MATEMÁTICAS II

Selectividad 2025

Comunidad autónoma de

Castilla y León

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1:

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \text{donde } m \in \mathbb{R}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m, indicando el número de soluciones en cada caso. **(1,5 puntos)**

b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Problema 1B.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calcular la matriz $M = A^tA - BB^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B, respectivamente. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN = C$. **(1,5 puntos)**

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 2:

APARTADO 2: (obligatorio)

Problema 2.

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3:

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A.

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x - 1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m. **(1,5 puntos)**

b) Para $m = 6$ hallar el punto de intersección de las rectas r y s. **(1 punto)**

Problema 3B.

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1,5)$.

a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. **(0,75 puntos)**

b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1,5)$ y $\vec{v} = (2,6,0)$. **(0,75 puntos)**

c) Dados $\vec{u} = (3, -1,5)$, $\vec{v} = (2,6,0)$ y $\vec{w} = (-3,1,2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. **(1 punto)**

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4:

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.

Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. **(1,25 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. **(1,25 puntos)**

Problema 4B.

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. **(0,75 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. **(0,75 puntos)**

c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1

Ejercicio 1A

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A. (Propuesto en Extremadura, Modelo 0 de 2025)
Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad \text{donde } m \in \mathbb{R}$$

a) Discutir el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro m, indicando el número de soluciones en cada caso. **(1,5 puntos)**
b) Resolver, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$. **(1 punto)**

Solución:

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & m \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 10 + 4 - 5m - 4 - 2m = m^2 - 7m + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = m} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = m} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$.
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $m = 5$.
En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{5\cdot Fila\,2^a - 2\cdot Fila\,1^a} \\ 10 & 25 & 5 & 25 \\ -10 & -4 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 21 & 3 & 23 \rightarrow Nueva\ Fila\,2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 5 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 21 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A}\begin{array}{c} 1 \\ 23 \\ 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $m = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to Nueva\,Fila\,2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^a - 5\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 10 & 4 & 2 & 2 \\ -10 & -10 & -5 & -5 \\ \hline 0 & -6 & -3 & -3 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Fila\,3^a \leftrightarrow Fila\,2^a\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A}\begin{array}{c} 1 \\ -3 \\ 1 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $m \neq 5$ y $m \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $m = 5$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $m = 2$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $m = 3$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Ecuación\,3^a - Ecuación\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 5 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to Nueva\,ecuación\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 2x+3y+z=3 \\ 2x=0 \rightarrow \boxed{x=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0+2y+z=1 \\ 0+3y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-2y \\ 3y+z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+1-2y=3 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{z=1-2\cdot 2=-3}$$

Para $m=3$ la solución del sistema es $x=0,\ y=2,\ z=-3$.

x = 0; y = 2; z = -3

Ejercicio 1B

Problema 1B.

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$.

a) Calcular la matriz $M=A^tA-BB^t$, donde A^t y B^t representan las matrices transpuestas de A y B, respectivamente. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz X que cumple la igualdad $XN=C$. **(1,5 puntos)**

Solución:

a) Calculamos la matriz M.

$$M=A^tA-BB^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & 1+1\\ 1+1 & 1+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XN=C\Rightarrow X=CN^{-1}$$

Hallamos la matriz inversa de N.

$$|N|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2-4=-2\neq 0$$

$$N^{-1}=\frac{Adj\left(N^T\right)}{|N|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=CN^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2 & 2+2\\ 1+2 & -2-2\\ -2+4 & 4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 3 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2 \quad \cdot \quad 2}\times 2\longrightarrow 3\times 2$$

La matriz X tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 3 & -4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Escriba aquí la ecuación.

BLOQUE OBLIGATORIO

Ejercicio 2:

APARTADO 2: (obligatorio)

Problema 2.

Se considera la función $f(x) = 2xe^{-2x^2}$.

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. **(1,5 puntos)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$. **(1 punto)**

Solución:

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$, pues es producto y composición de funciones continuas (exponencial y producto).

