos cuando se anula la derivada.

Textos Marea Verde

$$F(t)=t^3-15t^2+72t \Rightarrow F'(t)=3t^2-30t+72$$

$$F'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-30t+72=0 \Rightarrow t^2-10t+24=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 24}}{2}=\frac{10\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{10+2}{2}=\boxed{6=t}\\ \frac{10-2}{2}=\boxed{4=t}\end{cases}$$

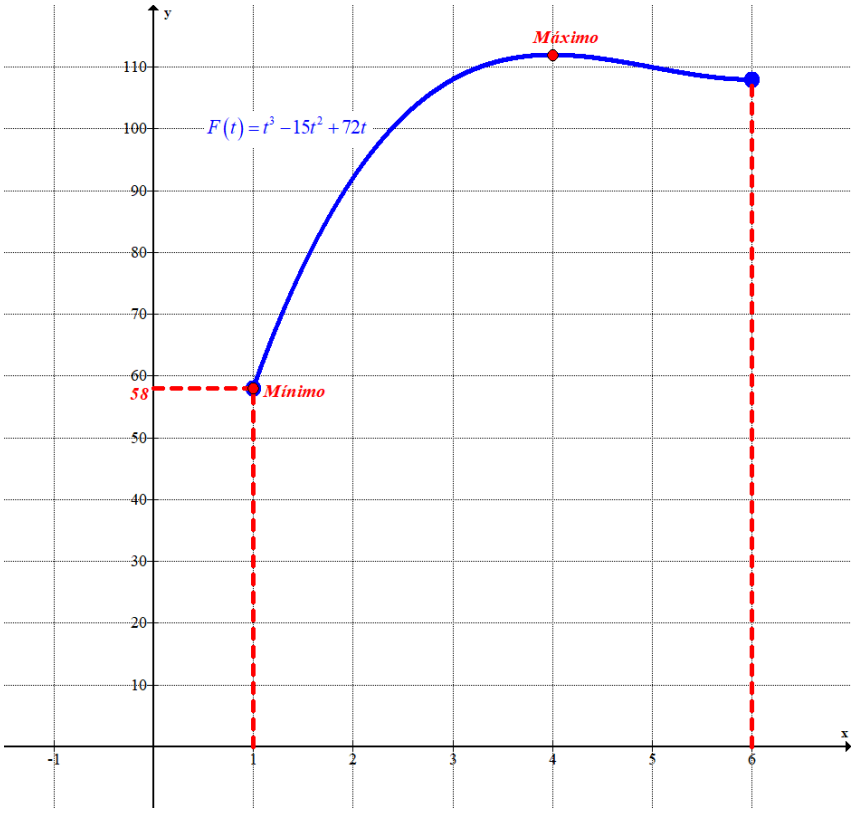
En $t=4$ sabemos que hay un máximo de la función. Sustituimos en la segunda derivada el otro valor obtenido como punto crítico $t=6$.

$$F'(t)=3t^2-30t+72 \Rightarrow F''(t)=6t-30 \Rightarrow F''(6)=6\cdot 6-30=6>0$$

Como la segunda derivada es positiva la función beneficio presenta un mínimo relativo en $t=6$. Valoramos la función en el otro extremo del intervalo para averiguar si en este mes se consigue el máximo absoluto del beneficio.

$$\left.\begin{array}{l}F(1)=1^3-15\cdot 1^2+72\cdot 1=58\\ F(6)=6^3-15\cdot 6^2+72\cdot 6=108\end{array}\right\}$$

El beneficio mínimo se alcanza el primer mes con un beneficio de 58 000 euros.



Problema C2:

C2. Calcular de forma razonada:

a) El área encerrada por la función $f(x)=x^2-2x$ y el eje OX entre $x=-1$ y $x=4$.

b) Las asíntotas de la función:

$$g(x)=\frac{2x-4}{x^2-2x}$$

Solución:

a) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-2x \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

El recinto del cual queremos hallar el área lo dividimos en tres trozos.
El primer trozo calculamos su área como el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 0 de la función.

$$\int_{-1}^{0} x^2-2x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{0^3}{3}-0^2\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2\right]=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

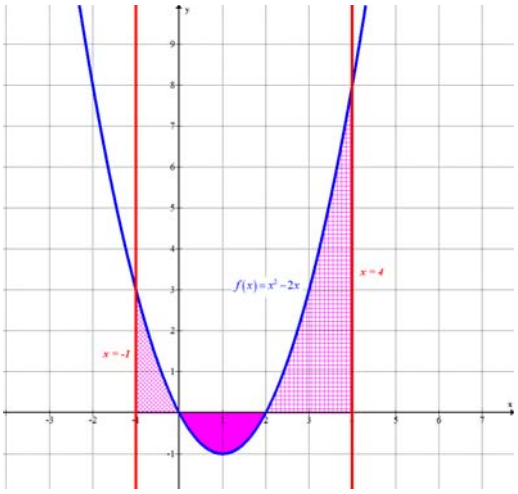
El segundo trozo calculamos su área como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$\int_{0}^{2} x^2-2x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}=\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right]-\left[\frac{0^3}{3}-0^2\right]=\frac{8}{3}-4=\frac{-4}{3}$$

Y el tercer trozo calculamos su área como el valor absoluto de la integral definida entre 2 y 4 de la función.

$$\int_{2}^{4} x^2-2x\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{2}^{4}=\left[\frac{4^3}{3}-4^2\right]-\left[\frac{2^3}{3}-2^2\right]=\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+4=\frac{20}{3}$$

El área total es la suma de las áreas de los tres trozos y vale $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=\frac{28}{3}\approx 9.333\,u^2$.



BY NC SA
Textos Marea Verde

b) Hallamos el dominio de la función $g(x)=\dfrac{2x-4}{x^2-2x}$. Como es una función racional su dominio son todos los números reales menos los que anulan el denominador. El dominio es $\mathbb{R}-\{0,2\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-4}{x^2-2x}=\frac{0-4}{0}=\frac{-4}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{x^2-2x}=\frac{4-4}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x}=1$$

$x=2$ NO es asíntota vertical.

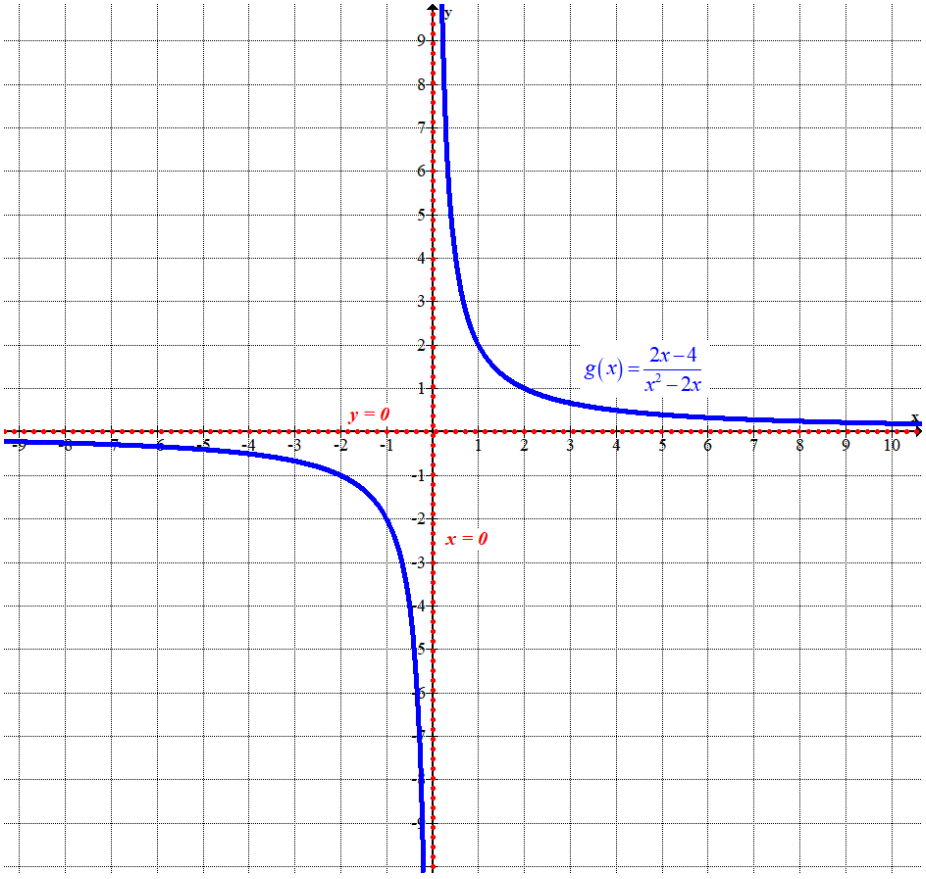
Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(x-2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Como la función tiene una asíntota horizontal no puede tener asíntota oblicua.



BY NC SA
Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S
Vallecas

CC BY NC SA

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

BLOQUE OBLIGATORIO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

Ejercicio 1. CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelería luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad?

1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelería luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelería luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelería luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelería luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. (2,5 puntos). **Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

Ejercicio 2.1:

2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A, A^{-1}.

2.1.2. Calcule la inversa da matriz traspuesta de A, $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

CC BY NC SA

Ejercicio 2.2:

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4 \qquad x + y \leq 8 \qquad 3x + 2y \geq -2 \qquad x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). **Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**

Ejercicio 3.1:

3.1. Dada la siguiente función $B(t) = (4 - t)(t - 1)2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$.

3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. **3.1.2**. Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

3.1.3. Represente la gráfica de la función $B(t)$.

Ejercicio 3.2:

3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a,b números reales.

3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto (4, 5) y tiene un mínimo en $x = 1$.

3.2.2. Para a=1 y b=−2,calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta y=x−3.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos). **Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)**

Ejercicio 4.1:

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$P(A) = 0.40$, $P(A \cap B) = 0.21$ y $P(A|B) = 0.60$.

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}|A)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

Ejercicio 4.2:

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE OBLIGATORIO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. ***(2,5 puntos)***

Ejercicio 1. CONTEXTO

En la actualidad, existen varias empresas de cosméticos orientadas hacia el público juvenil que elaboran cremas para la piel. Una empresa quiere comercializar una nueva crema para reducir los brotes de acné, para lo que ha contratado los servicios de una compañía de publicidad. Los publicistas proponen lanzar una primera campaña empleando anuncios en prensa escrita y buzoneo. Una vez finalizada esta primera campaña, si la probabilidad de que la nueva crema sea conocida entre el público juvenil es menor que 0,6, pasarán a una segunda campaña colocando cartelería luminosa en lugares estratégicos.

Después de analizar los datos de la primera campaña, han llegado a las siguientes conclusiones: la probabilidad de que el público juvenil conozca la nueva crema por los anuncios en prensa escrita es 0,3 y la probabilidad de que sea conocida por buzoneo es 0,4. Puede suponerse que son independientes los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo".

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. ¿Lanzará la empresa la segunda campaña de publicidad?

1.2. Suponga que la empresa ha decidido emplear la cartelería luminosa. De los que conocen la nueva crema por buzoneo el 25% también la conocen por la cartelería luminosa, y entre los que conocen la nueva crema por la cartelería luminosa, el 20% también la conocen por buzoneo. De los tres medios empleados (prensa escrita, buzoneo y cartelería luminosa), ¿cuál ha sido el que ha tenido mayor impacto para que la nueva crema sea conocida?

1.3. ¿Son incompatibles los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo"?

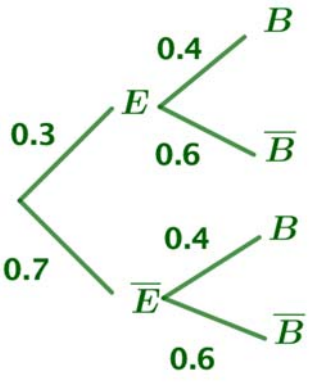
Solución 1:

1.1. Definimos los sucesos

E:" conocer la crema por anuncio en prensa **E**scrita" P(E)=0.3

B:" conocer la crema por **B**uzoneo" P(B)=0.4

Se lanzará una nueva campaña si P(C)<0.6, siendo C el Suceso lanzar una nueva campaña.



$$P(ser\ conocida) = P(C) = 1 - P(\bar{E} \cap \bar{B}) = 1 - 0.7 \cdot 0.6 = 0.58 < 0.6$$

La empresa debe lanzar una segunda campaña de publicidad porque la probabilidad de que la crema sea conocida es 0.58<0.6.

1.2. Definimos el nuevo suceso: E:" conocer la crema por cartelería **L**uminosa"

Conocemos:

$$P(L/B) = 0.25 \Rightarrow 0.25 = \frac{P(L \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(L \cap B) = 0.25 \cdot 0.4 = 0{,}1$$

$$P(B/L) = 0.2 \Rightarrow 0.2 = \frac{P(B \cap L)}{P(L)} \Rightarrow P(L) = \frac{0.1}{0.2} = 0.5$$

Resumiendo los resultados: $\boldsymbol{P(E) = 0.3 < P(B) = 0.4 < P(L) = 0.5}$

$\Rightarrow$

El medio con mayor impacto fue el de cartelería luminosa.

1.3. Dos sucesos son incompatibles si $P(E \cap B) = 0$

En nuestro caso $P(E \cap B) = 0.3 \cdot 0.4 \neq 0$

Los sucesos "conocer la nueva crema por prensa escrita" y "conocer la nueva crema por buzoneo" son compatibles.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

PREGUNTA 2. NÚMEROS Y ÁLGEBRA. *(2,5 puntos).* **Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

Ejercicio 2.1:

2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2.1.1. Calcule la matriz inversa de A, A^{-1}.

2.1.2. Calcule la inversa da matriz traspuesta de A, $(A^t)^{-1}$, utilizando el apartado anterior.

2.1.3. Despeje y calcule el valor de X en la siguiente ecuación matricial $AX - A^t = X$.

Solución 2.1:

2.1.1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 6 = -3 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AdjA)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 7/3 & -4/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.2.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 7/3 & 1/3 \\ 2/3 & -4/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

2.1.3.

$$AX - A^t = X. \quad \Rightarrow . \ AX - X = A^t \quad \Rightarrow . \ (A - I)X = A^t \quad \Rightarrow . \ (A - I)^{-1}(A - I)X = (A - I)^{-1} \cdot A^t$$
$$\Rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot A^t$$

$$(\mathrm{A} - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - I| = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists (A - I)^{-1}$$

$$\mathrm{Adj}(A - I) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}(A - I)^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -6 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

BY NC SA

$$(A-I)^{-1}=\frac{1}{|A-I|}(Adj\ (A-I))^t=\begin{pmatrix}0 & {}^1/_2 & 0\\ 1 & {}^{-3}/_2 & 1\\ {}^1/_2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0 & {}^1/_2 & 0\\ 1 & -3/2 & 1\\ 1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{X}=\begin{pmatrix}0 & {}^1/_2 & {}^1/_2\\ 3 & {}^1/_2 & {}^1/_2\\ {}^1/_2 & 1 & 3/2\end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.2:

2.2. Se considera el sistema de inecuaciones dado por:

$$x \geq y - 4 \qquad x + y \leq 8 \qquad 3x + 2y \geq -2 \qquad x - 2 \leq 2y$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(-1,1)$ y $Q(5,1)$ pertenecen o no a la región anterior.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 2x - 4y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

Solución:

2.2.1. Representamos primeramente las rectas (=) y luego escogemos el semiplano solución de la inecuación ($\leq$):

$\boldsymbol{r_1}$: $\boldsymbol{x \geq y - 4}$

x	y
0	4
-4	0

$\boldsymbol{r_2}$: $\boldsymbol{x + y \leq 8}$

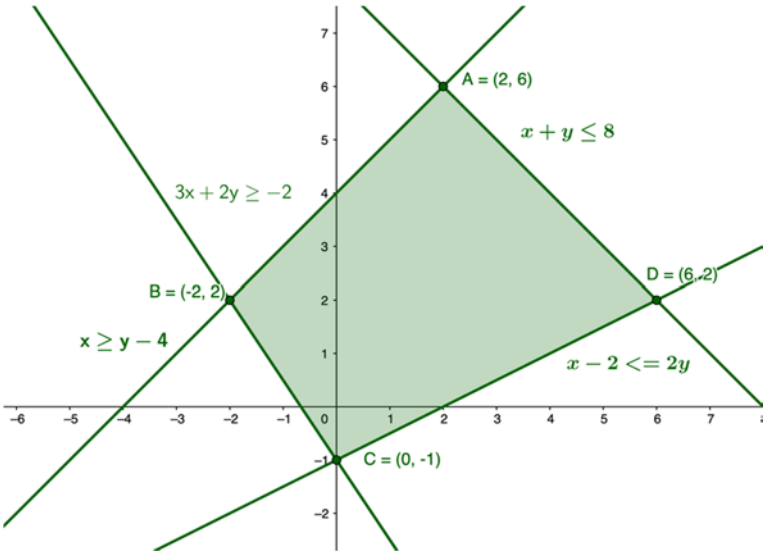
x	y
0	8
8	0

$\boldsymbol{r_3}$: $\boldsymbol{3x + 2y \geq -2}$

x	y
0	-1
-2	2

$\boldsymbol{r_4}$: $\boldsymbol{x - 2 \leq 2y}$

x	y
0	-1
2	0



Calculamos los vértices resolviendo los sistemas:

$$A: \left.\begin{matrix} 3x + 2y = -2 \\ x + y = 8 \end{matrix}\right\} \quad A(2,6)$$

$$B: \left.\begin{matrix} 3x + 2y = -2 \\ x = y - 4 \end{matrix}\right\} \quad B(-2,2)$$

$$C: \left.\begin{matrix} x - 2 = y \\ x = y - 4 \end{matrix}\right\} \quad C(0,-1)$$

$$D: \left.\begin{matrix} x - 2 = y \\ x + y = 8 \end{matrix}\right\} \quad D(6,2)$$

2.2.2.

$P(-1,1)$ verifica todas las restricciones:

$r_1: -1 \geq 1 - 4$

$r_2: -1 + 1 \leq 8$

$r_3: 3(-1) + 2 \cdot 1 \geq -2$

r_4: $-1 - 2 \leq 2 \cdot 1$
Por lo tanto, P pertenece a la región factible.

Q(5, 1) no verifica $r_4: x - 2 \leq 2y.$; $5 - 2 \nleq 2 \cdot 1.$
Por lo tanto, Q **NO** pertenece a la región factible.

P(-1, 1) pertenece a la región factible.

Q(5, 1) no pertenece a la región factible.

2.2.3. Analizamos la función $f(x, y) = 2x - 4y$ en los vértices de la región factible:

$$\boldsymbol{A}: \quad \boldsymbol{f(2,6) = -20.}$$
$$\boldsymbol{B}: \quad \boldsymbol{f(-2,2) = -12}$$
$$\boldsymbol{C}: \quad \boldsymbol{f(0,-1) = 4}$$
$$\boldsymbol{D}: \quad \boldsymbol{f(6,2) = 4}$$

El mínimo se alcanza en el punto A(2, 6) con un valor de -20.

El máximo se alcanza en todos los puntos del segmento $\overline{CD}$ con un valor de 4.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). **Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**

Ejercicio 3.1:

3.1. Dada la siguiente función $B(t) = (4 - t)(t - 1)^2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$.

3.1.1. Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen.

3.1.2. Estudie sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

3.1.3. Represente la gráfica de la función $B(t)$.

Solución:

3.1.1. Estudiamos el signo de la derivada primera para estudiar el crecimiento y decrecimiento:

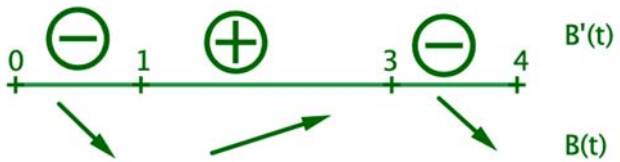
$$\boldsymbol{B(t) = (4 - t)(t - 1)^2 = (4 - t)(t^2 - 2t + 1) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4}$$

$$\boldsymbol{B'(t) = -3t^2 + 12t - 9}$$

$$\boldsymbol{B'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-12 \pm 6}{-6} = \begin{cases} t_1 = 1 \in [0,4] \\ t_2 = 3 \in [0,4] \end{cases}}$$

La función B(t) es decreciente en los intervalos $(0,1) \cup (3,4)$***.***

La función B(t) es creciente en el intervalo (1,3)



Para el estudio de los extremos relativos tenemos dos procedimientos:

- Es una función continua por ser una función polinómica por lo tanto, en t=1 tiene un mínimo relativo por pasar de decreciente a creciente y en t=3 tiene un máximo relativo por pasar de creciente a decreciente.
- Estudiamos el signo de la derivada segunda $\boldsymbol{B''(t) = -6t + 12}$

  $\boldsymbol{B''(1) > 0} \Longrightarrow$ en t=1 la función tiene un mínimo relativo.

  $\boldsymbol{B''(3) < 0} \Longrightarrow$ en t=3 la función tiene un máximo relativo.

Para determinar cuáles son los máximos o mínimos absolutos: determinamos el valor de la función en los puntos extremos del dominio [0,4].

$$\boldsymbol{B(t) = (4 - t)(t - 1)^2}$$

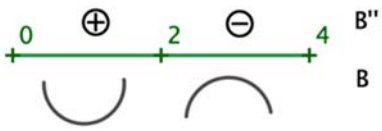
$\boldsymbol{t = 0 \Rightarrow B(0) = 4}$
$\boldsymbol{t = 1 \Rightarrow B(1) = 0}$
$\boldsymbol{t = 3 \Rightarrow B(3) = 4}$
$\boldsymbol{t = 4 \Rightarrow B(4) = 0}$

La función alcanza máximo absoluto en los puntos (0,4) y (3,4).

La función alcanza mínimo absoluto en los puntos (1,0) y (4,0).

3.1.2. Estudiamos el signo de la derivada segunda en el dominio de la función:

BY NC SA
Textos Marea Verde



$$B''(t) = -6t + 12$$

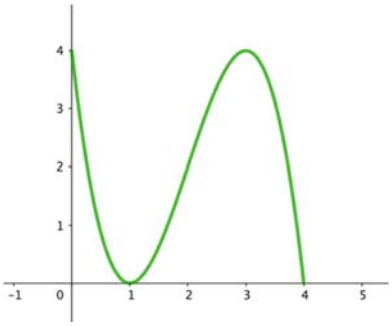
La función es convexa en el intervalo (0, 2) y es cóncava en (2, 4).

En t=2 tiene un punto de inflexión por ser una función polinómica, y por lo tanto continua, que pasa de convexa a cóncava en el punto t=2.

También podemos comprobar que en t=2 existe un punto de inflexión comprobando que $B'''(2) \neq 0$ (B'''(t)=-6)

La función tiene un punto de inflexión en el punto (2, 2).

3.1.3.



Ejercicio 3.2:

3.2. Dada la función $f(x) = ax^2 + bx - 3$, siendo a, b números reales.

3.2.1. Calcule a y b sabiendo que dicha función pasa por el punto (4, 5) y tiene un mínimo en x = 1.

3.2.2. Para a=1 yb=−2, calcule el área limitada por $f(x)$ y la recta y=x−3.

Solución 3.2:

3.2.1. La función pasa por el punto (4, 5) $\Rightarrow 5 = 16a + 4b - 3$.

La función tiene un mínimo en x = 1 $\Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$

Resolvemos el sistema $\left.\begin{matrix} 16a + 4b = 8 \\ 2a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b = -2a \Rightarrow 16a - 8a = 8 \Rightarrow a = 1, b = -2$

a=1, b=-2

3.2.2. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Determinamos los puntos de corte entre la parábola y la recta:

$\left.\begin{matrix} y = x^2 - 2x - 3 \\ y = x - 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{matrix}$

$$A = \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3\right| = \left|9 - \frac{27}{2}\right| = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$

$$\boldsymbol{A = \frac{9}{2}u^2}$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos). **Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)**

Ejercicio 4.1:

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:
$P(A) = 0.40$, $P(A \cap B) = 0.21$ y $P(A|B) = 0.60$.

4.1.1. Calcule $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ y $P(\bar{B}|A)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

Solución:

4.1.1. Calculamos $P(B)$

$$P(A/B) = 0.60 \Rightarrow 0.60 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{0.21}{0.6} = 0.35$$

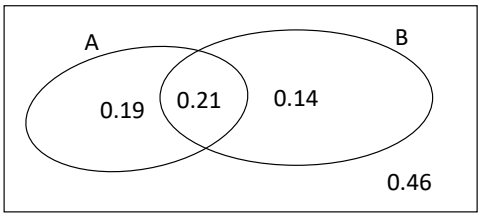
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - \big(1 - P(A \cap R)\big) =$$
$$= 0.6 + 0.65 - (1 - 0.21) = 0.46$$

$$\boldsymbol{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.46}$$

$$P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - 0.525 = 0.475$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.21}{0.4} = 0.525.$$

Otro modo de resolverlo



$$P(B) = 0.35$$

$$P(\bar{B}/A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{0.19}{0.4} = 0.475$$

$$\boldsymbol{P(B/A) = 0.525}$$

4.1.2.

$\boldsymbol{0.525 = P(B/A) \neq P(B)0.35}$ ***por lo tanto, los sucesos A y B NO son independientes.***

Ejercicio 4.2:

4.2. Una encuesta realizada a 100 individuos de una población revela que 80 de ellos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.1. Calcule un intervalo con un 95% de confianza para la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica.

4.2.2. Si se sabe que 8 de cada 10 individuos están satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica y se toma una muestra de 100 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87%?

Solución:

4.2.1.

P: "proporción de individuos que están satisfechos con el servicio"

$$n = 100 \qquad \hat{p} = \frac{80}{100} = 0.8$$

$$IC_{95\%}\ \mathrm{p} = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2}, \sqrt{\frac{\hat{p}(\widehat{1-p})}{n}}, \qquad \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(\widehat{1-p})}{n}} \right)$$

Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$p(z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Sustituimos y obtenemos el intervalo de confianza pedido.

$$IC_{95\%}p = (0.7216\,, 0.8784)$$

$$\boldsymbol{IC_{95\%}p = (0.7216\,, 0.8784)}$$

4.2.2. $p = {}^{8}/_{10} = 0.8 \qquad n = 100$

$$p \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N(0.8\,, 0.04) \Rightarrow \text{tipificamos} \Rightarrow Z = \frac{P-\mu}{\sigma} = \frac{P-0.8}{0.04} \equiv N(0{,}1)?$$

$$P(p > 0.87) = P\left(Z > \frac{0.87 - 0.8}{0.04}\right) = P(z > 1.75) = 1 - P(Z \leq l.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401$$

La probabilidad de que la proporción de individuos satisfechos con el servicio de su compañía eléctrica sea superior al 87% es 0.0401 (4.01%)

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de **4 preguntas de respuesta obligatoria, puntuadas cada una con 2,5 puntos**: la primera sin apartados optativos y las tres siguientes con posibilidad de elección entre apartados.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE OBLIGATORIO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

Ejercicio 1. CONTEXTO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos). CONTEXTO

Una de las principales novedades de las pruebas PAU 2025 es que el examen de cada materia debe incluir un ejercicio obligatorio y de carácter "más competencial". Aunque las notas se publican la semana siguiente de haberse realizado el examen, los miembros del grupo de trabajo de la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II están interesados en determinar cuanto antes si se han producido cambios relevantes en la nota media de la materia que coordinan con relación a las notas de cursos pasados.

Con este objetivo han contactado previamente con un grupo de correctores, de los que cada uno de ellos se ha comprometido a corregir un máximo de 25 exámenes el primer día. Por los datos de otros cursos, las notas de esta materia pueden suponerse que siguen una distribución normal con desviación típica igual a 1,5.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. Si se quiere estimar esta nota media con un error máximo de 0,25, empleando un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el número mínimo de correctores que se necesitan?

1.2. Una vez corregidos los 100 primeros exámenes, la nota media resultó ser igual a 7,2. A partir de esta muestra, calcule un intervalo de confianza con nivel de confianza del 95% de la nota media.

1.3. Una vez corregidos todos los exámenes, se eligen 25 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la nota media de estos 25 exámenes sea superior a 7 si sabemos que μ=7,3?

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. *(2,5 puntos).* **Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

Ejercicio 2.1:

2.1. Consideramos las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y. $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

2.1.1. Calcule la inversa de la matriz A

2.1.2. Calcule la matriz BA^t y determine su rango (siendo A^t la matriz traspuesta de A).

2.1.3. Despeje X en la ecuación matricial $XA + B = BA^t$ y calcúlela.

BY NC SA

Ejercicio 2.2:

2.2. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + y \leq 4 \qquad 3x \leq 4 + 5y \qquad y \leq 7x + 12$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(2,1)$ y $Q(0,-1)$ están o no en la región factible.

2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 6x - 10y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). **Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**

Ejercicio 3.1:

3.1. La evolución del precio (en euros) de un protector de pantalla para móvil a lo largo del año 2024 viene dado por la función

$$P(t) = \begin{cases} 9 - t^2 + 8t & si \quad 0 \leq t < 7 \\ (t-10)^2 + 7 & si \quad 7 \leq t \leq 12 \end{cases}$$ en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

3.1.1. ¿Cuál fue el precio inicial de ese protector de pantalla? ¿Cuál ha sido su precio al final del año?

3.1.2. Determine en qué períodos ha aumentado y disminuido el precio del protector.

3.1.3. ¿Cuál ha sido el precio máximo alcanzado? ¿Y el mínimo? ¿En qué momentos se producen? Razone las respuestas.

Ejercicio 3.2:

3.2. Dada la función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

3.2.1. Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

3.2.2. Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f y las rectas x=1, x=2 e y=4.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos). **Responda uno de los siguientes apartados: 4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)**

Ejercicio 4.1:

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A|B) = 1/2, \quad P(B|A) = 1/3 \quad \text{y} \quad P(A \cup B) = 1/4 .$$

4.1.1. Calcule $P(A \cap B)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

Ejercicio 4.1:

4.2. Un estudio revela que el 40% de los automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año son propulsados por un motor con tecnología híbrida. Si en un control de carreteras son inspeccionados 5 automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año.

4.2.1. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos cuente con un motor con tecnología híbrida?

4.2.2. Calcule la probabilidad de que, entre los 5 automóviles, más de 3 cuenten con un motor con tecnología híbrida.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE OBLIGATORIO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos)

Ejercicio 1. CONTEXTO

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. (2,5 puntos). CONTEXTO

Una de las principales novedades de las pruebas PAU 2025 es que el examen de cada materia debe incluir un ejercicio obligatorio y de carácter "más competencial". Aunque las notas se publican la semana siguiente de haberse realizado el examen, los miembros del grupo de trabajo de la materia Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II están interesados en determinar cuanto antes si se han producido cambios relevantes en la nota media de la materia que coordinan con relación a las notas de cursos pasados.

Con este objetivo han contactado previamente con un grupo de correctores, de los que cada uno de ellos se ha comprometido a corregir un máximo de 25 exámenes el primer día. Por los datos de otros cursos, las notas de esta materia pueden suponerse que siguen una distribución normal con desviación típica igual a 1,5.

Responda estos tres apartados: 1.1., 1.2. y 1.3.

1.1. Si se quiere estimar esta nota media con un error máximo de 0,25, empleando un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el número mínimo de correctores que se necesitan?

1.2. Una vez corregidos los 100 primeros exámenes, la nota media resultó ser igual a 7,2. A partir de esta muestra, calcule un intervalo de confianza con nivel de confianza del 95% de la nota media.

1.3. Una vez corregidos todos los exámenes, se eligen 25 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la nota media de estos 25 exámenes sea superior a 7 si sabemos que μ=7,3?

Solución:

1.1. Definimos la variable X: " nota de la PAU alumnado Matemáticas Aplicadas CCSS".

$$X \equiv N(\mu, \sigma) = N(\mu, 1.5)$$

$$E < 0.25, \;\; 1-\alpha = 0.95$$

El error cometido: $E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.25$

Determinamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow P\left[Z \leq z_{\alpha/2}\right] = 1-\alpha/2$$

$$\Rightarrow P\left[Z \leq z_{\alpha/2}\right] = 0.975 \Rightarrow \text{buscamos en la tabla } \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96.$$

Calculamos el tamaño de la muestra:

$$1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{n}} < 0.25 \Rightarrow 11.76 < \sqrt{n} \Rightarrow 138.3 < n$$

Deben corregirse 139exámenes. Considerando que cada corrector corrige 25 se necesitará 139/25=5,56. Es decir un mínimo de 6 correctores.

El número mínimo de correctores que se necesitan es seis.

1.2. $n = 100\,, \quad \bar{x} = 7.2$

BY NC SA

$$IC_{95\%}\ \mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(7.2 - 1.96\ \frac{1.5}{\sqrt{100}}, 7.2 + 1.96\cdot\frac{1.5}{\sqrt{100}}\right)$$

$$\boldsymbol{IC_{95\%}\ \mu = (6.906\ , 7.494)}$$

1.3. n=25

$$\mathrm{X} \equiv \mathrm{N}(\mu, \sigma) = N(7.3{,}1.5) \implies \bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(7.3\ , 0.3) \implies Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 7.3}{0.3} \equiv N(0{,}1)$$

$$P(\bar{X} > 7) = P\left(Z > \frac{7 - 7.3}{0.3}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = 0.8413$$

La probabilidad de que la nota media de estos 25 exámenes sea superior a 7 es 0.8413.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

PREGUNTA 2. ÁLGEBRA. *(2,5 puntos).* **Responda uno de estos dos apartados: 2.1. o 2.2.**

Ejercicio 2.1:

2.1. Consideramos las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y. $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

2.1.1. Calcule la inversa de la matriz A

2.1.2. Calcule la matriz BA^t y determine su rango (siendo A^t la matriz traspuesta de A).

2.1.3. Despeje X en la ecuación matricial $\boldsymbol{XA + B = BA^t}$ y calcúlela.

Solución:

2.1.1. $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = 1 - 2 = -1 \neq 0$

$Adj\ A = \begin{pmatrix} 1 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.1.2. $BA^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Todos los determinantes de orden 2 que no incluyen la columna de ceros, valen cero. $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ por lo tanto, el rango es 1. (No es la matriz nula).

También podemos razonarlo indicando que F2=-2F1

El rango de la matriz $\boldsymbol{BA^t}$es uno.

Ejercicio 2.2:

2.2. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + y \leq 4 \qquad 3x \leq 4 + 5y \qquad y \leq 7x + 12$$

2.2.1. Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

2.2.2. Justifique si los puntos $P(2,1)$ y $Q(0,-1)$ están o no en la región factible.

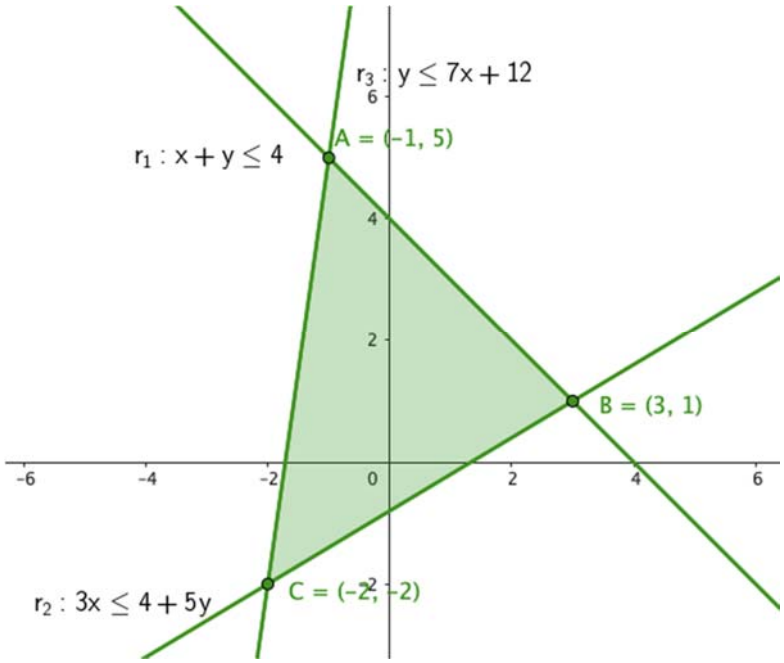
2.2.3. Determine, si existen, los máximos y los mínimos de la función $f(x, y) = 6x - 10y$ sujeta a las restricciones definidas por el sistema de inecuaciones anterior.

Solución:

2.1.1. Representamos primeramente las rectas (=) y luego escogemos el semiplano solución de la inecuación ($\leq$):

x	y
0	*4*
4	*0*

r_1: $x + y \leq 4$



Comprobamos, por ejemplo, si el punto (0,0) verifica la inecuación: $\mathbf{0 + 0 \leq 4}$ por lo tanto, la solución de esta inecuación es el semiplano que contiene al punto (0,0).

r_2: $3x \leq 4 + 5y$

x	y
-2	*-2*
3	*1*

Repetimos el proceso anterior: comprobamos, por ejemplo, si el punto (0,0) verifica la inecuación: $\mathbf{3 \cdot 0 \leq 4 + 5 \cdot 0}$ por lo tanto, la solución de esta inecuación es el semiplano que contiene al punto (0,0).

r_3: $y \leq 7x + 12$

x	y
-2	*-2*
-1	*5*

Nuevamente comprobamos, por ejemplo, si el punto (0,0) verifica la inecuación: $\mathbf{0 \leq 7 \cdot 0 + 12}$ por lo tanto, la solución de esta inecuación es el semiplano que contiene al punto (0,0).

Los vértices los determinamos resolviendo los sistemas:

$A: r_1 \cap r_3 \quad \left.\begin{matrix} x + y = 4 \\ y = 7x + 12 \end{matrix}\right\} A(-1,5)$

$B: r_1 \cap r_2 \quad \left.\begin{matrix} x + y = 4 \\ 3x = 4 + 5y \end{matrix}\right\} B(3,1)$

$C: r_2 \cap r_3 \quad \left.\begin{matrix} 3x = 4 + 5y \\ y = 7x + 12 \end{matrix}\right\} C(-2,-2)$

2.2.2. Tenemos que comprobar que los puntos cumplan las tres restricciones para pertenecer a la región factible.

$$\mathbf{P(2,1)}: \begin{matrix} r_1: & x+y \leq 4. & , & 2+1 \leq 4 \\ r_2: & 3x \leq 4+5y, & & 6 \leq 4+5 \\ r_3: & y \leq 7x+12, & & 1 \leq 14+12 \end{matrix}$$

El punto P pertenece a la región factible.

$$\boldsymbol{Q(0,-1)}: \boldsymbol{r_2}: \mathbf{3x \leq 4+5y}, \quad \mathbf{0 \nleq 4-5}$$

El punto Q no pertenece a la región factible por no cumplir una restricción.

2.2.3. Estudiamos los valores de la función $f(x, y) = 6x - 10y$ en los vértices de la región factible.

$\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{f(-1,5) = -56}$

$\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{f(3\ ,1) = 8}$

$\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{f(-2,-2) = 8}$.

El máximo de la función *f(x, y)* se obtiene en todos los puntos del segmento $\overline{BC}$ y toma el valor 8.

El mínimo de la función *f(x, y)* se obtiene en el punto A(-1,5) y toma el valor -56.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

PREGUNTA 3. ANÁLISIS. (2,5 puntos). **Responda uno de estos dos apartados: 3.1. o 3.2.**

Ejercicio 3.1:

3.1. La evolución del precio (en euros) de un protector de pantalla para móvil a lo largo del año 2024 viene dado por la función

$$P(t)=\begin{cases} 9-t^2+8t & si \quad 0\le t<7 \\ (t-10)^2+7 & si \quad 7\le t\le 12 \end{cases}$$ en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

3.1.1. ¿Cuál fue el precio inicial de ese protector de pantalla? ¿Cuál ha sido su precio al final del año?

3.1.2. Determine en qué períodos ha aumentado y disminuido el precio del protector.

3.1.3. ¿Cuál ha sido el precio máximo alcanzado? ¿Y el mínimo? ¿En qué momentos se producen? Razone las respuestas.

Solución:

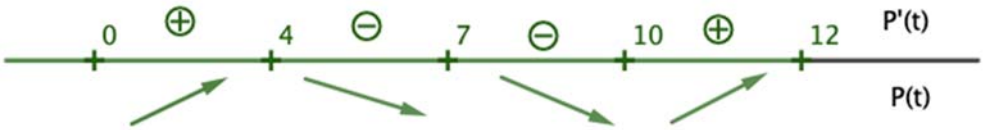
3.1.1.

P(0)=9 € precio inicial.

P(12)=11 € precio final.

3.1.2. Estudiamos el signo de la derivada primera entre los puntos en los que la función cambia de definición y los valores que anulan la derivada.

$$P'(t)=\begin{cases} -2t+8 & si \quad 0<t<7 \\ 2t-20 & si \quad 7<t<12 \end{cases} \qquad P'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=4 \in (0,7) \\ t=10 \in (7,12) \end{cases}$$



El precio aumenta los cuatro primeros meses del año (enero,...abril) y los dos últimos (noviembre, diciembre).

El precio disminuye entre el $4°$ y el $10°$ mes (mayo,…octubre).

3.1.3. En t=4 la función es continua (polinómica) y pasa de creciente a decreciente, por lo tanto en t=4 hay un máximo relativo.

En t=10 la función es continua (polinómica) y pasa de decreciente a creciente, por lo tanto en t=10 hay un mínimo relativo.

También podemos utilizar el criterio de la derivada segunda:

$$P''(t)=\begin{cases} -2 & si \quad 0<t<7 \\ 2 & si \quad 7<t<12 \end{cases}$$

$P''(4)=-2<0 \Rightarrow t=4$ máximo relativo

$P''(10)=2>0 \Rightarrow t=10$ mínimo relativo

BY NC SA
Textos Marea Verde

Como nos piden en qué momento se alcanza el máximo y el mínimo debemos estudiar la función en los puntos extremos del dominio.

$$\left.\begin{array}{l} P(0)=9 \\ P(4)=25 \\ P(10)=7 \\ P(12)=11 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

El máximo se obtiene e $4°$mes con un precio de 25 €. El mínimo se produce el $10°$ mes con un valor de 7 €.

Ejercicio 3.2:

3.2. Dada la función $f(x) = -8x^2 + 24x - 10$.

3.2.1. Realice su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

3.2.2. Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de la función f y las rectas x=1, x=2 e y=4.

Solución:

3.2.1. Puntos de corte con eje abscisas (y=0)

$$-8x^2 + 24x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm 16}{-16} = \begin{matrix} 0.5 \Rightarrow (0.5,0) \\ 2.5 \Rightarrow (2.5,0) \end{matrix}$$

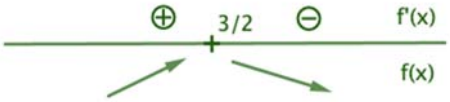
Punto de corte con eje ordenadas (x = 0)

$$x = 0 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow (0,-10)$$

Monotonía: estudiamos el signo de f'(x)

$f'(x) = -16x + 24$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$



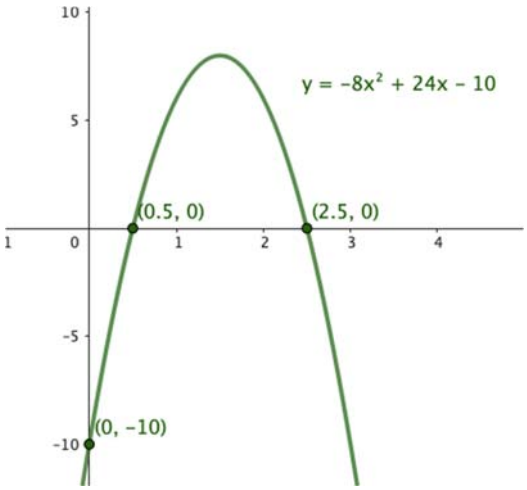
La función es creciente en el intervalo. $(-\infty, {}^3/_2)$ y decreciente en $({}^3/_2, +\infty)$

La función tiene un máximo relativo en $({}^3/_2, 17)$ por ser una función continua en $\mathbb{R}$ (polinómica) que pasa de creciente a decreciente.

También podríamos estudiar los extremos estudiando la segunda derivada o, considerando que es una función cuadrática, calculando su vértice.

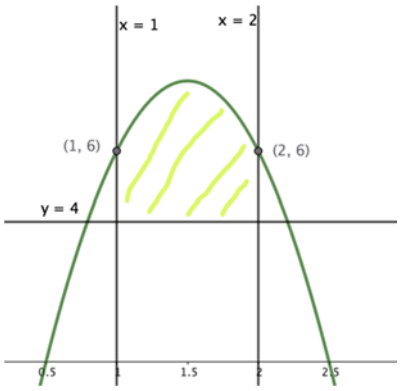
$f'(x) = -16$

$f''\left(\frac{3}{2}\right) < 0 \Rightarrow x = {}^3/_2 \qquad y = 17$ máximo relativo (vértice de la parábola).



3.2.2. Calculamos el área pedida como el área determinada por la gráfica, el eje de abscisas, las rectas x=1, x=2 a la que le restaremos el área del rectángulo de base 2-1 y altura 4.

BY NC SA
Textos Marea Verde



$$\int_1^2 (-8x^2 + 24x - 10)dx = \left[\frac{-8x^3}{3} + \frac{24x^2}{2} - 10x\right]_1^2 = \frac{22}{3}\ u^2$$

$$A = \frac{22}{3} - 1 \cdot 4 = \frac{10}{3}u^2$$

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

PREGUNTA 4. TRES BLOQUES DE LA MATERIA. (2,5 puntos). **Responda uno de los siguientes apartados:**

4.1., 4.2. o cualquiera de los apartados no escogidos de las preguntas 2 y 3 (2.1, 2.2, 3.1 o 3.2)

Ejercicio 4.1:

4.1. Sean A y B dos sucesos tales que:

$$P(A/B) = 1/2, \quad P(B/A) = 1/3 \quad \text{y} \quad P(A \cup B) = 1/4 .$$

4.1.1. Calcule $P(A \cap B)$.

4.1.2. Justifique si los sucesos A y B son o no independientes.

Solución:

4.1.1. Como consecuencia de la definición de probabilidad condicionada

$$\left.\begin{array}{l} P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \\ P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) \end{array}\right\}$$ igualando:

$$\frac{1}{2} \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot P(A) \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3} \cdot P(A)$$

Utilizamos la propiedad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{1}{4} = P(A) + \frac{2}{3}P(A) - P(B/A) \cdot P(A)$$

Operando $\frac{1}{4} = \frac{4}{3}P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{16}$

Como consecuencia:

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{1}{16}}$$

4.1.2.

$P(A) = \frac{3}{16} \neq P(A/B) = \frac{1}{2}$ por lo tanto NO son independientes

BY NC SA

Ejercicio 4.2:

4.2. Un estudio revela que el 40% de los automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año son propulsados por un motor con tecnología híbrida. Si en un control de carreteras son inspeccionados 5 automóviles nuevos matriculados en Galicia en el último año.

4.2.1. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos cuente con un motor con tecnología híbrida?

4.2.2. Calcule la probabilidad de que, entre los 5 automóviles, más de 3 cuenten con un motor con tecnología híbrida.

Solución:

4.2.1.

Definimos X: "número de automóviles matriculados en Galicia con motor de tecnología híbrida" que sigue una distribución binomial.

$$X \equiv B(n, p) = B(5,0.4)$$

$$\boldsymbol{P(X = 0) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{5}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^5 = 0.078}$$

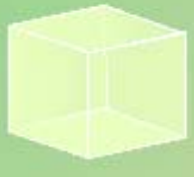
La probabilidad de que ninguno de ellos cuente con un motor con tecnología híbrida es 0.078.

4.2.2.

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{4} \cdot 0.4^4 \cdot 0.6^1 + \binom{5}{5} \cdot 0.4^5 \cdot 0.6^0 =$$

$$= 0.0768 + 0.01024 = 0.08704$$

La probabilidad de que, entre los 5 automóviles, más de 3 cuenten con un motor con tecnología híbrida es 0.08704.



MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S
Vallecas

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU)
FASE GENERAL
CURSO: **2024–2025**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

El examen consta de 4 ejercicios. La PARTE 1 consta de dos ejercicios, cada uno de los cuales se puntúa con 2 puntos: el primero de carácter competencial y obligatorio; el segundo puede elegirse entre dos opciones dadas. En las PARTES 2 y 3 se realizará un ejercicio en cada una, puntuado con 3 puntos, con posibilidad de elegir entre dos opciones.

Todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad de almacenar o transmitir datos. Si el estudiante es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 350 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.
b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
d) **(0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

EJERCICIO 2

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)

(Opción 1)

2.1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ (k: número real), se pide:

a) **(1 PUNTO)** Calcula para qué valores de "k" la matriz A posee rango 3.

b) **(1 PUNTO)** Para $k=1$, calcula una matriz X que verifique la igualdad $AX=\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$

(Opción 2)

2.2. (2 PUNTOS) Un grupo de niños de una clase han reunido, para vender en el mercadillo solidario de su colegio, objetos de tres tipos: imanes para nevera, bolas navideñas y llaveros. Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €. El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes; con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2€ menos que con la venta de los llaveros. Calcula el número de objetos de cada tipo (imanes, bolas y llaveros) que han vendido.

BY NC SA
Textos Marea Verde

PARTE 2. ANÁLISIS

EJERCICIO 3

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Dada la función $f(x)=x^3+ax^2+21x+b$ (a y b: números reales), se pide:

a) **(0.75 PUNTOS)** Calcula qué valores deben tomar "a" y "b" para que *f(x)* tenga un extremo relativo en $x=1$ y la gráfica de *f(x)* pase por el punto (0, 3).

b) **(1.25 PUNTOS)** Para $a=-12$ y $b=100$; calcula los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de *f(x)* en el intervalo cerrado $[0,8]$.

c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor que debe tomar "a" para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^2 \left(3x^2+2ax+21\right)dx=30$$

(Opción 2)

3.2. El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función:

$$f(t)=t^3-9t^2+24t+8, \qquad 0\le t\le 6$$

siendo t: número de meses transcurridos

a) **(1 PUNTO)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$ y cuál es el valor de dicho beneficio.

b) **(1 PUNTO)** Estudia si hay o no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo $[0,6]$.

c) **(1 PUNTO)** Calcula el área limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$.

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EJERCICIO 4

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)

(Opción 1)

4.1. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** El examen de cierta materia se compone de dos partes; una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:

A1) Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.

A2) Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

B) **(2 PUNTOS)** El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 100 gramos.

B.1) Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 cobayas y su peso medio ha sido de 255 gramos. Calcula un intervalo de confianza del 93% para estimar μ.

B.2) Supongamos que μ = 250 gramos: si se considera una muestra aleatoria con 25 cobayas, calcula la probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos.

BY NC SA
Textos Marea Verde

(Opción 2)
4.2. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** Una empresa fabrica tres tipos de piezas mecánicas A, B y C. Para dicha fabricación se dispone de tres máquinas distintas M1, M2 y M3. El número de piezas fabricadas por cada máquina se indica en la siguiente tabla:

	Piezas tipo A	Piezas tipo B	Piezas tipo C	Total
M1	50	60	40	150
M2	40	75	55	170
M3	45	65	70	180
Total	135	200	165	500

Se elige una pieza al azar. Se pide:

A.1) Calcula la probabilidad de que no haya sido fabricada por la máquina 1.
A.2) Si la pieza es de tipo B, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina 2.

B) **(2 PUNTOS)** El peso de las mujeres estudiantes de cierta universidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 6 kg.

B.1) Se toma una muestra aleatoria con 64 mujeres de dicha universidad y la media de sus pesos es 66 kg. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la media μ.
B.2) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que al estimar μ con la media muestral al mismo nivel de confianza, el error sea a lo sumo de 2 kg?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica dos modelos de joyas: A y B. Para fabricar una joya del modelo A necesita 2 gramos de oro y 4 gramos de plata; para cada una del modelo B, se precisa de 4 gramos de oro y 2 gramos de plata. La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata. Si el beneficio que obtiene es de 60 euros por cada unidad de A y 80 euros por cada una de B, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántas joyas de cada modelo (A y B) se deben producir para maximizar el beneficio.
b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
d) **(0,5 PUNTOS)** Calcula el número de joyas de cada modelo que se deben fabricar con el fin de maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascendería este beneficio?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de joyas A producidas e "y" al número de joyas B.
Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Gramos de oro	Gramos de plata	Beneficio
número de joyas A (x)	2x	4x	60x
número de joyas B (y)	4y	2y	80y
TOTAL	$2x+4y$	$4x+2y$	$60x+80y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=60x+80y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$
La disponibilidad máxima semanal es de 420 gramos de oro y de 360 gramos de plata → $2x+4y \leq 420;\ 4x+2y \leq 350$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x+4y \leq 420 \\ 4x+2y \leq 360 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+2y \leq 210 \\ 2x+y \leq 180 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$x \geq 0;\ y \geq 0$

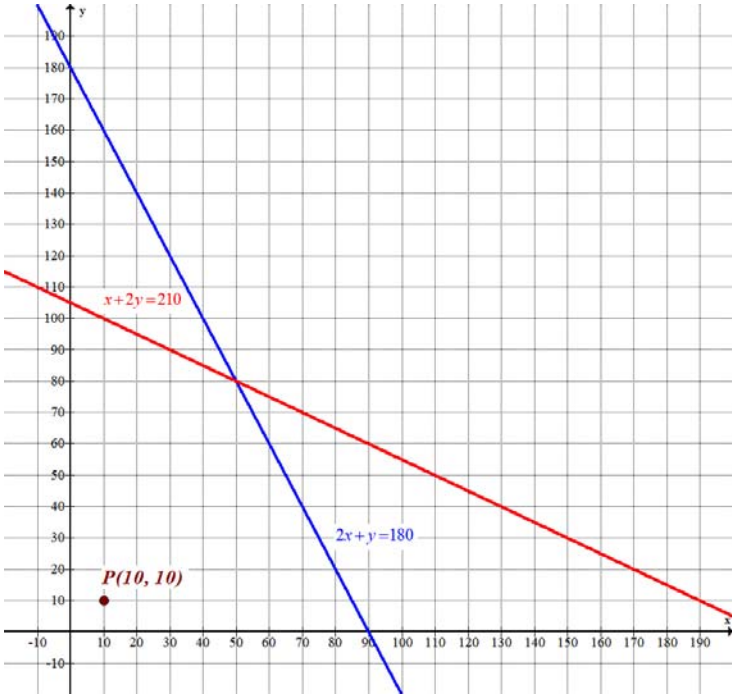
El primer cuadrante

$x + 2y = 210$

x	$y = \dfrac{210 - x}{2}$
0	105
50	80
210	0

$2x + y = 180$

x	$y = 180 - 2x$
0	180
50	80
90	0



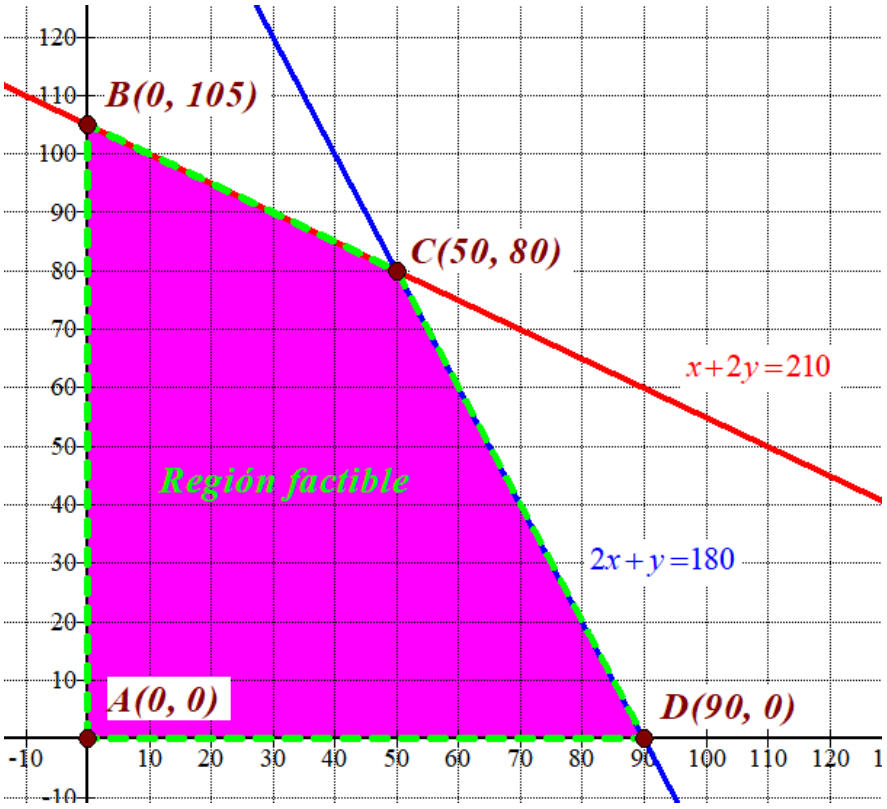
Como las restricciones son $\left.\begin{matrix} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 210 \\ 2x + y \leq 180 \end{matrix}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{matrix} 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \\ 10 + 20 \leq 210 \\ 20 + 10 \leq 180 \end{matrix}\right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.

BY NC SA
Textos Marea Verde



c) Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 105), C(50, 80) y D(90, 0).

d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 60x + 80y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 105) → $B(0,105) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 105 = 8400$

C(50, 80) → $B(50,80) = 60 \cdot 50 + 80 \cdot 80 = 9400$ *Máximo*

D(90, 0) → $B(90,0) = 60 \cdot 90 + 80 \cdot 0 = 5400$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto C(50, 80).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación de 50 joyas tipo A y 80 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 9 400 €.

Problema 2:

EJERCICIO 2

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2):

(Opción 1)

2.1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ (k: número real), se pide:

a) **(1 PUNTO)** Calcula para qué valores de "k" la matriz A posee rango 3.

b) **(1 PUNTO)** Para k = 1, calcula una matriz X que verifique la igualdad: $A\,X = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 36 \end{pmatrix}$

Solución:

a) Para que la matriz A tenga rango 3 su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 3 & 0 \\ 1 & k & 4 \\ k+3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 4k^2 + 12(k+3) - 12 - 32k = 4k^2 + 12k + 36 - 12 - 32k = 4k^2 - 20k + 24$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 4k^2 - 20k + 24 = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \boxed{3 = k} \\ \frac{5-1}{2} = \boxed{2 = k} \end{cases}$$

El determinante de A se anula para $k = 2$ y $k = 3$. La matriz A tiene rango 3 para cualquier valor de "k" distinto de 2 y de 3.

b) Para $k = 1$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ y sabemos que su determinante es no nulo, por lo que tiene inversa. La calculamos.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 4\\ 4 & 8 & 4\end{vmatrix}=4+48-12-32=8\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 3 & 1 & 8\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 8\\ 4 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 8\\ 0 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 8\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 8\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-28 & -12 & 12\\ 12 & 4 & -4\\ 4 & 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/2 & -3/2 & 3/2\\ 3/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación $AX=\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 36\end{pmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 36\end{pmatrix}$. Terminamos de calcular la expresión de la matriz X.

$$X=A^{-1}\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/2 & -3/2 & 3/2\\ 3/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-77/2-27/2+54\\ 33/2+9/2-18\\ 11/2+9/2-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$$

Problema 2.2:

(Opción 2)

2.2. (2 PUNTOS) Un grupo de niños de una clase han reunido, para vender en el mercadillo solidario de su colegio, objetos de tres tipos: imanes para nevera, bolas navideñas y llaveros. Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1,50 € y cada llavero, a 2€. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87€. El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes; con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2€ menos que con la venta de los llaveros. Calcula el número de objetos de cada tipo (imanes, bolas y llaveros) que han vendido.

Solución:

Llamamos "x" al número de imanes, "y" al número de bolas y "z" al número de llaveros.

"Cada imán lo han vendido a 1€, cada bola navideña, a 1.5 € y cada llavero, a 2 €. Han vendido todos los objetos que habían reunido y de dicha venta han obtenido un total de 87 €" → $x+1.5y+2z=87$

"El número de bolas navideñas representaba el 80% del número de imanes" → $y=0.80\cdot x$

"Con la venta de las bolas de Navidad han obtenido 2 € menos que con la venta de los llaveros" → $1.5y=2z-2$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+1.5y+2z=87 \\ y=0.80\cdot x \\ 1.5y=2z-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+1.5\cdot 0.8x+2z=87 \\ 1.5\cdot 0.8x=2z-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2.2x+2z=87 \\ 1.2x=2z-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2.2x+2z=87 \\ 0.6x=z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2.2x+2z=87 \\ 0.6x+1=z \end{array}\right\} \Rightarrow 2.2x+2(1+0.6x)=87 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.2x+2+1.2x=87 \Rightarrow 3.4x=85 \Rightarrow \boxed{x=\frac{85}{3.4}=25} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=1+0.6\cdot 25=16} \\ \boxed{y=0.8\cdot 25=20} \end{cases}$$

Se han vendido 25 imanes, 20 bolas navideñas y 16 llaveros.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3.1:

EJERCICIO 3

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2):

(Opción 1)

3.1. Dada la función $f(x)= x^3 + a\,x^2 + 21\,x + b$ (a y b: números reales), se pide:

a) **(0,75 PUNTOS)** Calcula qué valores deben tomar "a" y "b" para que f(x) tenga un extremo relativo en x=1 y la gráfica de f(x) pase por el punto (0, 3).

b) **(1,25 PUNTOS)** Para a = -12 y b = 100: calcula los máximos y mínimos, relativos y absolutos, de f(x) en el intervalo cerrado [0, 8].

c) **(1 PUNTO)** Calcula el valor que debe tomar "a" para que se cumpla la igualdad:

$$\int_0^2 (3\,x^2 + 2a\,x + 21)dx = 30$$

Solución:

a) Si la función tiene un extremo relativo en $x=1$ la derivada de la función debe anularse para este valor: $f'(1)=0$.

$$f(x)=x^3+ax^2+21x+b \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+21 \left.\begin{matrix} \\ f'(1)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 1^2+2a\cdot 1+21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=2a+24 \Rightarrow 2a=-24 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-24}{2}=-12}$$

Tenemos que $a=-12$. La función queda $f(x)=x^3-12x^2+21x+b$.

También sabemos que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 3), por lo que $f(0)=3$.

$$\left.\begin{matrix} f(0)=3 \\ f(x)=x^3-12x^2+21x+b \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3=0^3-12\cdot 0^2+21\cdot 0+b \Rightarrow \boxed{b=3}$$

Los valores buscados son $a=-12$ y $b=3$.

b) Para $a=-12$ y $b=100$ la función queda $f(x)=x^3-12x^2+21x+100$.

Averiguamos cuando se anula la derivada de la función.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$f(x)=x^3-12x^2+21x+100 \Rightarrow f'(x)=3x^2-24x+21$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-24x+21=0 \Rightarrow x^2-8x+7=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 7}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{8+6}{2}=\boxed{7=x}\\ \frac{8-6}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

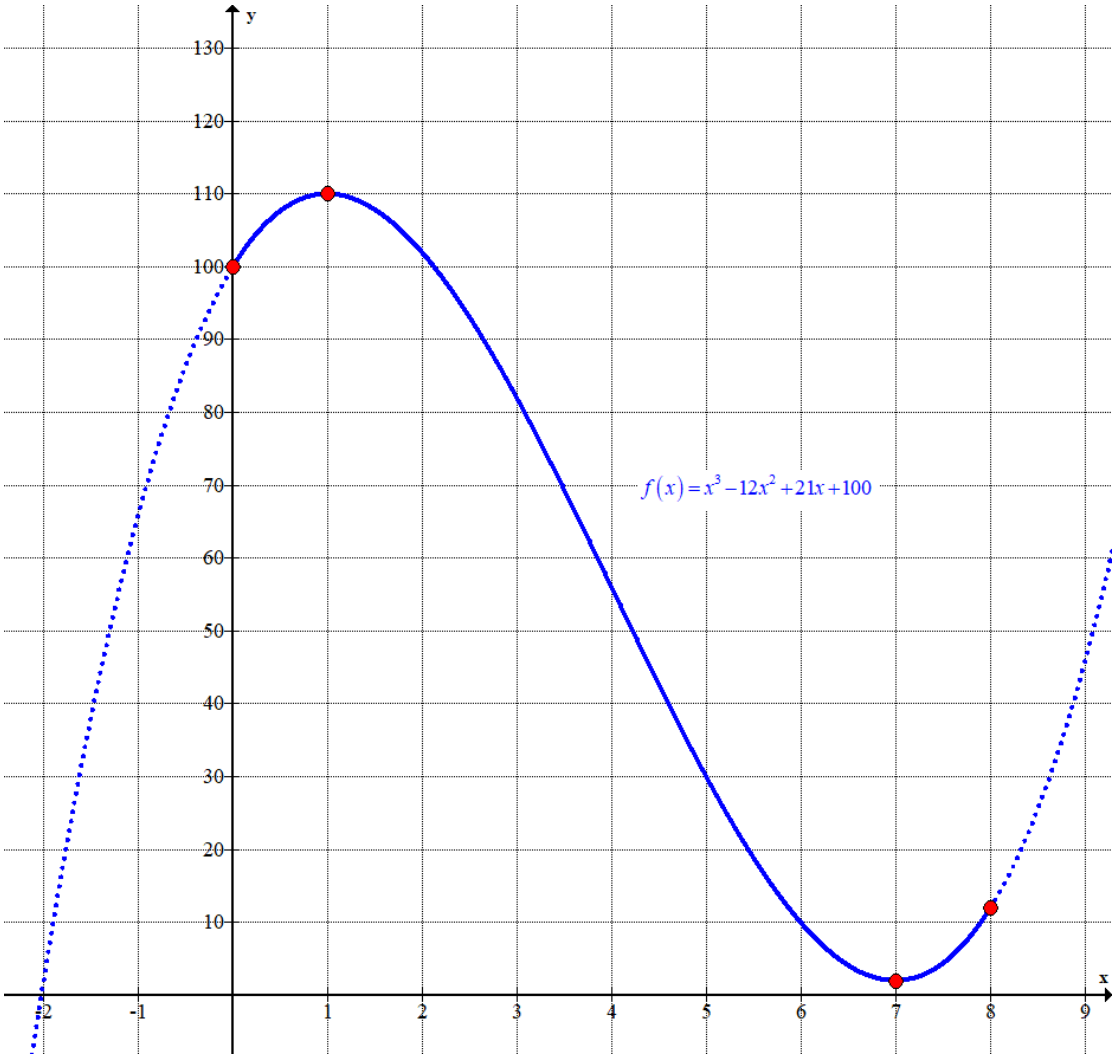
Ambos valores pertenecen al intervalo $[0,8]$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=3\cdot 0.5^2-24\cdot 0.5+21=9.75>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,7)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-24\cdot 2+21=-15<0$. La función decrece en $(1,7)$.
- En el intervalo $(7,8)$ tomamos $x=7.5$ y la derivada vale $f'(7.5)=3\cdot 7.5^2-24\cdot 7.5+21=9.75>0$. La función crece en $(7,8)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=7$.
Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los dos puntos críticos obtenidos.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-12\cdot 0^2+21\cdot 0+100=100\\ f(1)=1^3-12\cdot 1^2+21\cdot 1+100=110 \text{ Máximo}\\ f(7)=7^3-12\cdot 7^2+21\cdot 7+100=2 \textit{ Mínimo}\\ f(8)=8^3-12\cdot 8^2+21\cdot 8+100=12\end{array}\right\}$$

La función presenta un máximo relativo en $x=1$, siendo también máximo absoluto.
La función presenta un mínimo relativo en $x=7$. Siendo también mínimo absoluto.



c) Calculamos la integral definida.

$$\int_0^2 \left(3x^2+2ax+21\right)dx = \left[x^3+ax^2+21x\right]_0^2 =$$

$$= \left[2^3+a\cdot 2^2+21\cdot 2\right]-\left[0^3+a\cdot 0^2+21\cdot 0\right] = 8+4a+42 = \boxed{4a+50}$$

Averiguamos cuando este resultado vale 30.

$$4a+50=30 \Rightarrow 4a=-20 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-20}{4}=-5}$$

Se cumple lo pedido para $a=-5$.

Problema 3.2:

(Opción 2)

3.2. El beneficio de una empresa, expresado en miles de euros, a lo largo de 6 meses viene dado por la función:

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8, \quad 0 \le t \le 6,$$

siendo t: número de meses transcurridos.

a) **(1 PUNTO)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio. Calcula en qué mes ha obtenido la empresa el máximo beneficio en el intervalo de tiempo considerado, [0, 6] y cuál es valor de dicho beneficio.
b) **(1 PUNTO)** Estudia si hay o no puntos de inflexión y en el caso de haberlos, calcúlalos. Representa gráficamente la función en el intervalo [0, 6].
c) **(1 PUNTO)** Calcula el área limitada por la gráfica de f, el eje X y las rectas x=0 y x=2.

Solución:

a) Averiguamos cuando se anula la derivada del beneficio.

$$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 8 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 18t + 24 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = \boxed{4 = t} \\ \frac{6-2}{2} = \boxed{2 = t} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $[0,2)$ consideramos $t = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $[0,2)$.
- En el intervalo $(2,4)$ consideramos $t = 3$ y la derivada vale $f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3 < 0$. La función decrece en $(2,4)$.
- En el intervalo $(4,6]$ consideramos $t = 5$ y la derivada vale $f'(5) = 3 \cdot 5^2 - 18 \cdot 5 + 24 = 9 > 0$. La función crece en $(4,6]$.

La función crece en $[0,2) \cup (4,6]$ y decrece en $(2,4)$.

La función presenta un máximo relativo en $t = 2$ y un mínimo relativo en $t = 4$.
Valoramos el beneficio en estos puntos críticos y en los extremos del intervalo para determinar el máximo absoluto del beneficio.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-9\cdot 0^2+24\cdot 0+8=8 \\ f(2)=2^3-9\cdot 2^2+24\cdot 2+8=28 \\ f(4)=4^3-9\cdot 4^2+24\cdot 4+8=24 \\ f(6)=6^3-9\cdot 6^2+24\cdot 6+8=44\ \textit{Máximo} \end{array}\right\}$$

El beneficio máximo se consigue en el sexto mes siendo este beneficio máximo de 44000 €.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda (candidatos a puntos de inflexión).

$$f'(t)=3t^2-18t+24 \Rightarrow f''(t)=6t-18$$

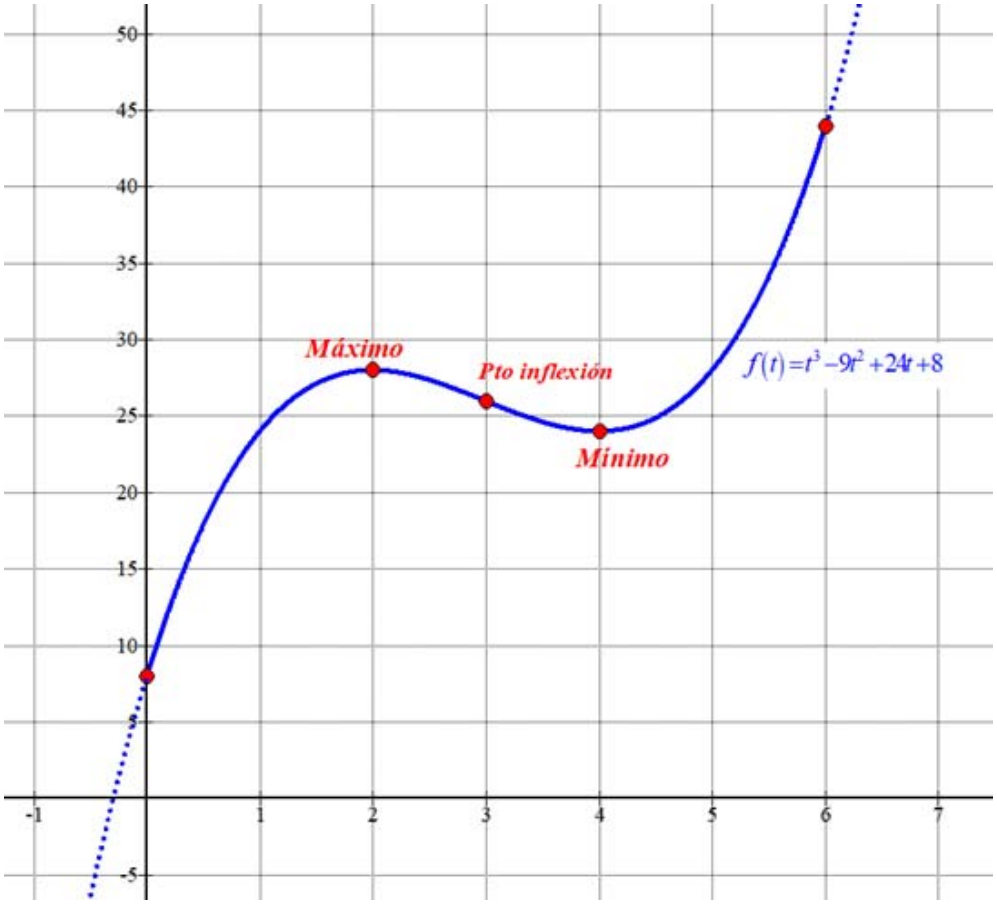
$$f''(t)=0 \Rightarrow 6t-18=0 \Rightarrow \boxed{t=3}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $t=3$.

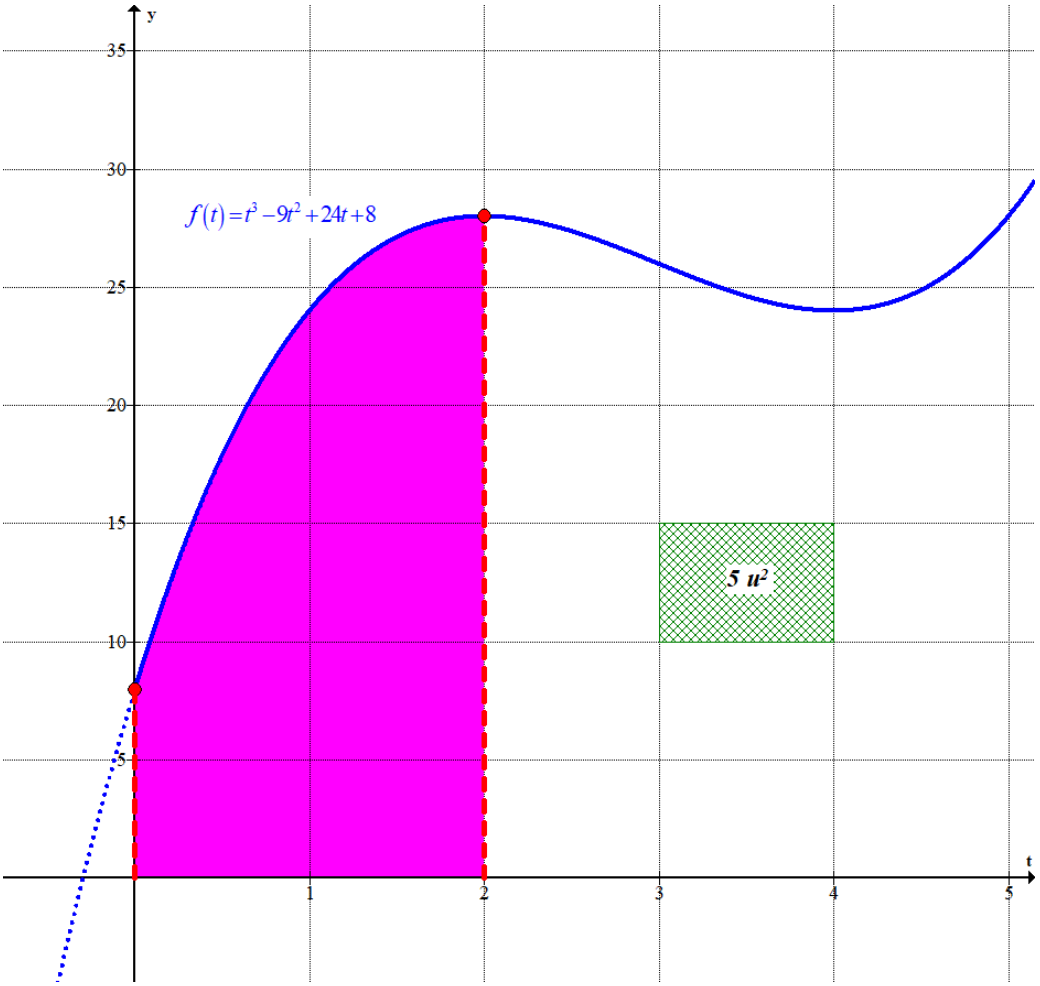
- En el intervalo $[0,3)$ tomamos $x=1$ y la derivada segunda vale $f''(1)=6\cdot 1-18=-12<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $[0,3)$.
- En el intervalo $(3,6]$ tomamos $x=4$ y la derivada segunda vale $f''(4)=6\cdot 4-18=6>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(3,6]$.

La función presenta un punto de inflexión en $t=3$. Como $f(3)=3^3-9\cdot 3^2+24\cdot 3+8=26$ las coordenadas del punto de inflexión son (3, 26).
Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

t	$f(t)=t^3-9t^2+24t+8$
0	8
2	28
3	26
4	24
6	44



c) Vemos en el dibujo la región de la cual queremos hallar el área. Su valor está situado entre 40 y 50 unidades cuadradas (contando cuadraditos de 5 unidades cuadradas cada uno).



Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 t^3 - 9t^2 + 24t + 8\,dt = \left[\frac{t^4}{4} - 3t^3 + 12t^2 + 8t\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - 3\cdot 2^3 + 12\cdot 2^2 + 8\cdot 2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - 3\cdot 0^3 + 12\cdot 0^2 + 8\cdot 0\right] = 4 - 24 + 48 + 16 = 44$$

El área limitada por la gráfica de *f*, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=2$ tiene un valor de 44 unidades cuadradas.

Problema 4.1:

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EJERCICIO 4

Elige una, y sólo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2):

(Opción 1)

4.1. Resuelve los apartados A) y B):

A) **(1 PUNTO)** El examen de cierta materia se compone de dos partes: una teórica y otra práctica. Se sabe que un 20% de los estudiantes aprueban ambas partes; un 70% aprueba la parte teórica; y un 40% aprueba la parte práctica. Elegido un estudiante al azar entre los presentados, se pide:

A.1) Probabilidad de que apruebe la parte práctica si ha aprobado la parte teórica.
A.2) Probabilidad de que apruebe alguna de las dos partes.

B) **(2 PUNTOS)** El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 100 gramos.

B.1) Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 cobayas y su peso medio ha sido de 255 gramos. Calcula un intervalo de confianza del 93% para estimar μ.

B.2) Supongamos que $\mu = 250$ gramos: si se considera una muestra aleatoria con 25 cobayas, calcula la probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos.

Solución:

A) Realizamos una tabla de contingencia.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20		70
Suspenden teórica			
	40		100

Completamos la tabla.

	Aprueban práctica	Suspenden práctica	
Aprueban teórica	20	**50**	70
Suspenden teórica	**20**	**10**	**30**
	40	**60**	100

A.1) La parte teórica la han aprobado el 70% y el 20% han aprobado la parte teórica y la práctica. Aplicando la regla de Laplace la probabilidad de que un alumno que ha aprobado la parte teórica apruebe la parte práctica es de $\frac{20}{70} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$.

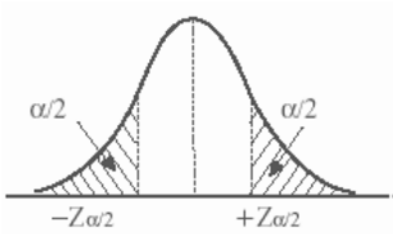
BY NC SA
Textos Marea Verde

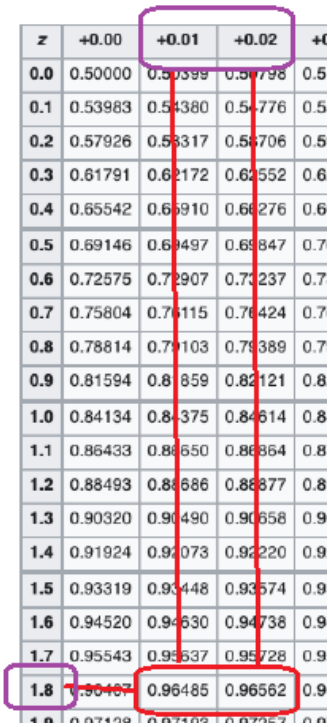
A.2) Los alumnos que aprueban solo la parte práctica son el 20 %, hay otro 50 % que solo aprueba la parte teórica y un 20% que aprueban las dos partes. Por lo tanto, la probabilidad de que al elegir un alumno al azar este apruebe alguna de las dos partes vale $\frac{20+50+20}{100}=0.9$.

B) Sea X = El peso, en gramos, de un cierto tipo de cobayas. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu,100)$.

B.1) Tenemos que tamaño muestra n = 100 y Media = $\bar{x}=255$ gramos.
Con un nivel de confianza del 93 % tenemos

$$1-\propto=0{,}93 \rightarrow \propto=0{,}07 \rightarrow \propto/2=0'035 \rightarrow 1-\propto/2=0{,}965 \rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{1.81+1.82}{2}=1.815$$





z	+0.00	+0.01	+0.02	+0
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.5
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.5
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.5
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.6
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.6
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.7
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.7
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.7
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.7
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.8
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.8
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.8
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.8
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.9
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.9
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.9
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.9
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.9
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.9

Calculamos el error.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.815\cdot\frac{100}{\sqrt{100}}=18.15 \text{ gramos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x}-Error,\ \bar{x}+Error\right)=\left(255-18.15,\ 255+18.15\right)=\left(236.85,\ 273.15\right)$$

B.2) X = N(250, 100). La distribución de los pesos medios de muestras de tamaño 25 sigue una ley normal con la misma media (250) y con desviación típica $\sigma=\frac{100}{\sqrt{25}}=20$ gramos.

$\overline{X_{25}}=N(250,20)$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Nos piden calcular $P\left(230 \le \overline{X_{25}} \le 280\right)$.

$$P\left(230 \le \overline{X_{25}} \le 280\right) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{230-250}{20} \le Z \le \frac{280-250}{20}\right) = P\left(-1 \le Z \le 1.5\right) =$$

$$= P\left(Z \le 1.5\right) - P\left(Z \le -1\right) = P\left(Z \le 1.5\right) - P\left(Z \ge 1\right) =$$

$$= P\left(Z \le 1.5\right) - \left[1 - P\left(Z \le 1\right)\right] = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 0.93319 - \left[1 - 0.84134\right] = \boxed{0.77453}$$

z	+0.00	+0.0
0.0	0.5[illegible]000	0.503
0.1	0.5[illegible]983	0.543
0.2	0.5[illegible]926	0.583
0.3	0.6[illegible]791	0.621
0.4	0.6[illegible]542	0.659
0.5	0.6[illegible]146	0.694
0.6	0.7[illegible]575	0.729
0.7	0.7[illegible]804	0.761
0.8	0.7[illegible]814	0.791
0.9	0.8[illegible]594	0.818
1.0	0.84134	0.843
1.1	0.8[illegible]433	0.866
1.2	0.8[illegible]493	0.886
1.3	0.90[illegible]320	0.904
1.4	0.91[illegible]924	0.920
1.5	0.93319	0.934

La probabilidad de que el peso medio de la muestra se encuentre entre 230 gramos y 280 gramos es de 0.77453.

Problema 4.2:

(Opción 2)

4.2. Resuelve los apartados A) y B):

A) (1 PUNTO) Una empresa fabrica tres tipos de piezas mecánicas A, B y C. Para dicha fabricación se dispone de tres máquinas distintas M1, M2 y M3. El número de piezas fabricadas por cada máquina se indica en la siguiente tabla:

	Piezas tipo A	Piezas tipo B	Piezas tipo C	Total
M1	50	60	40	150
M2	40	75	55	170
M3	45	65	70	180
Total	135	200	165	500

Se elige una pieza al azar. Se pide:

A.1) Calcula la probabilidad de que no haya sido fabricada por la máquina 1.
A.2) Si la pieza es de tipo B, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina 2.

B) (2 PUNTOS) El peso de las mujeres estudiantes de cierta universidad sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 6 kg.

B.1) Se toma una muestra aleatoria con 64 mujeres de dicha universidad y la media de sus pesos es 66 kg. Calcula un intervalo de confianza al 99% para la media μ.

B.2) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que al estimar μ con la media muestral al mismo nivel de confianza, el error sea a lo sumo de 2 kg?

Solución:

A) Aplicamos la regla de Laplace utilizando los datos ofrecidos en la tabla.

A.1) Se fabrican un total de 500 piezas y la máquina 1 fabrica 150. La probabilidad de que al elegir una pieza esta no haya sido fabricada por la máquina 1 vale $\frac{500-150}{500}=0.7$.

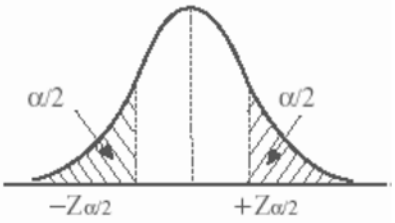
A.2) Del tipo B se fabrican 200 piezas y la máquina 2 ha fabricado 75 de estas piezas. La probabilidad de que una pieza de tipo B haya sido fabricada por la máquina 2 vale $\frac{75}{200}=0.375$.

B) Sea X = El peso en kg de las mujeres estudiantes de cierta universidad. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu,6)$.

B.1) Tenemos que tamaño muestra n = 64 y Media = $\bar{x} = 66$ kg.
Con un nivel de confianza del 99 % tenemos

$$1 - \propto = 0{,}99 \rightarrow \propto = 0{,}01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575$$

BY NC SA
Textos Marea Verde



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343
2.5								0.99492	0.99506

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = 1.93125 \text{ kg}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(66 - 1.93125,\ 66 + 1.93125\right) = \left(64.06875, 67.93125\right)$$

B.2) Sabemos que $X = N(\mu, 6)$ y que $z_{\alpha/2} = 2.575$.

Utilizamos la fórmula del error para despejar *n* con un error de 2 kg.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.575 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = \frac{15.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{15.45}{2} \Rightarrow \boxed{n = 7.725^2 \approx 59.675}$$

Para que el error cometido en la estimación sea menor de 2 kg la muestra debe ser de un mínimo de 60 mujeres estudiantes de cierta universidad.

BY NC SA
Textos Marea Verde

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GNERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.
b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
d) **(0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

Problema 2:

EJERCICIO 2

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)

(Opción 1)

2.1. a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de "k" para que la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ k & -5\end{pmatrix}$ verifique la igualdad:

$A^2=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) **(1 PUNTO)** Comprueba que la matriz $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}$ también verifica que $B^2=I_2$.

Calcula la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

(Opción 2)

2.2. Dadas las matrices $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 20\end{pmatrix}$, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) **(1,5 PUNTOS)** Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA+B=BA$
(A^T representa la matriz traspuesta de A)

Textos Marea Verde

Problema 3:

PARTE 2. ANÁLISIS

EJERCICIO 3

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+36x+5$ (a: número real). Se pide:

a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de "a" para que la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto (2, f(2)) tenga por ecuación: $y=37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x=2$.

b) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de "a" para que haya un cambio de concavidad de la función en $x=5$.

c) **(1 PUNTO)** Qué valor debe tomar "a" para que se verifique la igualdad:

$$\int_3^4 \left(3x^2+2ax+36\right)dx=152$$

(Opción 2)

3.2. Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función:

$f(t)=t^3-3t+10$ con $0\le t\le 6$ (t: meses transcurridos desde el inicio del estudio)

Se pide:

a) **(1,25 PUNTOS)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuando los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$, e indica cuándo se han alcanzado.

b) **(0,25 PUNTOS)** Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros.

c) **(0,75 PUNTOS)** Representa gráficamente la función en el intervalo $[0,6]$.

d) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

Problema 4:

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EJERCICIO 4

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)

(Opción 1)

4.1. Una empresa de motos fabrica uno de sus modelos en tres plantas distintas A, B y C que producen respectivamente el 35%, el 25% y el 40% de las unidades. El modelo está disponible en dos versiones, gasolina y eléctrica. Mientras en la planta B el 65% de las motos fabricadas son de gasolina, en la C sucede lo contrario y el 65% de las motos son eléctricas, Sabemos también que, de la producción total, el 60% de las motos son de gasolina. Se pide:

a) **(1,25 PUNTOS)** ¿Qué porcentaje de motos fabricadas por la planta A son de gasolina?

b) **(0,5 PUNTOS)** ¿Son independientes los sucesos "moto fabricada en la planta B" y "moto de gasolina"?

c) **(1,25 PUNTOS)** Se elige una moto al azar de dicha empresa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la planta B si la moto es eléctrica.

(Opción 2)

4.2. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** De dos sucesos A y B sabemos que $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ y que, además, A y B son independientes. Calcula: $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A/B)$ y $P\left(\overline{A}/B\right)$.

($\overline{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A)

B) La duración, en horas, de un tipo de bombilla sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 250 horas.

B.1) **(1 PUNTO)** Se toma una muestra aleatoria de 100 bombillas y la duración media de estas bombillas ha sido de 2000 horas. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ.

B.2) **(1 PUNTO)** Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que al estimar μ, con el mismo nivel de confianza, el error sea inferior a 20 horas.

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: NÚMEROS Y ÁLGEBRA

PARTE 1. NÚMEROS Y ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

1. Una empresa fabrica y vende dos modelos de armarios de oficina A y B. Para fabricar un armario del modelo A se necesitan 3 horas para su construcción y 4 horas de pintura; cada uno del modelo B, necesita para estos procesos 6 y 2 horas respectivamente. La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura. Cada armario del modelo A genera un beneficio de 200 euros y cada uno del modelo B, 300 euros. A la empresa le interesa saber cuántos armarios de cada tipo debe fabricar para maximizar su beneficio. Se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Plantea el problema de programación lineal que permita saber cuántos armarios de cada tipo se deben producir para maximizar el beneficio.
b) **(0,5 PUNTOS)** Representa la región factible.
c) **(0,5 PUNTOS)** Calcula las coordenadas de los vértices de dicha región.
d) **(0,5 PUNTOS)** Indica cuántos armarios de cada tipo deben fabricarse para maximizar el beneficio. Indica el valor de dicho beneficio máximo.

Solución:

a) Llamamos "x" al número de armarios A producidos e "y" al número de armarios B. Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Horas de construcción	Horas de pintura	Beneficio
Armarios A (x)	3x	4x	200x
Armarios B (y)	6y	2y	300y
TOTAL	$3x+6y$	$4x+2y$	$200x+300y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=200x+300y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$
La empresa dispone semanalmente de un máximo de 60 horas para la construcción de estos armarios y de un máximo de 32 horas para la pintura → $3x+6y\leq 60;\ 4x+2y\leq 32$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 3x+6y\leq 60 \\ 4x+2y\leq 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ x+2y\leq 20 \\ 2x+y\leq 16 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones.

Textos Marea Verde

$x \geq 0;\ y \geq 0$

El primer cuadrante

$x + 2y = 20$

x	$y = \dfrac{20 - x}{2}$
0	10
4	8
20	0

$2x + y = 16$

x	$y = 16 - 2x$
0	16
4	8
8	0

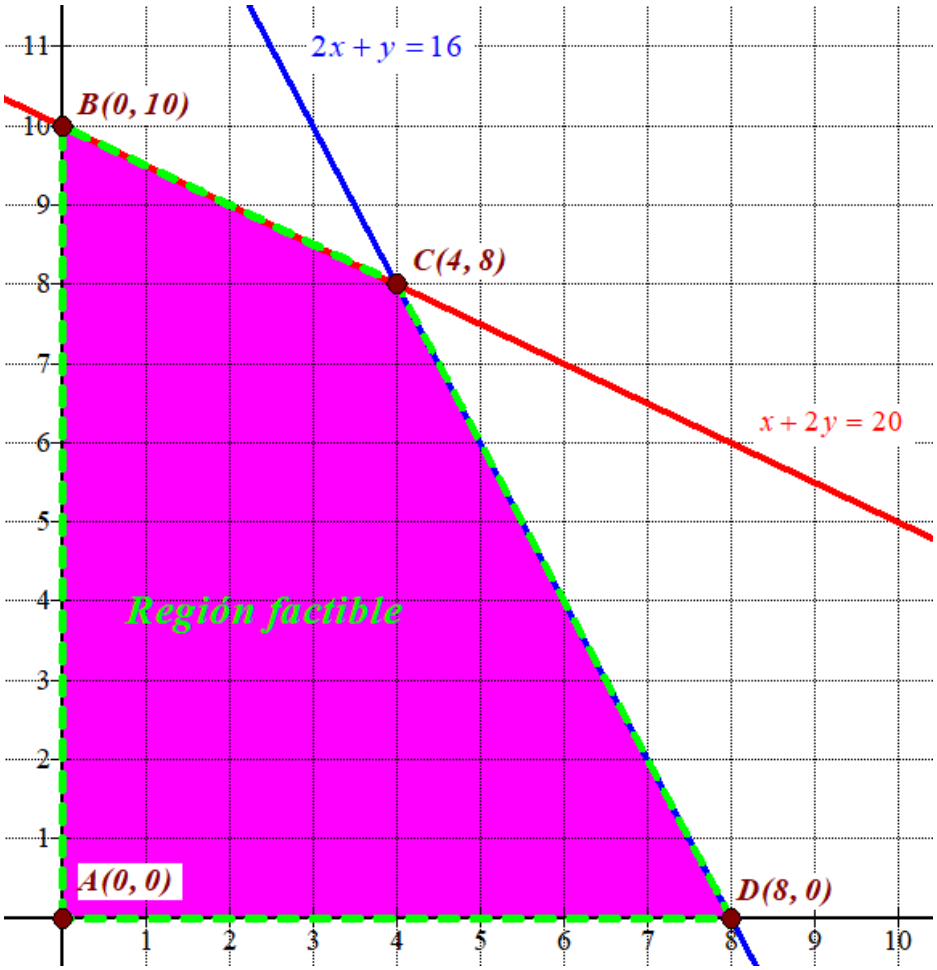
Como las restricciones son $\left.\begin{matrix} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 2x + y \leq 16 \end{matrix}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{matrix} 2 \geq 0;\ 2 \geq 0 \\ 2 + 2 \cdot 2 \leq 20 \\ 2 \cdot 2 + 2 \leq 16 \end{matrix}\right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de rosa la región factible.

BY NC SA
Textos Marea Verde



c) Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 10), C(4, 8) y D(8, 0).

d) Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 200x + 300y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 10) → $B(0,10) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 3000$

C(4, 8) → $B(4,8) = 200 \cdot 4 + 300 \cdot 8 = 3200$ *Máximo*

D(8, 0) → $B(8,0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto C(4, 8).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con la fabricación y venta de 4 armarios tipo A y 8 tipo B. Este beneficio máximo tiene un valor de 3 200 €.

Problema 2:

EJERCICIO 2

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (2.1 o 2.2)

(Opción 1)

2.1. a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de "k" para que la matriz $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ k & -5\end{pmatrix}$ verifique la igualdad:

$A^2=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) **(1 PUNTO)** Comprueba que la matriz $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}$ también verifica que $B^2=I_2$.

Calcula la matriz inversa de B. Calcula una matriz X que verifique: $BX=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

(Opción 2)

2.2. Dadas las matrices $A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 20\end{pmatrix}$, se pide:

a) **(0,5 PUNTOS)** Demuestra que se cumple la igualdad: $AA^T=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) **(1,5 PUNTOS)** Calcula una matriz X para que se cumpla la igualdad: $XA+B=BA$
(A^T representa la matriz traspuesta de A)

Solución 2.1:

a) Resolvemos la igualdad planteada.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}5 & 3\\ k & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 3\\ k & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}25+3k & 15-15\\ 5k-5k & 3k+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}25+3k & 0\\ 0 & 3k+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow 3k+25=1\Rightarrow 3k=-24\Rightarrow \boxed{k=-8}$$

Para $k=-8$ se cumple que $A^2=I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Comprobamos que la matriz B cumple la igualdad $B^2=I_2$.

$$B^2=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16-15 & 12-12\\ -20+20 & -15+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

La matriz B cumple que $B^2=I_2\rightarrow B\cdot B=I_2$.

Resolvemos la ecuación matricial $BX=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$BX = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow BBX = B\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{B^2 = I\right\} \Rightarrow I \cdot X = B\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+3 & 28+6 \\ -15-4 & -35-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 34 \\ -19 & -43 \end{pmatrix}$$

La matriz solución es $X = \begin{pmatrix} 15 & 34 \\ -19 & -43 \end{pmatrix}$.