Asíntotas verticales. $x = a$
No existen, pues el dominio lo forman todos los números reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} = Indeterminación(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2xe^{-2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x^2}} = \frac{-\infty}{+\infty} = Indeterminación(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{4xe^{2x^2}} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$
Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 2xe^{-2x^2} \Rightarrow f'(x) = 2e^{-2x^2} + 2x\cdot(-4x)e^{-2x^2} = 2e^{-2x^2} - 8x^2e^{-2x^2} = 2(1-4x^2)e^{-2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(1-4x^2)e^{-2x^2} = 0 \Rightarrow \{e^{-2x^2} \neq 0\} \Rightarrow 1-4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\pm 1}{2}}$$

La función presenta dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale

  $f'(-1)=2\left(1-4(-1)^2\right)e^{-2(-1)^2}=-6e^{-2}=-\frac{6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale

  $f'(0)=2\left(1-4\cdot 0^2\right)e^{-2\cdot 0^2}=2>0$. La función crece en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

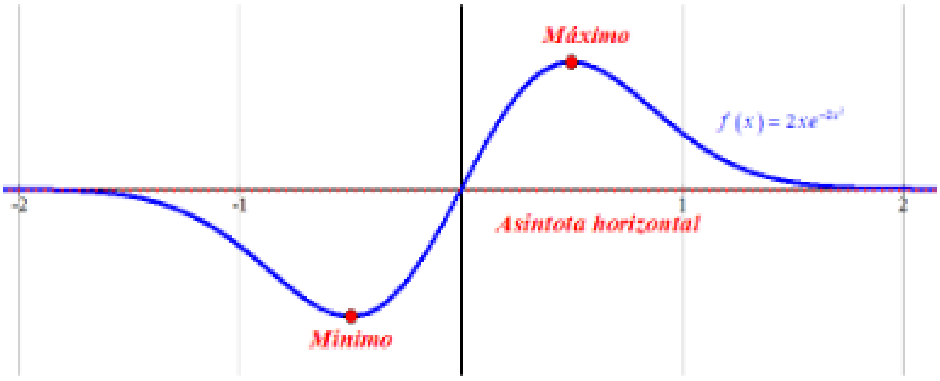
  $f'(1)=2\left(1-4\cdot 1^2\right)e^{-2\cdot 1^2}=-6e^{-2}=-\frac{6}{e^2}<0$. La función decrece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

La función decrece en $\left(-\infty,\frac{-1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y crece en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x=\frac{-1}{2}$ y un máximo relativo en $x=\frac{1}{2}$.

Como $f\left(\frac{-1}{2}\right)=2\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}=-e^{-1/2}=\frac{-1}{\sqrt{e}}=\frac{-\sqrt{e}}{e}$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{-1}{2},\frac{-\sqrt{e}}{e}\right)$.

Como $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\frac{1}{2}e^{-2\left(\frac{1}{2}\right)^2}=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e}$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$.



b) Hallamos los puntos de corte de la función con el eje de abscisas.

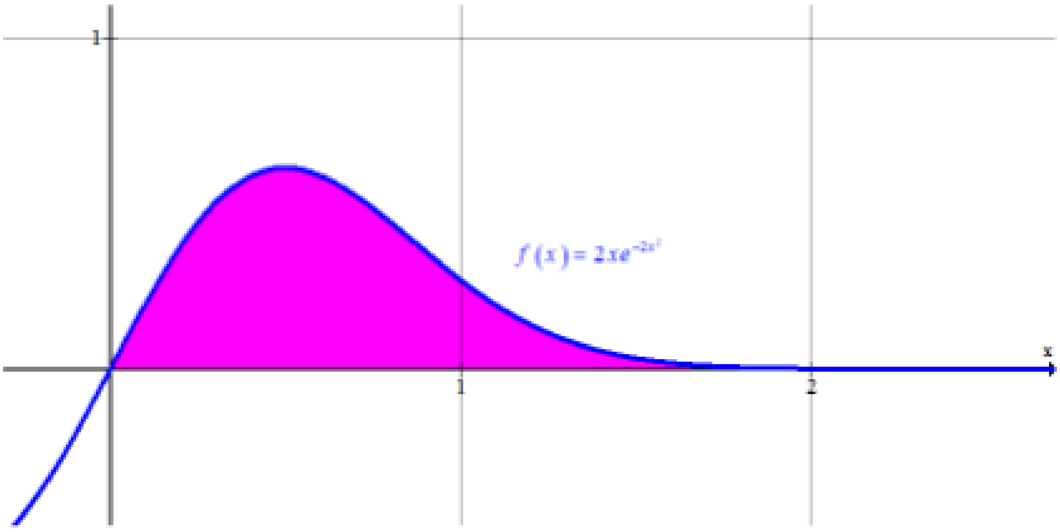
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2xe^{-2x^2} \\ Eje\ OX\rightarrow y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 2xe^{-2x^2}=0\Rightarrow\left\{e^{-2x^2}\neq 0\right\}\Rightarrow\boxed{x=0}$$

El punto de corte es uno de los extremos de la región. Como la función es positiva cuando $x>0$ entonces el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ es el valor de la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\text{Área} = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 2xe^{-2x^2}\,dx = 2\int_0^2 xe^{-2x^2}\,dx = \frac{2}{-4}\int_0^2 -4xe^{-2x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{2}e^{-2x^2}\right]_0^2 = \left[\frac{-1}{2}e^{-2\cdot 2^2}\right] - \left[\frac{-1}{2}e^{-2\cdot 0^2}\right] = \boxed{\frac{-1}{2e^8}+\frac{1}{2} = 0.4998\,u^2}$$

El área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo $[0,2]$ tiene un valor de $\frac{-1}{2e^8}+\frac{1}{2} = 0.4998$ unidades cuadradas. En el dibujo se aprecia la bondad de la solución.