Solución 2.2:

a) Comprobamos que se cumple la igualdad.

$$A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

$$AA^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9+16 & 12-12\\ 12-12 & 16+9\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$$

b) Por el apartado anterior sabemos que la matriz A tiene inversa y que $A^{-1}=A^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

Despejamos X de la igualdad.

$$XA+B=BA\Rightarrow XA=BA-B\Rightarrow X=(BA-B)A^{-1}=BAA^{-1}-BA^{-1}=B-BA^{-1}$$

Terminamos de hallar la matriz X.

$$X=B-BA^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 20\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 20\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}15-40 & 20+30\\ -80 & 60\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 20\end{pmatrix}-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-25 & 50\\ -80 & 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 0 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5 & 10\\ -16 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 16 & 8\end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 16 & 8\end{pmatrix}$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3: ANÁLISIS

PARTE 2. ANÁLISIS

EJERCICIO 3

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (3.1 o 3.2)

(Opción 1)

3.1. Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+36x+5$ (a: número real). Se pide:

a) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de "a" para que la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto (2, f(2)) tenga por ecuación: $y=37$. Estudia si la función posee un máximo o un mínimo relativo en $x=2$.

b) **(1 PUNTO)** Calcula el valor de "a" para que haya un cambio de concavidad de la función en $x=5$.

c) **(1 PUNTO)** Qué valor debe tomar "a" para que se verifique la igualdad:

$$\int_{,}^{4}\left(3x^2+2ax+36\right)dx=152$$

(Opción 2)

3.2. Un empresario ha realizado un estudio para analizar la evolución de su negocio durante 6 meses. Los ingresos, en miles de euros, vienen dados por la función:

$f(t)=t^3-3t+10$ con $0\le t\le 6$ (t: meses transcurridos desde el inicio del estudio)

Se pide:

a) **(1,25 PUNTOS)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función. Calcula cuando los ingresos han sido máximos y cuándo mínimos en el intervalo de tiempo considerado, $[0,6]$, e indica cuándo se han alcanzado.

b) **(0,25 PUNTOS)** Calcula en qué momento los ingresos han sido de 12000 euros.

c) **(0,75 PUNTOS)** Representa gráficamente la función en el intervalo $[0,6]$.

d) **(0,75 PUNTOS)** Calcula en qué punto de la gráfica anterior, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto es igual a 9. Indica la ecuación de dicha recta.

Solución 3.1:

a) Si la recta tangente a la gráfica de la función en $x=2$ es $y=37$, esto quiere decir dos cosas: la primera es que $f(2)=37$ y la segunda que $f'(2)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=37 \\ f(x)=x^3+ax^2+36x+5 \end{array}\right\} \Rightarrow 37=2^3+a\cdot 2^2+36\cdot 2+5 \Rightarrow 37=8+4a+72+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a=-48 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-48}{4}=-12}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2ax+36 \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 2^2+2\cdot 2a+36 \Rightarrow 0=12+4a+36 \Rightarrow \boxed{a=-12}$$

El valor necesario para que se cumpla lo pedido es $a=-12$.

Textos Marea Verde

Al ser $f'(2)=0$ la función tiene un extremo relativo en $x=2$. Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$f(x)=x^3-12x^2+36x+5 \Rightarrow f'(x)=3x^2-24x+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x)=6x-24 \Rightarrow f''(2)=6\cdot 2-24=-12<0$$

Como la segunda derivada es negativa la función tiene un máximo relativo en $x=2$.

b) Para que haya un cambio de concavidad de la función en $x=5$ la función tiene que tener un punto de inflexión en dicho valor y para ello la derivada segunda debe anularse para $x=5$.

$$f(x)=x^3+ax^2+36x+5 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+36 \Rightarrow f''(x)=6x+2a$$

$$f''(5)=0 \Rightarrow 6\cdot 5+2a=0 \Rightarrow 2a=-30 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-30}{2}=-15}$$

Para $a=-15$ se cumple lo pedido.

c) Calculamos el valor de la integral definida planteada.

$$\int_2^4 \left(3x^2+2ax+36\right)dx=\left[x^3+ax^2+36x\right]_2^4=\left[4^3+a\cdot 4^2+36\cdot 4\right]-\left[2^3+a\cdot 2^2+36\cdot 2\right]=$$

$$=64+16a+144-8-4a-72=12a+128$$

Determinamos el valor de "a" para que esta integral valga 152.

$$\int_2^4 \left(3x^2+2ax+36\right)dx=152 \Rightarrow 12a+128=152 \Rightarrow 12a=24 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

El valor buscado es $a=2$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Solución 3.2:

a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función ingresos.

$$f(t)=t^3-3t+10 \Rightarrow f'(t)=3t^2-3$$

$$f'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-3=0 \Rightarrow t^2-1=0 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{1}=1}$$

Solo consideramos el valor positivo de la raíz. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t=1$.

- En el intervalo $[0,1)$ consideramos $t=0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=3\cdot 0.5^2-3=-2.25<0$. La función decrece en $[0,1)$.
- En el intervalo $(1,6]$ consideramos $t=5$ y la derivada vale $f'(5)=3\cdot 5^2-3=72>0$. La función crece en $(1,6]$.

La función decrece en $[0,1)$ y crece en $(1,6]$.

La función presenta un mínimo relativo en $t=1$.

Valoramos los ingresos en este punto crítico y en los extremos del intervalo para determinar el máximo y mínimo absoluto de los ingresos.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3-3\cdot 0+10=10 \\ f(1)=1^3-3\cdot 1+10=8 \text{ Mínimo} \\ f(6)=6^3-3\cdot 6+10=208 \textit{ Máximo} \end{array}\right\}$$

El ingreso mínimo es de 8000 € y se produce transcurrido 1 mes desde el comienzo del estudio.

El ingreso máximo es de 208000 € y se consigue transcurridos 6 meses desde el inicio del estudio.

b) Averiguamos el valor de "t" para el que $f(t)=12$.

$$f(t)=12 \Rightarrow t^3-3t+10=12 \Rightarrow t^3-3t-2=0$$

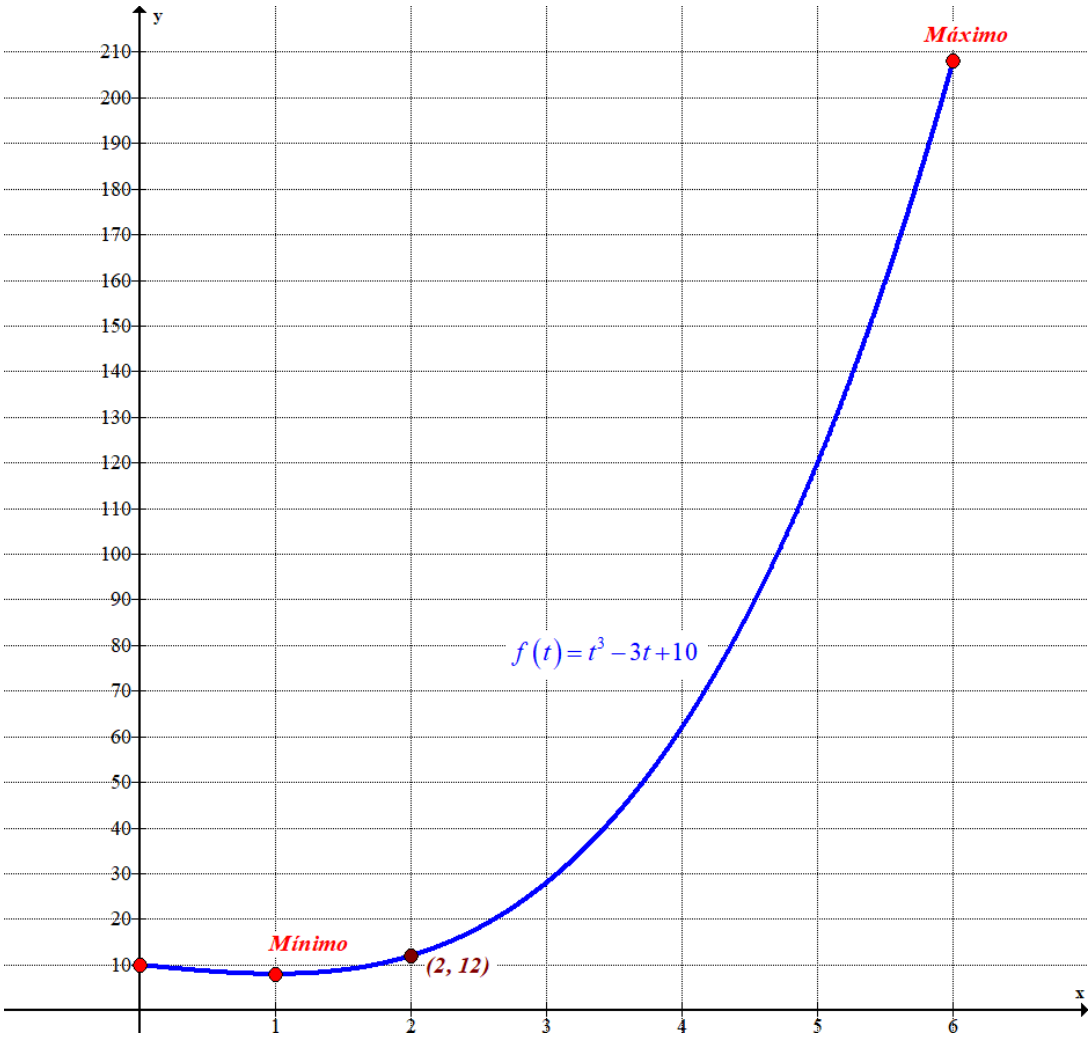
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \underline{0} \end{array} \Rightarrow t^3-3t-2=(t+1)(t^2-t-2)$$

$$t^2-t-2=0 \Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} \dfrac{1+3}{2}=\boxed{2=t} \\ \dfrac{1-3}{2}=-1\notin[0,6] \end{cases}$$

Textos Marea Verde

Transcurridos 2 meses desde el inicio del estudio los ingresos son de 12000 €.

c) Dibujamos la gráfica de la función.



d) Para que la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto sea igual a 9 la derivada de la función debe valer 9 → $f'(t)=9$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(t)=9 \\ f'(t)=3t^2-3 \end{array}\right\} \Rightarrow 9=3t^2-3 \Rightarrow 3t^2=12 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{4}=2}$$

En $t=2$ la pendiente de la recta tangente vale 9. Hallamos la expresión de esta recta tangente.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=12 \\ f'(2)=9 \\ y-f(2)=f'(2)(t-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-12=9(t-2) \Rightarrow y-12=9t-18 \Rightarrow \boxed{y=9t-6}$$

La recta tangente en $t=2$ tiene ecuación $y=9t-6$.

Problema 4: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

PARTE 3. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

EJERCICIO 4

Elige una, y solo una, de las dos opciones siguientes (4.1 o 4.2)

(Opción 1)

4.1. Una empresa de motos fabrica uno de sus modelos en tres plantas distintas A, B y C que producen respectivamente el 35%, el 25% y el 40% de las unidades. El modelo está disponible en dos versiones, gasolina y eléctrica. Mientras en la planta B el 65% de las motos fabricadas son de gasolina, en la C sucede lo contrario y el 65% de las motos son eléctricas, Sabemos también que, de la producción total, el 60% de las motos son de gasolina. Se pide:

a) **(1,25 PUNTOS)** ¿Qué porcentaje de motos fabricadas por la planta A son de gasolina?

b) **(0,5 PUNTOS)** ¿Son independientes los sucesos "moto fabricada en la planta B" y "moto de gasolina"?

c) **(1,25 PUNTOS)** Se elige una moto al azar de dicha empresa, calcula la probabilidad de que haya sido fabricada en la planta B si la moto es eléctrica.

(Opción 2)

4.2. Resuelve los apartados A) y B)

A) **(1 PUNTO)** De dos sucesos A y B sabemos que $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ y que, además, A y B son independientes. Calcula: $P(B)$, $P(A\cup B)$, $P(A/B)$ y $P(\overline{A}/B)$.

($\overline{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A)

B) La duración, en horas, de un tipo de bombilla sigue una distribución normal de media μ y desviación típica igual a 250 horas.

B.1) **(1 PUNTO)** Se toma una muestra aleatoria de 100 bombillas y la duración media de estas bombillas ha sido de 2000 horas. Calcula un intervalo de confianza del 95% para la media μ.

B.2) **(1 PUNTO)** Calcula el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que al estimar μ, con el mismo nivel de confianza, el error sea inferior a 20 horas.

Solución 4.1:

Llamamos A, B y C a los sucesos "la moto está fabricada en la planta A, B y C respectivamente" y G a "la moto es de gasolina".

Al elegir una moto al azar tenemos que $P(A)=0.35$, $P(B)=0.25$, $P(C)=0.40$, $P(G/B)=0.65$, $P(\overline{G}/C)=0.65$ y $P(G)=0.60$.

a) Calculamos $P(G/A)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$P(G)=P(A)P(G/A)+P(B)P(G/B)+P(C)P(G/C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.60=0.35\cdot P(G/A)+0.25\cdot 0.65+0.4(1-0.65)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.6=0.35\cdot P(G/A)+0.3025\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.35\cdot P(G/A)=0.2975\Rightarrow P(G/A)=\frac{0.2975}{0.35}=\boxed{0.85}$$

El 85% de las motos fabricadas en la planta A son de gasolina.

b) Para que sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(G/B)=P(G)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(G/B)=0.65\\P(G)=0.6\end{array}\right\}\Rightarrow P(G/B)=0.65\neq 0.6=P(G)$$

Los sucesos “moto fabricada en la planta B” y “moto de gasolina” no son independientes.

c) Nos piden calcular $P(B/\overline{G})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/\overline{G})=\frac{P(B\cap\overline{G})}{P(\overline{G})}=\frac{P(B)P(\overline{G}/B)}{1-P(G)}=\frac{0.25\cdot(1-0.65)}{1-0.6}=\frac{7}{32}=\boxed{0.21875}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Solución 4.2:

A) Como A y B son independientes se cumple $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=P(A)P(B) \\ P(A)=\frac{1}{4} \\ P(A\cap B)=\frac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{8}=\frac{1}{4}P(B)\Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}=0.5}$$

Para calcular $P(A\cup B)$ utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\boxed{\frac{5}{8}=0.625}$$

Para calcular $P(A/B)$ utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

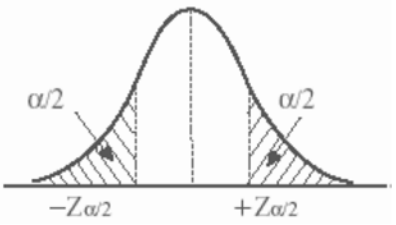
Para calcular $P(\overline{A}/B)$ utilizamos la probabilidad del suceso contrario.

$$P(\overline{A}/B)=1-P(A/B)=1-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

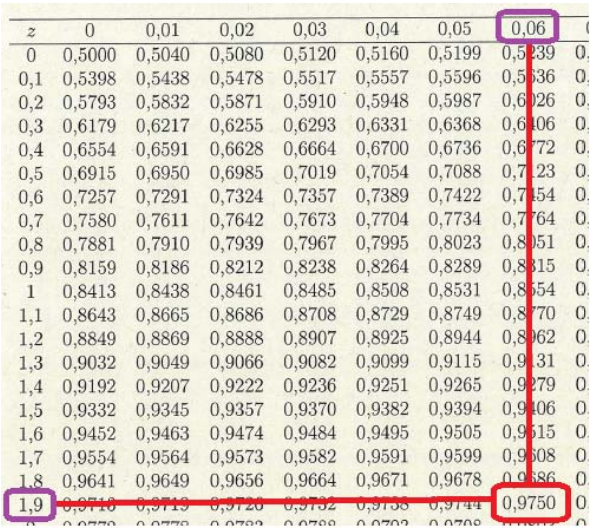
B) Sea X = La duración, en horas, de un tipo de bombilla. Esta distribución sigue una ley normal $N(\mu,250)$.

B.1) Tenemos que el tamaño de la muestra es n = 100 y la media = $\bar{x}=2000$ horas.
Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1-\propto=0{,}95 \rightarrow \propto=0{,}05 \rightarrow \propto/2=0'025 \rightarrow 1-\propto/2=0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}=1.96$$



BY NC SA
Textos Marea Verde



z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{100}} = 49 \text{ horas}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(2000 - 49,\ 2000 + 49\right) = \left(1951, 2049\right)$$

B.2) Sabemos que X = $N(\mu, 250)$ y que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

Utilizamos la fórmula del error para despejar *n* con un error de 20 horas.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = 1.96 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \Rightarrow 20 = \frac{490}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{490}{20} \Rightarrow \boxed{n = 24.5^2 = 600.25}$$

Para que el error cometido en la estimación sea menor de 20 horas la muestra debe ser de un mínimo de 601 bombillas.

BY NC SA
Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM

BY NC SA
Textos Marea Verde

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas.
CALIFICACIÓN: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos.
DURACIÓN: 90 minutos.

Problema 1:

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.
El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

1.a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

1.b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

Pregunta 2.1:

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.
Pregunta 2.1
Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & si\ x\le 0\\ \dfrac{x+a}{x+1} & si\ x>o\end{cases},\ a\in\mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real *a* para que la función sea continua en $x=0$.
2.1.b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de *f(x)*.

Pregunta 2.2:

Pregunta 2.2
Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión: $f(x)=e^x\left(-x^2+3\right)$
2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.
2.2.b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}dx$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 3.1:

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Para poder participar en el concurso "Mejor Jabón Artesano del año" es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90% de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5 %.

3.1.b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

Pregunta 3.2:

Pregunta 3.2

El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.

3.2.b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

Pregunta 4.1:

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

En un concesionario el 50% de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35% híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80% de los eléctricos enchufables, el 60% de los híbridos y el 45% de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar

4.1.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

4.1.b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

Pregunta 4.2:

Pregunta 4.2

De tres sucesos A, B y C se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A)=0.25$, $P(B)=0.2$ y $P(B\cap C)=0.05$.

4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.

4.2.b) (1 punto) Calcule $P\left(\overline{B}\cup\overline{C}\right)$.

4.2.c) (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C?

BY NC SA
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Pregunta 1:

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

El dueño de una frutería quiere alquilar una cámara frigorífica para la campaña de sandías del verano. Entre las diferentes cámaras que puede alquilar cercanas a su frutería, la que más le convence es una que tiene capacidad para guardar 2700 kilos de sandía que es, según sus datos de años anteriores, la cantidad de kilos que vende cualquier semana de la campaña. Las sandías que vende son de tres variedades: sandía verde rayada, sandía negra sin pepitas y sandía negra con pepitas. La sandía rayada es la menos apreciada por su clientela, por ello decide ponerle el precio más bajo y la venderá a 1,25 euros el kilo. Las sandías negras son las más demandadas entre su clientela, pero entre estas dos variedades es más fácil vender la variedad sin pepitas. Por esta razón, determina que el precio de la sandía negra sin pepitas sea de 2,75 euros el kilo y el precio con pepitas de 2,25 euros el kilo.
El dueño de la frutería quiere que, en cualquier circunstancia, el número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas.

1.a) (1,25 puntos) El frutero considera que para poder pagar el alquiler y obtener beneficio, debe recaudar de la venta 5400 euros cualquier semana de la campaña. Si se venden todas las sandías almacenadas para la semana, ¿cuántos kilos debería vender de cada variedad para recaudar exactamente ese importe?

1.b) (1,25 puntos) Con la idea de simplificar el etiquetado, el frutero necesita saber si es posible poner el mismo precio a todas las variedades de sandías y seguir recaudando 5400 euros a la semana vendiendo los 2700 kilos. Si fuera posible, ¿cuál sería el precio de venta del kilo de sandía?, ¿cuál sería la cantidad de kilos de cada variedad que debería vender?. Justifique si dichas cantidades serían únicas.

Solución:

1.a) Llamamos "x" al número de kilos de sandía verde rayada, "y" a los kilos de sandía negra sin pepitas y "z" a los kilos de sandía negra con pepitas.
"Vende 2700 kilos a la semana" → $x+y+z=2700$
"El número de kilos de sandía negra con pepitas vendidos sea un tercio del total de kilos de sandías sin pepitas y sandías rayadas" → $z=\frac{x+y}{3}$.
"Vende el kilo de sandía rayada a 1,25 euros el kilo, la negra sin pepitas a 2.75 €/kg y la sandía negra con pepitas a 2.25 €/kg. Debe recaudar de la venta 5400 euros" → $1.25x+2.75y+2.25z=5400$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2700 \\ z=\frac{x+y}{3} \\ 1.25x+2.75y+2.25z=5400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2700-y-z \\ 3z=x+y \\ 1.25x+2.75y+2.25z=5400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3z=2700-y-z+y \\ 1.25(2700-y-z)+2.75y+2.25z=5400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4z=2700 \rightarrow \boxed{z=\frac{2700}{4}=675} \\ 3375-1.25y-1.25z+2.75y+2.25z=5400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=675 \\ 1.5y+z=2025 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$\Rightarrow 1.5y+675=2025\Rightarrow 1.5y=1350\Rightarrow \boxed{y=\frac{1350}{1.5}=900}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=2700-900-675=1125}$$

Para recaudar el importe de 5400 euros debe vender 1125 kilos de sandía rayada, 900 de sandía negra sin pepitas y 675 de sandía negra con pepitas.

1.b) Si de las condiciones del apartado anterior solo cambiamos el precio del kilo de sandía haciendo que los distintos tipos de sandías tengan el mismo precio tendríamos que recaudar 5400 euros vendiendo 2700 kilos de sandía, por lo que el precio del kilo de sandía debe ser $\frac{5400}{2700}=2$ €/kg.

Cambiamos en el sistema anterior la última ecuación e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2700 \\ z=\dfrac{x+y}{3} \\ 2x+2y+2z=5400 \end{array}\right\}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 3^{\text{a}}=2\cdot \text{ Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \text{Podemos quitar ecuación } 3^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2700 \\ z=\dfrac{x+y}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2700 \\ 3z=x+y\rightarrow 3z-x=y\end{array}\right\}\Rightarrow x+3z-x+z=2700\Rightarrow 4z=2700\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{2700}{4}=675}\Rightarrow y=3\cdot 675-x=2025-x\Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=2025-\lambda \\ z=675\end{array}\right.}$$

La solución no es única: debe vender 675 kilos de sandía negra con pepitas, una cantidad de kilos entre 0 y 2025 de sandía rayada y los kilos restantes de sandía negra sin pepitas hasta llegar a completar los 2700 kilos totales.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 2.1:

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.
Pregunta 2.1
Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & si\ x\le 0\\ \dfrac{x+a}{x+1} & si\ x>o\end{cases},\ a\in\mathbb{R}$$

2.1.a) (1 punto) Determine el valor del parámetro real *a* para que la función sea continua en $x=0$.
2.1.b) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de *f(x)*.

Solución:

2.1.a) Para que la función sea continua en $x=0$ deben coincidir los valores de los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0^2+1}{0-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+a}{x+1}=\dfrac{0+a}{0+1}=a\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Con $a=-1$ la función es continua en $x=0$.

2.1.b) La función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & si\ x\le 0\\ \dfrac{x-1}{x+1} & si\ x>o\end{cases}$

Asíntotas verticales $x=a$
Los denominadores de la expresión de la función se anulan para $x=1$ y $x=-1$, pero para estos valores la función está bien definida $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+1}{-1-1}=-1$ y $f(1)=\dfrac{1-1}{1+1}=0$.
Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$ y no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$
Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.
La función no tiene asíntota horizontal y puede tener asíntota oblicua.

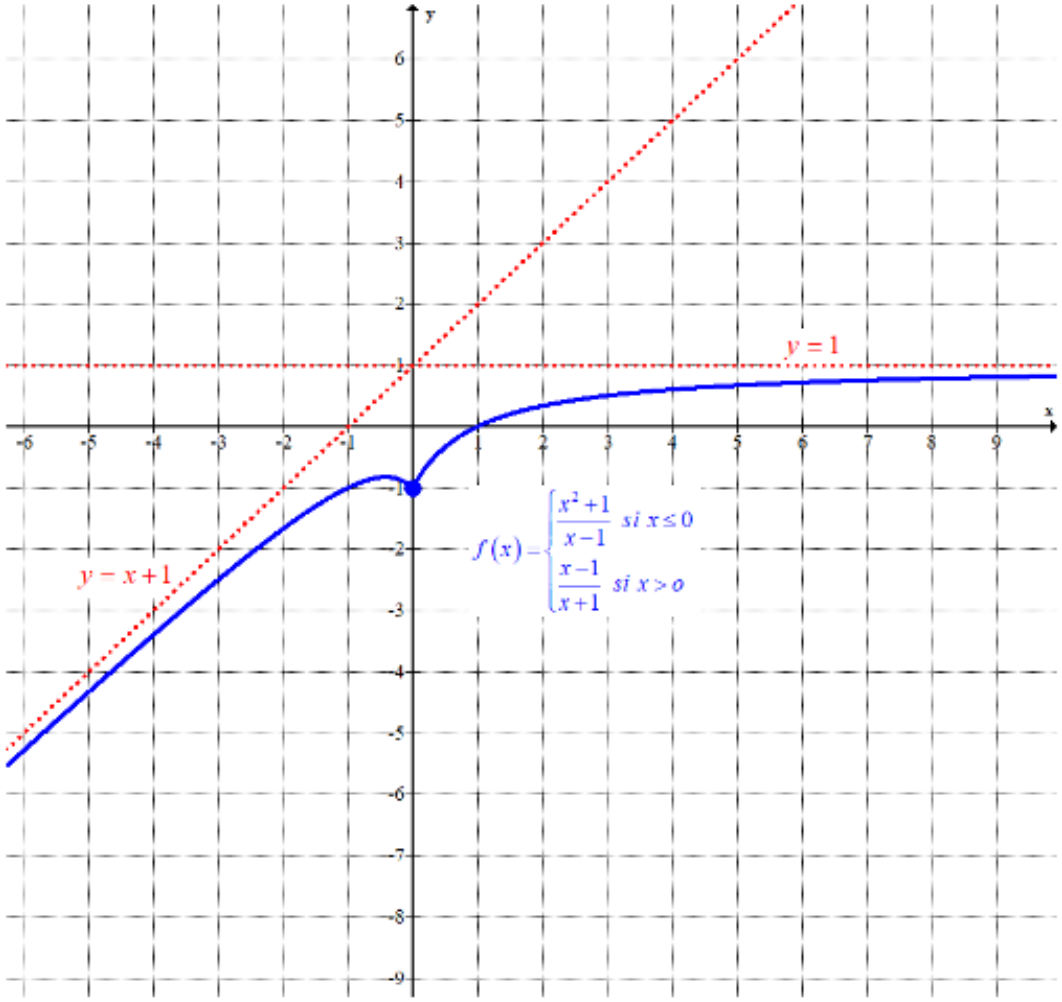
BY NC SA
Textos Marea Verde

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$$

La recta $y=x+1$ es asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.
La función tiene asíntota horizontal y no tiene asíntota oblicua.



BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 2.2:

Pregunta 2.2

Se considera la función real de variable real dada por la siguiente expresión: $f(x)=e^x\left(-x^2+3\right)$

2.2.a) (1,25 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y clasifique, si procede, sus extremos relativos.

2.2.b) (1,25 puntos) Halle el valor de la integral definida

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}dx$$

Solución:

2.2.a) Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos).

$$f(x)=e^x\left(-x^2+3\right)\Rightarrow f'(x)=e^x\left(-x^2+3\right)+e^x\left(-2x\right)=e^x\left(-x^2-2x+3\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow e^x\left(-x^2-2x+3\right)=0\Rightarrow\left\{e^x\neq 0\right\}\Rightarrow -x^2-2x+3=0\Rightarrow$$

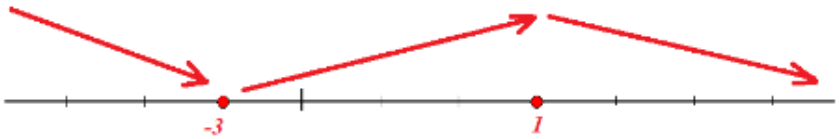
$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)3}}{2(-1)}=\frac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{2+4}{-2}=\boxed{-3=x}\\ \frac{2-4}{-2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos.

- En el intervalo $(-\infty,-3)$ consideramos $x=-4$ y la derivada vale
  $f'(-4)=e^{-4}\left(-(-4)^2-2(-4)+3\right)=-5e^{-4}<0$. La función decrece en $(-\infty,-3)$.
- En el intervalo $(-3,1)$ consideramos $x=0$ y la derivada vale
  $f'(0)=e^0\left(-0^2-2\cdot 0+3\right)=3>0$. La función crece en $(-3,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ consideramos $x=2$ y la derivada vale
  $f'(2)=e^2\left(-2^2-2\cdot 2+3\right)=-5e^2<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-3,1)$.

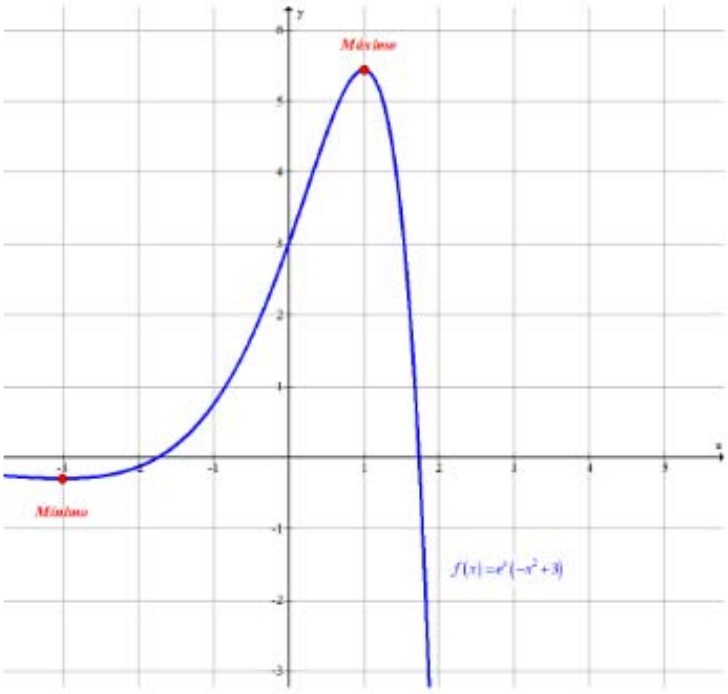
La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x=-3$ y un máximo relativo en $x=1$.

Como $f(-3)=e^{-3}\left(-(-3)^2+3\right)=\frac{-6}{e^3}$ y $f(1)=e^1\left(-1^2+3\right)=2e$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(-3,\frac{-6}{e^3}\right)$ y las del máximo relativo son $(1,2e)$.

BY NC SA
Textos Marea Verde



2.2.b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{f(x)}{xe^x}dx = \int \frac{e^x\left(-x^2+3\right)}{xe^x}dx = \int \frac{-x^2+3}{x}dx = \int \frac{-x^2}{x}dx + \int \frac{3}{x}dx =$$

$$= \int -x dx + 3\int \frac{1}{x}dx = \frac{-x^2}{2} + 3\ln x + C$$

Usamos lo obtenido para el cálculo de la integral definida.

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{xe^x}dx = \left[\frac{-x^2}{2} + 3\ln x\right]_1^2 = \left[\frac{-2^2}{2} + 3\ln 2\right] - \left[\frac{-1^2}{2} + 3\ln 1\right] = -2 + 3\ln 2 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{3}{2} + 3\ln 2}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 3.1:

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Para poder participar en el concurso "Mejor Jabón Artesano del año" es necesario pasar un control de calidad muy exigente.

Pregunta 3.1

Un maestro jabonero sabe que el 90% de sus pastillas de jabón hechas a mano pasarían sin problemas este control de calidad.

3.1.a) (1 punto) La empresa organizadora del concurso elegirá en el taller de cada participante una muestra aleatoria simple de pastillas de jabón para obtener una estimación de la proporción de ellas que superan el control de calidad. Suponiendo cierta la creencia del maestro jabonero sobre la calidad de sus pastillas, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de pastillas de jabón que la empresa organizadora debe tomar en el taller de este artesano para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación sea inferior al 5 %.

3.1.b) (1,5 puntos) Si finalmente la organización decide seleccionar una muestra aleatoria simple de 140 pastillas de jabón de este artesano, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad.

Solución:

3.1.a) El nivel de confianza del 95% significa que $1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.9 \cdot 0.1}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.9 \cdot 0.1}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2 = \frac{0.9 \cdot 0.1}{n} \Rightarrow \boxed{n = \frac{0.9 \cdot 0.1}{\left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2} \simeq 138.298}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser de 139 pastillas de jabón casero.

3.1.b) Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 140$, la probabilidad de que una pastilla pase el control de calidad es $p = 0.9$.
Si llamamos X al número de pastilla de jabón que superan el control de calidad de una muestra de 140 pastillas esta distribución es una binomial de parámetros n = 140 y p = 0.9.
X = B(140, 0.9)

BY NC SA
Textos Marea Verde

Como el tamaño de muestra es muy grande para el cálculo de probabilidades aproximamos esta binomial a una normal de media $\mu = np = 140 \cdot 0.9 = 126$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{140 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = 3.55$. Y = N(126, 3.55).

Esta aproximación es buena pues $np = 126 > 5$ y $nq = 140 \cdot 0.1 = 14 > 5$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(X \geq 120)$.

$$P(X \geq 120) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 119.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{119.5 - 126}{3.55}\right) = P(Z \geq -1.83) = P(Z \leq 1.83) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9664}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,516
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,555
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,594
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,633
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,670
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,705
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,738
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,770
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,799
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,826
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,850
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,872
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,892
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,909
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,925
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,938
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,949
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,959
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,967
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,973

La probabilidad de que de una muestra de 140 pastillas al menos 120 pastillas de jabón superen el control de calidad tiene un valor de 0.9664.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 3.2:

Pregunta 3.2
El peso de las pastillas de jabón de este artesano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ gramos y desviación típica 30 gramos.

3.2.a) (1,25 puntos) La empresa organizadora del concurso seleccionó 140 pastillas de jabón de este artesano y obtuvo que el peso total fue de 17500 gramos. Obtenga un intervalo de confianza del 99% para estimar el peso medio μ de las pastillas de jabón de este artesano.

3.2.b) (1,25 puntos) Si el verdadero valor de μ fuera igual a 100 gramos, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos?

Solución:

3.2.a) Sea X el peso en gramos de una pastilla de jabón. Esta variable aleatoria sigue una ley normal N(μ , 30).

Tenemos que el tamaño de la muestra es $n = 14$ y la media muestral es $\bar{x} = \frac{17500}{140} = 125$ gramos.

El nivel de confianza del 99% significa que $1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow$ $z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951
	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961		

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{30}{\sqrt{140}} = 6.5288$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(125 - 6.5288,\ 125 + 6.5288\right) = \left(118.4712,\ 131.5288\right)$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

3.2.b) Consideramos que la variable aleatoria es X = N(100 , 30). La variable aleatoria que nos indica el peso medio de 64 pastillas es una normal con la misma media pero con desviación típica $\sigma = \frac{30}{\sqrt{64}} = 3.75$. $\overline{X_{64}} = N(100, 3.75)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X_{64}} > 110)$.

$$P(\overline{X_{64}} > 110) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{110-100}{3.75}\right) = P(Z > 2.67) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.67) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.9962 = \boxed{0.0038}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962

La probabilidad de que el peso medio de 64 pastillas de jabón de una muestra aleatoria simple fuera superior a 110 gramos tiene un valor de 0.0038.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Pregunta 4.1:

EJERCICIO 4 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

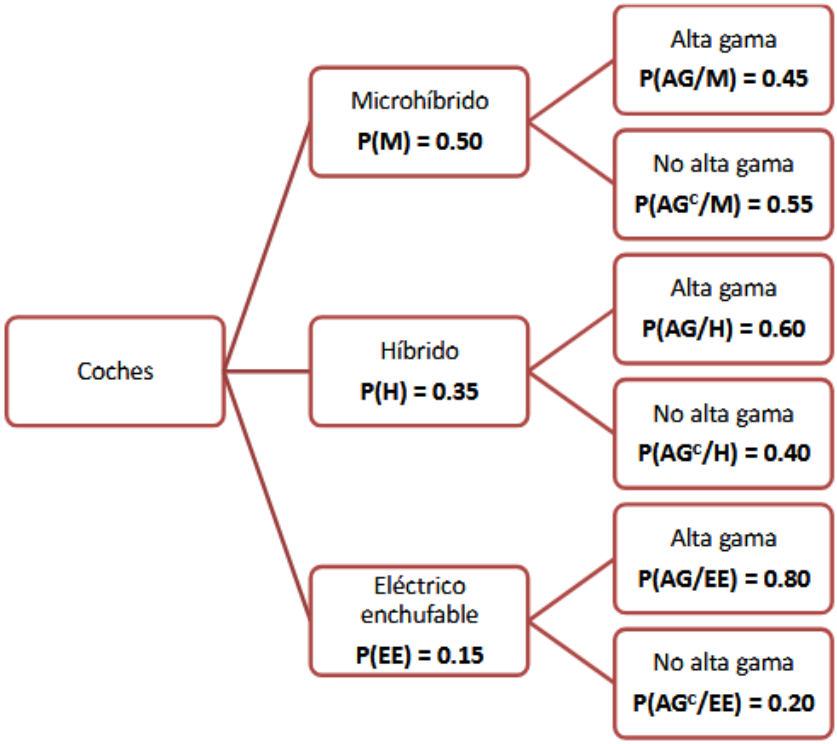
En un concesionario el 50% de sus ventas son de automóviles microhíbridos, el 35% híbridos y el resto eléctricos enchufables. El acabado más alto de gama se vende en el 80% de los eléctricos enchufables, el 60% de los híbridos y el 45% de los microhíbridos. Se selecciona una operación de venta al azar

4.1.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que el coche vendido en esa operación no tenga el acabado más alto de la gama.

4.1.b) (1,25 puntos) Si el coche correspondiente a la operación de venta seleccionada tiene el acabado más alto de la gama, determine la probabilidad de que sea eléctrico enchufable.

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



4.1.a) Nos piden calcular $P(AG^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(AG^c) = P(M)P(AG^c/M) + P(H)P(AG^c/H) + P(EE)P(AG^c/EE) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.55 + 0.35 \cdot 0.4 + 0.15 \cdot 0.2 = \boxed{0.445}$$

4.1.b) Nos piden calcular $P(EE/AG)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(EE/AG) = \frac{P(EE \cap AG)}{P(AG)} = \frac{P(EE)P(AG/EE)}{1 - P(AG^c)} = \frac{0.15 \cdot 0.8}{1 - 0.445} = \boxed{\frac{8}{37} \approx 0.2162}$$

Textos Marea Verde

Pregunta 4.2:

Pregunta 4.2

De tres sucesos A, B y C se sabe que A y C son sucesos disjuntos, A y B son independientes y se tienen las siguientes probabilidades: $P(A)=0.25$, $P(B)=0.2$ y $P(B\cap C)=0.05$.

4.2.a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B.

4.2.b) (1 punto) Calcule $P(\overline{B}\cup\overline{C})$.

4.2.c) (0,5 puntos) ¿Pueden ser independientes los sucesos A y C?

Solución:

Como A y C son sucesos disjuntos → $A\cap C=\varnothing \rightarrow P(A\cap C)=0$, A y B son independientes → $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.25\cdot 0.2=0.05$ y $P(A)=0.25$, $P(B)=0.2$, $P(B\cap C)=0.05$.

4.2.a) Nos piden calcular $P(A\cup B)$. Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.25+0.2-0.05=\boxed{0.4}$$

La probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos A o B tiene un valor de 0.4.

4.2.b) Aplicamos las leyes de Morgan.

$$P(\overline{B}\cup\overline{C})=P(\overline{B\cap C})=1-P(B\cap C)=1-0.05=\boxed{0.95}$$

4.2.c) Para que sean independientes se debe cumplir la igualdad $P(A\cap C)=P(A)P(C)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap C)=0\\ P(A)P(C)=0.25\cdot P(C)\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$$

Son diferentes pues la probabilidad del suceso C es no nula ya que $P(B\cap C)=0.05\neq 0$ y se cumple que $P(C)\geq P(B\cap C)=0.05$.

Los sucesos A y C no son independientes.

Textos Marea Verde

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social *Rettiwt* se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo".
Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber *@solo_reviews* ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso.
Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de @solo_reviews, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.
Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en *Rettiwt*:

> En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2% de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata.
> *#PearSupport #P25*

1.a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de *@solo_reviews* hubiese sido superior o igual a 11.

1.b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99% de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de *@solo_reviews*. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

Problema 2:

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ (a+1)x+az=5 \end{cases}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

2.1.b) (1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a=2$.

Textos Marea Verde

Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6,\ y \geq 0,\ -x+y \leq 8,\ x+4y \leq 12,\ x+y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

Problema 3:

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real

$$f(x) = x\left(x^2 + a\right),$$

donde $a > 0$ es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de a para que la primitiva de *f(x)*, *F(x)*, cumpla que $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$.

3.1.b) (0,5 puntos) Para $a = \frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por *f(x)*, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de a que hacen que la pendiente de la recta tangente a *f(x)* en el punto $x = 1$ sea 1.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & si\ x < 0, \\ \dfrac{4x^3 + x^2}{x^2 - 9} & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de *f(x)*.

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de *f(x)* en $x = 0$.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de *f(x)*.

Problema 4:

Pregunta 4.1

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A) = 0.4,\ P(\overline{B}) = 0.7,$$

$$P(C) = 0.5,\ P(A \cap B / C) = 0.2$$

donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga $P(C / A \cap B)$.

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5%.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90% de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10% de las veces.

4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

4.2.b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los dos apartados. Este ejercicio no tiene opcionalidad.

La empresa tecnológica Pear acaba de lanzar la nueva versión para 2025 de su smartphone insignia, el P25. En la red social *Rettiwt* se ha generado una alta expectación y los primeros compradores del P25 han comenzado a publicar fotos con sus dispositivos y sus opiniones. La mayoría de estas opiniones son positivas, pero hay una minoría de usuarios que reporta un calentamiento excesivo del P25 que genera en pantalla el mensaje de aviso "El P25 necesita enfriarse para poder usarlo".
Con el objetivo de recabar más información para su próximo vídeo, el youtuber *@solo_reviews* ha abierto un hilo para solicitar a los compradores verificados del P25 que reporten si han experimentado o no sobrecalentamiento repentino en sus smartphones, entendiendo este como el que origina el aviso en condiciones normales de uso.
Un total de 288 compradores verificados responden en el hilo, de los cuales 20 reportan haber visto el mensaje de enfriamiento necesario en condiciones de uso normales. Dado el perfil de los seguidores de @solo_reviews, se asume que esta es una muestra aleatoria simple.
Ante el ruido generado en las redes sociales, la empresa Pear lanza el siguiente comunicado en *Rettiwt*:

> En Pear aclaramos: no hay problemas generalizados en nuestro nuevo P25. El sobrecalentamiento afecta al 2% de dispositivos al estar exclusivamente limitado a un lote defectuoso de un proveedor. Estamos contactando a los clientes afectados para ofrecer una solución inmediata.
> *#PearSupport #P25*

1.a) (1,25 puntos) Asumiendo que el comunicado de Pear es cierto, calcule, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de *@solo_reviews* hubiese sido superior o igual a 11.

1.b) (1,25 puntos) Obtenga un intervalo del 99% de confianza para la proporción de smartphones defectuosos a partir del hilo de *@solo_reviews*. ¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?

Solución 1:

1.a) Consideramos la variable aleatoria X que cuenta el número de teléfonos defectuosos de un grupo de 288.
Esta variable es una binomial de parámetros n = 288 y p = probabilidad de que un móvil esté defectuoso = 0.02. X = B(288, 0.02).
Como el número de repeticiones es muy alto aproximamos esta binomial a una normal de media $n \cdot p = 288 \cdot 0.02 = 5.76$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{288 \cdot 0.02 \cdot 0.98} \simeq 2.376$.
Y = N(5.76, 2.376).
Esta aproximación es buena pues $np = 5.76 > 5$ y $nq = 288 \cdot 0.98 = 282.24 > 5$

Nos piden calcular $P(X \geq 11)$.

$$P(X \geq 11) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 10.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{10.5 - 5.76}{2.376}\right) = P(Z \geq 1.99) = 1 - P(Z \leq 1.99) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.9767 = \boxed{0.0233}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

La probabilidad de que el número de smartphones defectuosos reportados en el hilo de *@solo_reviews* hubiese sido superior o igual a 11 es de 0.0233.

1.b) El tamaño muestral es n = 288.

La proporción muestral de teléfonos defectuosos es $\frac{20}{288} \simeq 0.069$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = \mathbf{2{,}575}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951

Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{288}} = 0.021$$

El intervalo de confianza será:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.068 - 0.021,\ 0.068 + 0.021\right) = \left(0.047,\ 0.089\right)$$

¿Es cuestionable la veracidad del comunicado de Pear?
En el comunicado se dice que el porcentaje de teléfonos defectuosos es del 2% que significa una proporción de 0.02 que no pertenece al intervalo de confianza calculado.
La afirmación del comunicado es cuestionable con una confianza del 99%.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 2:

EJERCICIO 2 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y+z=3 \\ (a+1)x+az=5 \end{cases}$$

2.1.a) (1.25 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

2.1.b) (1.25 puntos) Resuelva el sistema para $a=2$.

Pregunta 2.2

Sean x e y dos números reales tales que

$$x \geq -6,\ y \geq 0,\ -x+y \leq 8,\ x+4y \leq 12,\ x+y \leq 6$$

2.2.a) (2 puntos) Represente gráficamente la región S determinada por las restricciones y calcule las coordenadas de sus vértices.

2.2.b) (0,5 puntos) Se desea maximizar el doble de y menos el triple de x en S. Indique el valor máximo y el punto de la región en el cual se alcanza.

Solución 2.1:

2.1.a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ a+1 & 0 & a & 5 \end{array}\right)$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a+1 & 0 & a \end{vmatrix}=-a+a+1+0+a+1-2a-0=2-a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow a=2$$

Analizamos dos casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} Fila\,2ª-2\cdot Fila\,1ª & & & \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -4 \\ \hline 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right. \rightarrow \text{Nueva Fila } 2ª$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3ª-3\cdot Fila\,1ª & & & \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ -3 & -3 & -3 & -6 \\ \hline 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right. \rightarrow \text{Nueva Fila } 3ª \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} Fila\,3ª-Fila\,2ª & & & \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \text{Nueva Fila } 3ª \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{1 & 1 & 1}^{A} & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ \underbrace{0 & 0 & 0}_{A} & 0 \end{array}\right)$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución) y para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

2.1.b) Lo resolvemos para $a = 2$. Sabemos que es compatible indeterminado (CASO 2). Lo resolvemos a partir del sistema triangular obtenido.

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{A/B} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ -3y-z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 1-3y=z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+1-3y=2 \Rightarrow x-2y=1 \Rightarrow x=1+2y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Para $a = 2$ las soluciones del sistema son $\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Solución 2.2:

2.2.a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región S.

$x=-6$

$x=-6$	y
-6	0
-6	2
-6	3

$y=0$

x	$y=0$
-6	0
0	0
6	0

$-x+y=8$

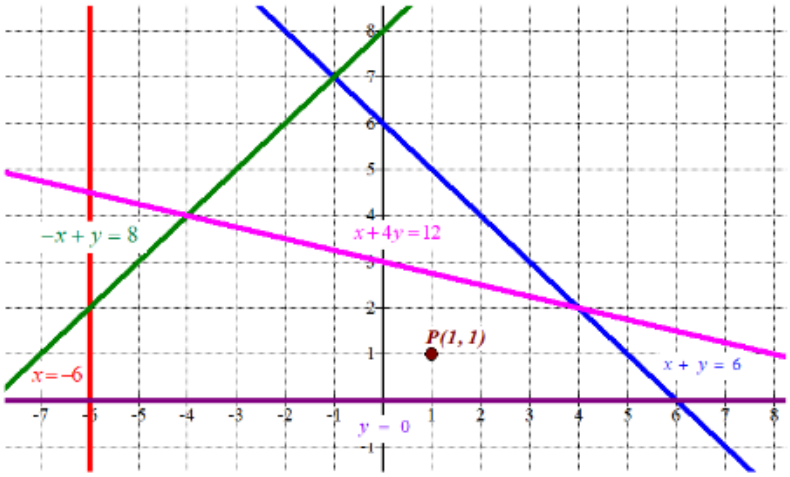
x	$y=8+x$
-8	0
-6	2
-4	4

$x+4y=12$

x	$y=\frac{12-x}{4}$
-4	4
0	3
4	2

$x+y=6$

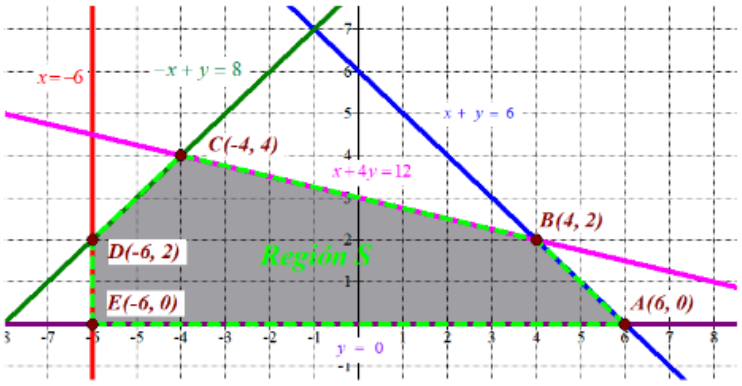
x	$y=6-x$
0	6
4	2
6	0



Como las restricciones son $x\geq -6,\ y\geq 0,\ -x+y\leq 8,\ x+4y\leq 12,\ x+y\leq 6$ la región S está por debajo de las rectas verde, azul y rosa, por encima de la recta horizontal que coincide con el eje de abscisas y a la derecha de la recta vertical roja. Lo comprobamos viendo si el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$1\geq -6,\ 1\geq 0,\ -1+1\leq 8,\ 1+4\leq 12,\ 1+1\leq 6$$ ¡Se cumplen todas!

Coloreamos de gris la región S en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de la región S.



Los vértices de la región S son A(6, 0), B(4, 2), C(−4, 4), D(−6, 2) y E(−6, 0).

2.2.b) Valoramos la función $f(x,y)=2y-3x$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(6, 0) → $f(6,0)=2\cdot 0-3\cdot 6=-18$
B(4, 2) → $f(4,2)=2\cdot 2-3\cdot 4=-10$
C(−4, 4) → $f(-4,4)=2\cdot 4-3(-4)=20$
D(−6, 2) → $f(-6,2)=2\cdot 2-3(-6)=22$ Máximo
E(−6, 0) → $f(-6,0)=2\cdot 0-3(-6)=18$

El valor máximo que alcanza la función en la región S es 22 y se consigue en el vértice D(−6, 2).

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3:

EJERCICIO 3 (2,5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2.

Pregunta 3.1

Considere la función real de variable real

$$f(x)=x\left(x^2+a\right),$$

donde $a>0$ es un parámetro real.

3.1.a) (1 punto) Calcule el valor de *a* para que la primitiva de *f(x)*, *F(x)*, cumpla que $F(0)=0$ y $F(1)=1$.

3.1.b) (0,5 puntos) Para $a=\frac{3}{2}$, obtenga el área del recinto delimitado por *f(x)*, el eje horizontal y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$.

3.1.c) (1 punto) Halle los valores de *a* que hacen que la pendiente de la recta tangente a *f(x)* en el punto $x=1$ sea 1.

Pregunta 3.2

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2x-1} & si\ x<0,\\[2mm] \dfrac{4x^3+x^2}{x^2-9} & si\ x\geq 0.\end{cases}$$

3.2.a) (0,5 puntos) Determine el dominio de *f(x)*.

3.2.b) (0,5 puntos) Estudie la continuidad de *f(x)* en $x=0$.

3.2.c) (1,5 puntos) Calcule las asíntotas de *f(x)*.

Solución 3.1:

3.1.a) Hallamos la expresión de la primitiva *F(x)*.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int x\left(x^2+a\right)dx=\int x^3+axdx=\frac{x^4}{4}+a\frac{x^2}{2}+K$$

Determinamos el valor de *a* y K para que se cumpla que $F(0)=0$ y $F(1)=1$.

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=\frac{x^4}{4}+a\frac{x^2}{2}+K\\ F(0)=0\\ F(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{0^4}{4}+a\frac{0^2}{2}+K=0\\ \frac{1^4}{4}+a\frac{1^2}{2}+K=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\boxed{K=0}\\ \frac{1}{4}+\frac{a}{2}+K=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}+\frac{a}{2}+0=1\Rightarrow 1+2a=4\Rightarrow 2a=3\Rightarrow\boxed{a=\frac{3}{2}}$$

El valor de *a* buscado es $a=\frac{3}{2}$.

3.1.b) Para $a=\frac{3}{2}$ la función queda $f(x)=x\left(x^2+\frac{3}{2}\right)$. Determinamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de abscisas.

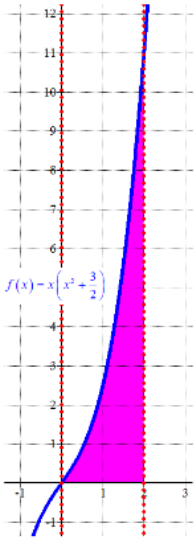
$$\left.\begin{array}{l}f(x)=x\left(x^2+\frac{3}{2}\right)\\ Eje\,OX\rightarrow y=0\end{array}\right\}\Rightarrow x\left(x^2+\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow\left\{x^2+\frac{3}{2}\neq 0\right\}\Rightarrow x=0$$

El único punto de corte está en $x=0$. Entre 0 y 2 la función es positiva.
El área del recinto delimitado por *f(x)*, el eje horizontal y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$ se obtiene con la integral definida entre 0 y 2 de la función.

$$Área=\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 x\left(x^2+\frac{3}{2}\right)dx=\int_0^2 x^3+\frac{3}{2}xdx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}+\frac{3\cdot 2^2}{4}\right]-\left[\frac{0^4}{4}+\frac{3\cdot 0^2}{4}\right]=4+3=\boxed{7u^2}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde



3.1.c) Si la pendiente de la recta tangente a *f(x)* en el punto $x=1$ vale 1 entonces la derivada de la función en el punto $x=1$ vale 1 → $f'(1)=1$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3+ax \Rightarrow f'(x)=3x^2+a \\ f'(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=3\cdot 1^2+a \Rightarrow \boxed{a=1-3=-2}$$

El valor buscado es $a=-2$.

Textos Marea Verde

Solución 3.2:

3.2.a) En el intervalo $(-\infty,0)$ la función tiene la expresión $f(x)=\frac{x}{2x-1}$. El denominador se anula para $x=0.5$ que no pertenece al intervalo de definición $(-\infty,0)$. La función no plantea problemas de definición en este intervalo.

En el intervalo $(0,+\infty)$ la función tiene la expresión $f(x)=\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}$. El denominador se anula para $x=-3$ que no pertenece al intervalo de definición $(0,+\infty)$, también se anula para $x=3$ que si pertenece al intervalo $(0,+\infty)$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{3\}$.

3.2.b) La función es continua en $(-\infty,0)$. También es continua en $(0,3)\cup(3,+\infty)$. Estudiamos su continuidad en el cambio de definición $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\frac{4\cdot0^3+0^2}{0^2-9}=0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}=0 \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x}{2x-1}=\frac{0}{2\cdot0-1}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=0$$

La función es continua en $x=0$. La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R}-\{3\}$.

La función es continua en $x=0$. La función es continua en todo su dominio $\mathbb{R}-\{3\}$.

3.2.c) Asíntotas verticales $x=a$

¿$x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}=\frac{4\cdot3^3+3^2}{3^2-9}=\frac{117}{0}=\infty$$

$x=3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

La recta $y=\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}4x=+\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

Cuando x tiende a $+\infty$ la función no tiene asíntota horizontal y puede tener asíntota oblicua.

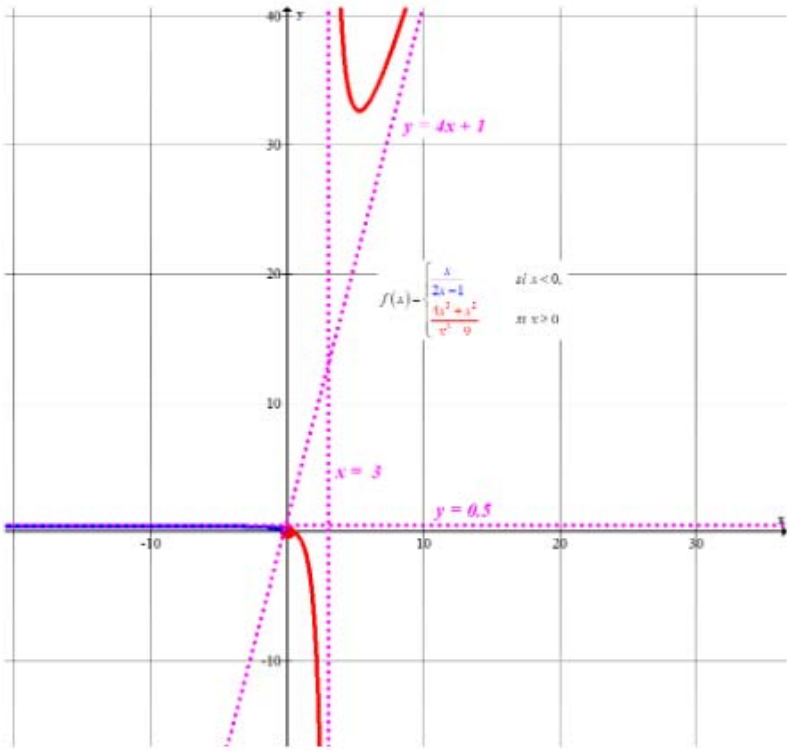
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+x^2}{x^3-9x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}4=4$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3+x^2}{x^2-9}-4x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-4x^3+36x}{x^2-9}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+36x}{x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

La recta $y=4x+1$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.

BY NC SA
Textos Marea Verde



Resumiendo: $x=3$ es asíntota vertical. La recta $y=\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$. La recta $y=4x+1$ es asíntota oblicua de la función cuando x tiende a $+\infty$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 4:

Pregunta 4.1

Sean A, B y C tres sucesos. Se sabe que A y B son independientes. Además, se conoce la siguiente información:

$$P(A)=0.4,\ P(\overline{B})=0.7,$$
$$P(C)=0.5,\ P(A\cap B/C)=0.2$$

donde $\overline{B}$ denota el suceso complementario de B.

4.1.a) (0,75 puntos) Calcule la probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B.

4.1.b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente.

4.1.c) (1 punto) Obtenga $P(C/A\cap B)$.

Pregunta 4.2

En una clínica veterinaria se utiliza una prueba médica para detectar la insuficiencia renal en gatos adultos. Se sabe lo siguiente:

- El porcentaje de gatos adultos con insuficiencia renal es del 5%.
- Si el gato adulto tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 90% de las veces.
- Si el gato adulto no tiene insuficiencia renal, la prueba da positivo el 10% de las veces.

4.2.a) (1,25 puntos) Calcule la probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba.

4.2.b) (1,25 puntos) La prueba en un gato adulto ha resultado positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga insuficiencia renal?

Solución 4.1:

Si A y B son independientes entonces:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=P(A)\left(1-P(\overline{B})\right)=0.4(1-0.7)=0.12$$

Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A\cap B/C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}\Rightarrow 0.2=\frac{P(A\cap B\cap C)}{0.5}\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0.5\cdot 0.2=0.1$$

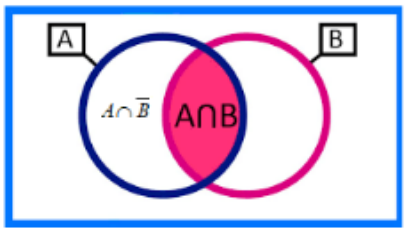
4.1.a) Debemos calcular $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0.12=\boxed{0.88}$$

La probabilidad de que no ocurra A o no ocurra B vale 0.88.

4.1.b) Nos piden calcular $P(A\cap\overline{B})$.

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=0.4-0.12=\boxed{0.28}$$



La probabilidad de que A y $\overline{B}$ ocurran simultáneamente vale 0.28.

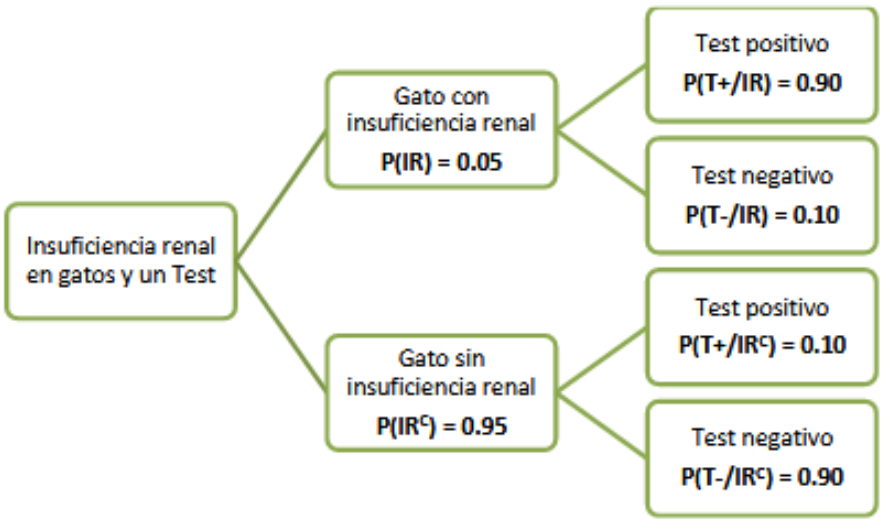
4.1.c) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/A\cap B)=\frac{P(C\cap A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{0.1}{0.12}=\boxed{\frac{5}{6}\simeq 0.8333}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Solución 4.2:

Llamamos IR al suceso "el gato tiene insuficiencia renal", T+ a "la prueba da positivo" y T− a "la prueba da negativo".
Sabemos que $P(IR)=0.05$, $P(T+/IR)=0.90$ y $P(T+/IR^c)=0.10$.
Realizamos un diagrama de árbol.



4.2.a) Nos piden calcular $P(T-)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T-)=P(IR)P(T-/IR)+P(IR^c)P(T-/IR^c)=0.05\cdot 0.1+0.95\cdot 0.9=\boxed{0.86}$$

La probabilidad de que un gato adulto seleccionado al azar dé un resultado negativo en la prueba tiene un valor de 0.86.

4.2.b) Nos piden calcular $P(IR/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(IR/T+)=\frac{P(IR\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(IR)P(T+/IR)}{1-P(T-)}=\frac{0.05\cdot 0.9}{1-0.86}=\boxed{\frac{9}{28}=0.3214}$$

La probabilidad de que un gato que ha dado positivo en el test tenga insuficiencia renal tiene un valor de $\frac{9}{28}=0.3214$.

P = 9/28 = 0.3214

Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

CC BY NC SA

Región de Murcia	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada APARTADO se debe hacer sólo la CUESTIÓN 1 o la CUESTIÓN 2. La elección de CUESTIÓN 1 o CUESTIÓN 2 puede cambiar de un apartado a otro. Si se responden las 2 CUESTIONES de un apartado, solo se corregirá la primera CUESTIÓN contestada. Cada cuestión tiene una puntuación entre 2 y 3 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[1,5 puntos] Dadas las matrices A, B y C:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) Calcula C^2. **[0,25 puntos]**

b) Halla $A+B+C^2$. **[0,25 puntos]**

c) Encuentra $(A-B)^{-1}$. **[0,25 puntos]**

d) Resuelve la ecuación matricial $AX-BX=A+B+C^2$. **[0,75 puntos]**

[1 punto] Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases}3x+2y-z=3\\ x-y+2z=4\\ 2x+3y-z=3\end{cases}$$

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**

c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? **[0,5 puntos]**

e) Calcula el beneficio máximo diario posible. **[0,25 puntos]**

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}$$

a) Determina su dominio. **[0,5 puntos]**
b) Estudia sus asíntotas. **[0,75 puntos]**
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **[1 punto]**
d) Calcula los máximos y mínimos locales. **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:
[3 puntos] El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:

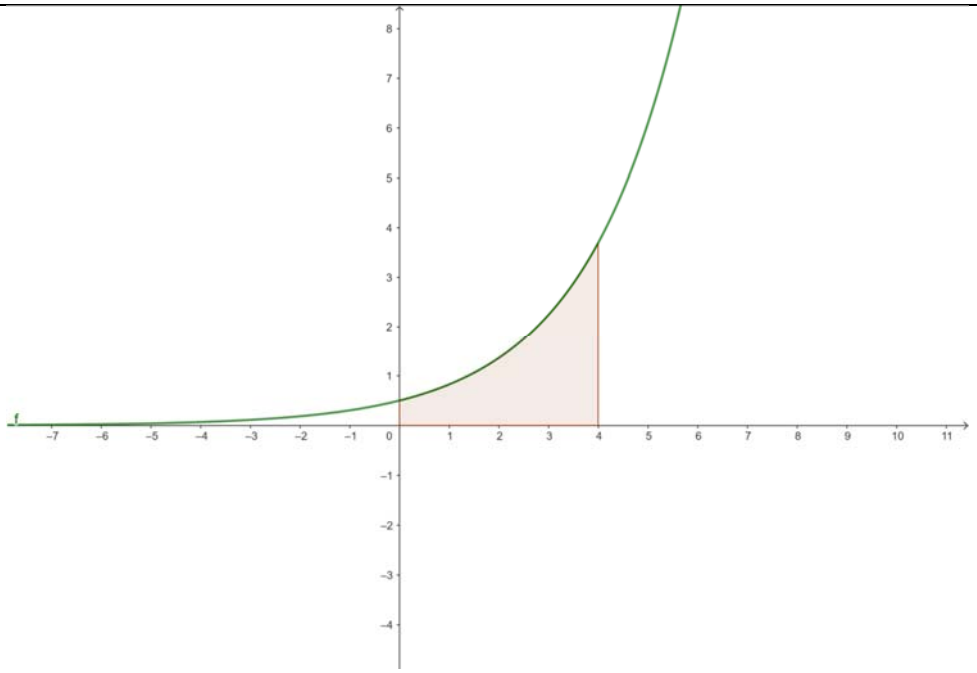
$$N(t)=\frac{20t}{(t+1)^2}$$

donde $0\le t\le 5$ y N es el número de miles de asistentes t horas después del comienzo. Se pide:
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función *N(t)*. **[1 punto]**
b) Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden. **[1,25 puntos]**
c) Evalúa e interpreta la derivada de la función *N(t)* en $t=2$. **[0,25 puntos]**
d) Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto. **[0,5 puntos]**

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[2 puntos] Realiza:
a) Si $\int_0^2 f(x)dx=4$, ¿a qué es igual $\int_0^2\left[f(x)+3\right]dx$? **[0,25 puntos]**
b) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x+3$. Calcula su área. **[1,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:
[2 puntos] Realiza:
a) Calcula los valores de los límites de integración a y b de manera que se cumpla $\int_{-2}^{1} f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$. **[0,25 puntos]**
b) Dada la función $f(x)=\frac{1}{2}e^{x/2}$:
b.1) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada. **[0,5 puntos]**
b.2) Calcula el área. **[1,25 puntos]**



APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,25 puntos]**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer? **[0,75 puntos]**
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**
d) Si esa persona seleccionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 12 kg.

a) Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Ligan Nacional juvenil de la Región de Murcia. **[1 punto]**
b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%. **[0,75 puntos]**
c) Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg? **[0,75 puntos]**

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[1,5 puntos] Dadas las matrices A, B y C:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{y}\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

a) Calcula C^2. **[0,25 puntos]**

b) Halla $A+B+C^2$. **[0,25 puntos]**

c) Encuentra $(A-B)^{-1}$. **[0,25 puntos]**

d) Resuelve la ecuación matricial $AX-BX=A+B+C^2$. **[0,75 puntos]**

[1 punto] Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases}3x+2y-z=3\\ x-y+2z=4\\ 2x+3y-z=3\end{cases}$$

Solución:

a) Calculamos C^2.

$$C^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 2-2\\ 0+0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos $A+B+C^2$.

$$A+B+C^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

c) Hallamos la expresión de la matriz A – B y comprobamos que su determinante es no nulo.

$$A-B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$|A-B|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$$

Como el determinante es no nulo existe la inversa de $A-B$. La calculamos.

$$(A-B)^{-1}=\frac{Adj(A-B)^T}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

d) Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$AX - BX = A + B + C^2 \Rightarrow (A - B)X = A + B + C^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = (A - B)^{-1}(A + B + C^2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 & 1+2 \\ -8+0 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

Discutimos el sistema utilizando el método de Gauss y obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 3 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 2^a \leftrightarrow \text{Ecuación } 1^a\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} 3x & +2y & -z & = 3 \\ -3x & +3y & -6z & = -12 \\ \hline & 5y & -7z & = -9 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} 2x & +3y & -z & = 3 \\ -2x & +2y & -4z & = -8 \\ \hline & 5y & -5z & = -5 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 5y - 7z = -9 \\ 5y - 5z = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{rrrr} 5y & -5z & = & -5 \\ -5y & +7z & = & 9 \\ \hline & 2z & = & 4 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 5y - 7z = -9 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

Este sistema triangular obtenido es compatible determinado. Determinamos la solución del sistema.

$$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 5y-7z=-9 \\ 2z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 5y-7z=-9 \\ \boxed{z=\frac{4}{2}=2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2\cdot 2=4 \\ 5y-7\cdot 2=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 5y=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ \boxed{y=\frac{5}{5}=1} \end{cases} \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La solución del sistema es $x=1, y=1, z=2$ **.**

Cuestión 2

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] Una empresa del sector informático produce dos tipos de ordenadores portátiles: notebooks y gaming. La empresa obtiene 400 euros de beneficio por cada notebook y 500 euros por cada gaming. El proceso de fabricación es complejo y tiene tres fases: (1) selección y fabricación de componentes; (2) ensamblaje y (3) control de calidad. Los notebooks necesitan 2, 1 y 1 horas en cada fase, respectivamente, mientras que los gaming necesitan 1, 4 y 2 horas. En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. Se pide:

a) Si la empresa quiere maximizar el beneficio diario, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**

b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**

c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**

d) ¿Cuántos ordenadores portátiles de cada tipo hay que producir para maximizar los beneficios diarios? **[0,5 puntos]**

e) Calcula el beneficio máximo diario posible. **[0,25 puntos]**

Solución:

a) Llamamos x = número de notebooks que se producen, y = número de gaming.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas fase 1	Horas fase 2	Horas fase 3	Beneficio
Notebooks (x)	2x	x	x	400x
Gaming (y)	y	4y	2y	500y
TOTAL	$2x+y$	$x+4y$	$x+2y$	$400x+500y$

La función objetivo es el beneficio diario que deseamos maximizar: $B(x,y)=400x+500y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

En cada fase hay un límite de 14, 16 y 10 horas diarias. → $2x+y\le 14;\ x+4y\le 16;\ x+2y\le 10$

Las cantidades deben ser enteras y positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 14 \\ x+4y\le 16 \\ x+2y\le 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=14$

x	$y=14-2x$
0	14
6	2
7	0

$x+4y=16$

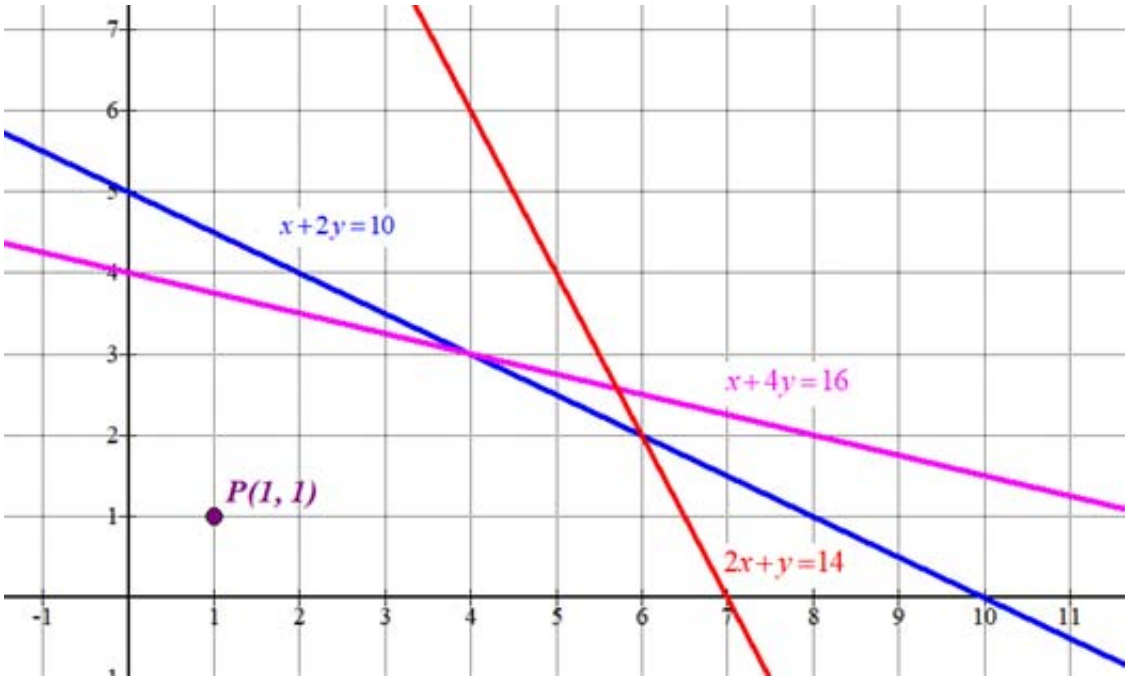
x	$y=\frac{16-x}{4}$
0	4
4	3
16	0

$x+2y=10$

x	$y=\frac{10-x}{2}$
0	5
4	3
6	2
10	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

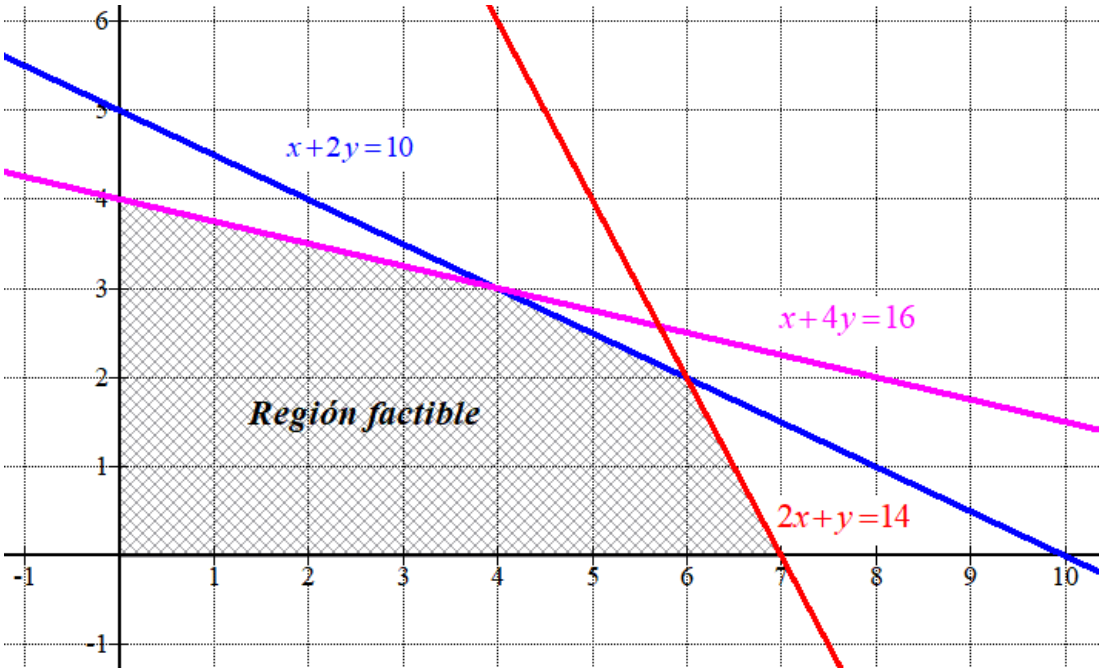


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l}2x+y\leq 14\\ x+4y\leq 16\\ x+2y\leq 10\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está por debajo de las rectas oblicuas (rosa, azul y roja).

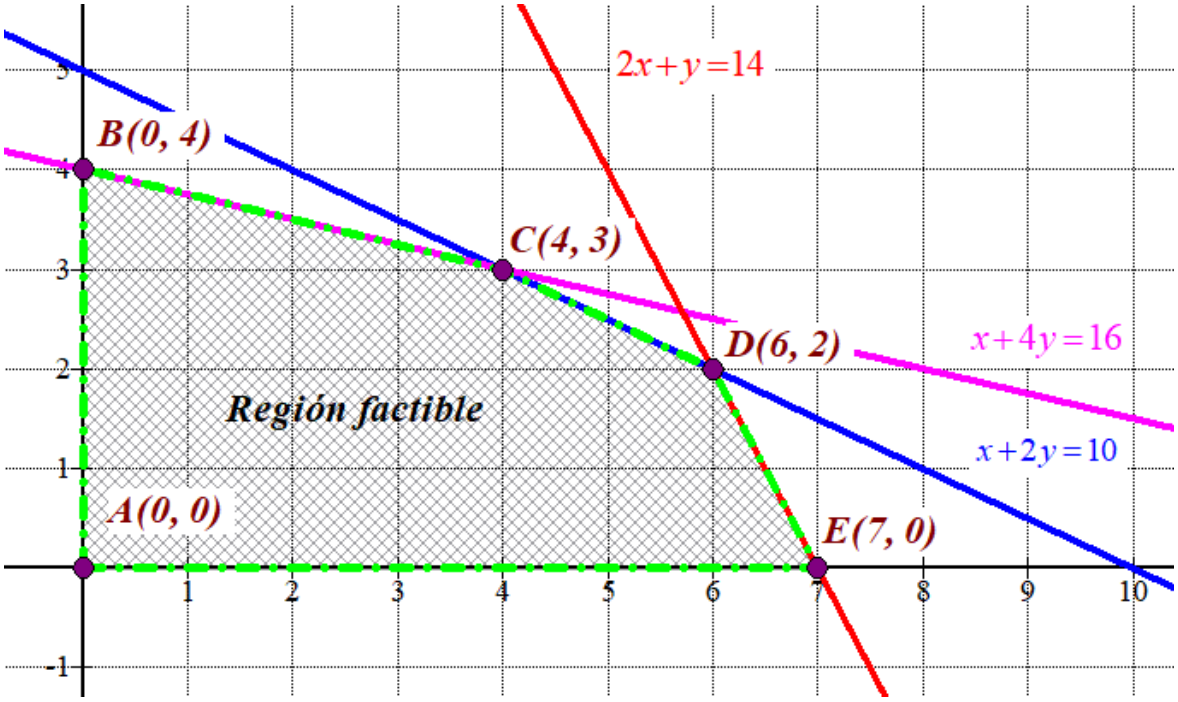
Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l}2+1\leq 14\\ 1+4\leq 16\\ 1+2\leq 10\\ 1\geq 0;\ 1\geq 0\end{array}\right\}$ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: A(0,0), B(0,4), C(4, 3), D(6, 2) y E(7, 0)



d) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=400x+500y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 4) → $B(0,4)=400\cdot 0+500\cdot 4=2000\,€$

C(4, 3) → $B(4,3)=400\cdot 4+500\cdot 3=3100\,€$

$$D(6,\ 2) \rightarrow B(6,2) = 400\cdot 6 + 500\cdot 2 = 3400\,€ \ \textit{Máximo}$$

$$E(7,\ 0) \rightarrow B(7,0) = 400\cdot 7 + 500\cdot 0 = 2800\,€$$

El beneficio máximo se obtiene en el punto D(6, 2). Significa que se deben fabricar diariamente 6 notebooks y 2 gaming para obtener los beneficios máximos.

e) El beneficio máximo diario que se puede conseguir es de 3 400 euros.

BY NC SA

Apartado 2: Elegir una cuestión. Cuestión 1

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):
CUESTIÓN 1:
[3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}$$

a) Determina su dominio. **[0,5 puntos]**
b) Estudia sus asíntotas. **[0,75 puntos]**
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento. [1 punto]
d) Calcula los máximos y mínimos locales. [0,75 puntos]

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio = $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) **Asíntotas verticales.** $x=a$
¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3}{1-x}=\frac{1^2+3}{1-1}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to\infty}-x=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+3+x-\cancel{x^2}}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+x}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

La función tiene a la recta $y=-x-1$ como asíntota oblicua.

c) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(1-x)-(-1)(x^2+3)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2+3}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2}=0\Rightarrow -x^2+2x+3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)3}}{2(-1)}=$$

Textos Marea Verde

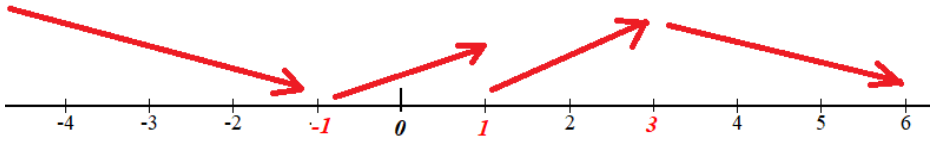
$$= \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = \boxed{-1 = x} \\ \frac{-2-4}{-2} = \boxed{3 = x} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores y el valor excluido del dominio $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = \frac{-(-2)^2 + 2(-2) + 3}{(1-(-2))^2} = \frac{-5}{9} < 0$. La función decrece en $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = \frac{-0^2 + 2 \cdot 0 + 3}{(1-0)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{-2^2 + 2 \cdot 2 + 3}{(1-2)^2} = 3 > 0$. La función crece en $(1,3)$.
- En el intervalo $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{-4^2 + 2 \cdot 4 + 3}{(1-4)^2} = \frac{-5}{9} < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.

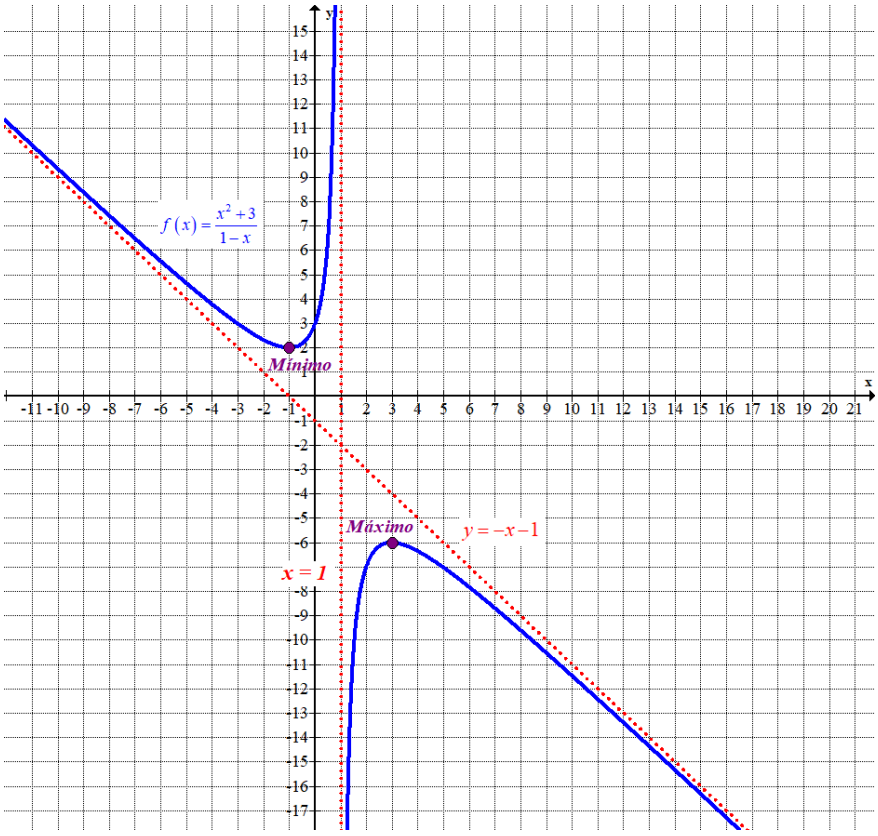
***Resumiendo*: La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y crece en $(-1,1) \cup (1,3)$.**

d) Con el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo local en $x = -1$ y un máximo local en $x = 3$.

Como $f(-1) = \frac{(-1)^2 + 3}{1-(-1)} = 2$ y $f(3) = \frac{3^2 + 3}{1-3} = -6$ el mínimo local tiene coordenadas (–1, 2) y el máximo local tiene coordenadas (3, –6).


$f(x)=\frac{x^2+3}{1-x}$
Mínimo
Máximo
$y=-x-1$
$x=1$
x
y

Cuestión 2

CUESTIÓN 2:
[3 puntos] El famoso rapero Myke Towers ofrecerá un concierto en Murcia el próximo 6 de junio en el Espacio Norte, que durará 5 horas. La asistencia al evento, medida en miles de personas, viene dada por la siguiente función:

$$N(t)=\frac{20t}{(t+1)^2}$$

donde $0\le t\le 5$ y N es el número de miles de asistentes t horas después del comienzo. Se pide:
a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $N(t)$. **[1 punto]**
b) Calcula en qué hora se produce el máximo número de asistentes y a cuánto ascienden. **[1,25 puntos]**
c) Evalúa e interpreta la derivada de la función $N(t)$ en $t=2$. **[0,25 puntos]**
d) Halla cuántos asistentes hay una vez han transcurrido 3 horas desde el comienzo del concierto. **[0,5 puntos]**

Solución:

a) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$N(t)=\frac{20t}{(t+1)^2}\Rightarrow N'(t)=\frac{20(t+1)^2-2(t+1)20t}{(t+1)^4}=\frac{20(t+1)-40t}{(t+1)^3}=\frac{20-20t}{(t+1)^3}$$

$$N'(t)=0\Rightarrow\frac{20-20t}{(t+1)^3}=0\Rightarrow 20-20t=0\Rightarrow \boxed{t=1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de la primera hora de concierto.

- En el intervalo $(0,1)$ consideramos $t=0.5$ y la derivada vale $N'(0.5)=\frac{20-20\cdot 0.5}{(0.5+1)^3}=\frac{80}{27}>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,5)$ consideramos $t=2$ y la derivada vale $N'(2)=\frac{20-20\cdot 2}{(2+1)^3}=\frac{-20}{27}<0$. La función decrece en $(1,5)$.

Resumiendo: Durante la primera hora de concierto crece el número de asistentes al concierto y de la primera a la quinta hora del concierto disminuye el número de asistentes.

b) Por lo visto en el apartado anterior se deduce que el máximo número de asistentes se produce al cabo de 1 hora de concierto. Como $N(1)=\frac{20\cdot 1}{(1+1)^2}=5$ podemos decir que el número máximo de asistentes al concierto se produce al cabo de 1 hora siendo 5000 los asistentes en ese momento.

c) $N'(2)=\dfrac{20-20\cdot 2}{(2+1)^3}=\dfrac{-20}{27}=-0.74<0$. Este resultado nos indica que el número de asistentes disminuye cuando han pasado 2 horas de concierto. Aproximadamente disminuyen 740 personas en torno a las 2 horas (entre la hora y media y las 2 horas y media se van 740 personas, aproximadamente.

d) Como $N(3)=\dfrac{20\cdot 3}{(3+1)^2}=\dfrac{60}{16}=3.750$ podemos decir que al cabo de 3 horas hay 3750 asistentes en el concierto.

Apartado 3: Elegir una cuestión. Cuestión 1

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):
CUESTIÓN 1:
[2 puntos] Realiza:
a) Si $\int_0^2 f(x)dx = 4$, ¿a qué es igual $\int_0^2 [f(x)+3]dx$? **[0,25 puntos]**
b) Representa gráficamente el recinto del plano limitado por $f(x)=x^2$ y $g(x)=2x+3$. Calcula su área. **[1,75 puntos]**

Solución:

a) Aplicamos las propiedades de la integración.

$$\int_0^2 [f(x)+3]dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 3dx = 4 + [3x]_0^2 = 4 + (3\cdot 2 - 3\cdot 0) = 4+6 = 10$$

b) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

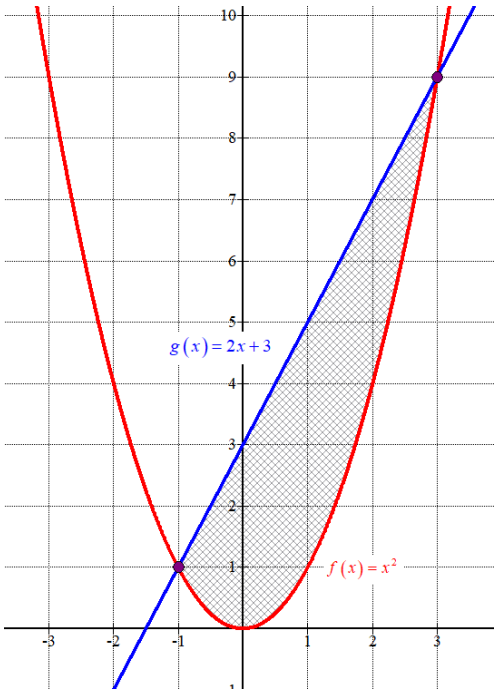
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=2x+3 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 2x+3 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-3)}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3=x} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1=x} \end{cases}$$

La región del plano de la cual queremos hallar su área está comprendida entre –1 y 3. Hacemos una tabla de valores y representamos la parábola y la recta dadas.

x	$f(x)=x^2$
–1	1
0	0
3	9

x	$g(x)=2x+3$
–1	1
0	3
3	9



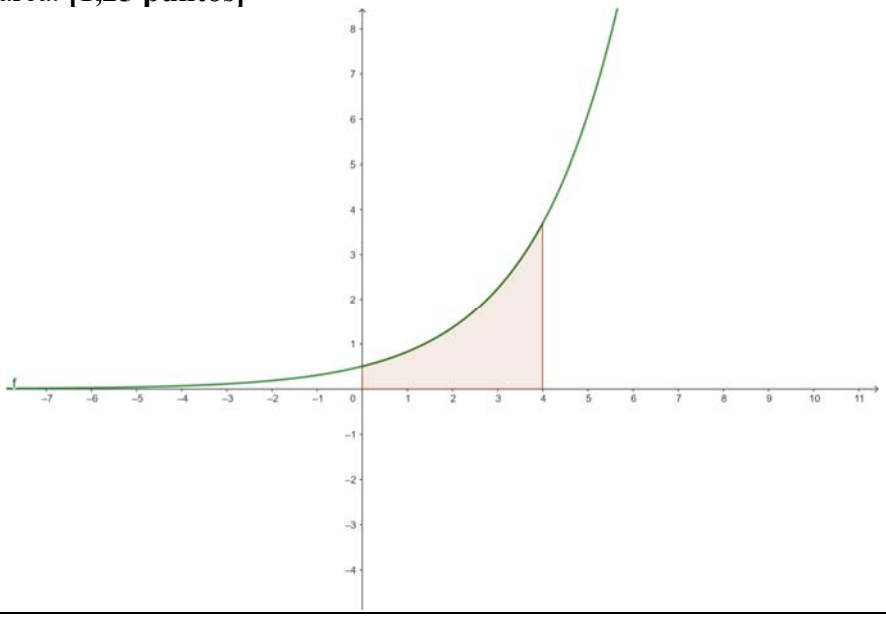
El área es el valor de la integral definida entre –1 y 3 de $g(x)-f(x)$.

$$Área=\int_{-1}^{3} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-1}^{3} 2x+3-x^2\,dx=\left[x^2+3x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}=$$

$$=\left[3^2+3\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right]-\left[(-1)^2+3(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=9+9-9-\left(1-3+\frac{1}{3}\right)=\boxed{\frac{32}{3}\approx 10.667\ u^2}$$

Cuestión 2

CUESTIÓN 2:
[2 puntos] Realiza:
a) Calcula los valores de los límites de integración a y b de manera que se cumpla $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$. **[0,25 puntos]**
b) Dada la función $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$:
b.1) Escribe la integral que describe el área de la región sombreada. **[0,5 puntos]**
b.2) Calcula el área. **[1,25 puntos]**



Solución:

a) Aplicando las propiedades de la integración.

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx$$

Por lo que $a = -2$ y $b = 5$.

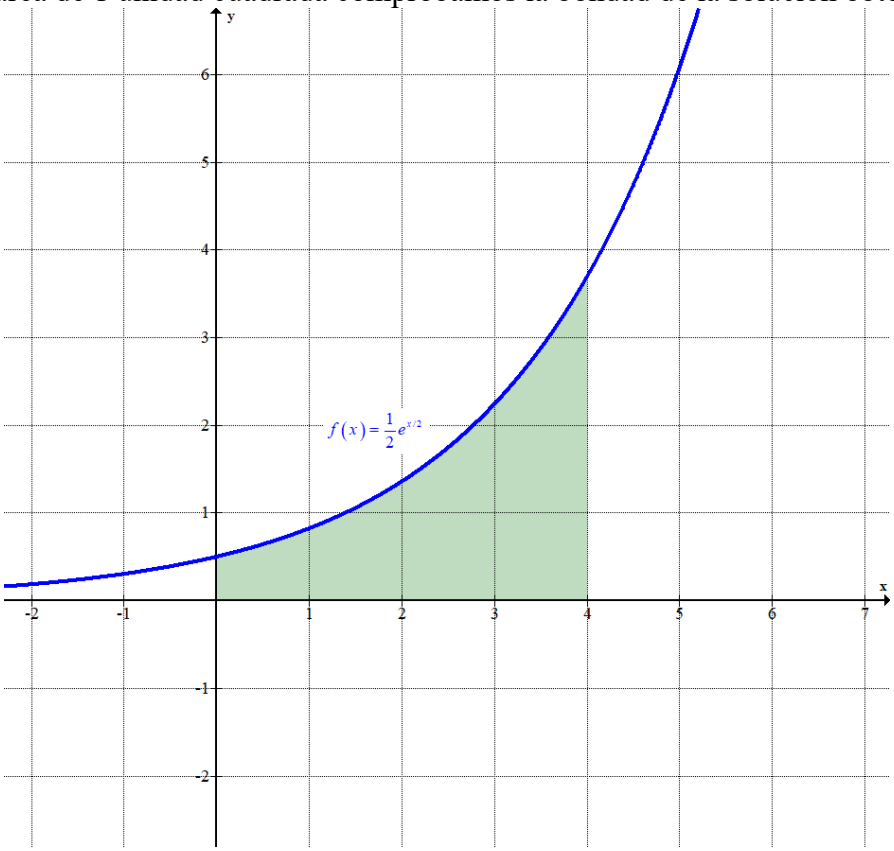
b) Por lo que se observa en el dibujo es la región del plano limitada por la gráfica de la función y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 4$, por lo que el valor del área se obtiene con la integral definida de la función entre esos dos valores: $\int_{0}^{4} f(x)\,dx = \int_{0}^{4} \frac{1}{2}e^{x/2}dx$.

Calculamos el valor del área determinando el valor de la integral definida.

$$Área = \int_{0}^{4} \frac{1}{2}e^{x/2}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} e^{x/2}dx = \frac{1}{2}\left[2e^{x/2}\right]_{0}^{4} = \frac{1}{2}\left[2e^{4/2} - 2e^{0/2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2e^{2} - 2\right] = \boxed{e^{2} - 1 \approx 6.39\ u^{2}}$$

Si contamos los cuadraditos que están coloreados en el siguiente dibujo y sabiendo que cada uno tiene un área de 1 unidad cuadrada comprobamos la bondad de la solución obtenida.



Apartado 4: Elegir una cuestión. Cuestión 1

APARTADO 4 (a elegir una cuestión):
CUESTIÓN 1:
[2,5 puntos] Un grupo de investigadores de la Universidad de Murcia realizó una encuesta en la que se preguntó a 1000 personas adultas su opinión sobre establecer una edad legal para que los niños tengan teléfono móvil. Según los resultados, 560 personas, de las que 390 eran mujeres, opinaron a favor de esta medida. De las 440 personas que opinaron en contra, 280 eran hombres. Si se selecciona una persona al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? **[0,25 puntos]**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona encuestada sea mujer? **[0,75 puntos]**
c) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer o esté a favor de esta medida? **[0,75 puntos]**
d) Si esa persona seleccionada al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que esté a favor de esta medida? [0,75 puntos]

Solución:

Realizamos una tabla de contingencia para colocar de forma ordenada los datos proporcionados y obtener los datos que vienen implícitos en la información proporcionada.

	Mujer	Hombre	
A favor	**390**		**560**
En contra		**280**	**440**
			1000

Completamos la tabla.