2b) Área = 0,4998 u²

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 2

Ejercicio 3A

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A.

Sean las rectas $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}$.

a) Comprobar que las rectas r y s se cortan para cualquier valor de m. **(1,5 puntos)**

b) Para $m = 6$ hallar el punto de intersección de las rectas r y s. **(1 punto)**

Solución:

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta así como sus ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-0}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,1,0) \\ \overline{u_r} = (4,-2,2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1-2\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(1,m,3) \\ \overline{v_s} = (1,m-1,3) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = m+(m-1)\alpha;\ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3+3\alpha \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{u_r} = (4,-2,2) \\ \overline{v_s} = (1,m-1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{1} \neq \frac{2}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan.

Para que se corten debe ser nulo el producto mixto $\left[\overline{u_r}, \overline{v_s}, \overline{P_rQ_s}\right]$. Lo comprobamos.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,1,0) \\ Q_s(1,m,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{P_rQ_s} = (1,m,3)-(0,1,0) = (1,m-1,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{u_r} = (4,-2,2) \\ \overline{v_s} = (1,m-1,3) \\ \overline{P_rQ_s} = (1,m-1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overline{u_r}, \overline{v_s}, \overline{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & m-1 & 3 \\ 1 & m-1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancel{12(m-1)} - 6 + \cancel{2(m-1)} - \cancel{2(m-1)} + 6 - \cancel{12(m-1)} = 0$$

El producto mixto es nulo y las rectas se cortan para cualquier valor de m.

b) Para $m = 6$ las rectas quedan $r \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $s \equiv x-1 = \frac{y-6}{5} = \frac{z-3}{3}$.

Planteamos un sistema formado por sus ecuaciones paramétricas y al resolverlo obtendremos el punto A de intersección entre ellas.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=4\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \\ s:\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=6+5\alpha \\ z=3+3\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda=1+\alpha \\ 1-2\lambda=6+5\alpha \\ 2\lambda=3+3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda-1=\alpha \\ -2\lambda=5+5\alpha \\ 2\lambda=3+3\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda=5+5(4\lambda-1) \\ 2\lambda=3+3(4\lambda-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\lambda=5+20\lambda-5 \\ 2\lambda=3+12\lambda-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -22\lambda=0 \to \lambda=0 \\ -9\lambda=0 \to \lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1-0 \Rightarrow \boxed{A(0,1,0)} \\ z=0 \end{cases}$$

Para $m=6$ el punto de intersección de las dos rectas es $A(0,1,0)$.

El

Ejercicio 3B

Problema 3B.

Se considera el vector $\vec{u} = (3, -1,5)$.

a) Determinar a para que el vector $\vec{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\vec{u}$. **(0,75 puntos)**

b) Determinar un vector $\vec{w}$ perpendicular a $\vec{u} = (3, -1,5)$ y $\vec{v} = (2,6,0)$. **(0,75 puntos)**

c) Dados $\vec{u} = (3, -1,5)$, $\vec{v} = (2,6,0)$ y $\vec{w} = (-3,1,2)$. Determinar el volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(3,-1,5) \\ \vec{t}=(1,a,0) \\ \vec{u}\perp\vec{t}\to\vec{u}\cdot\vec{t}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (3,-1,5)(1,a,0)=0 \Rightarrow 3-a+0=0 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

Para que sean perpendiculares debe ser $a=3$.

b) Un vector perpendicular a dos vectores es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(3,-1,5) \\ \vec{v}=(2,6,0) \\ \vec{w}=\vec{u}\times\vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 30i-2k-18k-10j=30i-10j-20k=(30,-10,-20)$$

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede ser $\vec{w_1}=\vec{u}\times\vec{v}=(30,-10,-20)$ o bien $\vec{w_2}=\frac{1}{10}\vec{u}\times\vec{v}=(3,-1,-2)$.

c) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(3,-1,5) \\ \vec{v}=(2,6,0) \\ \vec{w}=(-3,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow Volumen=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=36-0+10+90+4-0=\boxed{140\ u^3}$$

X

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3

Ejercicio 4A

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.
Se sabe que la probabilidad de que un autobús de línea regular entre Madrid y Burgos sufra un accidente en día nublado es 0,09 y en día seco 0,005. Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. Sabiendo que se ha producido un accidente en esos días, se pide:

a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. **(1,25 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. **(1,25 puntos)**

Solución:

Problema 4A

Hay que calcular la probabilidad del suceso:

" Hay 1 accidente en uno de los 3 días nublados sabiendo que hay un accidente entre 7 días secos y 3 nublados".