	Mujer	Hombre	
A favor	**390**	**170**	**560**
En contra	**160**	**280**	**440**
	550	**450**	**560**

Con toda esta información y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

a) De las 1000 personas encuestadas hay 560 a favor la probabilidad de que la persona elegida al azar esté a favor de esta medida vale $\frac{560}{1000} = 0.56$.

b) De las 1000 personas encuestadas hay 550 mujeres la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer vale $\frac{550}{1000} = 0.55$.

c) De las 1000 personas encuestadas hay 550 mujeres y 170 hombres que están a favor de la medida, por lo que la probabilidad de que la persona elegida al azar sea mujer o esté a favor de esta medida vale $\frac{550+170}{1000} = 0.72$.

d) De los 450 hombres encuestados hay 170 a favor, por lo que la probabilidad de que al elegir un hombre al azar esté a favor de esta medida vale $\frac{170}{450}=\frac{17}{45}\approx 0.3778$.

Cuestión 2

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 12 kg.

a) Si en una muestra de 64 jugadores el peso medio ha sido de 70 kg, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de los pesos de los jugadores de fútbol de la Ligan Nacional juvenil de la Región de Murcia. **[1 punto]**

b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%. **[0,75 puntos]**

c) Si $\mu = 71$ y se elige a un jugador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 75 kg? **[0,75 puntos]**

Solución:

a) Sea X la variable aleatoria que da el peso, en kg, de los jugadores de fútbol de la Liga Nacional juvenil de la Región de Murcia. Sabemos que sigue una distribución normal: N(**μ**, 12).
La muestra es de 64 jugadores y la media muestral es 70 kilos → $n = 64$, $\bar{x} = 70$ kg
Para un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{12}{\sqrt{64}} = 2.94$$

El intervalo de confianza para la media es:

Textos Marea Verde

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(70 - 2.94,\ 70 + 2.94\right) = \left(67.06,\ 72.94\right)$$

La media de los pesos con un nivel de confianza del 95 % se sitúa entre 67.06 y 72.94 kilos.

b) Para un nivel de confianza del 98% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.32 + 2.33}{2} = 2.325$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901

Igualamos el error del intervalo a 4 kg y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 4 = 2.325 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{12 \cdot 2.325}{4} \Rightarrow n = \left(\frac{12 \cdot 2.325}{4}\right)^2 \approx 48.65$$

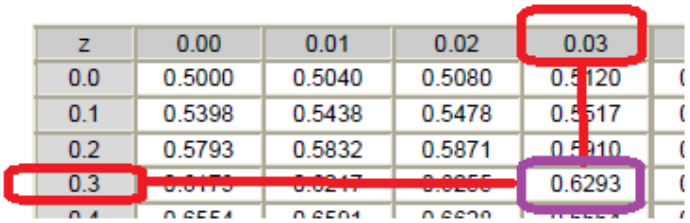
El tamaño de la muestra es un valor entero superior al obtenido. 49 es el tamaño mínimo que debe tener una muestra de jugadores para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 4 kg con un nivel de confianza del 98%.

c) Si $\mu = 71$ la distribución es N(71, 12). Nos piden calcular $P\left(X > 75\right)$.

$$P\left(X > 75\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(Z > \frac{75 - 71}{12}\right) = P\left(Z > 0.333\right) = 1 - P\left(Z \leq 0.33\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.6293 = \boxed{0.3707}$$

Textos Marea Verde



z	0.00	0.01	0.02	0.03	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	(
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	(
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	(
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	(
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	(

Región de Murcia	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

NOTA IMPORTANTE: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones. Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada APARTADO se debe hacer sólo la CUESTIÓN 1 o la CUESTIÓN 2. La elección de CUESTIÓN 1 o CUESTIÓN 2 puede cambiar de un apartado a otro. Si se responden las 2 CUESTIONES de un apartado, solo se corregirá la primera CUESTIÓN contestada. Cada cuestión tiene una puntuación entre 2 y 3 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[0,5 puntos] Calcula el valor de a para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a. **[1 punto]**

b) Resuelve el sistema para $a = 1$. **[1 punto]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:

a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**
e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{-9+x^2}{x^2-4}$$

a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de *f(x)* con los ejes de coordenadas. **[0,5 puntos]**
b) Estudia sus asíntotas. **[0,5 puntos]**
c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. **[1 punto]**
d) Halla y clasifica sus extremos relativos. **[0,25 puntos]**
e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=3$. **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2: [3 puntos] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$$B(x)=144x-0.1x^2-50000$$

donde *x* es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? **[0,5 puntos]**
b) Evalúa e interpreta la primera derivada de *B(x)* en $x=750$ ¿Qué recomendarías al propietario?. **[0,5 puntos]**
c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *B(x)*. **[1 punto]**
d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. **[0,75 puntos]**
e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual? **[0,25 puntos]**

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:
[2 puntos] Realiza:

a) Calcula $\int\left(\frac{2}{x-1}+3\sqrt{x}\right)dx$. **[0,25 puntos]**
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$. **[1,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:
[2 puntos] Realiza:

a) Calcula $\int\left(\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx$. **[0,25 puntos]**
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=4-x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$. **[1,75 puntos]**

APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] En una encuesta realizada por el Departamento de Orientación de un instituto a 100 estudiantes de segundo de bachillerato, se obtuvo que 30 de ellos quieren estudiar Veterinaria, 25 Economía, 20 Química, 15 Biología y 10 Matemáticas. De ellos, 10, 12, 13, 8 y 6 son mujeres respectivamente. Además, la orientadora del centro les ha informado que no es posible que se matriculen en más de un grado.

a) Si se elige a un estudiante al azar del grupo estudiado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **[0,25 puntos]**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, sea hombre y estudie Veterinaria? **[0,25 puntos]**
c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria? **[0,25 puntos]**
d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, no estudie ni Biología ni Matemáticas? **[0,5 puntos]**
e) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química, dado que se trata de una mujer? **[0,5 puntos]**
f) Si el estudiante seleccionado al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Economía? **[0,75 puntos]**

CUESTIÓN 2:

[2,5 puntos] El número de horas semanales que los estudiantes de segundo de bachillerato de una pedanía de Murcia dedican a ver series en inglés en HBO Max sigue una distribución normal con media μ y desviación típica igual a 2 horas.

a) Si en una muestra de 100 estudiantes, el número medio de horas semanales que dedican a ver series en inglés en HBO Max han sido de 8 horas, calcula un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media de las horas semanales que dedican a esta actividad. **[1 punto]**
b) Determina el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estudiantes para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0.5 horas con un nivel de confianza del 99%. **[0,75 puntos]**
c) Si $\mu = 8.2$ y se elige a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dedique más de 9 horas semanales a ver series en inglés en HBO Max? [0,75 puntos]

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

APARTADO 1 (a elegir una cuestión):
CUESTIÓN 1: [2,5 puntos]

[0,5 puntos] Calcula el valor de a para que $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0$.

[2 puntos] Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde a es un número real desconocido:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases}$$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a. **[1 punto]**
b) Resuelve el sistema para $a = 1$. **[1 punto]**

Solución:

1)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2a-1 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1 = a}$$

Se cumple para $a = 1$.

2) a) Discutimos el sistema utilizando el método de Gauss y obtenemos un sistema triangular equivalente al inicial.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ 2x \quad -y \quad +z \quad = a \\ -2x \quad +2y \quad -2z \quad = -2 \\ \hline \qquad y \quad -z \quad = a-2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ 3x \quad +2y \quad -az \quad = 4 \\ -3x \quad +3y \quad -3z \quad = -3 \\ \hline \qquad 5y \quad -(a+3)z \quad = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = a - 2 \\ 5y - (a+3)z = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 5 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ 5y \quad -(a+3)z \quad = \quad 1 \\ -5y \quad +5z \quad = \quad -5a+10 \\ \hline \qquad (-a+2)z \quad = \quad -5a+11 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = a - 2 \\ (-a+2)z = -5a+11 \end{cases}$$

Este sistema triangular obtenido es compatible determinado cuando $-a + 2 \neq 0 \rightarrow a \neq 2$.

Si $a=2$ el sistema equivalente queda $\begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=0 \\ 0=1 \end{cases}$. Tenemos una igualdad imposible. El sistema es incompatible.

Resumiendo: Para $a\neq 2$ el sistema es compatible determinado y para $a=2$ el sistema es incompatible.

b) Para $a=1$ hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible determinado. El sistema queda $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y-z=4 \end{cases}$ y su sistema triangular equivalente es $\begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=-1 \\ z=6 \end{cases}$.

Determinamos la solución del sistema partiendo del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ y-z=-1 \\ \boxed{z=6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+6=1 \\ y-6=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-5 \\ \boxed{y=5} \end{cases} \Rightarrow x-5=-5 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución del sistema es $x=0, y=5, z=6$.

Problema 2:

CUESTIÓN 2:
[2,5 puntos] El famoso tiktoker Peldanhos produce videos tanto para TikTok como para YouTube. Cada video de TikTok le genera 40 euros de ingresos, mientras que cada video de YouTube le genera 20 euros. Hay tres fases en el proceso de creación de videos: planificación, grabación y edición. La planificación de contenido para TikTok requiere 4 horas por video, mientras que para YouTube solo requiere 1 hora. Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. Cada video de TikTok requiere 1 hora de grabación, mientras que cada video de YouTube requiere 2 horas. Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar. Finalmente, para la edición Peldanhos emplea 1 hora para cada uno de los dos tipos de videos y puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición. Se pide:
a) Si Peldanhos quiere maximizar el ingreso semanal, formula el problema, identificando la función objetivo y las restricciones. **[0,5 puntos]**
b) Representa la región factible. **[0,75 puntos]**
c) Encuentra los vértices de esta región. **[0,5 puntos]**
d) ¿Cuántos videos de cada plataforma debe producir semanalmente para maximizar sus ingresos? **[0,5 puntos]**
e) Calcula el ingreso máximo semanal posible. **[0,25 puntos]**

Solución:

a) Llamamos x = número de videos de TikTok, y = número de videos de YouTube.
Realizamos una tabla para organizar toda la información proporcionada en el problema.

	Horas planificación	Horas grabación	Horas edición	Ingresos
TikTok (x)	4x	x	x	40x
YouTube (y)	y	2y	y	20y
TOTAL	$4x+y$	$x+2y$	$x+y$	$40x+20y$

La función objetivo son los ingresos semanales que deseamos maximizar: $I(x,y)=40x+20y$.
Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

Peldanhos dispone de 36 horas semanales para planificar contenido. → $4x+y\le 36$
Peldanhos dispone de un máximo de 20 horas semanales para grabar → $x+2y\le 20$
puede dedicar hasta 12 horas semanales a la edición → $x+y\le 12$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+y\le 36 \\ x+2y\le 20 \\ x+y\le 12 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$4x+y=36$

x	$y=36-4x$
0	36
8	4
9	0

$x+2y=20$

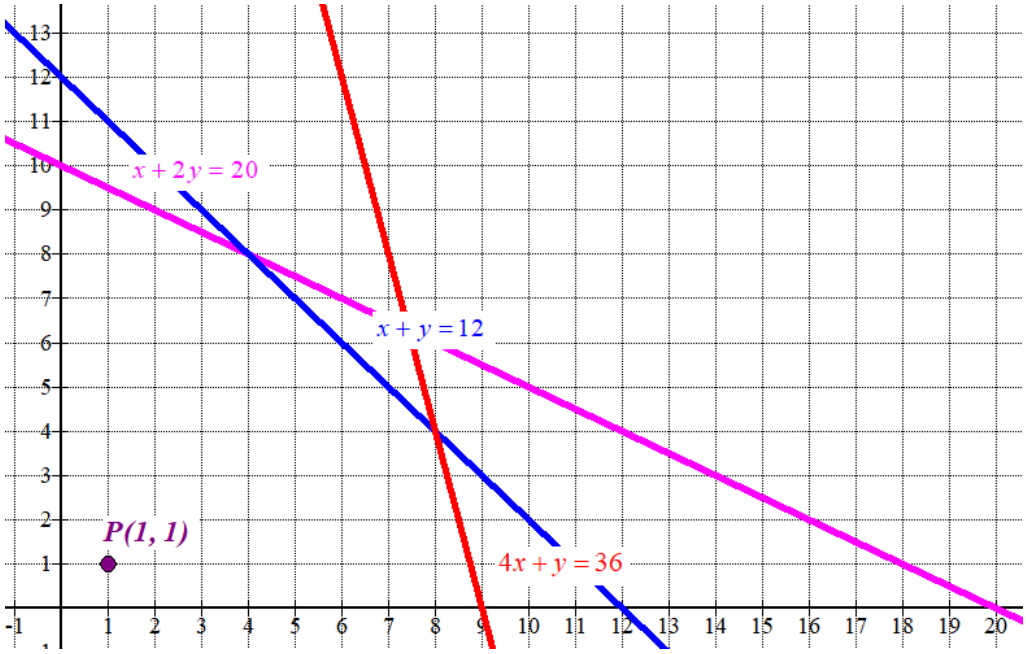
x	$y=\frac{20-x}{2}$
0	10
4	8
20	0

$x+y=12$

x	$y=12-x$
0	12
4	8
8	4

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

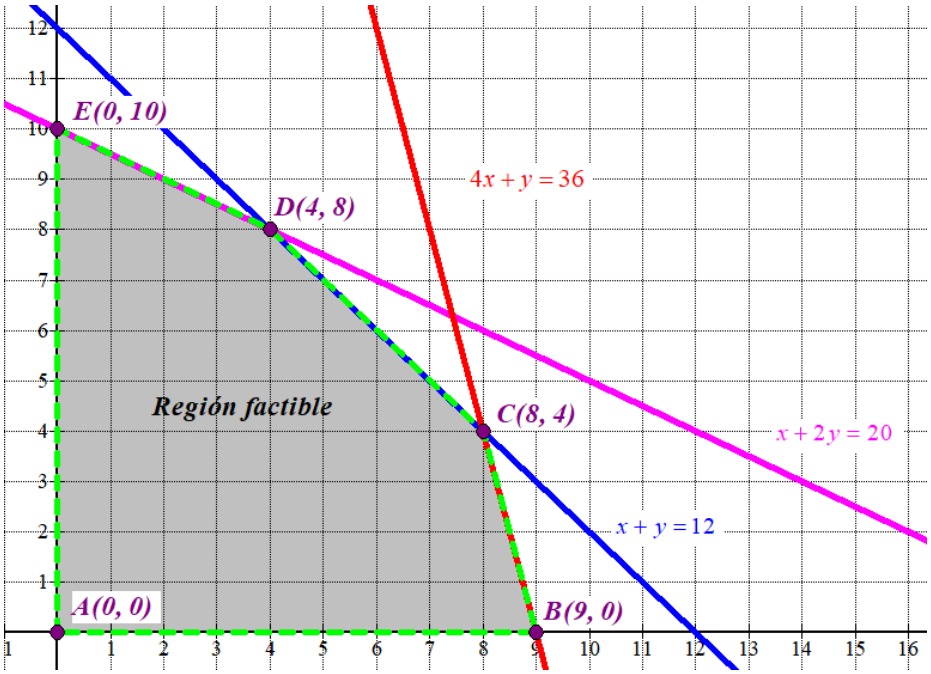


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l}4x+y\leq 36\\ x+2y\leq 20\\ x+y\leq 12\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está por debajo de las rectas rosa, azul y roja.

Comprobamos que el punto P(1, 1) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l}4+1\leq 36\\ 1+2\leq 20\\ 1+1\leq 12\\ 1\geq 0;\ 1\geq 0\end{array}\right\}$ Se cumplen todas.

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



c) Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y se pueden también comprobar en las tablas de valores. Los vértices son: A(0,0), B(9,0), C(8, 4), D(4, 8) y E(0, 10)

d) Valoramos la función objetivo $I(x,y)=40x+20y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(9, 0) → $I(9,0)=40\cdot 9+20\cdot 0=360$

C(8, 4) → $I(8,4)=40\cdot 8+20\cdot 4=400$ *Máximo*

D(4, 8) → $I(4,8)=40\cdot 4+20\cdot 8=320$

E(0, 10) → $I(0,10)=40\cdot 0+20\cdot 10=200$

Los ingresos máximos se obtienen en el punto C(8, 4).

Significa que se deben realizar semanalmente 8 videos de TikTok y 4 de YouTube para obtener los ingresos máximos.

e) Los ingresos máximos semanales que se puede conseguir son de 400 euros.

Problema 3:

APARTADO 2 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1: [3 puntos] Dada la función:

$$f(x)=\frac{-9+x^2}{x^2-4}$$

a) Determina su dominio y los puntos de corte de la gráfica de *f(x)* con los ejes de coordenadas. **[0,5 puntos]**

b) Estudia sus asíntotas. **[0,5 puntos]**

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. **[1 punto]**

d) Halla y clasifica sus extremos relativos. **[0,25 puntos]**

e) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=3$. **[0,75 puntos]**

Solución 2.1:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Dominio = $\mathbb{R}-\{-2,+2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{-9+x^2}{x^2-4} \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{-9+x^2}{x^2-4}=0\Rightarrow -9+x^2=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3\Rightarrow \begin{cases} A(-3,0) \\ B(3,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{-9+x^2}{x^2-4} \\ Eje\,OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\frac{-9+0^2}{0^2-4}=\frac{9}{4}\Rightarrow C\left(0,\frac{9}{4}\right)$$

Los puntos de corte con los ejes de coordenadas son A(–3, 0), B(3, 0) y $C\left(0,\frac{9}{4}\right)$.

b) **Asíntotas verticales.** $x=a$

¿$x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{-9+x^2}{x^2-4}=\frac{-9+(-2)^2}{(-2)^2-4}=\frac{-5}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical.

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{-9+x^2}{x^2-4}=\frac{-9+2^2}{2^2-4}=\frac{-5}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-9+x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

c) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{-9+x^2}{x^2-4} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-2x(-9+x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{\cancel{2x^3}-8x+18x-\cancel{2x^3}}{(x^2-4)^2} = \frac{10x}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{10x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale

  $f'(-3) = \frac{10(-3)}{((-3)^2-4)^2} = \frac{-30}{25} < 0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.

- En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

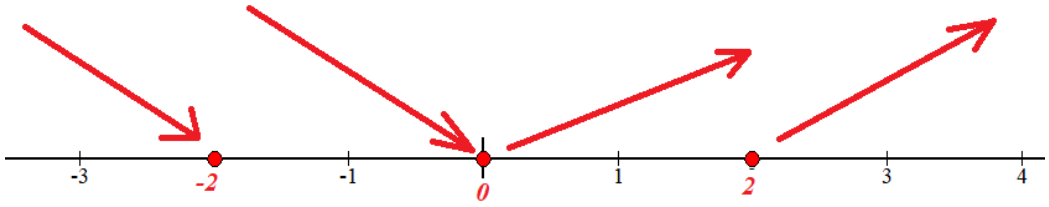
  $f'(-1) = \frac{10(-1)}{((-1)^2-4)^2} = \frac{-10}{9} < 0$. La función decrece en $(-2,0)$.

- En el intervalo $(0,2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{10}{(1^2-4)^2} = \frac{10}{9} > 0$. La función crece en $(0,2)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f'(3) = \frac{10\cdot 3}{(3^2-4)^2} = \frac{30}{25} > 0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

***Resumiendo*: La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y crece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.**

d) Con el estudio anterior sabemos que la función sigue el esquema siguiente:

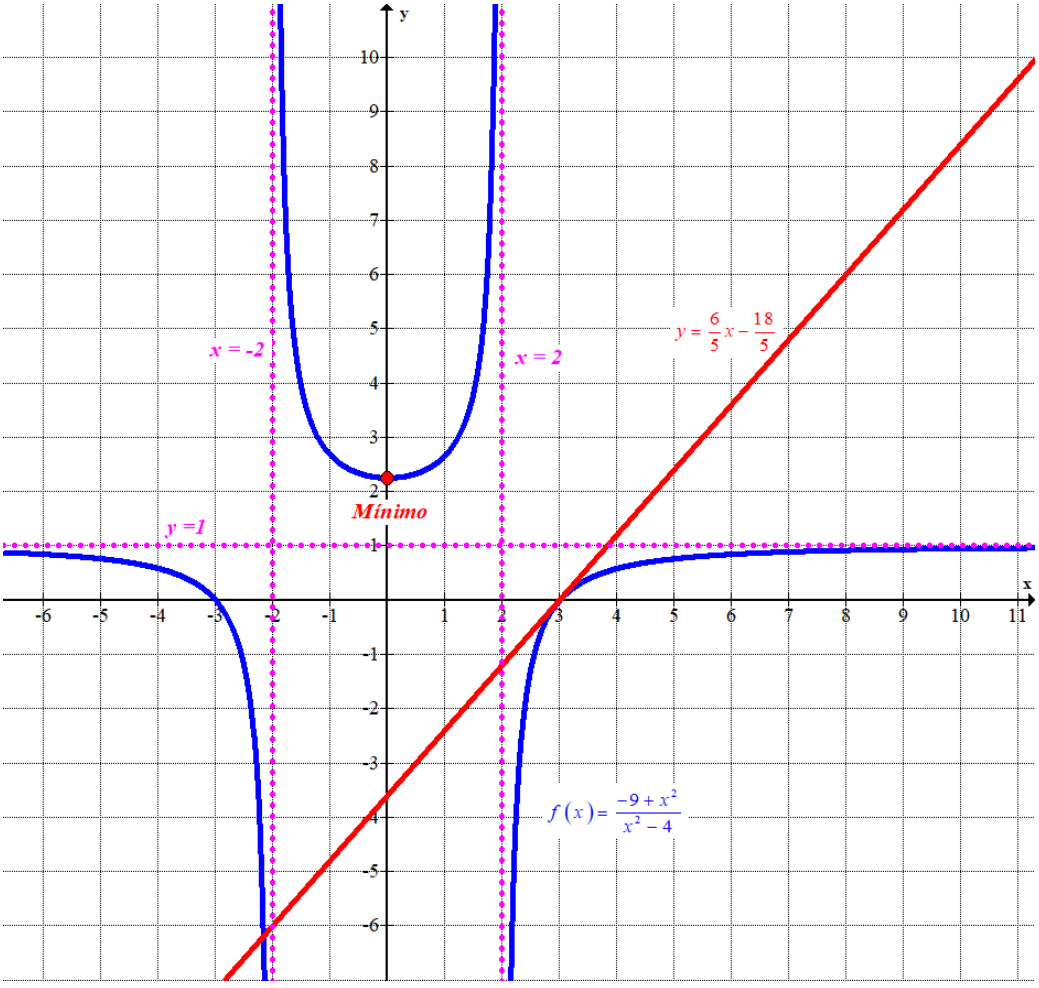


La función presenta un mínimo local en $x=0$.

Como $f(0)=\dfrac{-9+0^2}{0^2-4}=\dfrac{9}{4}$ el mínimo local tiene coordenadas $\left(0,\dfrac{9}{4}\right)$.

e) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x=3$ es $y-f(3)=f'(3)(x-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{-9+3^2}{3^2-4}=0 \\ f'(3)=\dfrac{10\cdot 3}{\left(3^2-4\right)^2}=\dfrac{6}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow y-0=\frac{6}{5}(x-3)\Rightarrow \boxed{y=\frac{6}{5}x-\frac{18}{5}}$$



Problema 4:

CUESTIÓN 2: [3 puntos] El beneficio mensual en euros de la hamburguesería Jamburguer, que el verano pasado abrió sus puertas en un conocido centro comercial de Murcia, viene dado por:

$$B(x)=144x-0.1x^2-50000$$

donde *x* es el número de hamburguesas vendidas mensualmente.

a) Si actualmente Jamburguer vende 750 hamburguesas al mes, ¿obtendrá pérdidas o ganancias? **[0,5 puntos]**

b) Evalúa e interpreta la primera derivada de *B(x)* en $x=750$ ¿Qué recomendarías al propietario? **[0,5 puntos]**

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento de *B(x)*. **[1 punto]**

d) Determina el número de hamburguesas que maximiza el beneficio mensual de esta hamburguesería. **[0,75 puntos]**

e) ¿Cuál es el beneficio máximo mensual? **[0,25 puntos]**

Solución 2.2:

a) Calculamos los beneficios del mes con la venta de 750 hamburguesas.

$$B(750)=144\cdot 750-0.1\cdot 750^2-50000=1750$$

Ese mes obtiene unas ganancias de 1750 euros.

b) La derivada de la función es $B'(x)=144-0.2x$. La primera derivada de *B(x)* en $x=750$ vale $B'(750)=144-0.2\cdot 750=-6<0$. El signo negativo de la derivada indica que el beneficio mensual va decreciendo conforme aumentan el número de hamburguesas vendidas.
Recomendaría al propietario no vender más de 750 hamburguesas. Vendiendo más hamburguesas el beneficio disminuye.

c) Hallamos los puntos críticos de la función.

$$B'(x)=0\Rightarrow 144-0.2x=0\Rightarrow 144=0.2x\Rightarrow \boxed{x=\frac{144}{0.2}=720}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=720$.

- En el intervalo $(0,720)$ consideramos $x=100$ y la derivada vale $B'(100)=144-0.2\cdot 100=124>0$. La función crece en $(0,720)$.
- En el intervalo $(720,+\infty)$ consideramos $x=750$ y la derivada vale $B'(750)=-6<0$. La función decrece en $(720,+\infty)$.

El beneficio crece por debajo de 720 hamburguesas al mes y decrece por encima de 720 hamburguesas mensuales.

d) Por lo visto en el apartado anterior el beneficio crece antes de 720 y decrece a partir de 720. Se deduce que el número de hamburguesas que maximiza el beneficio es de 720.

e) Como $B(720) = 144 \cdot 720 - 0.1 \cdot 720^2 - 50000 = 1840$ podemos decir que:

El máximo beneficio que se puede conseguir es de 1 840 euros.

Problema 5:

APARTADO 3 (a elegir una cuestión):
CUESTIÓN 1:
[2 puntos] Realiza:
a) Calcula $\int\left(\frac{2}{x-1}+3\sqrt{x}\right)dx$. **[0,25 puntos]**
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$. **[1,75 puntos]**

Solución 3.1:

a) Aplicamos las propiedades de la integración.

$$\int\left(\frac{2}{x-1}+3\sqrt{x}\right)dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int 3\sqrt{x}dx=2\int\frac{1}{x-1}dx+3\int x^{1/2}dx=$$

$$=2\ln|x-1|+3\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}=2\ln|x-1|+3\frac{x^{3/2}}{3/2}=\boxed{2\ln|x-1|+2\sqrt{x^3}+C}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

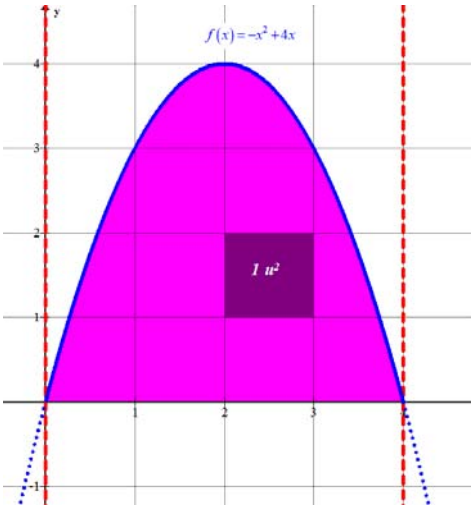
$$\left.\begin{array}{l}f(x)=-x^2+4x\\ Eje\,OX\rightarrow y=0\end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x=0\Rightarrow -x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-4=0\rightarrow\boxed{x=4}\end{cases}$$

Los dos puntos de corte están en los extremos de la región. Como $f(1)=-1^2+4=3>0$ la función es positiva en el intervalo (0, 4) y el área limitada por la función $f(x)=-x^2+4x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=4$ es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la función.

$$Área=\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 -x^2+4xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2\right]_0^4=$$

$$=\left[-\frac{4^3}{3}+2\cdot 4^2\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2\right]=-\frac{64}{3}+32=\boxed{\frac{32}{3}\square 10.667u^2}$$

El área tiene un valor de 32/3 = 10.667 unidades cuadradas.


y
$f(x)=-x^2+4x$
1 u²
4
3
2
1
-1
1
2
3

Problema 6:

CUESTIÓN 2:
[2 puntos] Realiza:
a) Calcula $\int\left(\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx$. **[0,25 puntos]**
b) Calcula el área limitada por la función $f(x)=4-x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$. **[1,75 puntos]**

Solución3.2:

a) Aplicando las propiedades de la integración.

$$\int\left(\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{3}e^{3x}\right)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int 3\sqrt{x}dx+\int\frac{1}{3}e^{3x}dx=\int\frac{1}{x}dx+3\int x^{1/2}dx+\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=$$

$$=\ln|x|+3\frac{x^{1+1/2}}{1+1/2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}=\ln|x|+3\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{1}{9}e^{3x}=\boxed{\ln|x|+2\sqrt{x^3}+\frac{1}{9}e^{3x}+C}$$

b) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX.

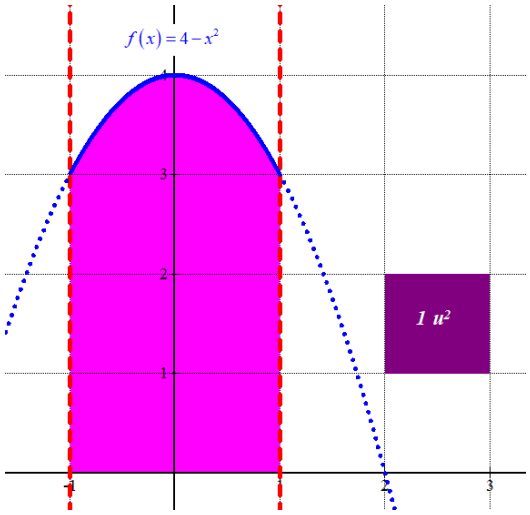
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=4-x^2 \\ Eje\,OX\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Los dos puntos de corte están fuera del intervalo (–1,1). Como $f(0)=4-0^2=4>0$ la función es positiva en el intervalo (–1, 1) y el área limitada por la función $f(x)=4-x^2$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$ es el valor de la integral definida entre –1 y 1 de la función.

$$Área=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}4-x^2dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\left[4\cdot 1-\frac{1^3}{3}\right]-\left[4(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=$$

$$=4-\frac{1}{3}+4-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{22}{3}\approx 7.333u^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{22}{3}\approx 7.333$ unidades cuadradas.


$f(x)=4-x^2$
1 u²
3
2
1
-1
1
2
3

Problema 7:

APARTADO 4 (a elegir una cuestión):

CUESTIÓN 1:

[2,5 puntos] En una encuesta realizada por el Departamento de Orientación de un instituto a 100 estudiantes de segundo de bachillerato, se obtuvo que 30 de ellos quieren estudiar Veterinaria, 25 Economía, 20 Química, 15 Biología y 10 Matemáticas. De ellos, 10, 12, 13, 8 y 6 son mujeres respectivamente. Además, la orientadora del centro les ha informado que no es posible que se matriculen en más de un grado.

a) Si se elige a un estudiante al azar del grupo estudiado, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **[0,25 puntos]**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, sea hombre y estudie Veterinaria? **[0,25 puntos]**

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria? **[0,25 puntos]**

d) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, no estudie ni Biología ni Matemáticas? **[0,5 puntos]**

e) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química, dado que se trata de una mujer? **[0,5 puntos]**

f) Si el estudiante seleccionado al azar es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Economía? **[0,75 puntos]**

Solución 4.1:

Realizamos una tabla de contingencia para colocar de forma ordenada los datos proporcionados y obtener los datos que vienen implícitos en la información proporcionada.

	Veterinaria	Economía	Química	Biología	Matemáticas	TOTAL
Hombre						
Mujer	10	12	13	8	6	
TOTAL	30	25	20	15	10	100

Completamos la tabla.

	Veterinaria	Economía	Química	Biología	Matemáticas	TOTAL
Hombre	**20**	**13**	**7**	**7**	**4**	**51**
Mujer	10	12	13	8	6	49
TOTAL	30	25	20	15	10	100

Con toda esta información y aplicando la regla de Laplace respondemos a las preguntas planteadas.

a) De los 100 estudiantes hay 49 mujeres. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar sea mujer vale $\frac{49}{100} = 0.49$.

b) De los 100 estudiantes hay 20 que son hombres que quieren estudiar veterinaria la probabilidad de que el estudiante elegido al azar sea hombre y estudie veterinaria vale $\frac{20}{100} = 0.2$.

c) De los 100 estudiantes hay 20 que estudian Química y 30 que estudian Veterinaria. La probabilidad de que un estudiante de este grupo, seleccionado al azar, estudie Química o Veterinaria vale $\frac{20+30}{100}=0.5$.

d) De los 100 estudiantes hay 15 que quieren estudiar Biología y 10 que quieren estudiar Matemáticas, por lo que hay 100 – 15 – 10 = 75 que no estudian ni Biología ni Matemáticas. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar no estudie ni Biología ni Matemáticas vale $\frac{75}{100}=0.75$.

e) De las 49 mujeres hay 13 que quieren estudiar Química. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar estudie Química, sabiendo que es mujer vale $\frac{13}{49}\approx 0.2653$.

f) De los 51 hombres hay 13 que quieren estudiar Economía. La probabilidad de que el estudiante elegido al azar estudie Economía, sabiendo que es hombre vale $\frac{13}{51}\approx 0.255$.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

NAVARRA

CC BY NC SA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

PREGUNTA 1:

Una compañía envasa las pastas en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierto día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo han envasado ese día?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)

ii) Resuelva el sistema. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.5 puntos)

Problema 2:

PREGUNTA 2:

En un estudio sobre la evolución de una determinada especie animal se ha determinado que la población, en miles de ejemplares, viene dada por la función:

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en años. Responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine la población a los 6 años y la población a largo plazo. ¿Es la población una función continua del tiempo? (0.75 puntos)

ii) ¿Cuándo se alcanza la máxima población? ¿Cuál es su valor? Determine para qué periodos de tiempo la población crece o decrece. (1.25 puntos)

iii) Represente gráficamente la función de población. (0.5 puntos)

Problema 3:

PREGUNTA 3:

El ayuntamiento de una ciudad hace una encuesta a 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres) sobre sus hábitos de movilidad (transporte público, vehículo propio o caminar). Observaron que 60 mujeres y 40 hombres encuestados prefieren el transporte público, el 16% de las mujeres y el 10% de los hombres prefieren usar su propio vehículo, y el resto de las personas prefiere caminar.

i) Se elige un joven al azar. Calcule la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que prefiere caminar. (1 punto)

ii) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos prefiera utilizar el transporte público. (0.75 puntos)

iii) Se eligen al azar tres jóvenes sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que los tres prefieran usar su propio vehículo. (0.75 puntos)

Problema 4:

PREGUNTA 4

OPCIÓN A:

i) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de **a** y **b** para que se cumpla $AB = BA$. (1 punto)

ii) Calcule el área del recinto del plano limitado por la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x. (1.5 puntos)

OPCIÓN B:

i) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, despeje y calcule X en la ecuación matricial $XD - C = I$. (1.25 puntos)

ii) En un barrio de una ciudad, el importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda sigue una distribución normal con varianza 22500 euros^2. Se selecciona una muestra de 74 viviendas en la zona, obteniéndose una media muestral de 738 euros. Calcule un intervalo de confianza al 96% para el importe medio mensual del alquiler de una vivienda. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

PREGUNTA 1:

Una compañía envasa las pastas en cajas de 250 g, 500 g y 1 kg. Cierto día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g). Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros, ¿cuántas cajas de cada tipo han envasado ese día?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (1 punto)

ii) Resuelva el sistema. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.5 puntos)

Solución:

a) Llamamos "x" al número de cajas de pastas de 250 g, "y" al número de cajas de 500 g y "z" al número de cajas de 1 kg.

"Cierto día se envasaron 65 cajas en total" → $x+y+z=65$.
"Cierto día se envasaron 65 cajas en total, haciendo 5 cajas más de tamaño pequeño (250 g) que de tamaño mediano (500 g)" → $x=5+y$.
"Sabiendo que el precio del kilo de pastas es de 24 euros y que el importe total de las pastas envasadas ese día asciende a 720 euros" → Se envasaron un total de $\frac{720}{24}=30$ kilos de galletas → $0.250\cdot x+0.500\cdot y+1\cdot z=30$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ x=5+y \\ 0.250\cdot x+0.500\cdot y+1\cdot z=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ x=5+y \\ x+2y+4z=120 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ x=5+y \\ x+2y+4z=120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5+y+y+z=65 \\ 5+y+2y+4z=120 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z=60 \\ 3y+4z=115 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=60-2y \\ 3y+4z=115 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y+4(60-2y)=115 \Rightarrow 3y+240-8y=115 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-125 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-125}{-5}=25} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=60-2\cdot 25=10} \\ \boxed{x=5+25=30} \end{cases}$$

Se han vendido 30 cajas de galletas de 250 gramos, 25 cajas de 500 gramos y 10 de 1 kilogramo.

Problema 2:

PREGUNTA 2:

En un estudio sobre la evolución de una determinada especie animal se ha determinado que la población, en miles de ejemplares, viene dada por la función:

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en años. Responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine la población a los 6 años y la población a largo plazo. ¿Es la población una función continua del tiempo? (0.75 puntos)

ii) ¿Cuándo se alcanza la máxima población? ¿Cuál es su valor? Determine para qué periodos de tiempo la población crece o decrece. (1.25 puntos)

iii) Represente gráficamente la función de población. (0.5 puntos)

Solución:

i) Calculamos el valor de P(6).

$$P(6) = 6 + \frac{12 \cdot 6}{6^2 + 4} = 7.8$$

La población a los 6 años es de 7800 ejemplares.
Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \lim_{t \to +\infty} 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4} = 6 + \lim_{t \to +\infty} \frac{12t}{t^2 + 4} = 6 + \lim_{t \to +\infty} \frac{12t}{t^2} = 6 + \lim_{t \to +\infty} \frac{12}{t} = 6 + \frac{12}{\infty} = 6 + 0 = 6$$

La población a largo plazo tiende a ser de 6000 ejemplares.
La función es continua pues el denominador $(t^2 + 4)$ nunca se anula.

ii) Calculamos la derivada de la función y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$P(t) = 6 + \frac{12 \cdot t}{t^2 + 4} \Rightarrow P'(t) = \frac{12 \cdot (t^2 + 4) - 2t(12t)}{(t^2 + 4)^2} = \frac{12t^2 + 48 - 24t^2}{(t^2 + 4)^2} = \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow \frac{48 - 12t^2}{(t^2 + 4)^2} = 0 \Rightarrow 48 - 12t^2 = 0 \Rightarrow 4 - t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{4} = 2}$$

Estudiamos la evolución de la población antes y después del segundo año.

- En el intervalo $(0,2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $P'(1) = \frac{48 \cdot 1 - 12 \cdot 1^2}{(1^2 + 4)^2} = \frac{36}{25} > 0$

  . La población crece en $(0,2)$.

Textos Marea Verde

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $t=5$ y la derivada vale

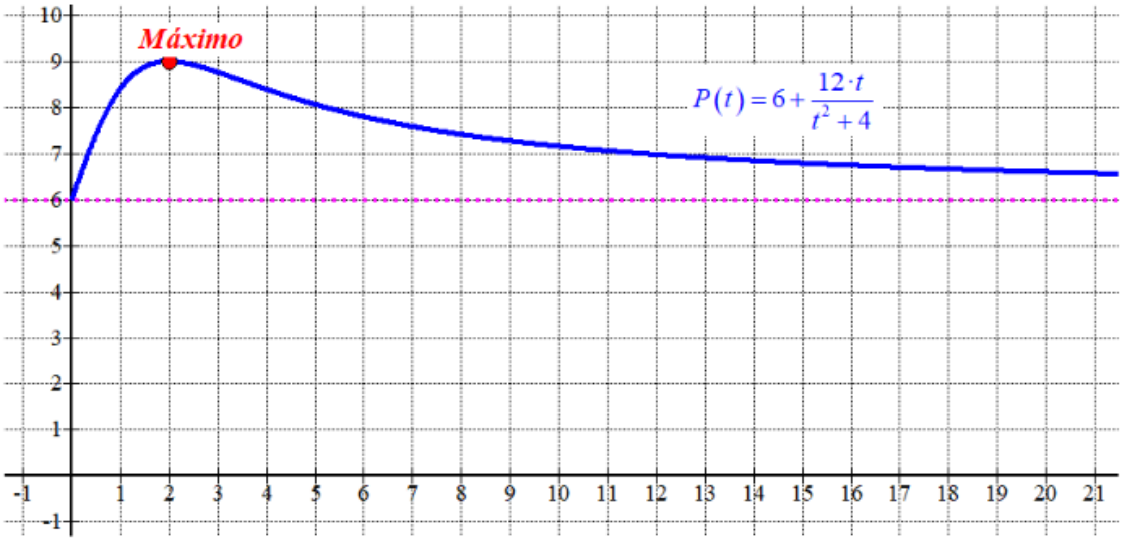
$P'(5)=\dfrac{48\cdot 5-12\cdot 5^2}{\left(5^2+4\right)^2}=\dfrac{-60}{841}<0$. La población decrece en $(2,+\infty)$.

Como la población crece antes y decrece después la población tiene un máximo relativo para $t=2$. Tenemos que $P(2)=6+\dfrac{12\cdot 2}{2^2+4}=9$.

La población es máxima en el segundo año, siendo esta población máxima de 9000 ejemplares.
La población crece durante los dos primeros años y decrece a partir del segundo año.

iii) Sabemos que la función presenta un máximo relativo y absoluto en el punto (2, 9).
También sabemos que tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y=6$.
Hacemos una pequeña tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$P(t)=6+\dfrac{12\cdot t}{t^2+4}$
0	6
2	9 *Máximo*
6	7.8
20	6.594



Problema 3:

PREGUNTA 3:

El ayuntamiento de una ciudad hace una encuesta a 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres) sobre sus hábitos de movilidad (transporte público, vehículo propio o caminar). Observaron que 60 mujeres y 40 hombres encuestados prefieren el transporte público, el 16% de las mujeres y el 10% de los hombres prefieren usar su propio vehículo, y el resto de las personas prefiere caminar.

i) Se elige un joven al azar. Calcule la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que prefiere caminar. (1 punto)

ii) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos prefiera utilizar el transporte público. (0.75 puntos)

iii) Se eligen al azar tres jóvenes sin reemplazamiento. Calcule la probabilidad de que los tres prefieran usar su propio vehículo. (0.75 puntos)

Solución:

Han sido encuestados 150 mujeres y 100 hombres (250 jóvenes). Prefieren usar el transporte público 60 mujeres y 40 hombres, prefieren usar su propio vehículo el 16% de las mujeres: $0.16 \cdot 150 = 24$ mujeres y el 10% de los hombres: $0.10 \cdot 100 = 10$ hombres, y por último prefieren caminar el resto: $150 - 60 - 24 = 66$ mujeres y $100 - 40 - 10 = 50$ hombres. Ponemos todos estos datos en una tabla.

	T. Público	Su vehículo	Caminar	TOTALES
Mujeres	60	24	66	150
Hombres	40	10	50	100
TOTALES				250

Completamos la tabla.

	T. Público	Su vehículo	Caminar	TOTALES
Mujeres	60	24	66	150
Hombres	40	10	50	100
TOTALES	100	34	116	250

Respondemos a las cuestiones planteadas utilizando la regla de Laplace y la información contenida en la tabla.

i) Hay 116 jóvenes que prefieren caminar y de ellos 66 son mujeres. La probabilidad de que el joven que prefiere caminar sea mujer tiene un valor de $\frac{66}{116} = \frac{33}{58} \simeq 0.569$.

ii) La probabilidad de que al elegir un hombre prefiera el transporte público vale $\frac{40}{100} = 0.4$ y la probabilidad de que al elegir una mujer esta prefiera el transporte público vale $\frac{60}{150} = 0.4$

.

El suceso contrario al que se contempla en el ejercicio es "Ninguno prefiere el transporte público". Usamos este suceso contrario para el cálculo de la probabilidad pedida.

$$P(\text{Al menos uno prefiere el t. público}) = 1 - P(\text{Ninguno de los dos prefiere el t. público}) =$$

$$= 1 - P(\text{Mujer no prefier t. público}) \cdot P(\text{Hombre no prefiere t. público}) =$$

$$= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.4) = \boxed{0.64}$$

También podemos obtener la solución con expresiones matemáticas.
Llamamos M a "ser mujer", H a "ser hombre" y T a "preferir el transporte público".

$$P((T/H) \cup (T/M)) = P(T/H) + P(T/M) - P((T/H) \cap (T/M)) =$$

$$= \{Independientes\} = P(T/H) + P(T/M) - P(T/H)P(T/M) =$$

$$= 0.4 + 0.4 - 0.4 \cdot 0.4 = \boxed{0.64}$$

iii) En cada nueva elección de un joven queda uno menos en el grupo que inicialmente tenía 250 jóvenes (150 mujeres y 100 hombres), es decir, en la primera elección hay 250 jóvenes en el grupo, tras la primera elección para la segunda quedan 249 jóvenes y para la tercera quedan 248 jóvenes.
Si vamos eligiendo jóvenes que prefieren usar su propio vehículo en la primera elección hay 34 jóvenes que prefieren usar su vehículo, en la segunda quedan 33 y en la tercera 32.
Para expresarnos mejor los sucesos llamamos V1, V2 y V3 a elegir joven que prefiere usar su propio vehículo en primera, segunda y tercera elección.

$$P(V1 \cap V2 \cap V3) = P(\text{V1})P(V2/V1)P(V3/(V1 \cap V2)) = \frac{34}{250} \cdot \frac{33}{249} \cdot \frac{32}{248} \simeq \boxed{0.0023}$$

Problema 4:

PREGUNTA 4

OPCIÓN A:

i) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, calcule el valor de **a** y **b** para que se cumpla $AB = BA$. (1 punto)

ii) Calcule el área del recinto del plano limitado por la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y el eje x. (1.5 puntos)

OPCIÓN B:

i) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, despeje y calcule X en la ecuación matricial $XD - C = I$. (1.25 puntos)

ii) En un barrio de una ciudad, el importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda sigue una distribución normal con varianza 22500 euros^2. Se selecciona una muestra de 74 viviendas en la zona, obteniéndose una media muestral de 738 euros. Calcule un intervalo de confianza al 96% para el importe medio mensual del alquiler de una vivienda. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

Solución 4A:

i) Resolvemos la igualdad planteada.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & -2a \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -8 = 3b \rightarrow \boxed{b = \dfrac{-8}{3}} \\ -2 = -2a \rightarrow \boxed{a = 1} \\ 3a = 3 \rightarrow a = 1 \\ 3b = -8 \rightarrow b = \dfrac{-8}{3} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = \dfrac{-8}{3}$.

ii) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2-2x+3 \\ Eje\, x \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2-2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}=$$

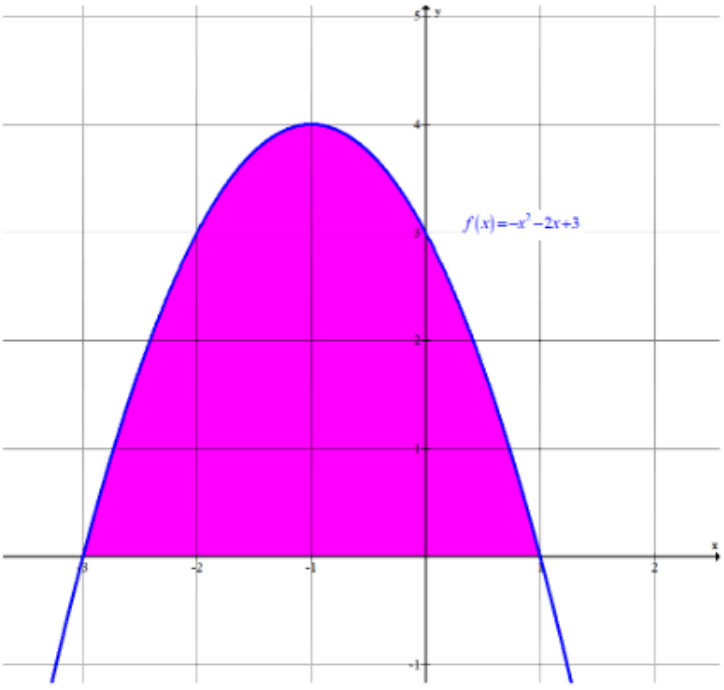
$$=\frac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases}\frac{2+4}{-2}=\boxed{-3=x} \\ \frac{2-4}{-2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

El área pedida es el valor absoluto de la integral definida de la función entre –3 y 1.

$$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx=\int_{-3}^{1} -x^2-2x+3\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=$$

$$=\left[-\frac{1^3}{3}-1^2+3\cdot 1\right]-\left[-\frac{(-3)^3}{3}-(-3)^2+3(-3)\right]=\frac{-1}{3}-1+3-9+9+9=\boxed{\frac{32}{3}\simeq 10.6667}$$

El área del recinto del plano limitado por la función $f(x)=-x^2-2x+3$ y el eje x tiene un valor de $\frac{32}{3}\simeq 10.6667$ unidades cuadradas.



Solución 4B:

i) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XD - C = I \Rightarrow XD = I + C \Rightarrow X = (I + C)D^{-1}$$

Comprobamos que la matriz D tiene inversa y la calculamos.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0$$

$$D^{-1} = \frac{Adj(D^T)}{|D|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Terminamos de calcular la expresión de la matriz X.

$$X = (I + C)D^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+8 & 1-4 \\ 3-4 & 3+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

La matriz X buscada es $X = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$.

ii) X = El importe mensual (en euros) del alquiler de una vivienda.

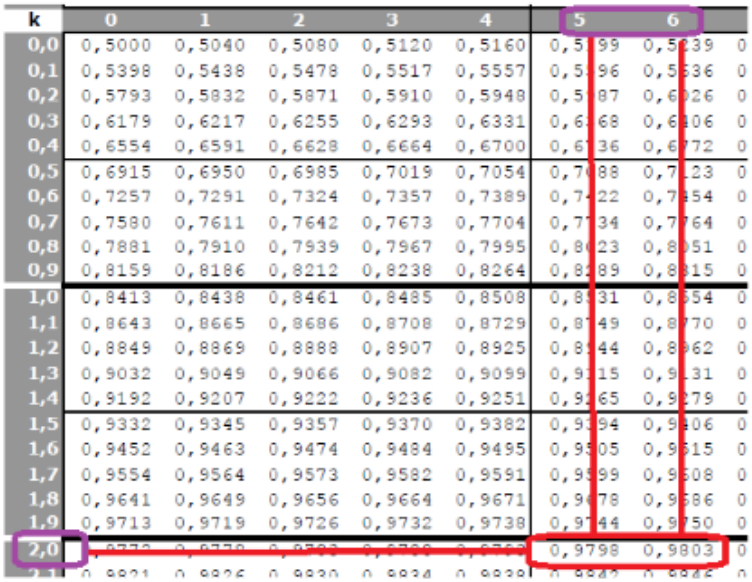
Como la varianza es 22500 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{22500} = 150$ euros.

$X = N(\mu, 150)$

El tamaño de la muestra es $n = 74$. La media muestral es $\bar{x} = 738$ euros.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 96 %

$$1 - \alpha = 0.96 \rightarrow \alpha = 0.04 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.02 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{2.05 + 2.06}{2} = 2.055$$



k	0	1	2	3	4	5	6	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0
2,0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9798	0,9803	0
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{150}{\sqrt{74}} \simeq 35.83 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(738 - 35.83, 738 + 35.83\right) = \left(702.17,\ 773.83\right)$$

Con un nivel de confianza del 96% el precio del alquiler de un piso en este barrio estará comprendido entre 702.17 y 773.83 euros al mes.
Significa que si fuésemos realizando distintas muestras de 74 pisos el 96 % de dichas muestras tendrían una media comprendida entre 702.17 y 773.83 euros al mes.

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PREGUNTA 1:

Una empresa produce dos modelos de cristales, C1 y C2. Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente. La siguiente tabla recoge, para cada modelo de cristal, la cantidad de materia prima de cada tipo necesaria para su fabricación y el tiempo de fabricación.

	Materia prima M1 (kg/m^2)	Materia prima M2 (kg/m^2)	Tiempo de fabricación ($minutos/m^2$)
C1	3	2	22
C2	6	1	14

Sabiendo que la empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m^2 de cristal, determine la cantidad diaria que se deberá fabricar de cada modelo de cristal si la empresa desea minimizar el tiempo de fabricación.

i) Plantee el problema. (1.25 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

Problema 2:

PREGUNTA 2:

La siguiente figura muestra el ala de una maqueta de avión de aeromodelismo.

El corte transversal del ala, representado gráficamente en los ejes de coordenadas, es:

La parte sombreada del corte transversal es la región del plano delimitada por el eje X y la curva que vienen dada por la función: $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{x}{5}+2$, *para* $0\le x\le 100$, donde x es la distancia horizontal (en cm) desde la parte delantera del ala e y es la altura (en cm) respecto al eje horizontal.

i) Calcule la altura máxima del ala y a qué distancia horizontal se alcanza. Razone analíticamente por qué es un máximo relativo. (1.25 puntos)

ii) Calcule el área de la parte sombreada del corte transversal. (1.25 puntos)

Problema 3:

PREGUNTA 3:

Un estudio realizado en una comunidad autónoma concluyó que el tiempo de espera para una intervención de cirugía cardíaca sigue una distribución normal. A partir de una muestra de 100 pacientes operados, se calculó el siguiente intervalo de confianza al 97% para el tiempo medio (en días) de espera para la cirugía: $[28.264, 31.736]$.

i) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medido de espera para la cirugía de la muestra de 100 pacientes. (1.25 puntos)

ii) Construya un intervalo de confianza al 91% para el tiempo medio de espera para una intervención de cirugía cardíaca. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

Problema 4:

PREGUNTA 4

OPCIÓN A:

i) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calcule, si es posible, la matriz inversa de A. (1.75 puntos)

ii) Calcule y simplifique la derivada de la función $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{2x-5}$. (0.75 puntos)

OPCIÓN B:

i) Dada la matriz $B=\begin{pmatrix}2 & a & a\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calcule los valores de a para los cuales la matriz B tiene inversa. (0.75 puntos)

ii) En un estudio sobre hábitos de compras de libros entre los jóvenes de una región, la mitad de los encuestado hace compras por internet, el 40% compra en tiendas físicas y el 35% combina ambas prácticas. Se elige un joven al azar.

a) Calcule la probabilidad de que compre libros en alguno de los dos formatos. (0.75 puntos)

b) Calcule la probabilidad de que no compre libros en tiendas físicas, sabiendo que tampoco compra en internet. (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

PREGUNTA 1:
Una empresa produce dos modelos de cristales, C1 y C2. Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente. La siguiente tabla recoge, para cada modelo de cristal, la cantidad de materia prima de cada tipo necesaria para su fabricación y el tiempo de fabricación.

	Materia prima M1 (kg/m^2)	Materia prima M2 (kg/m^2)	Tiempo de fabricación (minutos/m^2)
C1	3	2	22
C2	6	1	14

Sabiendo que la empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m^2 de cristal, determine la cantidad diaria que se deberá fabricar de cada modelo de cristal si la empresa desea minimizar el tiempo de fabricación.

i) Plantee el problema. (1.25 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema.

(1.25 puntos)

Solución:

i) Llamamos "x" al número de metros cuadrados fabricados del cristal C1, "y" al número de metros cuadrados fabricados del cristal C2.

	Materia prima M1 (kg/m^2)	Materia prima M2 (kg/m^2)	Tiempo de fabricación (minutos/m^2)
M^2 de C1 (x)	3x	2x	22x
M^2 de C2 (y)	6y	y	14y
TOTALES	$3x+6y$	$2x+y$	$22x+14y$

La función a minimizar es el tiempo de fabricación: $T(x,y)=22x+14y$.

Obtenemos las inecuaciones asociadas a las restricciones del problema.

"La empresa quiere fabricar diariamente al menos 20 m^2 de cristal" → $x+y\geq 20$.

"Para su fabricación utiliza dos tipos de materia prima (M1 y M2), de las que dispone diariamente de 135 kg y 60 kg, respectivamente" → $3x+6y\leq 135;\ 2x+y\leq 60$.

"Las cantidades son positivas" → $x\geq 0;\ y\geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ 3x+6y\leq 135 \\ 2x+y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ x+2y\leq 45 \\ 2x+y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=20$

x	$y=20-x$
0	20
10	10
20	0

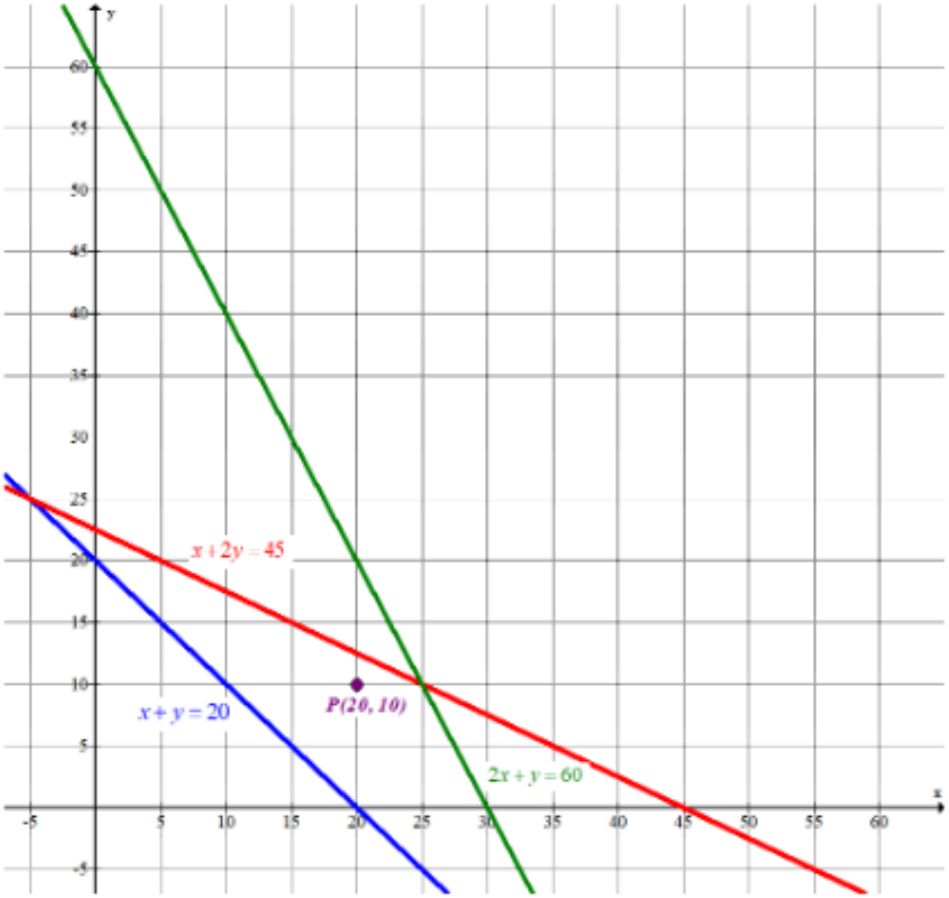
$x+2y=45$

x	$y=\frac{45-x}{2}$
0	45/2
25	10
45	0

$2x+y=60$ $x\geq 0;\ y\geq 0$

x	$y=60-2x$
0	60
25	10
30	0

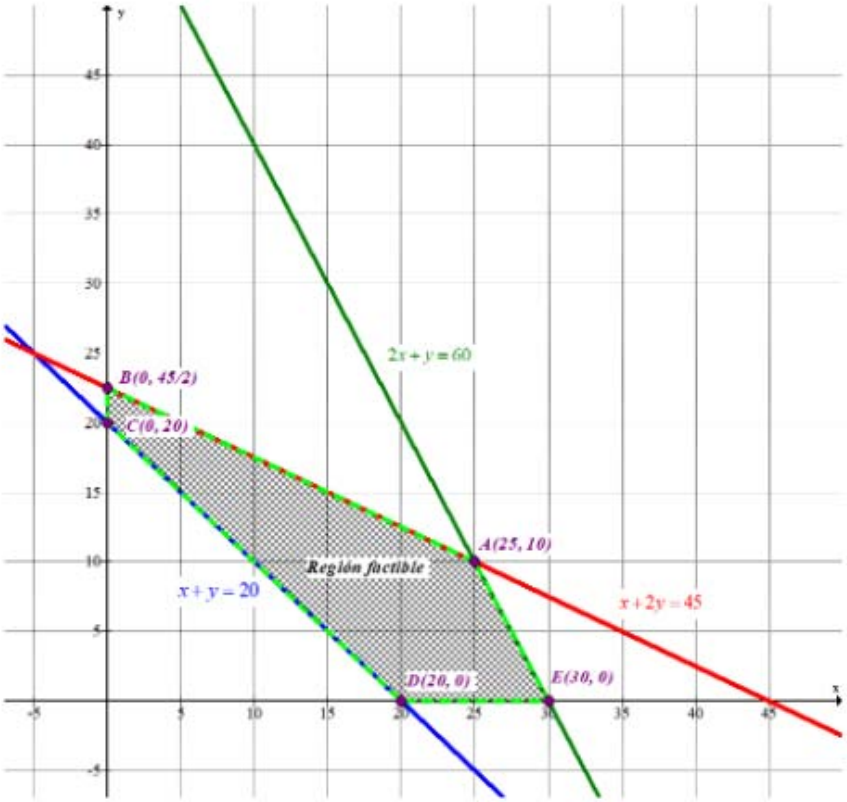
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ x+2y\leq 45 \\ 2x+y\leq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible son los puntos del primer cuadrante situados por debajo de las rectas verde y roja, y por encima de la recta azul.
Comprobamos que el punto P(20,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 20+10\geq 20 \\ 20+20\leq 45 \\ 2\cdot 20+10\leq 60 \\ 20\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas. Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función tiempo de fabricación en cada vértice de la región factible en busca del valor mínimo.

$$A(25,\ 10) \rightarrow T(25,10) = 22\cdot 25 + 14\cdot 10 = 690$$

$$B(0,\ 45/2) \rightarrow T\left(0, \frac{45}{2}\right) = 22\cdot 0 + 14\cdot \frac{45}{2} = 315$$

$$C(0,\ 20) \rightarrow T(0,20) = 22\cdot 0 + 14\cdot 20 = 280 \text{ Mínimo}$$

$$D(20,\ 0) \rightarrow T(20,0) = 22\cdot 20 + 14\cdot 0 = 440$$

$$E(30,\ 0) \rightarrow T(30,0) = 22\cdot 30 + 14\cdot 0 = 660$$

El tiempo mínimo de fabricación se consigue en el punto C(0, 20).
El tiempo mínimo de fabricación es de 280 minutos y se consigue con la fabricación de 0 metros cuadrados del cristal C1 y 20 metros cuadrados del cristal C2.

Problema 2:

PREGUNTA 2:
La siguiente figura muestra el ala de una maqueta de avión de aeromodelismo.

El corte transversal del ala, representado gráficamente en los ejes de coordenadas, es:

La parte sombreada del corte transversal es la región del plano delimitada por el eje X y la curva que vienen dada por la función: $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{x}{5}+2$, *para* $0\le x\le 100$, donde x es la distancia horizontal (en cm) desde la parte delantera del ala e y es la altura (en cm) respecto al eje horizontal.

i) Calcule la altura máxima del ala y a qué distancia horizontal se alcanza. Razone analíticamente por qué es un máximo relativo. (1.25 puntos)
ii) Calcule el área de la parte sombreada del corte transversal. (1.25 puntos)

Solución:

i) La altura del corte transversal nos la da la función $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{x}{5}+2$, *para* $0\le x\le 100$.

Derivamos la función y buscamos cuando se anula esta derivada.

$$f(x)=2\sqrt{x}-\frac{x}{5}+2\Rightarrow f'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{5}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{5}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{5}=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{5}\Rightarrow\sqrt{x}=5\Rightarrow\boxed{x=5^2=25}\in[0,100]$$

Sustituimos el valor del punto crítico $x=25$ en la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{5}=x^{-1/2}-\frac{1}{5}\Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{2}x^{-1/2-1}=\frac{-1}{2}x^{-3/2}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(25)=\frac{-1}{\sqrt{25^3}}<0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función presenta un máximo relativo para $x=25$.

Para este valor la altura vale $f(25)=2\sqrt{25}-\frac{25}{5}+2=10-5+2=7$ centímetros.

La altura máxima del ala es de 7 centímetros y se alcanza a 25 centímetros del comienzo del ala.

ii) El área es el valor de la integral definida entre 0 y 100 de la función.

$$Área = \int_0^{100} f(x)\,dx = \int_0^{100} 2\sqrt{x} - \frac{x}{5} + 2dx = \int_0^{100} 2x^{1/2} - \frac{x}{5} + 2dx =$$

$$= \left[2\frac{x^{1/2+1}}{1+1/2} - \frac{x^2}{10} + 2x \right]_0^{100} = \left[2\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{10} + 2x \right]_0^{100} = \left[\frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{10} + 2x \right]_0^{100} =$$

$$= \left[\frac{4\cdot 100^{3/2}}{3} - \frac{100^2}{10} + 200 \right] - \left[\frac{4\cdot 0^{3/2}}{3} - \frac{0^2}{10} + 2\cdot 0 \right] =$$

$$= \frac{4000}{3} - 1000 + 200 = \boxed{\frac{1600}{3} \simeq 533.33\,cm^2}$$

El área de la parte sombreada del corte transversal vale $\frac{1600}{3}$ centímetros cuadrados.

Problema 3:

PREGUNTA 3:
Un estudio realizado en una comunidad autónoma concluyó que el tiempo de espera para una intervención de cirugía cardíaca sigue una distribución normal. A partir de una muestra de 100 pacientes operados, se calculó el siguiente intervalo de confianza al 97% para el tiempo medio (en días) de espera para la cirugía: $[28.264, 31.736]$.

i) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medido de espera para la cirugía de la muestra de 100 pacientes. (1.25 puntos)

ii) Construya un intervalo de confianza al 91% para el tiempo medio de espera para una intervención de cirugía cardíaca. Interprete la solución en el contexto del problema. (1.25 puntos)

Solución:

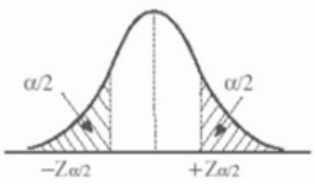
i) X = El tiempo (en días) de espera para una intervención de cirugía cardíaca. $X = N(\mu, \sigma)$

El tamaño de la muestra es $n = 100$.

La media muestral es el valor central del intervalo $\bar{x} = \dfrac{28.264 + 31.736}{2} = 30$ días.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 97 %

$$1-\alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,[illegible]79
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,[illegible]675
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,[illegible]064
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,[illegible]443
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,[illegible]808
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,[illegible]157
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,[illegible]486
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,[illegible]794
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,[illegible]078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,[illegible]340
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,[illegible]577
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,[illegible]790
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,[illegible]980
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,[illegible]147
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,[illegible]292
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,[illegible]418
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,[illegible]625
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,[illegible]616
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,[illegible]693
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,[illegible]756
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,[illegible]808
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{31.736 - 28.264}{2} = 1.736$$

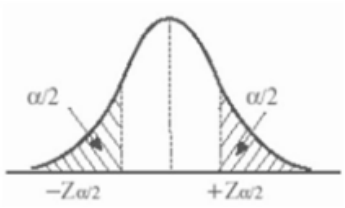
Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.736 = 2.17 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{1.736 \cdot 10}{2.17} = 8} \text{ días}$$

La media muestral es de 30 días de espera. La varianza poblacional es $\sigma^2 = 8^2 = 64$ días^2.

ii) Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 91 %

$$1-\alpha=0.91\rightarrow\alpha=0.09\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0.045\rightarrow1-\frac{\alpha}{2}=0.955\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1.69+1.70}{2}=1.695$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	[illegible]	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,[illegible]
0,1	0,[illegible]	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,[illegible]
0,2	0,[illegible]	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,[illegible]
0,3	0,[illegible]	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,[illegible]
0,4	0,[illegible]	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,[illegible]
0,5	0,[illegible]	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,[illegible]
0,6	0,[illegible]	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,[illegible]
0,7	0,[illegible]	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,[illegible]
0,8	0,[illegible]	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,[illegible]
0,9	0,[illegible]	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,[illegible]
1,0	0,[illegible]	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,[illegible]
1,1	0,[illegible]	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,[illegible]
1,2	0,[illegible]	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,[illegible]
1,3	0,[illegible]	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,[illegible]
1,4	0,[illegible]	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,[illegible]
1,5	0,[illegible]	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,[illegible]
1,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1.695\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}=1.356\ \text{días}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x}-Error,\ \bar{x}+Error\right)=\left(30-1.356,\ 30+1.356\right)=\left(28.644,\ 31.356\right)$$

Podemos afirmar, con un nivel de confianza del 91% que el tiempo medio de espera para una cirugía cardíaca está comprendido entre 28.644 y 31.356 días.

Problema 4:

PREGUNTA 4
OPCIÓN A:

i) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calcule, si es posible, la matriz inversa de A. (1.75 puntos)

ii) Calcule y simplifique la derivada de la función $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{2x-5}$. (0.75 puntos)

OPCIÓN B:

i) Dada la matriz $B=\begin{pmatrix}2 & a & a\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calcule los valores de a para los cuales la matriz B tiene inversa. (0.75 puntos)

ii) En un estudio sobre hábitos de compras de libros entre los jóvenes de una región, la mitad de los encuestado hace compras por internet, el 40% compra en tiendas físicas y el 35% combina ambas prácticas. Se elige un joven al azar.

a) Calcule la probabilidad de que compre libros en alguno de los dos formatos. (0.75 puntos)
b) Calcule la probabilidad de que no compre libros en tiendas físicas, sabiendo que tampoco compra en internet. (1 punto)

Solución 4A:

i) Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -2 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0+2+0+4-0+2=8\neq 0$$

El determinante es distinto de cero y existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ -1 & 2 & 2\\ -2 & -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/8 & -1/4 & 3/4\\ -1/8 & 1/4 & 1/4\\ -1/4 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

ii) Calculamos la derivada y la simplificamos todo lo posible.

$$f(x)=\frac{e^{3x}}{2x-5}\Rightarrow f(x)=\frac{3e^{3x}(2x-5)-2e^{3x}}{(2x-5)^2}=\frac{e^{3x}(6x-15)-2e^{3x}}{(2x-5)^2}=\frac{e^{3x}(6x-17)}{(2x-5)^2}$$

Solución 4B:

i) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser distinto de cero. Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - a + 0 - 2a - 0 + 2 = -3a + 2$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow 3a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

El determinante de la matriz B se anula para $a = \frac{2}{3}$.

La matriz B tiene inversa para cualquier valor de a distinto de $\frac{2}{3}$.

ii) Realizamos una tabla de contingencia.

	Tienda física	No compra en tienda física	
Compra por internet	35		50
No compra por internet			
	40		100

Completamos la tabla.

	Tienda física	No compra en tienda física	
Compra por internet	35	**15**	50
No compra por internet	**5**	**45**	**50**
	40	**60**	100

a) Hay un 45% de los jóvenes que no compra en ningún formato, por lo que el restante 55% compra en alguno de los formatos. La probabilidad de que la persona elegida al azar compre libros en alguno de los dos formatos es de 0.55.

b) Hay un 50% de los jóvenes encuestados que no compra por internet. De estos un 45% no compra en tiendas físicas. La probabilidad de que el joven elegido al azar entre los que no compran por internet tampoco compre libros en tiendas físicas vale $\frac{45}{50} = 0.9$.

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: UNIVERSIDAD PAÍS VASCO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

eman ta zabal zazu Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024 – 2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Problema 1:

PROBLEMA 1 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

a) $[\![\, 1,6\ puntos \,]\!]$ ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?

b) $[\![\, 0,3\ puntos \,]\!]$ ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

c) $[\![\, 0,6\ puntos \,]\!]$ ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

Problema 2:

PROBLEMA 2

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2

APARTADO 2.1 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.

El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente.

Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

a) $[\![\, 1\ punto \,]\!]$ Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

b) $[\![\, 1,5\ puntos \,]\!]$ Resuelve el problema.

APARTADO 2.2 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $[\![\, 0,6\ punto \,]\!]$ Calcula, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A^2(a)$ valga 4.

b) $[\![\, 1\ punto \,]\!]$ Comprueba si la matriz $A(a)$ es regular (invertible) para los valores de a obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso $a = 2$, calcula $A^{-1}(a)$.

c) $[\![\, 0,9\ puntos \,]\!]$ Determina la siguiente matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3:

PROBLEMA 3

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2

APARTADO 3.1 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Las funciones $E(x)$ y $D(x)$ representan, respectivamente, el rendimiento de dos pintores, Eneko y Deiene un determinado día que trabajan durante 8 horas.

Ambas funciones miden los metros cuadrados pintados por hora y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \le x \le 8$$

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \le x \le 8$$

a) $[\![\, 0,3\ puntos \,]\!]$ ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?

b) $[\![\, 0,6\ puntos \,]\!]$ ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?

c) $[\![\, 0,5\ puntos \,]\!]$ ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?

d) $[\![\, 0,3\ puntos \,]\!]$ ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?

e) $[\![\, 0,8\ puntos \,]\!]$ Al final de la jornada laboral de ese día, ¿cuántos m^2 ha pintado Deiene en total?

APARTADO 3.2 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Sea la función $f(x)\colon (0,\ \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b}{x}$$

Sabemos que la recta $y = -2$ es la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

a) $[\![\, 1,25\ puntos \,]\!]$ Calcula el valor de los parámetros a y b.

b) $[\![\, 0,75\ puntos \,]\!]$ Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, cuando $a = b = -1$.

c) $[\![\, 0,5\ puntos \,]\!]$ Para los valores $a = b = -1$, ¿tiene la función, $f(x)$, algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, determínalo.

Problema 4:

PROBLEMA 4

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2

APARTADO 4.1 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Una bolsa contiene tres cartas del mismo tamaño con caras de diferentes colores.

Una carta es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca.

Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

a) $[\![\, 1\ puntos \,]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

b) $[\![\, 1,5\ puntos \,]\!]$ Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

APARTADO 4.2 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Iker dispone de dos días para preparar un examen. La probabilidad de estudiar solamente el primer día es del 10 %, la de estudiar los dos días es del 10 % y la de no hacerlo ningún día es del 25 %.

Calcular la probabilidad de que Iker estudie para el examen en cada uno de los siguientes casos:

a) $[\![\, 0,75\ puntos \,]\!]$ El segundo día.

b) $[\![\, 1\ punto \,]\!]$ Solamente el segundo día.

c) $[\![\, 0,75\ puntos \,]\!]$ El segundo día sabiendo que no ha estudiado el primero.

Problema 5:

PROBLEMA 5

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2

APARTADO 5.1 $[\![\, 2,5\ \boldsymbol{puntos} \,]\!]$

En un determinado año, la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el *Grado en Arquitectura Técnica* sigue una distribución normal de media 6,8 puntos y desviación típica 0,6 puntos.

Por otro lado, la nota del alumnado que se ha preinscrito en el *Grado en Biomedical Engineering* sigue una distribución normal de media 7 puntos y desviación típica 0,5 puntos.

En ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito que tiene las mejores calificaciones. Si Yolanda ha obtenido una nota de 7,25 puntos y Teresa de 7,45 puntos, ¿a qué grados tendrán opción de acceso?

APARTADO 5.2 $[\![\, 2,5\ \boldsymbol{puntos} \,]\!]$

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria, X, que sigue una distribución normal de media μ y varianza 169 cm^2.

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es 175 cm.

a) $[\![\, 0,4\ \boldsymbol{puntos} \,]\!]$ Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) $[\![\, 0,75\ \boldsymbol{puntos} \,]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura media esté entre 172 y 182 cm?

c) $[\![\, 0,75\ \boldsymbol{puntos} \,]\!]$ En la distribución de la media muestral, $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

d) $[\![\, 0,6\ \boldsymbol{puntos} \,]\!]$ Si se quiere estimar la estatura media del personal de dicho servicio de forma que el error máximo admisible no sobrepase los 2 cm, con un nivel de confianza del 94 %, ¿cuántas personas se tendrán que escoger para formar parte de la muestra?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

PROBLEMA 1 $[\![2,5\ puntos]\!]$

La elaboración de tapices es un arte que se transmite de generación en generación, por lo que la mayoría de los maestros tejedores tienen experiencia en tapicería tradicional y están capacitados para aprender las técnicas y procesos.

Con el fin de planificar la producción de estas pequeñas obras de arte, un fabricante egipcio organiza las necesidades de materia prima por meses y las unidades producidas por metro lineal. En un determinado mes dispone de 50 kg de hilo de seda, 40 kg de hilo de plata y 22,5 kg de hilo de oro.

Para crear algunos tapices se suelen necesitar días y emplear materiales más económicos (tipo A); otros, en cambio, se suelen tardar semanas y requerir de materiales de mayor calidad y coste para su creación (tipo B); pero todos ellos necesitan la paciencia y la atención de los expertos en los detalles para convertirse en una pieza de artesanía.

Para fabricar un metro lineal de tapiz del tipo A se necesitan 100 g de hilo de seda y 200 g de hilo de plata; y para cada metro lineal del tipo B, 200 g de hilo de seda, 100 g de hilo de plata y 100 g de hilo de oro.

El metro lineal de tapiz del tipo A se vende a 2.000 €, y en el caso del tipo B a 3.000 €.

Si se vende todo lo que se fabrica:

a) $[\![1,6\ puntos]\!]$ ¿Cuántos metros lineales de cada tipo de tapiz deben elaborarse ese mes para maximizar los ingresos?

b) $[\![0,3\ puntos]\!]$ ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

c) $[\![0,6\ puntos]\!]$ ¿Qué cantidades de hilo de seda, plata y oro quedarán cuando se fabriquen los metros lineales de cada tipo de tapiz que generan el ingreso máximo?

Solución:

"PLANIFICACIÓN EN LA FABRICACIÓN DE TAPICES: PROGRAMACIÓN LINEAL"

a) Metros lineales que hay que realizar de cada tipo de tapiz para maximizar los ingresos:

	Seda	Plata	Oro	Precio	Variables
A	100 g	200g	0	2.000 €	x
B	200 g	100 g	100 g	3.000 €	y
Disponibilidad	50 kg	40 kg	22,5 kg		

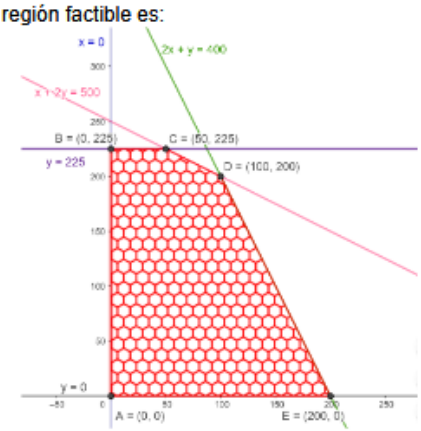
- La función objetivo es:

$$f(x,y) = 2.000x + 3.000\,y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 100x + 200y \leq 50.000 \\ 200x + 100y \leq 40.000 \\ 100\,y \leq 22.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Los vértices son:

$$A(0,0)\,,\quad B(0,225)\,,\quad C(50,225)\,,\quad D(100,200)\,,\quad E(200,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$

$$f(B) = f(0,225) = 675.000$$

$$f(C) = f(50,225) = 775.000$$

$$f(D) = f(100,200) = 800.000$$

$$f(E) = f(200,0) = 400.000$$

El valor máximo de la función se obtiene en el punto D **(100,200)**, por lo que para obtener el ingreso máximo hay que realizar **100 m lineales de tapiz tipo A y 200 m lineales de tapiz tipo B.**

b) El ingreso máximo:

$$f(x,y) = f(D) = f(100,200) = 800.000$$

Así, **el ingreso máximo es 800.000 €.**

c) Cuando se fabrican los metros lineales de cada tipo de tapiz que proporcionan el máximo ingreso, calculamos qué cantidad queda de cada tipo de hilo:

- La cantidad de hilo de seda usada es $= 100 \cdot 100 + 200 \cdot 200 = 50.000$, por lo tanto, **nos quedarán 0 kg de hilo de seda.**

- La cantidad de hilo de plata usada es $= 200 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 40.000$, por lo tanto, **nos quedarán 0 kg de hilo de plata.**

- La cantidad de hilo de oro usada es$= 100 \cdot 200 = 20.000$, **esto es, 20 kg,** por lo tanto, **nos quedarán 2,5 kg de hilo de oro.**

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 2.1

PROBLEMA 2

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2

APARTADO 2.1 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C.
El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Dichas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 €, respectivamente.
Compramos 20 latas que tienen un peso total de 10 kg y un valor total de 35,6 €. Queremos saber cuántas latas hemos comprado de cada fabricante.

a) $[\![\, 1\ punto \,]\!]$ Plantea el sistema de ecuaciones que resuelve el problema.

b) $[\![\, 1,5\ puntos \,]\!]$ Resuelve el problema.

Solución:

PROBLEMA 2

APARTADO 2.1

"COMPRA DE LATAS DE TOMATE: SISTEMA DE ECUACIONES Y RESOLUCIÓN"

a) Planteamos el sistema de ecuaciones que resuelve el problema:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+2y+4z=40 \\ x+1{,}8y+3{,}3z=35{,}6 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 40 \\ 1 & 1{,}8 & 3{,}3 & 35{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0{,}8 & 2{,}3 & 15{,}6 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & -0{,}4 \end{pmatrix}$$

$F_2 \rightarrow F_2 - F_1$
$F_3 \rightarrow F_3 - F_1$

$F_3 \rightarrow F_3 - 0{,}8 \cdot F_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ y+3z=20 \\ -0{,}1z=-0{,}4 \end{cases} \Rightarrow z=4\,;\ y=8\,;\ x=8$$

Problema 2.2

APARTADO 2.2 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $[\![\, 0,6\ punto \,]\!]$ Calcula, razonadamente, el valor de a para que el determinante de $A^2(a)$ valga 4.

b) $[\![\, 1\ punto \,]\!]$ Comprueba si la matriz $A(a)$ es regular (invertible) para los valores de a obtenidos en el apartado anterior. Si es regular para el caso $a = 2$, calcula $A^{-1}(a)$.

c) $[\![\, 0,9\ puntos \,]\!]$ Determina la siguiente matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

Solución:

PROBLEMA 2

APARTADO 2.2

"PROPIEDADES Y CÁLCULOS DE MATRICES: DETERMINANTE E INVERSIBILIDAD"

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculamos el valor del parámetro a para que el valor del determinante de la matriz $A^2(a)$ sea 4.

- $4 = |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = (|A|)^2 \Rightarrow 4 = (|A|)^2 \Rightarrow |A| = \pm 2$

Hemos utilizado la propiedad de los determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

- $|A| = a$

Luego, $a = \pm 2$

b) Comprobamos que la matriz $A(a)$ es regular para los valores $a = \pm 2$

- ¿Es regular?

La matriz A es regular $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

  - En el apartado a), hemos obtenido que $|A| = \pm 2$ cuando $a = \pm 2$, luego es **regular** y por lo tanto $\exists\, A^{-1}$.
  - Otra forma de razonarlo es:

    $|A| = a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Entonces, como $a = \pm 2$ se obtiene que $\exists\, A^{-1}$.

- Calcularemos la matriz $A^{-1}(a)$, cuando $a = 2$:
  - $|A| = 2$
  - $Adj\,(A)^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\,(A(2))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
  - $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\,(A)^t \Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1/2} & -\mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

c) Calculamos la matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

- $M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}}$$

- $|M| = |A^t(2) \cdot A^{-1}(2)| = |A^t(2)| \cdot |A^{-1}(2)| = |A(2)| \cdot \frac{1}{|A(2)|} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{|M| = 1}$

Hemos utilizado las propiedades de los determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad |A^t| = |A| \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 3.1

PROBLEMA 3

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2

APARTADO 3.1 $[2,5\ puntos]$

Las funciones $E(x)$ y $D(x)$ representan, respectivamente, el rendimiento de dos pintores, Eneko y Deiene un determinado día que trabajan durante 8 horas.

Ambas funciones miden los metros cuadrados pintados por hora y se pueden determinar mediante las expresiones:

$$E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \le x \le 8$$

$$D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \le x \le 8$$

a) $[0,3\ puntos]$ ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?

b) $[0,6\ puntos]$ ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?

c) $[0,5\ puntos]$ ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?

d) $[0,3\ puntos]$ ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?

e) $[0,8\ puntos]$ Al final de la jornada laboral de ese día, ¿cuántos m^2 ha pintado Deiene en total?

Solución:

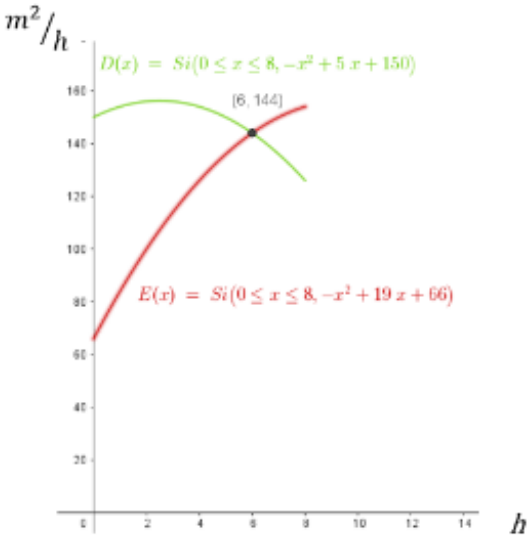
PROBLEMA 3

APARTADO 3.1

"ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DEL RENDIMIENTO DE DOS PINTORES"

$$Eneko \equiv E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \le x \le 8$$

$$Deiene \equiv D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \le x \le 8$$



a) ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?

El rendimiento inicial es el rendimiento al inicio del día, es decir, cuando la incógnita $x = 0$:

$$\begin{cases} E(0) = 66 \\ D(0) = 150 \end{cases}$$

Por lo tanto, **Deiene tiene un rendimiento inicial mejor, concretamente, 150 m^2/h.**

BY NC SA
Textos Marea Verde

b) ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?

- Calculamos $E'(x)$:

$$E'(x) = -2x + 19$$

- Calculamos cuándo se anula la primera derivada:

$$E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 19 = 0 \Rightarrow x = 9{,}5$$

- Analizamos la segunda derivada de la función en ese punto:

$$E''(x) = -2 \Rightarrow E''(9{,}5) = -2 < 0\ ,$$

Por lo tanto, la función tiene un máximo en ese punto.

Concluimos que el momento en el que ocurre el mayor rendimiento es transcurridas 9,5 horas que está fuera del dominio de definición, luego no alcanza su mayor rendimiento dentro de la jornada laboral de 8 horas.

- Analizamos el máximo dentro de su jornada laboral:

Estudiamos el crecimiento de la función y para ello analizamos el signo de la primera derivada:

$$E'(x) = -2x + 19 > 0 \Rightarrow x < 9{,}5$$

Luego la función es creciente en todo su dominio de definición, por lo tanto, el mayor rendimiento (dentro de su jornada laboral) lo tiene al de **8 horas**, siendo éste:

$$E(8) = \mathbf{154}\ {}^{m^2}/_{h}$$

c) ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?

$$D'(x) = -2x + 5 \Rightarrow$$

$$D'(x) = -2x + 5 = 0 \Rightarrow x = 2{,}5$$

$$D''(x) = -2 \Rightarrow D''(2{,}5) = -2 < 0$$

Por lo tanto, Deiene tiene el máximo rendimiento al cabo de **2,5 horas**, siendo este:

$$D(2,5) = 156,25\ {}^{m^2}/_{h}$$

Esto significa que, después de 2 horas y 30 minutos de trabajo Deiene alcanza su mayor rendimiento, cubriendo 156,25 ${}^{m^2}/_{h}$.

d) ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?

$$E(x) = D(x) \Rightarrow -x^2 + 19x + 66 = -x^2 + 5x + 150 \Rightarrow 14x = 84 \Rightarrow x = 6$$

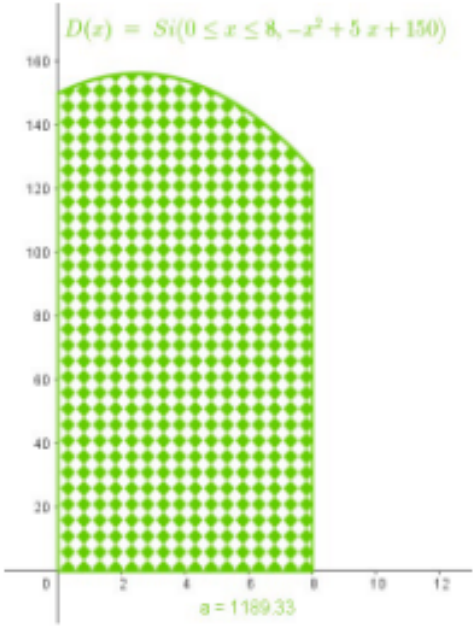
Por lo tanto, **en la sexta hora** tendrán el mismo rendimiento

e) Al final de la jornada laboral del día, ¿cuánto ha pintado Deiene en total?

$$\int_0^8 (-x^2 + 5x + 150)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} + 150x\right]_0^8 = -\frac{1}{3}\cdot 8^3 + \frac{5}{2}\cdot 8^2 + 150\cdot 8 =$$

$$= 1.189,33$$

Por lo tanto, al final de la jornada laboral del día Deiene ha pintado $\mathbf{1.189,33\ m^2}$.



Problema 3.2

APARTADO 3.2 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Sea la función $f(x)\colon (0,\ \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b}{x}$$

Sabemos que la recta $y = -2$ es la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 1$.

a) $[\![\, 1,25\ puntos \,]\!]$ Calcula el valor de los parámetros a y b.

b) $[\![\, 0,75\ puntos \,]\!]$ Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, cuando $a = b = -1$.

c) $[\![\, 0,5\ puntos \,]\!]$ Para los valores $a = b = -1$, ¿tiene la función, $f(x)$, algún máximo o mínimo relativo? En caso afirmativo, determínalo.

Solución:

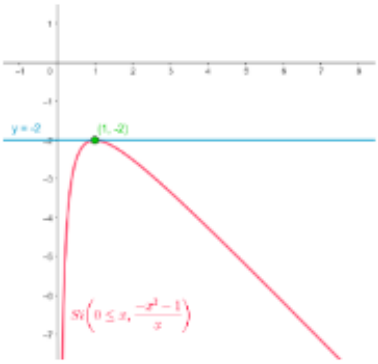
PROBLEMA 3

APARTADO 3.2

"CÁLCULO DE PARÁMETROS Y ANÁLISIS DE LA MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN"

a) Calculamos los valores de los parámetros a y b en la función:

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b}{x}$$



- Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2ax \cdot x - 1 \cdot (ax^2 + b)}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2} \Rightarrow f'(1) = a - b$$

- La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

- $f(1) = a + b$

  Sustituyendo:

$$y - (a + b) = (a - b)(x - 1) \Rightarrow y = (a - b)x + 2b$$

- Por otro lado, sabemos que la recta $y = -2$ es la recta tangente de la función en el punto $x = 1$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{matrix} a - b = 0 \\ 2b = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{a = -1\,;\, b = -1}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

b) Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ cuando $a = b = -1$:

$$f(x) = \frac{-x^2 - 1}{x} \quad \wedge \quad f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

- Analizamos qué valores anulan la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

- Como el dominio de definición de la función es $(0, \infty)$, analizaremos el punto $x = 1$:

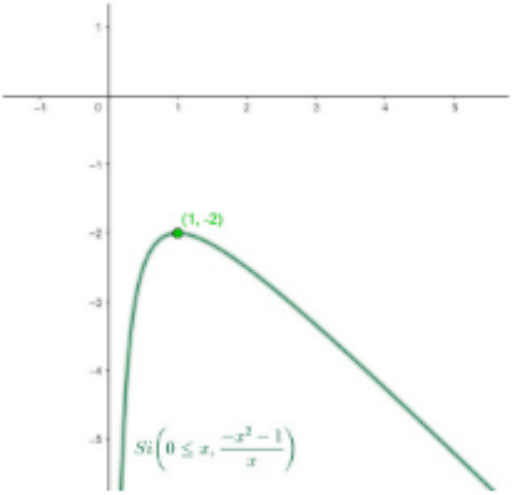
	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'(x)$ -	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f(x)$	↗	↘

Por lo tanto la función $f(x)$ es **creciente en el intervalo** $(0, 1)$ **y es decreciente en el intervalo** $(1, \infty)$**.**

c) Para los valores $a = b = -1$, ¿la función $f(x)$ tiene máximos o mínimos relativos?

- En el intervalo $(0, 1)$ la función es creciente y en el intervalo $(1, \infty)$ decreciente.
- La función $f(x)$ es continua en su dominio de definición $(0, \infty)$.

Por lo tanto, la función tiene un máximo relativo en el punto $(1, -2)$**.**



Problema 4.1

PROBLEMA 4

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2

APARTADO 4.1 $[\![\, 2,5\ puntos \,]\!]$

Una bolsa contiene tres cartas del mismo tamaño con caras de diferentes colores.

Una carta es roja por las dos caras, otra tiene una cara blanca y otra roja, y la tercera tiene una cara negra y otra blanca.

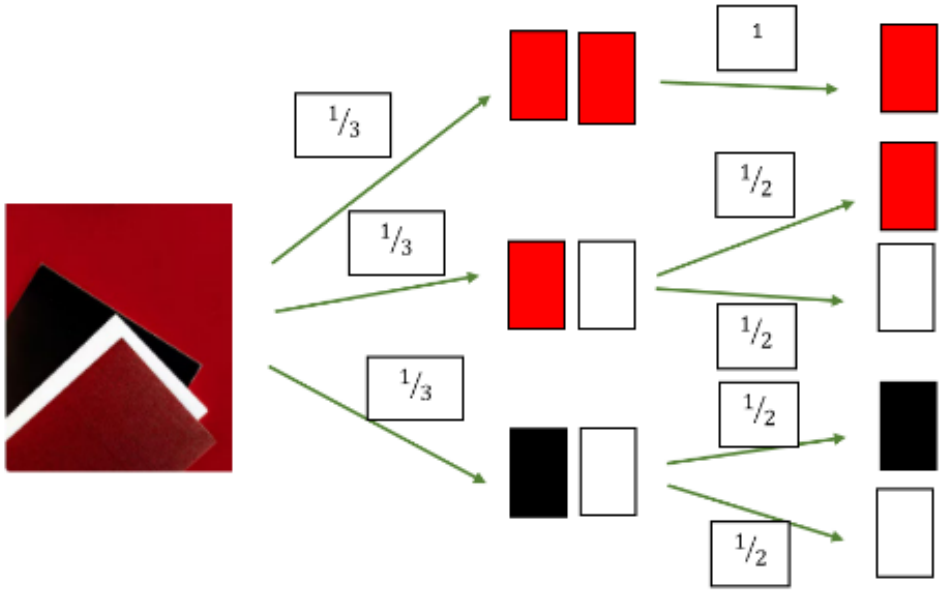
Se saca una carta al azar y se muestra, también al azar, una de sus caras.

a) $[\![\, 1\ puntos \,]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

b) $[\![\, 1,5\ puntos \,]\!]$ Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

Solución:

"CARTAS DE COLORES Y PROBABILIDADES"



Sean los siguientes sucesos

$C_1 = \{la\ primera\ carta\ (Roja\ Roja)\}$ $\qquad R = \{cara\ Roja\}$

$C_2 = \{la\ segunda\ carta\ (Roja\ Blanca)\}$ $\qquad B = \{cara\ Blanca\}$

$C_3 = \{la\ tercera\ carta\ (Negra\ Blanca)\}$ $\qquad N = \{cara\ Negra\}$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

$$P(R) = P(C_1)\cdot P(R \mid C_1) + P(C_2)\cdot P(R \mid C_2) + P(C_3)\cdot P(R \mid C_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{P(R) = \frac{1}{2}}$$

b) Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

- Calculamos la probabilidad de que la cara sea blanca:

$$P(B) = P(C_1)\,P(B \mid C_1) + P(C_2)\,P(B \mid C_2) + P(C_3)P(B \mid C_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boldsymbol{P(B) = \frac{1}{3}}$$

- Calculamos la probabilidad a posteriori:

$$P(R \mid B) = P(C_2 \mid B) = \frac{P(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C_2)\cdot P(B|C_2)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(R \mid B) = \frac{1}{2}}$$

Problema 4.2

APARTADO 4.2 $[\![\, 2,5\ puntos]\!]$

Iker dispone de dos días para preparar un examen. La probabilidad de estudiar solamente el primer día es del 10 %, la de estudiar los dos días es del 10 % y la de no hacerlo ningún día es del 25 %.

Calcular la probabilidad de que Iker estudie para el examen en cada uno de los siguientes casos:

a) $[\![\, 0,75\ puntos]\!]$ El segundo día.

b) $[\![\, 1\ punto]\!]$ Solamente el segundo día.

c) $[\![\, 0,75\ puntos]\!]$ El segundo día sabiendo que no ha estudiado el primero.