El suceso que conocemos es:

B: "Se ha producido 1 accidente entre esos 10 días."

Por la regla de la probabilidad condicionada (o teorema de Bayes).

$$\mathbb{P}(\text{Hay 1 accidente en día nublado} \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\{\text{Hay 1 accidente en día nublado}\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

¿Cómo se calcula la probabilidad del suceso B? Aquí está el error de la solución que NO usa la binomial.

$$P(B) = P(\text{Hay 1 accidente en uno de los 3 días nublados y 0 en los 7 días secos})$$

$$+P(\text{Hay 0 accidentes en los 3 días nublados y 1 en los 7 días secos})$$

$$= P(\text{Hay 1 accidente en 3 días nublados})\cdot P(\text{Hay 0 accidentes en 7 días secos})$$

$$+P(\text{Hay 0 accidentes en 3 días nublados})\cdot P(\text{Hay 1 accidente en 7 días secos})$$

$$= \text{binom}(1,3,p_N = 0.09)\cdot\text{binom}(0,7,p_S = 0.005)$$
$$+\text{binom}(0,3,p_N = 0.09)\cdot\text{binom}(1,7,p_S = 0.005)$$

$$= \left[\binom{3}{1}(0.09)^1(1-0.09)^2\right]\cdot\left[\binom{7}{0}(0.005)^0(1-0.005)^7\right]$$
$$+\left[\binom{3}{0}(0.09)^0(1-0.09)^3\right]\cdot\left[\binom{7}{1}(0.005)^1(1-0.005)^6\right]$$

$$= \boxed{0.241}$$

En la resolución que no usa la binomial, esta probabilidad no está bien calculada. El suceso **A** $=$**"hay un accidente"** está pensado para 1 día fijo.

Pero no es correcto fijar el día de antemano. El enunciado NO dice: Sabiendo que en el cuarto día hay un accidente, calcular la probabilidad de que sea nublado (por ejemplo).

$P(A)$ = probabilidad de que en un día fijo de esos 10 (por ejemplo, el cuarto) haya 1 accidente.

$$P(A) = \frac{3}{10}0.09 + \frac{7}{10}0.005 = 0.013$$

No es lo que dice el enunciado que sabemos. Nosotros sabemos que entre todos los 10 días ha habido 1 accidente. Este planteamiento obliga a usar la binomial.

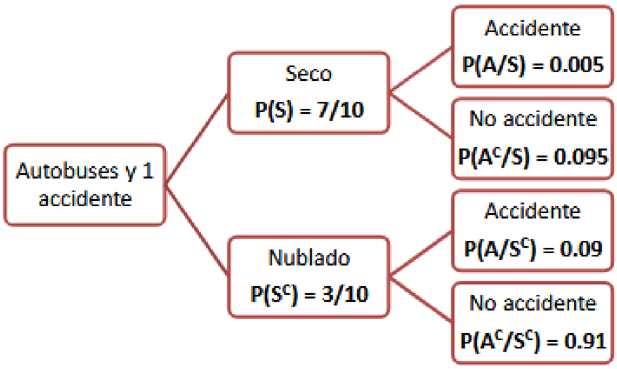
$$P(A) = 0.013 \neq 0.241 = P(B)$$

P(accidente día nublado/accidente) = 0,89401. P(accidente día seco/accidente) = 0,10699

Otra forma?

a) Hallar la probabilidad de que fuera en día nublado. (1,25 puntos)
b) Hallar la probabilidad de que fuera en día seco. **(1,25 puntos)**

Realizamos un diagrama de árbol. Llamamos S al suceso "Día seco" y S^C a "Día nublado", también llamamos A al suceso "sufrir un accidente".



a) Nos piden calcular $P(S^C/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(S^C/A) = \frac{P(S^C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(S^C)P(A/S^C)}{P(S)P(A/S)+P(S^C)P(A/S^C)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\cdot 0.09}{\frac{7}{10}\cdot 0.005 + \frac{3}{10}\cdot 0.09} = \boxed{\frac{54}{61} \simeq 0.8852}$$

b) Nos piden hallar $P(S/A)$. Este suceso es el contrario del anterior.

$$P(S/A) = 1 - P(S^C/A) = 1 - \frac{54}{61} = \boxed{\frac{7}{61} \simeq 0.1148}$$

Ejercicio 4B

Problema 4B.