Solución:

PROBLEMA 4

APARTADO 4.2

"ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD DE QUE IKER PREPARE EL EXAMEN"

Sean los siguientes sucesos:

$$1 = \{estudiar\ el\ primer\ día\}$$

$$2 = \{estudiar\ el\ segundo\ día\}$$

Entonces:

- La probabilidad de estudiar solo el primer día es el10 % ⇒

$$\boldsymbol{P(1 \cap 2^c) = 0,1}$$

- La probabilidad de estudiar los dos días es el 10 % ⇒

$$\boldsymbol{P(1 \cap 2) = 0,1}$$

- La probabilidad de no estudiar ninguno de los dos días es el 25 % ⇒

$$\boldsymbol{P(1^c \cap 2^c) = 0,25}$$

- Con estos datos calculamos las probabilidades: $P(1 \cup 2)$ y $P(1)$:
  - $P(1^c \cap 2^c) = 0,25 = P(1 \cup 2)^c = 1 - P(1 \cup 2) \Rightarrow \boldsymbol{P(1 \cup 2) = 0,75}$
  - $P(1 \cap 2^c) = 0,1 = P(1) - P(1 \cap 2) = P(1) - 0,1 \Rightarrow \boldsymbol{P(1) = 0,2} \Rightarrow \boldsymbol{P(1^c) = 0,8}$

Ahora calculamos las probabilidades pedidas en el enunciado del problema:

a) La probabilidad de que Iker estudie el examen el segundo día, esto es, $P(2)$:

$$P(1 \cup 2) = 0,75 = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2) \Rightarrow P(2) = 0,75 - 0,2 + 0,1 = 0,65 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(2) = 0,65}$$

BY NC SA

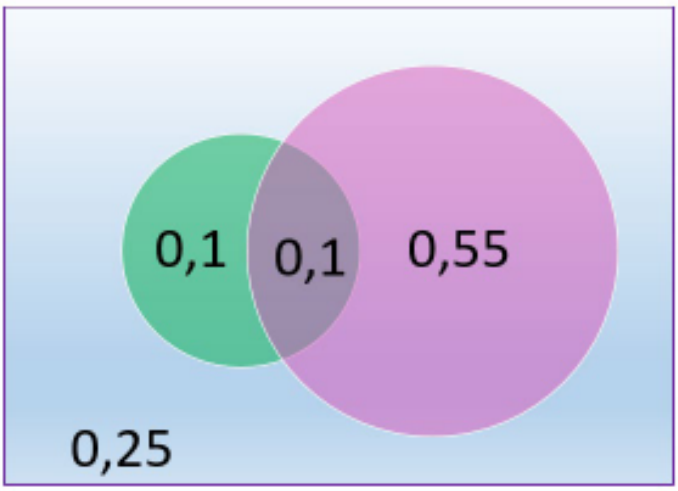
b) La probabilidad de que Iker estudie el examen solo el segundo día, esto es, $P(1^c \cap 2)$:

$$P(1^c \cap 2) = P(2) - P(1 \cap 2) = 0{,}65 - 0{,}1 = 0{,}55 \Rightarrow \boldsymbol{P(1^c \cap 2) = 0{,}55}$$

c) La probabilidad de que Iker estudie el examen el segundo día sabiendo que no ha estudiado el primer día:

$$P(2 \mid 1^c) = \frac{P(1^c \cap 2)}{P(1^c)} = \frac{0{,}55}{0{,}8} = 0{,}6875 \Rightarrow \boldsymbol{P(2 \mid 1^c) = 0{,}6875}$$

OTRA MANERA



La probabilidad de estudiar el primer día $\equiv P(1)$

La probabilidad de estudiar el segundo día $\equiv P(2)$

a) $P(2) = P(1 \cap 2) + P(1^c \cap 2) = 0{,}1 + 0{,}55$

b) Se puede comprobar el resultado en el diagrama de Venn.

Problema 5.1

PROBLEMA 5

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2

APARTADO 5.1 $[\![2,5\ puntos]\!]$

En un determinado año, la nota de la Prueba para el Acceso a la Universidad, PAU, del alumnado que se ha preinscrito en el *Grado en Arquitectura Técnica* sigue una distribución normal de media 6,8 puntos y desviación típica 0,6 puntos.

Por otro lado, la nota del alumnado que se ha preinscrito en el *Grado en Biomedical Engineering* sigue una distribución normal de media 7 puntos y desviación típica 0,5 puntos.

En ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito que tiene las mejores calificaciones. Si Yolanda ha obtenido una nota de 7,25 puntos y Teresa de 7,45 puntos, ¿a qué grados tendrán opción de acceso?

APARTADO 5.2 $[\![2,5\ puntos]\!]$

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria, X, que sigue una distribución normal de media μ y varianza 169 cm^2.

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es 175 cm.

Solución:

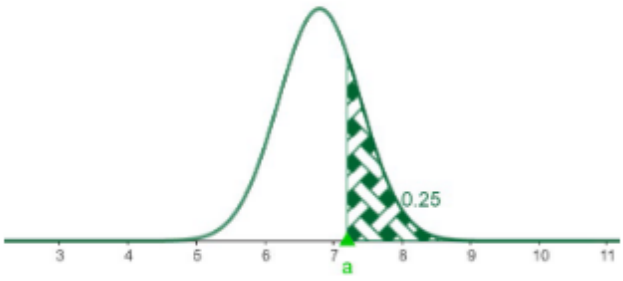
"PROBLEMA SOBRE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE LAS NOTAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD"

Llamamos:

$$Grado\ A \equiv Grado\ en\ Arquitectura\ Técnica$$
$$Grado\ B \equiv Grado\ en\ Biomedical\ Engineering$$

Calculamos la nota mínima de acceso en cada grado:

- **Grado A:** $X \equiv N(\mu,\ \sigma) = N(6{,}8\ ,\ 0{,}6)$



$P(X > a) = 0{,}25 \ \Rightarrow$

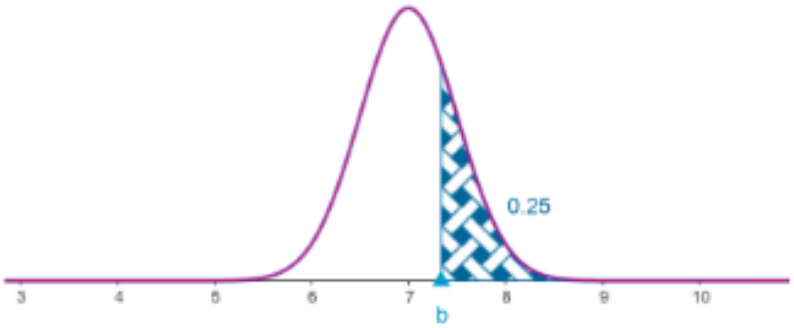
$$P\left(\frac{X-6{,}8}{0{,}6} > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \ \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25$$

$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \ \Rightarrow \ P\left(Z \leq \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \frac{a-6{,}8}{0{,}6} = 0{,}675 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{a = 7{,}205}$$

Por lo tanto, **la nota mínima que se pedirá para entrar en el grado A será 7,205 puntos.**

Grado B: $Y \equiv N(\mu', \sigma') = N(7, 0{,}5)$



$$P(Y > b) = 0{,}25 \Rightarrow P\left(\frac{Y-7}{0{,}5} > \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \left(Z \leq \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \frac{b-7}{0{,}5} = 0{,}675 \Rightarrow \boldsymbol{b = 7{,}3375}$$

Por lo tanto, **la nota mínima que se pedirá para entrar en el grado B será 7,3375 puntos.**

Como Yolanda tiene una nota de 7,25 puntos tendrá posibilidad de acceso sólo al grado en *Grado en Arquitectura Técnica (A)*; en cambio, Teresa que tiene una nota de 7,45 puntos tendrá posibilidad de acceso tanto al *Grado en Arquitectura Técnica (A)* como al *Grado en Biomedical Engineering (B).*

Problema 5.2:

APARTADO 5.2 $[\![2,5\ puntos]\!]$

La estatura (en centímetros) del personal del servicio foral de extinción de incendios y salvamento es una variable aleatoria, X, que sigue una distribución normal de media μ y varianza 169 cm^2.

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 81 se estima que la media es 175 cm.

a) $[\![0,4\ puntos]\!]$ Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que la estatura media esté entre 172 y 182 cm?

c) $[\![0,75\ puntos]\!]$ En la distribución de la media muestral, $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

d) $[\![0,6\ puntos]\!]$ Si se quiere estimar la estatura media del personal de dicho servicio de forma que el error máximo admisible no sobrepase los 2 cm, con un nivel de confianza del 94 %, ¿cuántas personas se tendrán que escoger para formar parte de la muestra?

Solución:

PROBLEMA 5

APARTADO 5.2

"ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL DE LA ESTATURA DEL PERSONAL DE UN SERVICIO"

a) Determinamos la distribución de la media muestral $\bar{X}$.

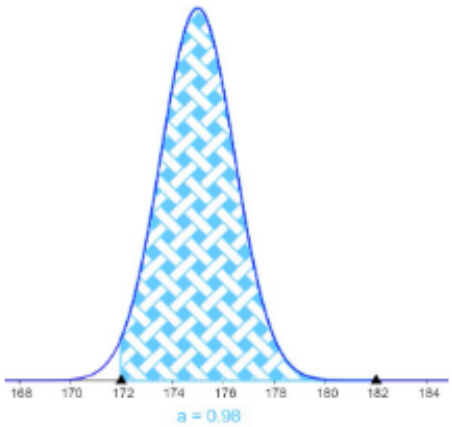
Altura $\equiv X \equiv \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, tal que $\mu\ ;\ \sigma^2 = 169 \Rightarrow \sigma = 13\ cm.$

- $X \equiv \mathcal{N}(\mu,\ 13)$
- Muestra aleatoria simple de tamaño 81 y $\mu = 175\ cm.$
- La distribución de la media muestral $\bar{X}$ es:

$$\bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(175,\ \frac{13}{\sqrt{81}}\right) = \mathcal{N}(175,\ 1{,}44) \Rightarrow \mathbf{\bar{X} \equiv \mathcal{N}(175,\ 1{,}44)}$$

b) Calculamos $P(172 \leq \bar{X} \leq 182)$:

$$P(172 \leq \bar{X} \leq 182) = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172)$$



- Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 175}{1{,}44} \Rightarrow \bar{X} = 1{,}44\,Z + 175$$

- $P(\bar{X} \leq 182) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 182) = P(Z \leq 4{,}86) = 1$
- $P(\bar{X} \leq 172) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 172) = P(Z \leq -2{,}08) = P(Z \geq 2{,}08) =$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}08) = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{P(172 \leq \bar{X} \leq 182)} = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172) = 1 - 0{,}0188 = \mathbf{0{,}9812} = \mathbf{98{,}12\ \%}$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

c) Determinamos el intervalo característico para el 99 % de $\bar{X}$:

- Sabemos que $\bar{X} \equiv \mathcal{N}(175, \ 1{,}44)$

$(175 - e, \ 175 + e)$ *es el intervalo característico para el* 99 %, *si* $P(175 - e \leq \bar{X} \leq 175 + e) = 0{,}99$

$$P(175 - e \leq \bar{X} \leq 175 + e) = 0{,}99 \Rightarrow P(\bar{X} \leq 175 + e) - P(\bar{X} \leq 175 - e) = 0{,}99$$

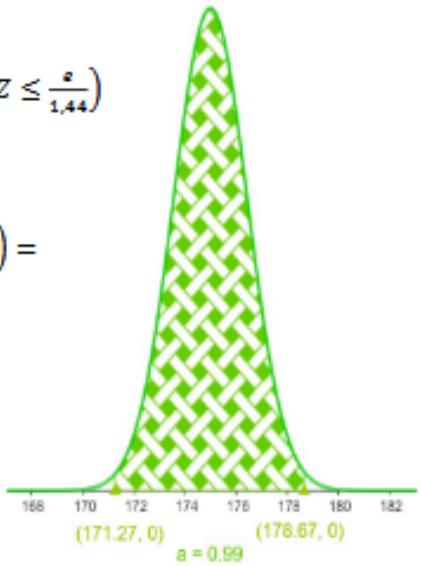
- Tipificación:

$$\bar{X} = 1{,}44\,Z + 175$$

- $P(\bar{X} \leq 175 + e) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 175 + e) = P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)$
- $P(\bar{X} \leq 175 - e) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 175 - e) =$

$$= P(0{,}45\,Z \leq -e) = P\left(Z \leq \frac{-e}{1{,}44}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)$$



Por lo tanto:

$$P(175 - e \leq \bar{X} \leq 175 + e) = P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)\right] = 0{,}99$$

$$\Rightarrow 2\,P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) = 0{,}995$$

Luego mirando a la tabla de la distribución normal:

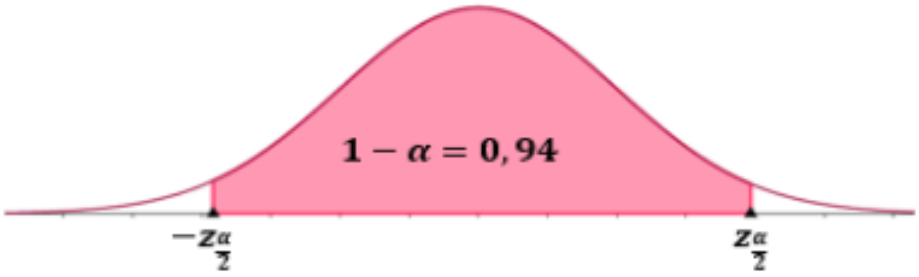
$$\frac{e}{1{,}44} = 2{,}575 \Rightarrow \boldsymbol{e = 3{,}705}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 99 % es:

$$(175 - e, \ 175 + e) = (\mathbf{171{,}3}, \ \mathbf{178{,}7})$$

d) Calculamos cuántas personas se tendrán que elegir de manera que el máximo error admisible no sea mayor que 2 cm con un nivel de confianza del 94 %.

- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$:



El nivel de confianza: $n_c = 0{,}94 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}03 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$$

- La fórmula del error máximo admisible para la distribución muestral de la media es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$e_m = 2 = 1{,}885 \cdot \frac{13}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 12{,}2525 \Rightarrow \ n = 150{,}123 \cong 151 \Rightarrow \ \boldsymbol{n = 151}$$

Por lo tanto, deberíamos de tomar una muestra de 151 personas para que el máximo error admisible no sea superior a 2 cm con un nivel de confianza del 94 %.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 5 partes, de 2,5 cada una. Se debe responder a 4 de ellas, y una pregunta de cada parte

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

La creación de una nueva fragancia requiere paciencia, una buena nariz y el conocimiento especial de la proporción justa de esencias de plantas y disolventes, como el alcohol etílico o el agua. La elaboración empieza con la disolución del alcohol con un poco de agua. Después se agrega el deseado aceite esencial a base de extractos de flores y se mezcla todo para que macere. El alcohol etílico es el componente principal de los perfumes en cuanto a concentración. Es la sustancia que diluye el concentrado del perfume para que pueda aplicarse sobre la piel. Una empresa fabrica dos tipos de perfume: A y B. El perfume A contiene un 5 % de extracto de rosas y un 10 % de alcohol por litro, mientras que un litro del perfume B se fabrica con un 10 % de extracto de rosas y un 15 % de alcohol. A mayor porcentaje de alcohol en la mezcla con los extractos de rosas, más volátil es la fragancia, menos fijación tiene y menor es su intensidad, siendo, por tanto, de una menor calidad. Así, el precio de venta del perfume A es de 24 €/ L y el del perfume B es de 40 €/L. La empresa quiere organizar la producción de forma óptima a partir de su disponibilidad de materia prima, que en un mes cualquiera es de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol.

a) $[\![\mathbf{2}\boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?

b) $[\![\mathbf{0},\ \mathbf{5}\boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿Cuál sería dicho ingreso?

Problema 2:

PROBLEMA 2

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2

APARTADO 2.1 [2,5 *p*untos]

El cajero automático de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero automático nos ha entregado exactamente 8 billetes. Además, el número de billetes de 10 euros es el doble que el de 20 euros.

a) $[\![\ \mathbf{1}\ \boldsymbol{punto}]\!]$ Plantea el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero automático.

b) $[\![\ \mathbf{1},\ \mathbf{5}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

APARTADO 2.2 [2,5 *p*untos]

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) $[\![\ \mathbf{0},\ \mathbf{4}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Exprésalo a través de una ecuación matricial.

b) $[\![\ \mathbf{0},\ \mathbf{8}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ ¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Razona tu respuesta.

c) $[\![\ \mathbf{1},\ \mathbf{3}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

Problema 3:

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2

APARTADO 3.1 [2,5 puntos]

Se ha observado que las ganancias/pérdidas obtenidas en un juego determinado están relacionadas con el tiempo invertido en el mismo, y que se expresan a través de la siguiente función:

$$G(t)=\frac{100t}{t^2+400}$$

donde t es el tiempo transcurrido (en minutos) y $G(t)$ son las ganancias/pérdidas (en miles de euros).

a) [**1 *punto***] Calcula cuánto tiempo hay que estar jugando para ganar lo máximo posible y cuál es dicha cantidad máxima.

b) [**0, 4 *puntos***] Cuanto más tiempo se dedica a jugar, ¿más dinero se gana? Razona la respuesta.

c) [**0, 4 *puntos***] ¿Puede llegarse a perder dinero en caso de jugar mucho tiempo? Razona la respuesta.

d) [**0, 7 *puntos***] ¿Cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

APARTADO 3.2 [2,5 puntos]

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -2\le x<0 \\ -x+2 & si \quad 0\le x<2 \\ x^2-4x+4 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

a) [**1 *punto***] Analiza la continuidad de la función en el intervalo (−2, 4).

b) [**0, 5 *puntos***] Realiza la representación gráfica de la función.

c) [**1 *punto***] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX .

Problema 4:

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2

APARTADO 4.1 [2,5 puntos]

Sobre una mesa tengo tres cajas con botones: la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 botones y la tercera 4 botones. Cada una de las cajas contiene sólo un botón rojo.
Si elijo una caja al azar y extraigo de ella un botón al azar:

a) [**0, 9 *puntos***] Calcula la probabilidad de que sea un botón rojo.

b) [**0, 9 *puntos***] Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la primera caja?

c) [**0, 7 *puntos***] Juntamos los botones de las tres cajas en una bolsa de la que extraemos con reemplazamiento cuatro botones al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres sean rojos?

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]

En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas numeradas del 000 al 999.

a) [**0, 5 *puntos***] Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.

b) [**0, 5 *puntos***] Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

c) [**0, 4 *puntos***] Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcular la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.

d) [**0, 3 *puntos***] ¿Cuál es la probabilidad de que el número premiado sea capicúa?

e) [**0, 8 *puntos***] Entre las papeletas numeradas, encuentra aquella cuyo número cumple la siguiente condición: si sumamos dicho número y 25 veces su inverso la suma que se obtiene es la mínima.

Problema 5:

PROBLEMA 5
En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]
En un determinado mes el tiempo diario de conexión a una determinada aplicación de inteligencia artificial del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) [**1 *punto***] Obtén el intervalo característico para el 80 %.
b) [**0, 3 *puntos***] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
c) [**0, 8 *puntos***] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
d) [**0, 4 *puntos***] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio diario de conexión a la aplicación de inteligencia artificial sea inferior a 207 minutos?

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]
Lanzamos 6.000 veces un dado equilibrado de seis caras.

a) [**0, 9 *puntos***] Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco sea superior a 1.500.
b) [**0, 9 *puntos***] Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco esté comprendido entre 1.000 y 1.100 (incluidos los valores extremos del intervalo).

Consideramos ahora que tenemos un dado cargado. Este dado cumple que la probabilidad de que salga un número impar es el triple de la probabilidad de que salga un número par.

c) [**0, 7 *puntos***] Si se lanza dos veces este dado cargado, ¿cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos se obtenga un número impar?

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

La creación de una nueva fragancia requiere paciencia, una buena nariz y el conocimiento especial de la proporción justa de esencias de plantas y disolventes, como el alcohol etílico o el agua. La elaboración empieza con la disolución del alcohol con un poco de agua. Después se agrega el deseado aceite esencial a base de extractos de flores y se mezcla todo para que macere. El alcohol etílico es el componente principal de los perfumes en cuanto a concentración. Es la sustancia que diluye el concentrado del perfume para que pueda aplicarse sobre la piel. Una empresa fabrica dos tipos de perfume: A y B. El perfume A contiene un 5 % de extracto de rosas y un 10 % de alcohol por litro, mientras que un litro del perfume B se fabrica con un 10 % de extracto de rosas y un 15 % de alcohol. A mayor porcentaje de alcohol en la mezcla con los extractos de rosas, más volátil es la fragancia, menos fijación tiene y menor es su intensidad, siendo, por tanto, de una menor calidad. Así, el precio de venta del perfume A es de 24 €/ L y el del perfume B es de 40 €/L. La empresa quiere organizar la producción de forma óptima a partir de su disponibilidad de materia prima, que en un mes cualquiera es de 70 litros de extracto de rosas y de 120 litros de alcohol.

a) $[\![2puntos]\!]$ ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?

b) $[\![0, 5puntos]\!]$ ¿Cuál sería dicho ingreso?

Solución 1:

PROBLEMA 1

"OPTIMIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y VENTA DE PERFUMES"

a) ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?

	Perfume	Alcohol	Precio	Variables
A	0,05 L	0,1 L	24 €/ L	x
B	0,1 L	0,15 L	40 €/ L	y
Disponibilidad	70 L	120 L		

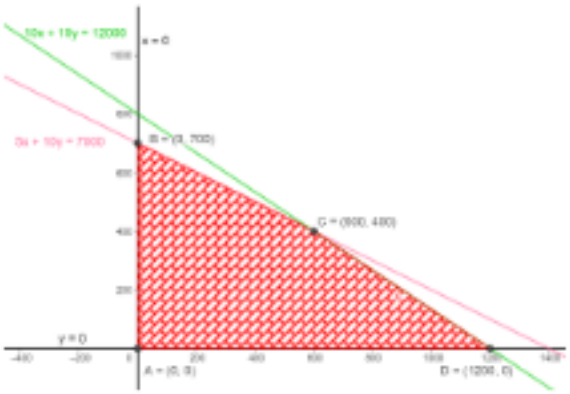
- La función objetivo es:

$$f(x,y) = 24x + 40\,y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}05x + 0{,}1y \leq 70 \\ 0{,}1x + 0{,}15y \leq 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 10y \leq 7.000 \\ 10x + 15y \leq 12.000 \end{cases}$$

- En el plano XY la región factible es:



- Los vértices son:

$$A(0,0), \quad B(0,700), \quad C(600,400), \quad D(1200,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$
$$f(B) = f(0,700) = 28.000$$
$$f(C) = f(600,400) = 30.400$$
$$f(D) = f(1200,0) = 28.800$$

- El valor máximo de la función se obtiene en el punto $C(600, 400)$; por lo tanto, se tienen que hacer 600 litros del tipo A y 400 litros del tipo B para conseguir el ingreso máximo.

b) Ingreso máximo:

$$f(x,y) = f(C) = f(600,400) = 30.400$$

De esta manera, el ingreso máximo es 30.400 €.

Problema 2:

PROBLEMA 2
En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 2.1 o APARTADO 2.2

APARTADO 2.1 [2,5 *p*untos]
El cajero automático de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero automático nos ha entregado exactamente 8 billetes. Además, el número de billetes de 10 euros es el doble que el de 20 euros.

a) [**1 *punto***] Plantea el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero automático.
b) [**1, 5 *puntos***] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

APARTADO 2.2 [2,5 *p*untos]
Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x-2y-2z=3 \\ x-z=1 \\ 2y-z=0 \end{cases}$$

a) [**0, 4 *puntos***] Exprésalo a través de una ecuación matricial.
b) [**0, 8 *puntos***] ¿La matriz de los coeficientes posee inversa? Razona tu respuesta.
c) [**1, 3 *puntos***] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

Solución 2.1:

PROBLEMA 2

APARTADO 2.1

"SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES PARA CALCULAR LA CANTIDAD DE BILLETES ENTREGADOS POR EL CAJERO"

a) Planteamos el sistema de ecuaciones lineales:

Las variables serán:

x = *número de billetes de* 10 €

y = *número de billetes de* 20 €

z = *número de billetes de* 50 €

- Hemos sacado 290 € del banco ➡ $10x + 20y + 50z = 290$
- El cajero nos ha entregado 8 billetes ➡ $x + y + z = 8$
- El número de billetes de 10 € es el doble que el de 20 € ➡ $x = 2y$
- Por lo tanto, el sistema es:

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 10x + 20y + 50z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \begin{cases} 3y + z = 8 \\ 40y + 50z = 290 \end{cases} \Rightarrow z = 8 - 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40y + 50(8 - 3y) = 290 \Rightarrow 40y + 400 - 150y = 290 \Rightarrow 110 = 110y \Rightarrow$$

$$y = 1$$

Por lo tanto:

$$x = 2;\ y = 1;\ z = 5$$

Textos Marea Verde

Solución 2.2:

PROBLEMA 2

APARTADO 2.2

"ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL MEDIANTE ÁLGEBRA MATRICIAL"

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) Expresamos el sistema de ecuaciones lineales a través de una ecuación matricial:

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿La matriz de los coeficientes posee inversa?

$$A \text{ es una matriz regular} \Leftrightarrow \exists\, A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 6 = 0 \Rightarrow \text{La matriz de los coeficientes A no tiene inversa.}$$

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$F_1 \leftrightarrow F_2$

$F_2 \rightarrow F_2 - 3 \cdot F_1$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

$F_3 \rightarrow F_3 + F_2$

Textos Marea Verde

PROBLEMA 3:

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 3.1 o APARTADO 3.2

APARTADO 3.1 [2,5 puntos]

Se ha observado que las ganancias/pérdidas obtenidas en un juego determinado están relacionadas con el tiempo invertido en el mismo, y que se expresan a través de la siguiente función:

$$G(t)=\frac{100t}{t^2+400}$$

donde t es el tiempo transcurrido (en minutos) y $G(t)$ son las ganancias/pérdidas (en miles de euros).

a) [**1 punto**] Calcula cuánto tiempo hay que estar jugando para ganar lo máximo posible y cuál es dicha cantidad máxima.

b) [**0, 4 puntos**] Cuanto más tiempo se dedica a jugar, ¿más dinero se gana? Razona la respuesta.

c) [**0, 4 puntos**] ¿Puede llegarse a perder dinero en caso de jugar mucho tiempo? Razona la respuesta.

d) [**0, 7 puntos**] ¿Cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?

APARTADO 3.2 [2,5 puntos]

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -2\le x<0 \\ -x+2 & si \quad 0\le x<2 \\ x^2-4x+4 & si \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

a) [**1 punto**] Analiza la continuidad de la función en el intervalo (−2, 4).

b) [**0, 5 puntos**] Realiza la representación gráfica de la función.

c) [**1 punto**] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX .

Solución 3.1:

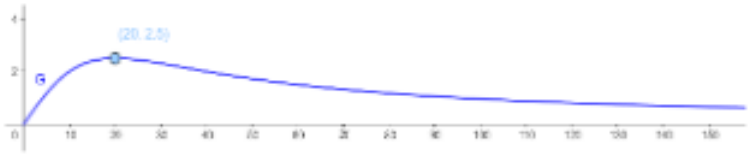
"OPTIMIZACIÓN DE BENEFICIOS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO DE JUEGO"

Función de ganancias/pérdidas= $G(t)$

$$G(t)=\frac{100\,t}{t^2+400}$$

donde t se mide en minutos y $G(t)$ en miles de euros.

a) Encontramos el tiempo t que maximiza las ganancias $G(t)$.



- Calculamos la primera derivada de la función:

$$G'(t)=\frac{100\cdot(t^2+400)-100t\cdot 2t}{(t^2+400)^2}=\frac{100\cdot(400-t^2)}{(t^2+400)^2}$$

- Estudiamos donde se anula la primera derivada:

$$G'(t)=0 \Rightarrow 100\cdot(400-t^2)=0 \Rightarrow 400-t^2 \Rightarrow t=\pm 20$$

Solo consideramos $t=20$ porque t es el tiempo, luego positivo.

- Estudiamos el crecimiento de la función:

	(0, 20)	(20, ∞)
Signo de $G'(t)$	$G'(t)>0$	$G'(t)<0$
$G(t)$	↗	↘

BY NC SA
Textos Marea Verde

- La función es continua en su dominio de definición $(0, \infty)$, y, como en el intervalo $(0, \infty)$ es creciente y en el intervalo $(20, \infty)$ es decreciente, entonces concluimos que la función $c(t)$ tiene un máximo en $t = 20$.

Por lo tanto: **el tiempo que maximiza las ganancias es 20 minutos y en ese tiempo la ganancia obtenida es de 2.500 €**

b) Cuanto más tiempo se dedica a jugar, ¿más dinero se gana?

No, porque tal y como hemos analizado en el apartado a), la función es decreciente en el intervalo $(20, \infty)$ y por lo tanto las ganancias disminuyen a partir del minuto 20.

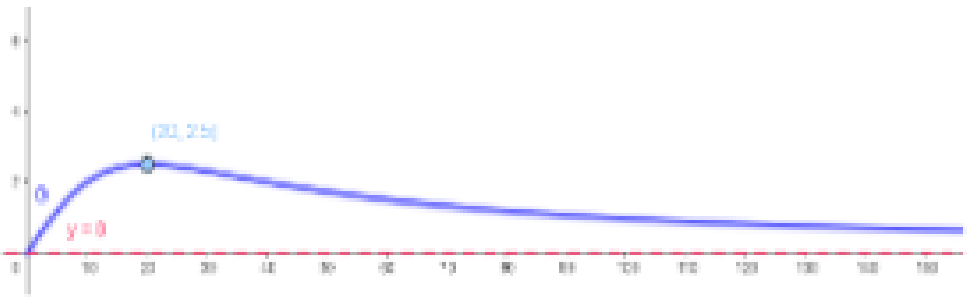
Concluimos que **no se gana más cuanto más tiempo se juega.**

c) ¿Puede haber pérdida de dinero en caso de haber exceso de tiempo?

La función $c(t)$ nunca toma valores negativos, ya que tanto el numerador como el denominador son positivos para $t > 0$.

Por lo tanto, **no es posible perder dinero**, pero las ganancias pueden volverse insignificantes al jugar demasiado tiempo. Es decir, jugar más allá del tiempo optimo reduce las ganancias progresivamente, pero no se pierde dinero.

d) ¿Cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/perdidas? ¿La relacionas con alguna caracteristica de la función?



Para analizar la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas a medida que pasan los años, calculamos el límite de la función $c(t)$ cuando t tiende a ∞.

Es decir:

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{100t}{t^2+400} = \lim_{t\to\infty} \frac{100}{t+\frac{400}{t}} = 0$$

Por lo tanto, las ganancias/pérdidas se estabilizan alrededor de unas ganancias de 0 €.

La recta $y = 0$ es una asintota horizontal de la función $G(t)$ y esa es la tendencia de la función a medida que pasa el tiempo.

Solución 3.2:

APARTADO 3.2

"ANALIZAR LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN. CÁLCULO DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN Y DEL ÁREA QUE FORMA CON EL EJE DE ABSCISAS."

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -2 \le x < 0 \\ -x+2 & si \quad 0 \le x < 2 \\ x^2-4x+4 & si \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) Continuidad en el intervalo $(-2,\ 4)$.

- $f(x)$ es continua en los intervalos $(-2,4)\ \cup\ (0,2)\ \cup\ (2,4)$ por estar definida por polinomios.
- Estudiamos la continuidad en $x=0$:

$$f(x) \text{ continua en } x=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

  - $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2$
  - $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(-x+2)=2$
  - $f(0)=2$
  - Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x=0$

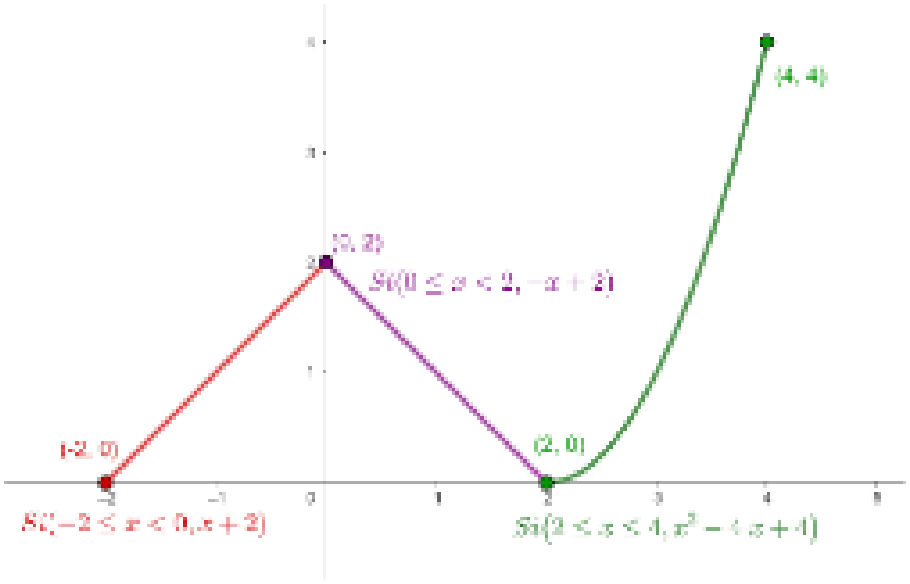
- Estudiamos la continuidad en $x=2$:

$$f(x) \text{ continua en } x=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

  - $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(-x+2)=0$
  - $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-4x+4)=0$
  - $f(2)=2^2-4\cdot 2+4=0$
  - Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x=2$

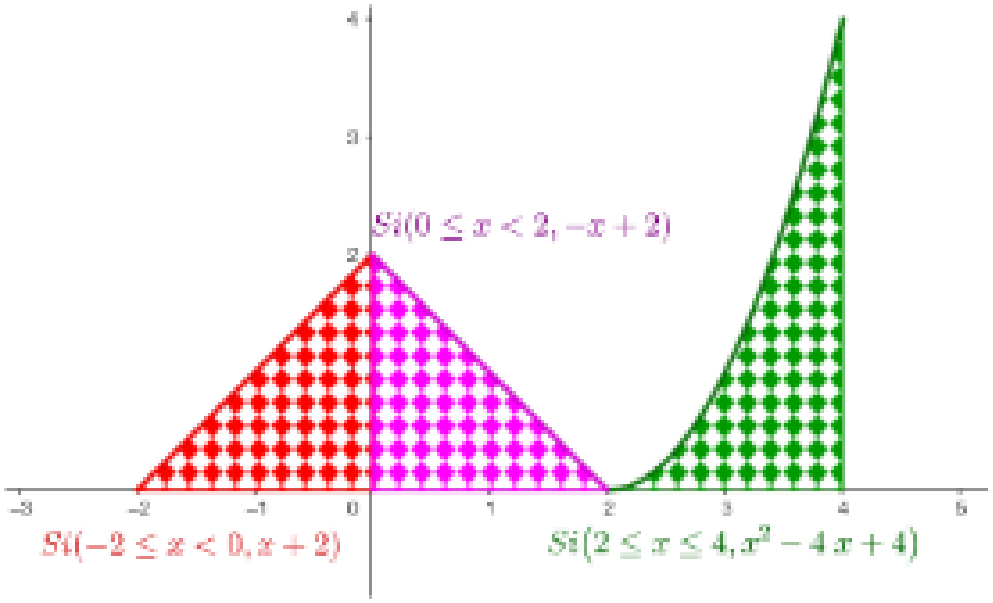
- Por lo tanto $f(x)$ es continua en el intervalo $(-2,4)$.

b) Representación gráfica.



c) Área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX:

- $A = A_1 + A_2 + A_3$



- Superficie en el intervalo $(-2,\ 0) = A_1$

$$A_1 = \int_0^2 [(-x+2)-0]dx = \int_0^2 (-x+2)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^2 =$$

$$= (-2+4)-0 = 2\ u^2$$

- Superficie en el intervalo $(0,\ 2) = A_2$

$$A_2 = A_1 = 2\ u^2$$

- Superficie en el intervalo $(2,\ 4) = A_3$

$$A_3 = \int_2^4 [(x^2-4x+4)-0]\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+4x\right]_2^4 =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3}-32+16\right)-\left(\frac{8}{3}-8+8\right) =$$

$$= \frac{56}{3}-16 = \frac{8}{3}\ u^2$$

Por lo tanto:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}\ u^2$$

Problema 4:

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 4.1 o APARTADO 4.2

APARTADO 4.1 [2,5 puntos]
Sobre una mesa tengo tres cajas con botones: la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 botones y la tercera 4 botones. Cada una de las cajas contiene sólo un botón rojo.
Si elijo una caja al azar y extraigo de ella un botón al azar:

a) [**0, 9 *puntos***] Calcula la probabilidad de que sea un botón rojo.
b) [**0, 9 *puntos***] Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la primera caja?
c) [**0, 7 *puntos***] Juntamos los botones de las tres cajas en una bolsa de la que extraemos con reemplazamiento cuatro botones al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres sean rojos?

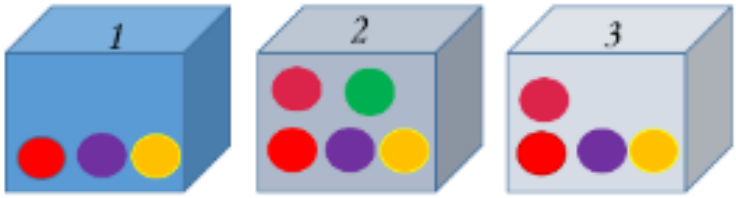
APARTADO 4.2 [2,5 puntos]
En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas numeradas del 000 al 999.

a) [**0, 5 *puntos***] Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) [**0, 5 *puntos***] Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) [**0, 4 *puntos***] Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcular la probabilidad de que el número premiado hoy también termine en 5.

d) [**0, 3 *puntos***] ¿Cuál es la probabilidad de que el número premiado sea capicúa?
e) [**0, 8 *puntos***] Entre las papeletas numeradas, encuentra aquella cuyo número cumple la siguiente condición: si sumamos dicho número y 25 veces su inverso la suma que se obtiene es la mínima.

Solución 4.1:

"PROBABILIDAD DE EXTRAER UN BOTÓN ROJO Y DETERMINAR SU ORIGEN"



a) Calculamos la probabilidad de ser roja:

Sean los siguientes sucesos:

- $R =$ *Sacar botón rojo*
- $C_1 =$ *Proceder de la primera caja*
- $C_2 =$ *Proceder de la segunda caja*
- $C_3 =$ *Proceder de la tercera cja*

Utilizamos la fórmula de la Probabilidad Total:

$$P(R) = P(C_1)\,P(R|\,C_1) + P(C_2)\,P(R|\,C_2) + P(C_3)\,P(R|\,C_3)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{47}{180} = 0{,}2611$$

$$\Rightarrow P(R) = 26{,}11\,\%$$

b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la primera caja?

Utilizamos la fórmula de la probabilidad a posteriori:

$$P(C_1|R) = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(C_1) \cdot P(R|C_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47} = 0{,}4255 \Rightarrow P(C_1|R) = 42{,}55\,\%$$

c) Se juntan los botones de las tres cajas en una bolsa y extraemos con reemplazamiento cuatro botones al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres sean rojos?

$P(3\ botones\ rojos\ y\ uno\ no\ rojo) =$

$$= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \overline{R_4}) + (R_1 \cap R_2 \cap \overline{R_3} \cap R_4) +$$

$$+ (R_1 \cap \overline{R_2} \cap R_3 \cap R_4) + P(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) =$$

$$= 4 \cdot P(\overline{R_1} \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) =$$

$$= 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}04687 = 4{,}69\,\%$$

OTRA MANERA

X = número de botones rojos $= B(n, p)$

- $n = 4$
- Calculamos la probabilidad de botón rojo:

$$p = P(roja) = \frac{3}{12} = 0{,}25 \Rightarrow q = 1 - p = 0{,}75$$

Por lo tanto: $X = B(4,\ 0{,}25)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}04687 = 4{,}69\,\%$$

Solución 4.2:

PROBLEMA 4

APARTADO 4.2

"CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UN SORTEO DE NÚMEROS DEL 000 AL 999"

a) Calculamos la probabilidad del que el número premiado termine en 5:

- Los números son del 000 al 999, y, por lo tanto, en total son 1.000 números posibles.
- Los números que terminan en 5 son:

$$\{x05,\ x15,\ x25,\ x35,\ x44,\ x55,\ x65,\ x75,\ x85,\ x95\}$$

Luego, hay 10 opciones, donde a su vez x puede tomar 10 valores distintos:

- $x = \{0,\ 1,\ 2, \cdots, 8,\ 9\}$
- Por lo tanto, hay $10 \cdot 10 = 100$ números que terminan en 5.

- Calculamos la probabilidad a través de la regla de Laplace:

$$P(\text{terminar en } 5) = \frac{100}{1.000} = 0,1 = 10\ \%$$

b) Calculamos la probabilidad de que el número premiado termine en 55:

- Si termina en 55, los números posibles son:

$$\{055,\ 155,\ 255,\ 355,\ 455,\ 555,\ 655,\ 755,\ 855,\ 955\}$$

Luego hay 10 números.

- Calculamos la probabilidad a través de la regla de Laplace:

$$P(\text{terminar en } 55) = \frac{10}{1.000} = 0,01 = 1\ \%$$

c) Sabiendo que el número premiado ayer acabó en 5, calculamos la probabilidad de que hoy también acabe en 5.

Cada día el experimento es independiente, por lo tanto, la probabilidad de una terminación no se ve condicionada por las terminaciones de otros días.

$$P(\text{terminar en 5 hoy} \mid \text{terminó en 5 ayer}) = P(\text{terminar en 5}) =$$

$$= \frac{100}{1.000} = 0{,}1 = 10\,\%$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número premiado sea capicúa?

Un número capicúa es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Por lo tanto, en las papeletas numeradas del 000 al 999, ser capicúa significa que el primer dígito debe ser igual al tercer dígito. Es decir, las papeletas con números capicúas son:

$$\{\ 0x0,\ \ 1x1,\ \ 2x2,\ \ 3x3,\ \ 4x4,\ \ 5x5,\ \ 6x6,\ \ 7x7,\ \ 8x8,\ \ 9x9\ \}$$

$$\text{siendo } x = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

Por lo tanto, tenemos $10 \cdot 10 = 100$ boletos con números capicúas.

Luego:

$$P(\text{capicúa}) = \frac{100}{1.000} = 0{,}1 = 10\,\%$$

e) Entre las tarjetas numeradas encontraremos la tarjeta con el número que cumple el requisito:

- Llamamos x al número que buscamos.
- Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

- Calculamos la primera derivada y qué valores la anulan:

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = \pm 5$$

- $x \geq 0 \Rightarrow x = 5$
- Estudiamos el signo de la primera derivada:

	$(0,\ 5)$	$(5,\ 999)$
Signo de $f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)$	↘	↗

- La función es continua en el intervalo $(0,\ 999)$
- Por lo tanto, la función tiene un mínimo en $x = 5$, o sea que el número buscado es el 5 y por lo tanto, la papeleta es la que tiene el número 005.

Problema 5:

PROBLEMA 5
En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados: APARTADO 5.1 o APARTADO 5.2

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]
En un determinado mes el tiempo diario de conexión a una determinada aplicación de inteligencia artificial del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) **[1 *punto*]** Obtén el intervalo característico para el 80 %.
b) **[0, 3 *puntos*]** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
c) **[0, 8 *puntos*]** ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
d) **[0, 4 *puntos*]** Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio diario de conexión a la aplicación de inteligencia artificial sea inferior a 207 minutos?

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]
Lanzamos 6.000 veces un dado equilibrado de seis caras.

a) **[0, 9 *puntos*]** Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco sea superior a 1.500.
b) **[0, 9 *puntos*]** Calcula la probabilidad de que el número de veces que salga el cinco esté comprendido entre 1.000 y 1.100 (incluidos los valores extremos del intervalo).

Consideramos ahora que tenemos un dado cargado. Este dado cumple que la probabilidad de que salga un número impar es el triple de la probabilidad de que salga un número par.

c) **[0, 7 *puntos*]** Si se lanza dos veces este dado cargado, ¿cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos se obtenga un número impar?

Solución 5.1:

APARTADO 5.1

"COMPRENSIÓN Y USO DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES."

a) Intervalo característico para el 80 %.

$$varianza = 144 \Rightarrow \sigma = \sqrt{144} = 12$$

$$X \equiv tiempo\ diario\ de\ conexión\ a\ una\ aplicación\ de\ I.A. = \mathcal{N}(210,\ \sigma = 12)$$

$(210 - e,\ 210 + e)$ *es el intervalo característico para el* 80 %, *si* $P(210 - e \leq X \leq 210 + e) = 0{,}8$

$P(210 - e \leq X \leq 210 + e) = 0{,}8 \Rightarrow P(X \leq 210 + e) - P(X \leq 210 - e) = 0{,}8 \Rightarrow$

- TIPIFICACIÓN:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 210}{12} \Rightarrow X = 12Z + 210$$

- $P(X \leq 210 + e) = P(12Z + 210 \leq 210 + e) =$

$$= P(12Z \leq e) = P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right)$$

- $P(X \leq 210 - e) = P(12Z + 210 \leq 210 - e) =$

$$= P(12Z \leq -e) = P\left(Z \leq \frac{-e}{12}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right)\right] = 0{,}8 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) - 1 = 0{,}8 \Rightarrow$$

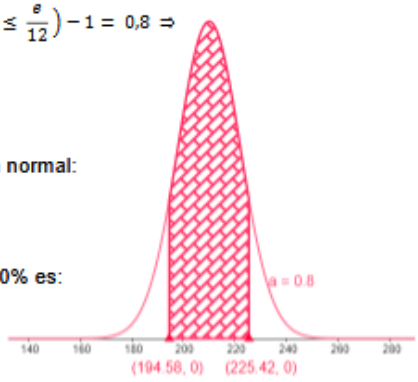
$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{12}\right) = 0{,}9$$

Entonces, mirando en la tabla de la distribución normal:

$$\frac{e}{12} = 1{,}285 \Rightarrow e = \mathbf{15{,}42}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 80% es:

$(210 - e,\ 210 + e) = (\mathbf{194{,}58};\ \mathbf{225{,}42})$



b) Calculamos $P(1.000 \leq X \leq 1.100)$:

$$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = P(X \leq 1.100) - P(X < 1.000) =$$

$$= P(X' \leq 1.100{,}5) - P(X' \leq 1.000{,}5) =$$

CORRECCIÓN DE YATES

- $P(X' < 1.100{,}5)$

$$P(X' < 1.100{,}5) = P\left(\frac{X' - 1.000}{28{,}87} \leq \frac{1.100{,}5 - 1.000}{28{,}87}\right) =$$

$$= P(Z \leq 3{,}48) = 0{,}9997$$

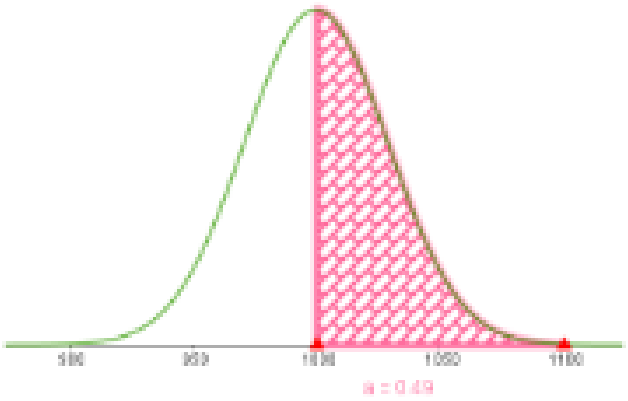
- $P(X' < 1.000{,}5)$

$$P(X' < 1.000{,}5) = P\left(\frac{X' - 1.000}{28{,}87} \leq \frac{1000{,}5 - 1.000}{28{,}87}\right) = P(Z \leq 0{,}017) = 0{,}5060$$

Por lo tanto:

$$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = P(X' < 1.100{,}5) - P(X' < 1.000{,}5) = 0{,}9997 - 0{,}5060 = 0{,}4937$$

$$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = 0{,}4937$$



c) Si se lanza el dado cargado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos se obtenga un número impar?