De una urna que contiene cuatro bolas rojas y dos azules, extraemos una bola y, sin devolverla a la urna, extraemos otra a continuación.

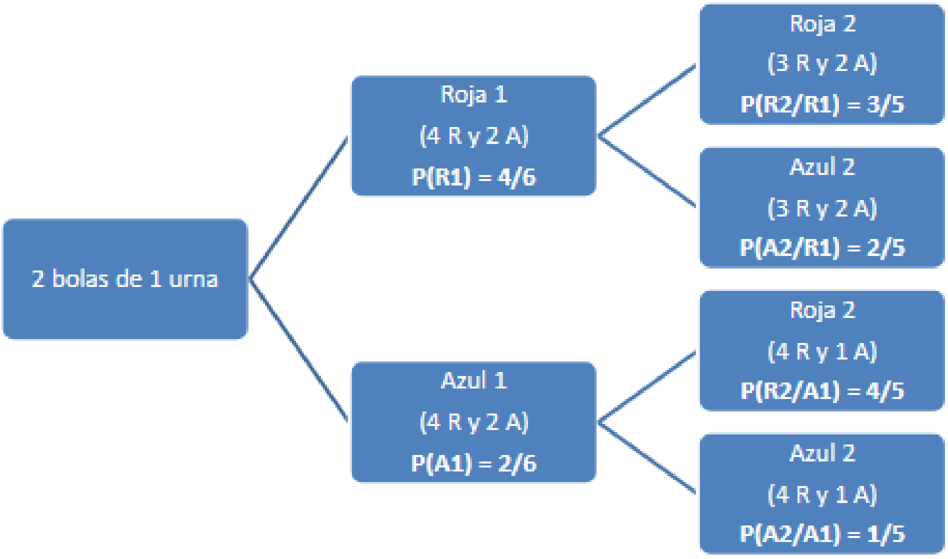
a) Hallar la probabilidad de que sean de distinto color. **(0,75 puntos)**

b) Hallar la probabilidad de que la segunda bola sea azul. **(0,75 puntos)**

c) Si la segunda bola es azul, hallar la probabilidad de que la primera sea roja. **(1 punto)**

Solución:

Para entender mejor lo que ocurre en este experimento compuesto realizamos un diagrama de árbol.



a) Si miramos el diagrama de árbol este suceso ocurre cuando sacas Roja 1 y luego Azul 2 o bien Azul 1 y luego Roja 2. El suceso del que queremos hallar la probabilidad es el suceso $(R1 \cap A2) \cup (A1 \cap R2)$.

$$P((R1 \cap A2) \cup (A1 \cap R2)) = P(R1 \cap A2) + P(A1 \cap R2) =$$

$$= P(R1)P(A2/R1) + P(A1)P(R2/A1) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5} = \boxed{\frac{8}{15} \simeq 0.5333}$$

b) Nos piden calcular $P(A2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A2) = P(R1)P(A2/R1) + P(A1)P(A2/A1) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{3} \simeq 0.3333}$$

c) Nos piden determinar el valor de $P(R1/A2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/A2) = \frac{P(R1 \cap A2)}{P(A2)} = \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{4}{5} = 0.8}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** **MEJORA**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. 2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

CONVOCATORIA ORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

Problema 9:

Problema 10:

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Solución

Problema 2:
Solución

Problema 3:

Solución

Problema 4:

Solución

Problema 5:

Solución

Problema 6:

Solución

Problema 7:

Solución

Problema 8:

Solución

Autor: Francisco Barrientos Fernández

Problema 9:

Solución

Problema 10:
Solución

	PRUEBA ACCESO A LA UNIVERSIDAD (PAU) FASE GENERAL CURSO: **2024–2025** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- **CALCULADORA**: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

Problema 9:

Problema 10:

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Solución

Problema 2:
Solución

Problema 3:

Solución

Problema 4:

Solución

Problema 5:

Solución

Problema 6:

Solución

Problema 7:

Solución

Problema 8:

Solución

Problema 9:

Solución

Problema 10:
Solución

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Problema 2:

Problema 3:

Problema 4:

Problema 5:

Problema 6:

Problema 7:

Problema 8:

Problema 9:

Problema 10:

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Solución

Problema 2:
Solución

Problema 3:
Solución

Problema 4:

Solución

Problema 5:

Solución

Problema 6:

Solución

Problema 7:

Solución

Problema 8:

Solución

Problema 9:

Solución

Problema 10:

Solución