- Llamamos:

$$P(par) = p \Rightarrow P(impar) = 3p$$

- Como la suma de todas las probabilidades es 1:

$$P(par) + P(impar) = 1 \Rightarrow p + 3p = 1 \Rightarrow 4p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

- Por lo tanto:

$$P(impar) = 3p = \frac{3}{4}$$

- Los sucesos primer lanzamiento y segundo lanzamiento son sucesos independientes:

$I_1 = suceso\ salir\ impar\ en\ el\ primer\ lanzamiento$

$I_2 = suceso\ salir\ impar\ en\ el\ segundo\ lanzamiento$

Entonces:

$$P(I_2 \mid I_1) = P(I_2)$$

- Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(I_1 \cap I_2) = P(I_1) \cdot P(I_2 \mid I_1) = P(I_1) \cdot P(I_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(I_1 \cap I_2) = \frac{9}{16}$$

Solución 5.2:

PROBLEMA 5

APARTADO 5.2

"ANÁLISIS DE PROBABILIDADES EN EL LANZAMIENTO DE DADOS: EQUILIBRADOS Y CARGADOS"

- $X \equiv$ *número de cincos* es una variable que sigue una distribución binomial:

$$p = \frac{1}{6} = 0{,}1\hat{6} \Rightarrow q = (1-p) = 0{,}8\hat{3}$$

- $X \equiv$ *número de CINCOS* $\equiv B(n,p) = B\left(6.000,\ 0{,}1\hat{6}\right)$

- $X \equiv B\ (6.000,\ 0{,}167) \Rightarrow X' \sim N\left(n \cdot p,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 6.000 \cdot 0{,}1\hat{6} = 1.000 > 5 \\ n \cdot q = 6.000 \cdot 0{,}8\hat{3} = 5.000 > 5 \end{array}\right\}$$

$$X' \sim N\left(6.000 \cdot 0{,}1\hat{6}, \sqrt{6.000 \cdot 0{,}1\hat{6} \cdot 0{,}8\hat{3}}\right) = N\left(1.000, \sqrt{833,\hat{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{X' \sim N(1.000,\ \ 28,87)}$$

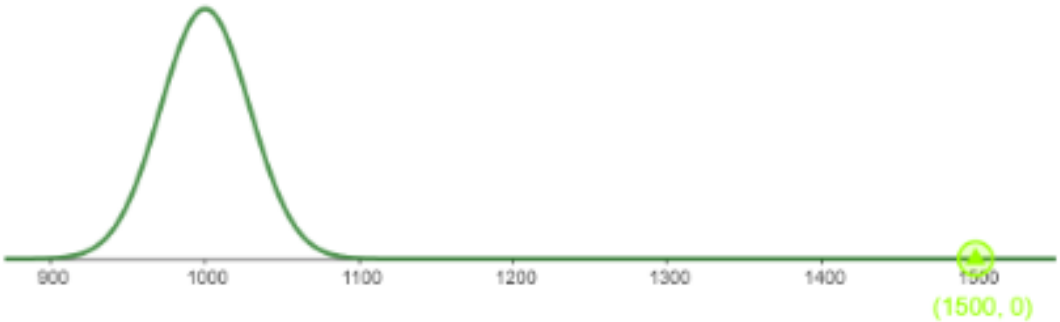
a) Calculamos $P(X > 1.500)$

$$P(X > 1.500) = P(X' > 1.500{,}5) = 1 - P(X' \leq 1.500{,}5) =$$

CORRECCIÓN DE YATES

$$= 1 - P\left(\frac{X' - 1.000}{28,87} \leq \frac{1.500{,}5 - 1.000}{28,87}\right) = 1 - P(Z \leq 17{,}33) = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(X > 1.500) = 0}$$



b) Calculamos $P(1.000 \leq X \leq 1.100)$:

$$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = P(X \leq 1.100) - P(X < 1.000) =$$

$$= P(X' \leq 1.100{,}5) - P(X' \leq 1.000{,}5) =$$

CORRECCIÓN DE YATES

- $P(X' < 1.100{,}5)$

$$P(X' < 1.100{,}5) = P\left(\frac{X' - 1.000}{28{,}87} \leq \frac{1.100{,}5 - 1.000}{28{,}87}\right) =$$

$$= P(Z \leq 3{,}48) = 0{,}9997$$

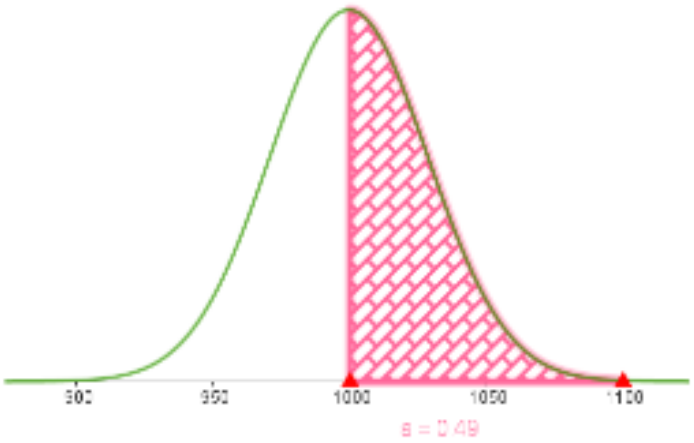
- $P(X' < 1.000{,}5)$

$$P(X' < 1.000{,}5) = P\left(\frac{X' - 1.000}{28{,}87} \leq \frac{1000{,}5 - 1.000}{28{,}87}\right) = P(Z \leq 0{,}017) = 0{,}5060$$

Por lo tanto:

$$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = P(X' < 1.100{,}5) - P(X' < 1.000{,}5) = 0{,}9997 - 0{,}5060 = 0{,}4937$$

$$\boldsymbol{P(1.000 \leq X \leq 1.100) = 0{,}4937}$$



c) Si se lanza el dado cargado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos se obtenga un número impar?

- Llamamos:

$$P(par) = p \;\Rightarrow\; P(impar) = 3p$$

- Como la suma de todas las probabilidades es 1:

$$P(par) + P(impar) = 1 \;\Rightarrow\; p + 3p = 1 \;\Rightarrow\; 4p = 1 \;\Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

- Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(impar) = 3p = \frac{3}{4}}$$

- Los sucesos primer lanzamiento y segundo lanzamiento son sucesos independientes:

  $I_1 \equiv suceso\ salir\ impar\ en\ el\ primer\ lanzamiento$

  $I_2 \equiv suceso\ salir\ impar\ en\ el\ segundo\ lanzamiento$

  Entonces:

$$P(I_2 \mid I_1) = P(I_2)$$

- Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(I_1 \cap I_2) = P(I_1) \cdot P(I_2 \mid I_1) = P(I_1) \cdot P(I_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(I_1 \cap I_2) = \frac{9}{16}}$$

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

VIDEOS

https://www.youtube.com/supported_browsers?next_url=https%3A%2F%2Fwww.youtube.com%2Fwatch%3Fv%3D1njolqFakAg

Textos Marea Verde

GENERALITAT VALENCIANA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE **JUNIO**

BAREMO DEL EXAMEN: Se ha de contestar un problema del apartado 1, un problema del apartado 2 y el problema del apartado 3. En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Problema 1 :

Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? *(3 puntos)*
b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? *(0,5 puntos)*

Problema 1. B. A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

Problema 2:

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{1+x} & \text{si} \quad 0\le x<4\\[2ex] 2x+4 & \text{si} \quad 4\le x<8\\[2ex] 3x+60-x^2 & \text{si} \quad 8\le x\le 9\end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. *(0,75 puntos)*
b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$. *(1,5 puntos)*
c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. *(0,5 puntos)*
d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x=8$ y la recta de ecuación $x=9$. *(0,75 puntos)*

Textos Marea Verde

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

Problema 3:

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad. *(1 punto)*
b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes. *(1 punto)*
c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes". *(1 punto)*

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1A:

Problema 1. A. Una empresa fabrica lotes de tres productos: P1, P2 y P3. La empresa tiene dos plantas de fabricación: A y B. En un día de funcionamiento, la planta A fabrica 1 lote del producto P1, 2 lotes del P2 y 1 lote del P3, mientras que la planta B fabrica 1 lote del producto P1, 1 del P2 y 5 del P3. Cada día de funcionamiento de la planta A cuesta 60 miles de euros y cada día de funcionamiento de la planta B cuesta 75 miles de euros. En los próximos días la empresa tiene que producir al menos 6 lotes del producto P1, al menos 8 lotes del producto P2 y al menos 10 lotes del producto P3.

a) ¿Cuántos días ha de funcionar cada planta para que el coste de producción sea mínimo? *(3 puntos)*
b) ¿Cuál es dicho coste mínimo? *(0,5 puntos)*

Solución:

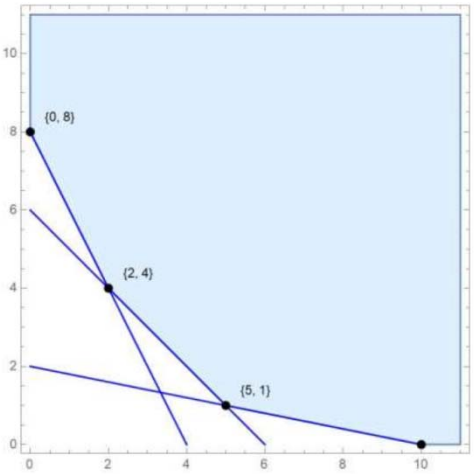
Denotamos por x el número de días de funcionamiento de la planta A y por y el número de días de funcionamiento de la planta B.

Función objetivo: $(x, y) = 60x + 75y$.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible: región de vértices (2,4), $B(5,1)$, $C(0,8)$ y $D(10,0)$.



El coste es mínimo cuando la planta A trabaja 5 días y la planta B trabaja 1 día. El coste mínimo es de 375 miles de euros.

Textos Marea Verde

Problema 1B:

Problema 1. B. A un espectáculo circense acuden 500 espectadores, y la recaudación del importe de las entradas asciende a 2.115 euros. Los menores de 5 años pagan el 20% de la entrada, y los que tienen entre 5 y 16 años el 50%. Calcula cuántos espectadores han pagado el importe total de la entrada, que vale 9 euros, cuántos han pagado el 20% de la entrada y cuántos el 50%, sabiendo que el número de espectadores que han pagado el 20% es el doble del número de espectadores que han pagado la entrada completa.

Solución:

Llamamos x al número de espectadores que pagan la entrada completa, y al número de espectadores que pagan el 20% y z al número de espectadores que pagan el 50 %. Entonces, tenemos

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 9x + 1{,}8y + 4{,}5z = 2.115 \\ y = 2x \end{cases}$$

La solución es x = 150, y = 300, z = 50

Textos Marea Verde

Problema 2A:

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{1+x} & \text{si} \quad 0\le x<4\\ 2x+4 & \text{si} \quad 4\le x<8\\ 3x+60-x^2 & \text{si} \quad 8\le x\le 9\end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de la función en el intervalo $[0,9]$. *(0,75 puntos)*

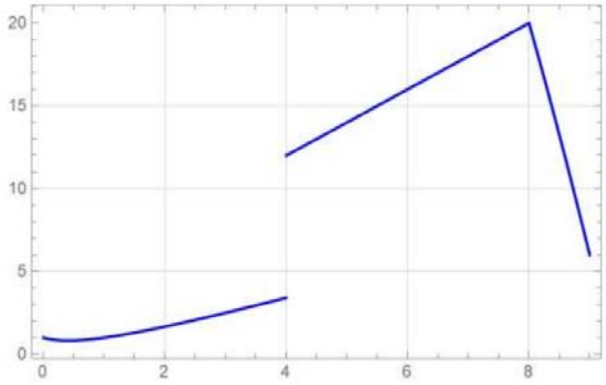
b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $[0,9]$. *(1,5 puntos)*

c) Calcular los puntos donde la función alcanza el máximo y el mínimo, y cuánto vale la función en esos puntos. *(0,5 puntos)*

d) Calcular el área de la región delimitada por esta función, el eje OX, la recta de ecuación $x=8$ y la recta de ecuación $x=9$. *(0,75 puntos)*

Solución:

a) La función no es continua en 4: el límite por la izquierda es 17/5=3,4 y el límite por la derecha es 12.
La función es continua en 8: el límite por la izquierda y por la derecha es 20
La función es continua en [0,4) unión con (4,9].
La gráfica de la función es la siguiente:



b) la derivada del primer trozo, que es $(-1+2x+x^2)/(1+x)^2$.
Es decreciente en [0, −1 + √2) y es creciente en (−1 + √2 ,4].

Es creciente en [4,8) y es decreciente en (8,9]

c) Mínimo es −1 + √2; el valor de la función en el mínimo es (−1 + √2) = 2√2 − 2.
Máximo es 8; el valor de la función en el máximo es (8) = 20

d) Primitiva de la función: $D+60x+\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$. Área = 79/6 = 13.1667

Textos Marea Verde

Problema 2B:

Problema 2. B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(0,5 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(0,5 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(0,5 puntos)*

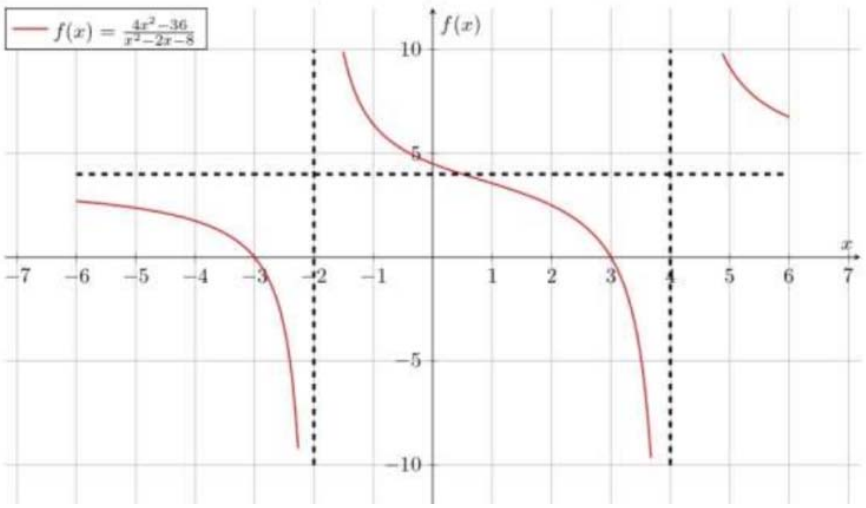
Solución:

a) Dominio: $R\backslash\{-2,4\}$. Puntos de corte con los ejes, en este caso, (−3,0), (3,0), (0, 9/2).

b) Las asíntotas verticales: la recta de ecuación x = −2 y la recta de ecuación x = 4. Asíntota horizontal: la recta de ecuación y = 4.

c) La función es decreciente en su dominio y la función no tiene ni máximos ni mínimos locales.

d) Gráfica:



Textos Marea Verde

Problema 3:

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado.

Problema 3. En un país se sabe que un 35% de personas vive en municipios pequeños (10 000 habitantes o menos), un 25% de personas vive en municipios medianos (entre 10 001 y 50 000 habitantes) y un 40% de personas vive en municipios grandes (más de 50 000 habitantes). Entre las personas que viven en municipios pequeños, un 20% se graduó en la universidad; entre las que viven en municipios medianos, un 30% se graduó en la universidad; y entre las que viven en municipios grandes, un 60% se graduó en la universidad. Seleccionamos al azar una persona de este país.

a) Calcula la probabilidad de que la persona seleccionada se haya graduado en la universidad. *(1 punto)*

b) Si sabemos que la persona seleccionada se graduó en la universidad, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un municipio con más de 10 000 habitantes. *(1 punto)*

c) Calcula la probabilidad de la intersección de los sucesos "la persona seleccionada vive en un municipio con 50 000 habitantes o menos" y "la persona seleccionada se graduó en la universidad o vive en un municipio con más de 10 000 habitantes". *(1 punto)*

Solución:

a) .

$$\begin{aligned} &P(\text{Graduado} \mid \text{Municipio Pequeño}) \cdot P(\text{Municipio Pequeño}) \\ &\quad + P(\text{Graduado} \mid \text{Municipio Mediano}) \cdot P(\text{Municipio Mediano}) \\ &\quad + P(\text{Graduado} \mid \text{Municipio Grande}) \cdot P(\text{Municipio Grande}) \\ &\quad = 0{,}2 \cdot 0{,}35 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}385. \end{aligned}$$

b) .

$$(P(\text{Graduado y Municipio Mediano}) + P(\text{Graduado y Municipio Grande}))/P(\text{Graduado}) = (0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}6 \cdot 0{,}4)/0{,}385 = 0{,}8182.$$

c)

$$\begin{aligned} &P(\text{“Municipio Pequeño o Mediano” y “Graduado o Municipio Mediano o Municipio Grande”}) \\ &\quad = P(\text{Graduado y Municipio Pequeño}) + P(\text{Mediano}) = 0{,}2 \cdot 0{,}35 + 0{,}25 = 0{,}32. \end{aligned}$$

Textos Marea Verde

GENERALITAT VALENCIANA	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A:

Problema 1A. Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

a) ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0.5 puntos)

Problema 1B:

1.B Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA + B^tC = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B. (2.5 puntos)

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de □ la matriz □□ es diagonal.

Problema 2A:

Enunciado: 2A.- Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste □□ tras □ meses de uso, para □ entre 0 y 50, viene dado por la función$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}$. Por su parte, el desgaste □□ para un neumático B tras □ meses de uso, para □ entre 0 y 50, viene dado por la función$D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$.

a) Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)

b) Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)

c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

Textos Marea Verde

Problema 2B:

2B. Se considera la función:

$$f(x) = \frac{4x^2 - 36}{x^2 - 2x - 8}$$

Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0.5 puntos)

Problema 3:

3. Una ciudad está implementando un programa de sostenibilidad ambiental. Como parte de este programa, los residentes tienen la opción de participar en dos actividades: limpieza de parques y plantación de árboles. Para evaluar el impacto de esta iniciativa, se realizó una encuesta a 2.000 ciudadanos, de los cuales 800 participaron en la limpieza de parques, 1.400 en la plantación de árboles, 300 en las dos actividades y 100 en ninguna de ellas. Seleccionamos al azar a uno de estos ciudadanos.

a) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades. (0.75 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en plantación de árboles. (0.75 puntos)

c) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades. (0.75 puntos)

d) Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, calcula la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques. (0.75 puntos)

.

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1A:

Problema 1A. Una agencia de viajes organiza excursiones a la montaña y a la playa. La agencia obtiene 700 euros de beneficio por cada excursión a la montaña y 500 euros por cada excursión a la playa. La agencia dispone de un total de 10 autobuses y 8 guías turísticos para las excursiones. Cada excursión a la montaña requiere 2 autobuses y 2 guías, mientras que cada excursión a la playa requiere 2 autobuses y 1 guía.

a) ¿Cuántas excursiones a la montaña y cuántas a la playa tiene que organizar la agencia para obtener el máximo beneficio posible? (3 puntos)

b) ¿Cuál es dicho beneficio máximo? (0.5 puntos)

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos tipos de excursiones (montaña y playa) cada una con sus características. Un objetivo (beneficio máximo) y unas restricciones (la disponibilidad de autobuses y guías).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuántas excursiones de cada tipo tienen que organizar para maximizar los beneficios por lo que las variables de decisión serán:

x — Excursiones a la montaña.

y — Excursiones a la playa.

Función objetivo: Queremos unos beneficios máximos. Por cada excursión a la montaña obtenemos un beneficio de 700 euros y por cada excursión a la playa 500 euros. Multiplicando por las variables y sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$B(x,y) = 700x + 500y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

La empresa dispone de un total de 10 autobuses y cada excursión a la montaña necesita 2 y cada excursión a la playa también necesita 2 por lo que la suma no podrá exceder el número máximo de autobuses:

$$2x + 2y \leq 10$$

La empresa dispone de un total de 8 guías y cada excursión a la montaña necesita 2 y cada excursión a la playa necesita 1 por lo que la suma no podrá exceder el número máximo de guías:

$$2x + y \leq 8$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0 \; y \geq 0 \\ 2x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 8 \end{cases}$$

Textos Marea Verde

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x$$

tabla de valores:

x	0	2	5
y	5	3	0

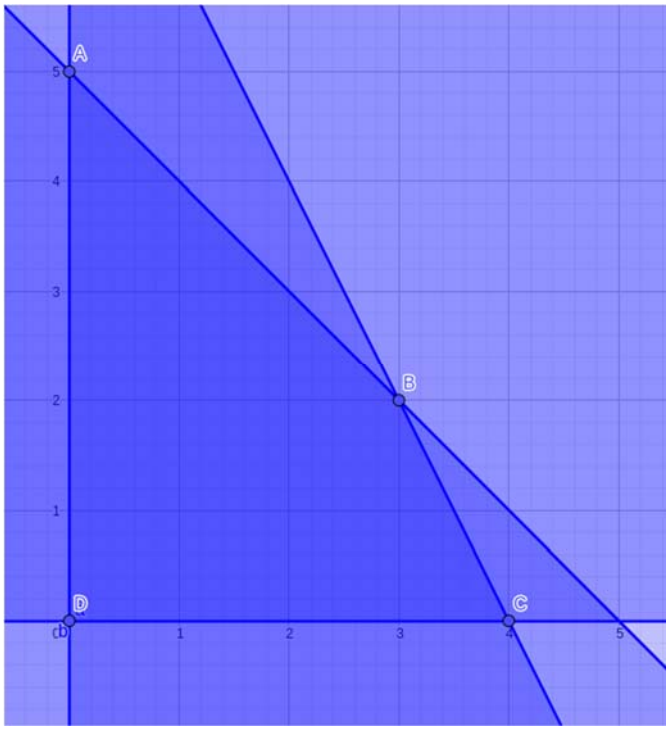
Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = 8 - 2x$$

tabla de valores:

x	0	2	4
y	8	4	0

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en todas podemos sustituir el $(0,0)$ y nos sale que la región se extiende en dirección al origen. Por lo que la representación queda:



Se trata de una región acotada que presenta cuatro vértices que salen directamente de nuestra representación:

Textos Marea Verde

- El primero es el A=(0,5).
- El segundo es el B=(3,2).
- El tercero es el C=(4,0).
- El cuarto es el D=(0,0).

La función objetivo era:$B(x,y) = 700x + 500y$sustituimos los vértices hallados:

$B(0,5) = 700 \cdot 0 + 500 \cdot 5 = 2500$ euros

$B(3,2) = 700 \cdot 3 + 500 \cdot 2 = 3100$ euros

$B(4,0) = 700 \cdot 4 + 500 \cdot 0 = 2800$ euros

$B(0,0) = 700 \cdot 0 + 500 \cdot 0 = 0$ euros

Como buscamos los beneficios máximos tenemos que se dan si realizan 3 excursiones a la montaña y 2 excursiones a la playa y los beneficios son de 3 100 €.

Textos Marea Verde

Problema 1B:

1.B Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA+B^tC=I$, siendo I la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B. (2.5 puntos)

b) Consideremos la matriz $D=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & z\end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de □ la matriz □□ es diagonal. (1 punto)

Solución:

a) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $2XA+B^tC=I$, siendo i la matriz identidad de orden 3 y B^t la traspuesta de la matriz B.

Es una ecuación matricial tenemos primero que resolver con las letras:

$2XA+B^tC=I$ Pasamos el término sumado al otro miembro.

$2XA=I-B^tC$ Multiplicamos por la derecha por la inversa de A.

$2XA\cdot A^{-1}=(I-B^tC)\cdot A^{-1}$ Aplicamos que$A\cdot A^{-1}=I$

$2X\cdot I=(I-B^tC)\cdot A^{-1}$ Aplicamos que $M\cdot I=M$

$2X=(I-B^tC)\cdot A^{-1}$ Dividimos ambos miembros por 2.

$X=\frac{1}{2}(I-B^tC)\cdot A^{-1}$

Ahora tenemos que realizar las operaciones indicadas.

$B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\rightarrow B^t=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$B^t\cdot C=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}$

$I-B^t\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-7 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 2 & -3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Hallamos ahora la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Lo vamos a hacer por determinantes y por Gauss, en el examen basta con un método.

Por determinantes.

Hallamos el determinante de la matriz:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-0-0+6=6\neq 0\rightarrow \exists A^{-1}$$

Textos Marea Verde

Aplicamos la fórmula: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&-2\\3&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&-2\\0&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\0&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&2\\3&0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}0&2\\1&-2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\0&-2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&0\\6&0&-3\\-2&2&1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&6&-2\\0&0&2\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&\frac{-1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&3&0&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&-2&0&1&0\\0&0&6&0&-3&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&3&3&-1\\0&3&0&0&0&1\\0&0&6&0&-3&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$F_3=F_3-3F_2$ $\quad F_1=3F_1-F_3$ $\quad F_1=F_1/3\ F_2=F_2/3$

$F_2=3F_2+F_3$ $\quad F_3=F_3/6$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&\frac{-1}{3}\\0&1&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{6}\end{array}\right)$$ luego la inversa es: $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&\frac{-1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$

Es conveniente aunque no obligatorio comprobar el resultado aplicando que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&\frac{-1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ luego el resultado es correcto.

Terminamos las operaciones:

$$X=\frac{1}{2}(I-B^tC)\cdot A^{-1}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&2&-3\\1&1&-1\\4&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&\frac{-1}{3}\\0&0&\frac{1}{3}\\0&\frac{-1}{2}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8&\frac{19}{2}&\frac{-5}{2}\\1&\frac{3}{2}&\frac{-1}{6}\\4&\frac{7}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&\frac{19}{4}&\frac{-5}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&\frac{-1}{12}\\2&\frac{7}{4}&\frac{-1}{4}\end{pmatrix}$$

Textos Marea Verde

b) Consideremos la matriz $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$. Calcula para qué valores de z la matriz AD es diagonal.

Una matriz diagonal es aquella que sólo tiene elementos no nulos en la diagonal principal.

Realizamos el producto:

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1+2z \\ 0 & 0 & 1-2z \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para que la matriz sea diagonal se tiene que cumplir que los elementos fuera de la diagonal principal sean cero:

$-1 + 2z = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2}$

$1 - 2z = 0 \rightarrow z = \frac{1}{2}$

Luego el valor que hace que el producto de la matriz dada sea diagonal es;

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{2}}$$

Textos Marea Verde

Problema 2A:

Enunciado: 2A.- Una empresa que fabrica neumáticos para coches ha estudiado su desgaste, medido en una escala de 0 a 1, en función del tiempo de uso. La empresa fabrica dos tipos de neumáticos: A y B. Para un neumático A, su desgaste □□ tras □ meses de uso, para □ entre 0 y 50, viene dado por la función$D_A(x) = \frac{1}{100} + \frac{29x}{3000}$. Por su parte, el desgaste □□ para un neumático B tras □ meses de uso, para □ entre 0 y 50, viene dado por la función$D_B(x) = \frac{x^2}{3000}$.

a) Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos. (1 punto)

b) Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B. (1 punto)

c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. (1,5 puntos)

Solución:

a) Determina el número de meses para el cual el desgaste es el mismo para los dos tipos de neumáticos.

Como nos piden igual desgaste basta con igualar las funciones que los representan y hallar valores:

$D_A(x) = D_B(x)$

$\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} = \frac{x^2}{3000} \rightarrow 30 + 29x = x^2 \rightarrow x^2 - 29x - 30 = 0$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30)}}{2 \cdot 1} = \frac{29 \pm \sqrt{961}}{2} = \frac{29 \pm 31}{2} = \begin{cases} \frac{29+31}{2} = 30 \\ \frac{29-31}{2} = -1 \end{cases}$$

Nos da dos soluciones pero como x es el número de meses no puede ser negativa por lo que la respuesta es **30 meses**.

30 meses

b) Determina para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el neumático A y para qué intervalo de meses el desgaste es menor para el B.

Tenemos que resolver las desigualdades siguientes:

- El desgaste es menor para el neumático A:

$D_A < D_B$

$\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} < \frac{x^2}{3000} \rightarrow 0 < x^2 - 29x - 30$

Hay que resolver una inecuación de segundo grado. Para ello resolvemos la ecuación y verificamos en los intervalos en los que divide al dominio $[0, 50]$:

$x^2 - 29x - 30 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 30 \end{cases}$

Textos Marea Verde

Por lo que el dominio queda dividido en dos intervalos: $[0,30[$ y $]30,50]$

Comprobamos en cuál nuestra desigualdad es cierta sustituyendo un valor de cada uno:

$x = 15 \rightarrow 0 < 15^2 - 29 \cdot 15 - 30 = -240$ luego NO se cumple.

$x = 40 \rightarrow 0 < 40^2 - 29 \cdot 40 - 30 = 410$ luego SI se cumple.

El desgaste es menor para el neumático A en el intervalo: $]30, 50]$

- El desgaste es menor para el neumático B:

$D_A > D_B$

$\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} > \frac{x^2}{3000} \rightarrow 0 > x^2 - 29x - 30$

Hay que resolver una inecuación de segundo grado. Para ello resolvemos la ecuación y verificamos en los intervalos en los que divide al dominio $[0, 50]$:

$x^2 - 29x - 30 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 30 \end{cases}$

Por lo que el dominio queda dividido en dos intervalos: $[0, 30[$ y $]30, 50]$

Comprobamos en cuál nuestra desigualdad es cierta sustituyendo un valor de cada uno:

$x = 15 \rightarrow 0 > 15^2 - 29 \cdot 15 - 30 = -240$ luego SI se cumple.

$x = 40 \rightarrow 0 > 40^2 - 29 \cdot 40 - 30 = 410$ luego NO se cumple.

El desgaste es menor para el neumático B en el intervalo: $[0, 30[$

c) Calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A, y calcula el área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B.

Para calcular el área comprendida entre dos curvas tenemos que realizar la integral definida de la diferencia de ambas poniendo siempre la que va por encima como minuendo (delante).

Área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A. Como el desgaste es menor para el A el intervalo de integración será $]30,50]$ y la función que pondremos delante será D_B:

$$\int (D_B - D_A)\, dx = \int \left(\frac{x^2}{3000} - \left(\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} \right) \right) dx = \int \left(\frac{x^2}{3000} - \frac{1}{100} - \frac{29x}{3000} \right) dx = \left[\frac{x^3}{9000} - \frac{x}{100} - \frac{29x^2}{6000} \right]_3^5$$

$$= \left(\frac{50^3}{9000} - \frac{50}{100} - \frac{29 \cdot 50^2}{6000} \right) - \left(\frac{30^3}{9000} - \frac{30}{100} - \frac{29 \cdot 30^2}{6000} \right) \simeq 1.3056 - (-1.65) = 2.9556u^2$$

Área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático B. Como el desgaste es menor para el A el intervalo de integración será $[0, 30]$ y la función que pondremos delante será D_A:

Textos Marea Verde

$$\int (D_A - D_B)\,dx = \int \left(\frac{1}{100} + \frac{29x}{3000} - \frac{x^2}{3000}\right) dx = \left[\frac{x}{100} + \frac{29x^2}{6000} - \frac{x^3}{9000}\right]_0^{30} =$$

$$= \left(\frac{30}{100} + \frac{29 \cdot 30^2}{6000} - \frac{30^3}{9000}\right) - \left(\frac{0}{100} + \frac{29 \cdot 0^2}{6000} - \frac{0^3}{9000}\right) = 1.65 - 0 = 1.65u^2$$

El área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el neumático A es $2.9556\ u^2$

El área comprendida entre las dos funciones en el intervalo en que el desgaste es menor para el B. es $1.65\ u^2$

Textos Marea Verde

Problema 2B:

2B. Se considera la función:

$$f(x)=\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}$$

Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (0.5 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (0.5 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. (0.5 puntos)

Solución:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función racional polinómica por lo que sólo presenta problemas de dominio en los puntos que anulen el denominador:

$$x^2-2x-8=0\rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\begin{cases}\frac{2+6}{2}=4\\ \frac{2-6}{2}=-2\end{cases}$$

Por lo tanto el dominio será: $Domf(x)$: $\mathbb{R}-\{-2,4\}$

Los puntos de corte con los ejes serán con el eje OX y con el eje OY.

Con el eje OX:

Hacemos la función igual a cero: $\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=0\rightarrow 4x^2-36=0\rightarrow x^2=\frac{36}{4}\rightarrow x=\pm3$

Los puntos de corte serán: $(-3,0)$ y $(3,0)$

Con el eje OY:

Hacemos la variable igual a cero $x=0\rightarrow f(0)=\frac{4\cdot0^2-36}{0^2-2\cdot0-8}=\frac{-36}{-8}=\frac{9}{2}$ por lo que el punto de corte es $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

Las **asíntotas horizontales** están en los valores, si existen, de los límites cuando la variable tiende a infinito.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=4$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-36}{x^2-2x-8}=4$$

Textos Marea Verde

Por lo que la función tiene una **asíntota horizontal** en $y = 4$.

Como después tenemos que representar vamos a calcular las tendencias:

$f(10) = \frac{4\cdot 10^2-36}{10^2-2\cdot 10-8} \simeq 5.06 < 4$ por lo que en +∞ va por encima de la asíntota.

$f(-10) = \frac{4(-10)^2-36}{(-10)^2-2\cdot(-10)-8} = 3.25 < 4$ por lo que en -∞ va por debajo de la asíntota.

Las **asíntotas verticales** pueden estar en los puntos de discontinuidad del dominio que son $x = -2$ y $x = 4$

En $x = -2$

$\lim_{x\to -2} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \left(\frac{-20}{0}\right)$ sale un infinito por lo que **hay una asíntota vertical en** $x = -2$. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -2-} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2+} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty$$

En $x = 4$

$\lim_{x\to 4} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = \left(\frac{28}{0}\right)$ sale un infinito por lo que **hay una asíntota vertical en** $x = 4$. Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 4-} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4+} \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} = +\infty$$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales, si existen.

Para calcular los intervalos derivamos e igualamos a cero la derivada:

$$f(x) = \frac{4x^2-36}{x^2-2x-8} \to f'(x) = \frac{8x\cdot(x^2-2x-8)-(4x^2-36)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-8)^2} = \frac{-8x^2+8x-72}{(x^2-2x-8)^2} = 0 \to$$

$$\to -8x^2+8x-72 = 0 \to x^2-x+9 = 0 \to x = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{-35}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Como no hay soluciones tomamos los dos puntos de discontinuidad y estudiamos el signo de la derivada en los intervalos:

]-∞,-2[ ]-2,4[ ]4,+∞[

$f'(-3) = \frac{-8\cdot(-3)^2+8\cdot(-3)-72}{((-3)^2-2\cdot(-3)-8)^2} < 0$ decrece

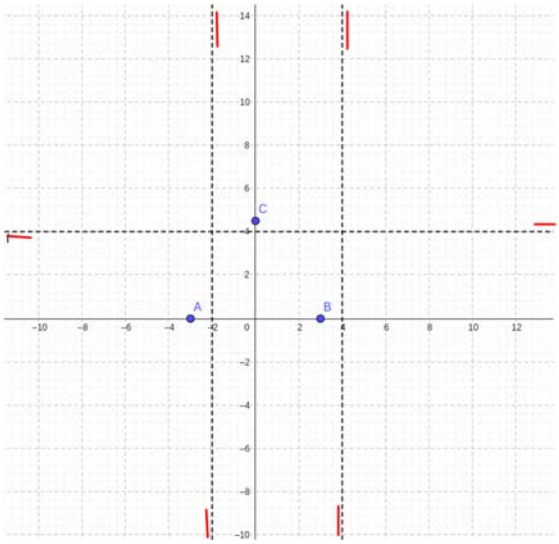
$f'(0) = \frac{-8\cdot(0)^2+8\cdot(0)-72}{((0)^2-2\cdot(0)-8)^2} < 0$ decrece

$f'(5) = \frac{-8\cdot(5)^2+8\cdot(5)-72}{((5)^2-2\cdot(5)-8)^2} < 0$ decrece

Textos Marea Verde

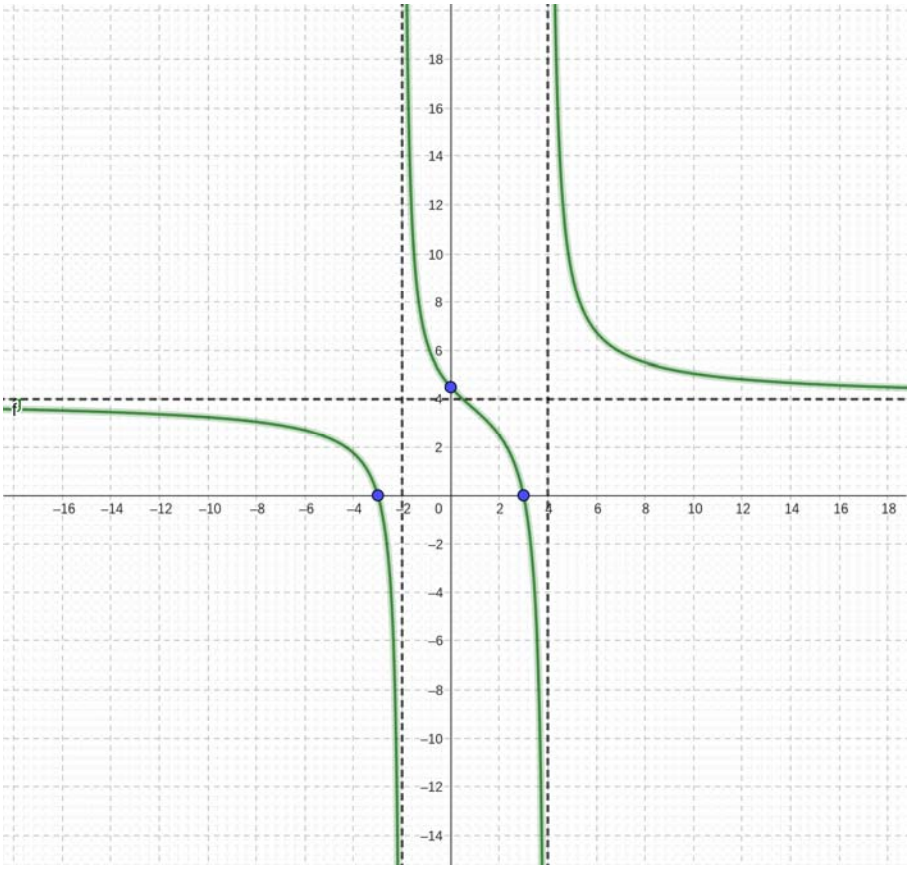
Por lo que la función decrece en todo su dominio. Como siempre decrece la función no tiene máximos ni mínimos.

d) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.



Dibujamos las asíntotas verticales y la horizontal con sus tendencias y los puntos de corte con los ejes.

Teniendo en cuenta que siempre es decreciente la gráfica queda como sigue:



Para ayudarnos podemos hacer una pequeña tabla de valores en las diversas zonas de definición.

Textos Marea Verde

Problema 3:

3. Una ciudad está implementando un programa de sostenibilidad ambiental. Como parte de este programa, los residentes tienen la opción de participar en dos actividades: limpieza de parques y plantación de árboles. Para evaluar el impacto de esta iniciativa, se realizó una encuesta a $2\,000$ ciudadanos, de los cuales 800 participaron en la limpieza de parques, 1.400 en la plantación de árboles, 300 en las dos actividades y 100 en ninguna de ellas. Seleccionamos al azar a uno de estos ciudadanos.

a) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades. (0.75 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en plantación de árboles. (0.75 puntos)

c) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades. (0.75 puntos)

d) Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, calcula la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques. (0.75 puntos)

Solución:

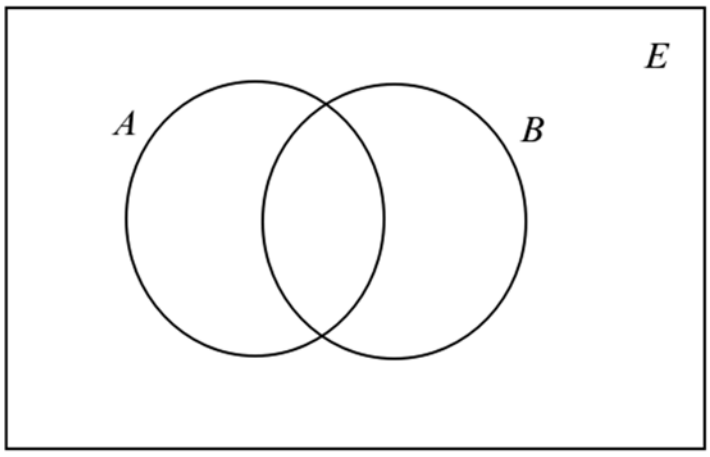
Es un problema de probabilidades. Definimos los sucesos:

A – El ciudadano participa en la limpieza de parques.

B – El ciudadano participa en la plantación de árboles.

Como en el problema se aprecian dos sucesos que se pueden verificar por separado cada uno de ellos, o bien individualmente o bien no verificarse lo más fácil es un diagrama de Venn para representar la situación.

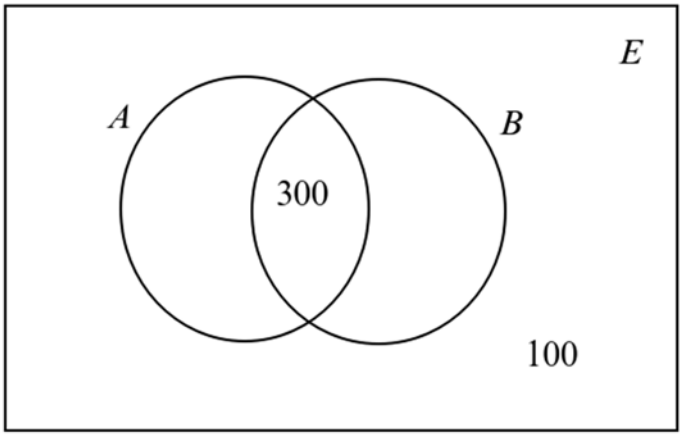
Vamos a representar el espacio muestral con los dos conjuntos intersectos:



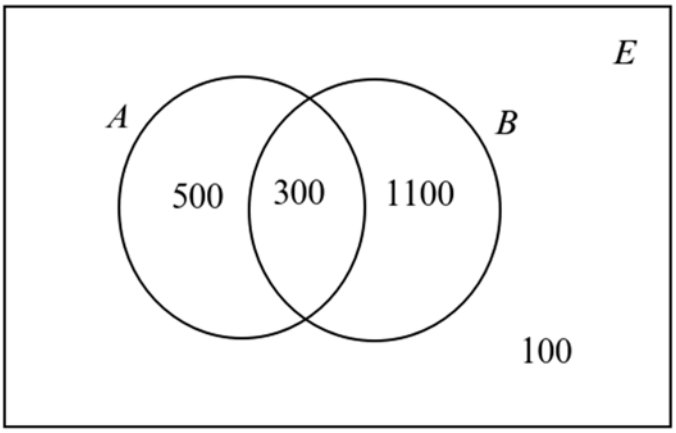
Ahora podemos situar el número de ciudadanos en el diagrama donde correspondan.

Tenemos que 300 participaron en las dos actividades y 100 en ninguna de ellas. Por lo que aparecerá un 300 en la intersección de ambos y un 100 en el exterior:

Textos Marea Verde



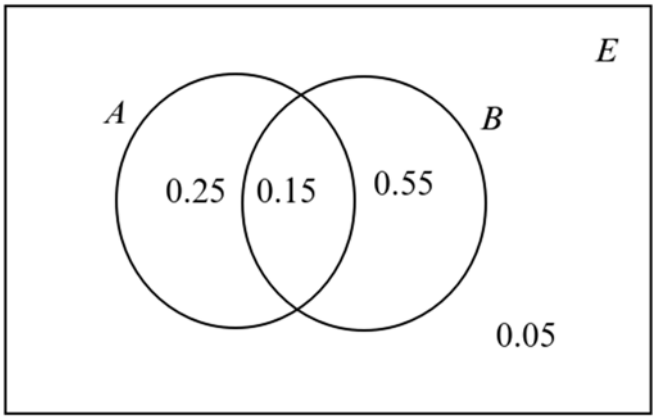
Ahora tenemos que 800 participaron en la limpieza de parques, 1.400 en la plantación de árboles pero como 300 lo hicieron en ambas actividades son 500 participaron exclusivamente en la limpieza de parques, $1\,100$ exclusivamente en la plantación de árboles. Situando esas cantidades donde corresponde tenemos:



Si sumamos todas las cantidades del gráfico nos da 2000 que es el número de encuestados por lo que tenemos toda la población de estudio representada en el mismo.

Si ahora queremos que el gráfico refleje probabilidades sólo tenemos que dividir las cantidades por el total $(2\,000)$:

Textos Marea Verde



Podemos observar que ahora las cantidades suman 1.

Respondemos ahora a las cuestiones planteadas:

a) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en al menos una de las dos actividades.

La probabilidad se corresponde con todas las que se encuentran dentro de los círculos (la unión):

$$P(A \cup B) = 0.25 + 0.15 + 0.55 = 0.95 = 95\ \%$$

b) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en limpieza de parques, pero no en plantación de árboles.

Se trata del conjunto A excluyendo la zona que intersecta con B, es decir:

$$P(A \cap \overline{B}) = 0.25 = 25\ \%$$

c) Calcula la probabilidad de que el ciudadano seleccionado participe en exactamente una de las dos actividades.

Se trata de los que participan en una de las actividades pero no en la otra. Por lo que será la suma de las cantidades situadas en los conjuntos excluyendo la intersección:

$$P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0.25 + 0.55 = 0.8 = 80\ \%$$

d) Si el ciudadano seleccionado no ha participado en la plantación de árboles, calcula la probabilidad de que tampoco haya participado en la limpieza de parques.

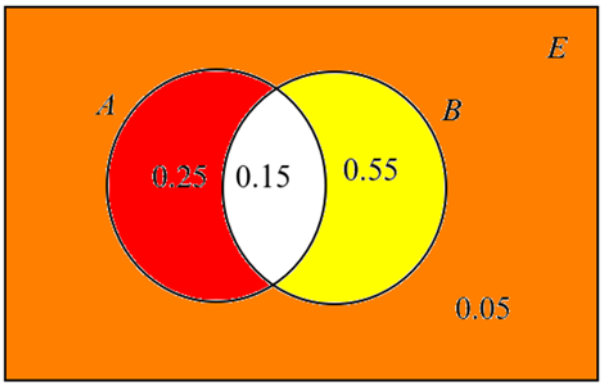
Se trata de una probabilidad de Bayes puesto que ya sabemos que no ha participado en una de las actividades. Tenemos que calcular:

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

Vamos ahora a calcular las probabilidades que necesitamos:

Textos Marea Verde

$P(\overline{A} \cap \overline{B})$→ Pintamos de amarillo o rayamos en un sentido toda la zona exterior a A y después hacemos lo mismo con el B. La zona buscada es la naranja o bien la rayada dos veces.



Por lo que tenemos que: $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.05$

$P(\overline{B})$ son todas las cantidades fuera del círculo B. Sólo encontramos 2:

$P(\overline{B}) = 0.25 + 0.05 = 0.3$

Ahora sustituyendo las cantidades tenemos la probabilidad pedida:

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6} \simeq 0.1667 = 16.67\ \%$$

Textos Marea Verde

Vídeos con problemas de Selectividad resueltos de otros cursos

Matemáticas II

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=1

Castilla La Mancha 2023

https://www.youtube.com/watch?v=rUaT_H1MiZM&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=2

Canarias 2023

https://www.youtube.com/watch?v=u8-g1UWQ_tQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=3

Cataluña 2023

https://www.youtube.com/watch?v=TusD3xYL7EQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=4

UNED 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Gr-Q6_CPbIw

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hsnPKI6KVTc

Sociales II

UNED 2022

https://www.youtube.com/watch?v=-7VQYaO_Awg

2023

https://www.youtube.com/watch?v=2tAZfLLFsxI

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Cg3t1PjXZm8

Comunidad Valenciana 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hLSBvJNoc5A&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq

https://www.youtube.com/watch?v=eJuxeLZai2w&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=d2QgtZkAep8&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=4

Textos Marea Verde

webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar los enunciados y muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

De distintos autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Con problemas resueltos y enunciados de muchos años.

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Selectividad.zip

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana

http://www.segundoperez.es/

Francisco Barrientos Fernández también tiene problemas resueltos de Selectividad.

En http://matesdebarrientos.blogspot.com/p/tercero.html

Varias comunidades, varios exámenes resueltos

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes

https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

https://www.examenesdepau.com/examenes/navarra/

Textos Marea Verde

SELECTIVIDAD 2025

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

ÍNDICE

1. Vídeos con exámenes resueltos: Selectividad 2025 3
2. Andalucía 7
3. Aragón 34
4. Asturias 60
5. Baleares 92
6. Canarias 113
7. Cantabria 150
8. Castilla – La Mancha 183
9. Castilla y León 200
10. Cataluña 218
11. Extremadura 238
12. Galicia 267
13. La Rioja 293
14. Madrid 331
15. Murcia 360
16. Navarra 404
17. País Vasco 428
18. Valencia 475
19. Otras web 502

ÍNDICE **504**